





НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
В ЭНЕРГЕТИКЕ имени Г.Е. ПУХОВА

**С.Е. САУХ**

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ  
ЦЕПЕЙ**

**Киев 2020**

УДК 004.94+519.6+51-74  
М 86

*Рекомендовано к изданию Ученым советом Института проблем моделирования в энергетике имени Г.Е. Пухова НАН Украины (протокол № 10 от 11.06.2020 г.)*

Рецензенты:

**А. Ф. Верлань**, чл.-кор. НАПН Украины, доктор техн. наук, профессор

**В. В. Мохор**, чл.-кор. НАН Украины, доктор техн. наук, профессор

Саух, С. Е.

М 86 **Методы математического моделирования энергетических цепей: монография / С.Е. Саух. — К.: «Три К», 2020. — 278 с.**

**ISBN 978-966-7690-54-0**

В монографии рассматриваются методы исследования энергетических цепей, в которых реализуются процессы различной физической природы, неразрывно связанные между собой во времени и пространстве. Методы исследования основаны на энергетических аналогиях между физическими явлениями и на численных операторных методах решения дифференциальных уравнений элементов цепи. Представленные материалы отражают результаты оригинальных разработок автора в области моделирования динамических процессов в энергетических системах.

Для специалистов по прикладной математике, инженеров и специалистов соответствующих специальностей.

Methods of studying energy circuits in which processes of various physical nature are realized that are inextricably linked in time and space are considered in the monograph. The research methods are based on energy analogies between physical phenomena and on numerical operator methods for solving differential equations of circuit elements. The materials presented reflect the results of the author's original developments in the field of modeling dynamic processes in energy systems.

For specialists in applied mathematics, engineers and specialists in relevant specialties.

**УДК 004.94+519.6+51-74**

**ISBN 978-966-7690-54-0**

© С. Саух, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>6</b>
<b>1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ .....</b>	<b>14</b>
<b>1.1. Энергетическая цепь – модель энергетической системы.....</b>	<b>14</b>
<b>1.2. Обобщенные переменные в энергетических цепях с сосредоточенными параметрами.....</b>	<b>24</b>
<b>1.3. Энергетические цепи с распределенными параметрами.....</b>	<b>39</b>
<b>1.4. Математическое описание цепи.....</b>	<b>53</b>
<b>1.5. Задачи анализа энергетических цепей.....</b>	<b>59</b>
<b>2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....</b>	<b>65</b>
<b>2.1. Решение уравнений энергетической цепи с помощью интегральных преобразований Лапласа и Фурье.....</b>	<b>65</b>
<b>2.2. Численные методы расчета.....</b>	<b>73</b>
<b>2.3. Дифференциальные преобразования и их применение к анализу энергетических цепей.....</b>	<b>80</b>
<b>2.4. Преобразования Лагранжа.....</b>	<b>86</b>
<b>2.5. Анализ энергетических цепей с помощью локально-интегральных преобразований.....</b>	<b>91</b>
<b>2.6. Основные требования к методам исследования энергетических цепей.....</b>	<b>99</b>
<b>3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЬЮТОНА.....</b>	<b>102</b>
<b>3.1. Прямое и обратное преобразования одномерных функций.....</b>	<b>102</b>

3.2. Операторы интегрирования и дифференцирования функций одной переменной.....	111
3.3. Преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений.....	115
3.4. Устойчивость численных схем, порождаемых преобразованиями Ньютона.....	121
3.5. Преобразования многомерных функций.....	129
3.6. Операторы дифференцирования двумерных функций	143
3.7. Дифференцирование многомерных функций.....	161
<b>4. АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЬЮТОНА.....</b>	<b>172</b>
4.1. Численная операторная форма уравнений цепи с сосредоточенными параметрами.....	172
4.2. Определяющая матрица цепи.....	177
4.3. Исследование энергетических цепей с вентилями .....	182
4.4. Численные операторы для расчета цепей с распределенными параметрами.....	186
4.5. Расчет переходных режимов в линиях электропередачи.....	195
4.6. Исследование нестационарных процессов движения газа в трубе постоянного диаметра.....	201
4.7. Законы сохранения в энергетических цепях.....	210
4.8. Моделирование режимов работы магистрального газопровода.....	220
4.9. Расчет стационарных процессов в тепловых цепях.....	228
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>237</b>

<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>239</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ.....</b>	<b>270</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие топливно-энергетического комплекса страны немыслимо без фундаментальных научных исследований. Среди актуальных задач, требующих фундаментальных исследований, следует выделить разработку новых средств информатики и автоматизации производственных процессов и систем организационного управления в энергетике.

В настоящее время такая разработка осуществляется в соответствии со специальной формой информационной технологии - вычислительным экспериментом. В вычислительном эксперименте «обусловлены все звенья математической цепочки: объект – физико-математическая модель – алгоритм – программа – ЭВМ» [259].

Вычислительный эксперимент требует пересмотра методологических основ многих инженерных и физических исследований. «Теперь уже очевидно, что традиционные инженерные и физические методы, как и все методы классической математики, не позволяют проводить исследования по достаточно сложным математическим моделям и получать надежные количественные характеристики для прогноза. Без вычислительного эксперимента обойтись нельзя, другого пути нет» [261]. Проблема проведения вычислительных экспериментов с энергетическими системами многоаспектна. Здесь и большое разнообразие системообразующих элементов, и неоднородность физических явлений, и трудности математического описания наблюдаемых явлений, и жесткие ограничения на время реализации вычислительного эксперимента, когда получаемая информация еще не теряет своей актуальности, т.е. имеет практическое значение.

Комплексное решение вопросов, связанных с осуществлением вычислительных экспериментов над энергетическими системами, по-видимому, может быть достигнуто в рамках единой теории, которая обеспечивает согласованное построение физико-математических моделей



этих систем и вычислительных алгоритмов для численной реализации на имеющихся вычислительных ресурсах.

Существующие теории электрических, механических, гидравлических, пневмогидравлических, тепловых и других однородных по физическим явлениям цепей являются основой построения вычислительных экспериментов над соответствующими объектами. Для энергетических систем характерной является неоднородность физических явлений, когда одновременно в одной системе взаимодействуют электромеханические, теплогидравлические, магнитогидродинамические и другие сложные процессы. Поэтому основой построения физико-математических моделей элементов энергетических систем может служить теория энергетических цепей с сосредоточенными параметрами [25, 355], в которой обобщены исходные понятия теорий электрических, механических, гидравлических и других однородных цепей. Такое обобщение выполнено на основе принципа аналогий, согласно которому переменные в различных однородных цепях считаются однотипными, если они измеряются приборами, которые хотя бы в принципе можно подключить к элементу цепи параллельно или последовательно. Для переменных, измеренных последовательно включенными приборами, введено наименование последовательных обобщенных переменных, а для переменных, измеряемых параллельно – параллельных обобщенных переменных. Однако применить такой подход к анализу более сложных систем – систем с распределенными параметрами – невозможно, т.к. требуется принимать во внимание уже не отдельные переменные, а их группы.

В виду этого для описания энергетических цепей с распределенными параметрами используются векторы обобщенных переменных. Эти векторы характеризуют физические процессы, взаимодействующие во времени и пространстве.

При этом элементы энергетических цепей описываются нелинейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями, заданными на областях сложной конфигурации. Исходное математическое описание энергетической цепи содержит две группы уравнений – уравнения, описывающие на основе физических законов процессы в ее элементах, и уравнения связи граничных переменных в узлах цепи.

В случае линейной электрической, тепловой или иной цепи основными методами ее анализа являются методы узловых потенциалов, контурных токов (потоков), а также операторные методы, основанные на преобразованиях Лапласа, позволяющие исследовать динамические режимы. В теории гидравлических цепей методы узловых потенциалов и контурных токов обобщены на нелинейные элементы [184, 324]. В теории пневмогидравлических цепей, а также в ряде работ [75, 108, 82, 336] по расчету теплообменников и газопроводов операторные методы распространены на линеаризованные одномерные уравнения теплопроводности и газовой динамики.

Численные методы анализа энергетических цепей с распределенными параметрами, предложенные в работах [63, 64, 71, 78, 156, 197], позволяют провести вычислительный эксперимент для нелинейных систем с относительно простой древовидной структурой и небольшим количеством элементов. Кроме того, математические модели элементов не могут быть заданы в виде многомерных дифференциальных уравнений, т.к. порождаемые ими алгебраические уравнения имеют большую размерность. Формирование и численное решение дискретизированных уравнений создают самостоятельные проблемы, связанные с устойчивостью рекуррентных вычислений для явных разностных схем и значительными затратами памяти и процессорного времени для неявных разностных схем при низкой аппроксимационной точности решения соответствующих уравнений.

Поэтому возникает необходимость в разработке специальных методов анализа энергетических цепей, сочетающих в себе возможности операторных методов, основанных на преобразованиях Лапласа, а так же методов узловых потенциалов и, в то же время, ориентированных на нелинейные цепи с распределенными параметрами.

Такие методы строятся на основе преобразований Ньютона и называются численными операторными методами [31]. Их построение осуществляется в тесной связи с теорией дифференциальных преобразований [240], точечным исчислением [241] и теорией локально-интегральных преобразований [27].

Методы математического моделирования энергетических цепей изложены в четырех главах книги.

В первой главе дается определение энергетической цепи, вводятся в рассмотрение обобщенные последовательные и параллельные переменные, устанавливаются аналогии между этими переменными и переменными в гидравлических, механических, электрических, тепловых цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами. Здесь же обосновывается необходимость введения векторов обобщенных последовательных и параллельных переменных, а также матричных сопротивлений, проводимостей, емкостей и индуктивностей для тех элементов цепи, в которых наблюдаются неоднородные физические явления, связанные с преобразованием энергии.

Анализируются математические модели энергетических цепей. Особое внимание уделяется задачам моделирования эксплуатационных режимов энергосистем. При этом отмечаются трудности решения таких задач на вычислительных ресурсах, обусловленные необходимостью получать результаты в текущем времени.

Вторая глава посвящена анализу различных методов исследования линейных и нелинейных цепей с сосредоточенными и распределенными

параметрами. Здесь рассмотрены аналитические методы, основанные на интегральных преобразованиях Лапласа и Фурье, численные методы, использующие явные и неявные разностные схемы, а также численно-аналитические методы, базирующиеся на преобразованиях Лагранжа, дифференциальных и локально-интегральных преобразованиях. На основе этого анализа сформулированы требования к методам исследования энергетических цепей. Аргументируется необходимость разработки таких методов, которые сочетали бы в себе достоинства численных и операторных методов.

В третьей главе освещены основные вопросы, связанные с преобразованиями Ньютона и порождаемых ими численными операторными методами. Здесь устанавливаются соответствия между преобразованиями Ньютона, Лагранжа и Тейлора.

Матричные операторы дифференцирования и интегрирования изображений одномерных функций строятся на основе многочленов Ньютона  $k$ -го порядка. Поэтому соответствующие операторные соотношения являются точными для алгебраических полиномов того же порядка.

Матрично-векторные операторные соотношения получаются в результате алгебраизации интегро-дифференциальных уравнений и содержат блочные численные схемы их решения. В отличие от одношаговых и многошаговых методов, блочные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений сохраняют А-устойчивость при любом  $k$ -м порядке аппроксимации и, поэтому, пригодны для решения жестких уравнений.

Аналогии между одномерными рядами Ньютона и Тейлора используются для построения многомерных рядов Ньютона по многомерным рядам Тейлора. В результате получено выражение для остаточного члена многомерного ряда Ньютона.

На основе многомерных рядов строятся многомерные преобразования Ньютона. Такие преобразования выполняются в произвольных по форме замкнутых областях определения многомерных функций.

Усеченные многомерные ряды Ньютона, т.е. многомерные интерполяционные полиномы Ньютона, используются для построения операторов дифференцирования по независимым переменным. Такие операторы строятся в нормированной симплексной области локальной системы координат. Преобразование локальной системы координат в глобальную позволяет обобщить операторы дифференцирования на случай произвольной симплексной области. Сами операторы представляют собой квадратные матрицы, размерность которых определяется порядком интерполяционного полинома Ньютона и мерностью пространства.

Предлагаются алгоритмы построения операторов дифференцирования многомерных функций. Алгоритмы реализуются на множестве целых чисел и обладают свойством вложенности, что позволяет строить оператор дифференцирования  $(n + 1)$ -мерных функций по оператору дифференцирования  $n$ -мерных функций.

В четвертой главе численные операторные методы используются для анализа различных энергетических цепей.

Здесь установлены связи между операторными соотношениями Ньютона и Лапласа. Для линейной энергетической цепи введена в рассмотрение ее определяющая матрица, которая является аналогом коэффициента передачи. Установлены соотношения для численного обращения лапласовых изображений.

Получены операторные выражения для линейных и нелинейных элементов энергетической цепи – матричных емкостей, индуктивностей, сопротивлений и проводимостей.

На примере моделирования переходных процессов в электрическом фильтре газоочистки показана возможность использования численных операторных методов для анализа энергетических цепей с вентилями.

Для описания одномерных элементов энергетических цепей с распределенными параметрами предложен метод алгебраизации уравнений в частных производных и приведения таких уравнений к операторному виду. Метод основан на одномерных преобразованиях Ньютона, которые применяются независимо по временной и пространственной координатам, и на алгоритме исключения «внутренних» неизвестных в дискретной системе уравнений.

Особенности такой алгебраизации уравнений в частных производных рассмотрены на примерах уравнений длинной линии и уравнений нестационарного неизотермического течения газа в трубах. Использование операторных форм для уравнений газовой динамики иллюстрируется примерами решения прямых и обратных задач моделирования теплогидравлических режимов газотранспортных систем.

Возможности анализа тепловых систем иллюстрируются расчетами тепловых процессов в пластинчатом теплообменнике. Здесь соответствующие двумерные уравнения в частных производных подвергаются двумерным преобразованиям Ньютона. Затем в дискретных уравнениях исключаются «внутренние» неизвестные и формируется операторное уравнение пластины. С помощью таких уравнений и балансовых соотношений на границах пластин формируется система уравнений тепловой цепи для заданной топологической структуры теплообменника.

Решение вопросов, поставленных в книге, тесно связано с теориями дифференциальных преобразований и точечного исчисления, разработанными академиком АН УССР и НАН Украины Г.Е. Пуховым и его учениками, а также с теорией локально-интегральных преобразований, разработанной доктором технических наук, профессором Г.Я. Береговенко.

Автор с глубокой благодарностью вспоминает своих учителей Георгия Евгеньевича Пухова и Геннадия Яковлевича Береговенко, которые оказали неизменное внимание и поддержку исследованиям, нашедшим отражение в книге.

# **1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ**

## **1.1. Энергетическая цепь – модель энергетической системы**

Энергетическая система (ЭС) представляет собой упорядоченную совокупность технических и естественных объектов, образующих путь для преобразования, передачи и распределения топливно-энергетических ресурсов. Деление ЭС на объекты является условным и определяется целью исследования или разработки. Например, для решения задач автоматизации управления электроэнергетическими системами в качестве объектов рассматриваются генераторы, линии электропередачи, трансформаторы, шунты, нагрузки и выключатели [45, 51, 59, 89, 194, 231, 286, 329]. Вид модели электрической сети в терминах секций шин и выключателей приведен на рис. 1.1. При анализе переходных режимов работы атомных электростанций основными объектами являются ядерные реакторы, теплообменники, трубопроводы, парогенераторы, клапаны, насосы, турбины и электрогенераторы [134, 144, 332, 349]. Принципиальная технологическая схема энергоблока с реактором водоводяного типа, работающим по двухконтурной схеме, представлена на рис. 1.2.

При создании программных средств моделирования режимов работы газотранспортных систем выделяют трубопроводы, межниточные переемычки, краны, газоперекачивающие агрегаты, аппараты воздушного охлаждения, газовые промыслы, станции подземного хранения газа и газораспределительные станции [47, 49, 73, 108, 270, 339]. Фрагмент технологической схемы магистрального газопровода приведен на рис. 1.3.



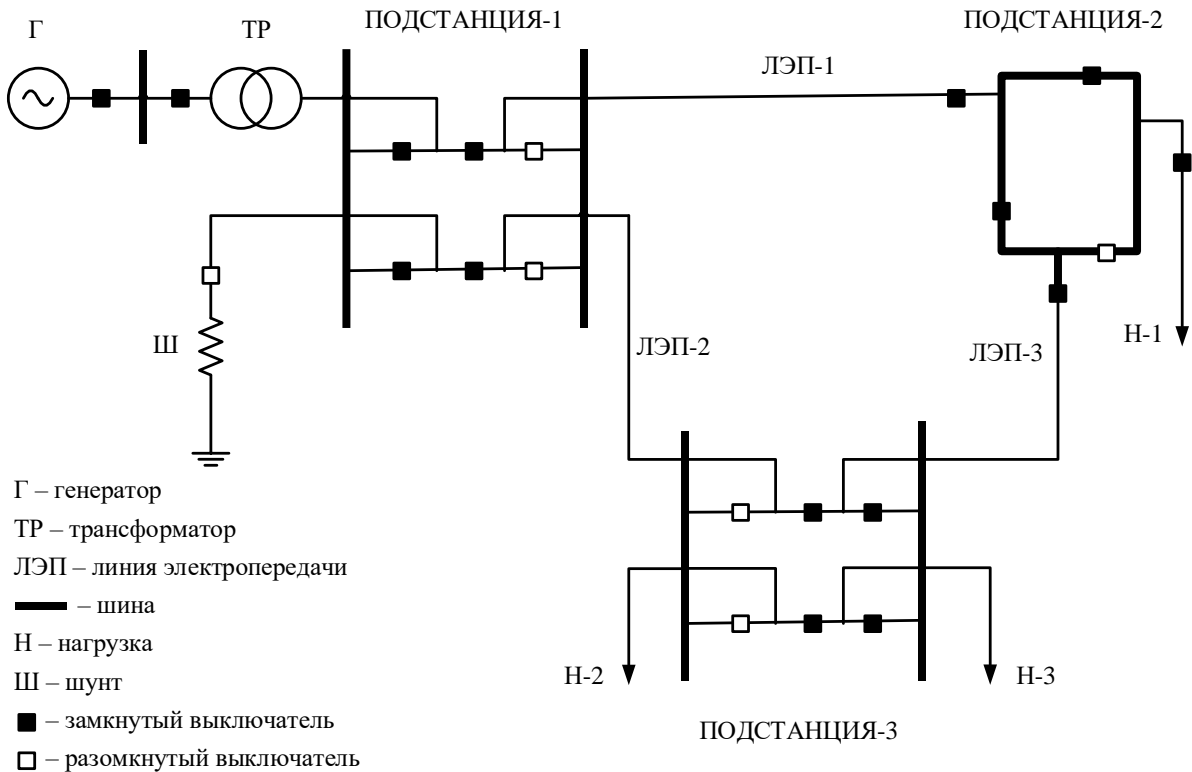


Рис. 1.1. Схема электрической сети

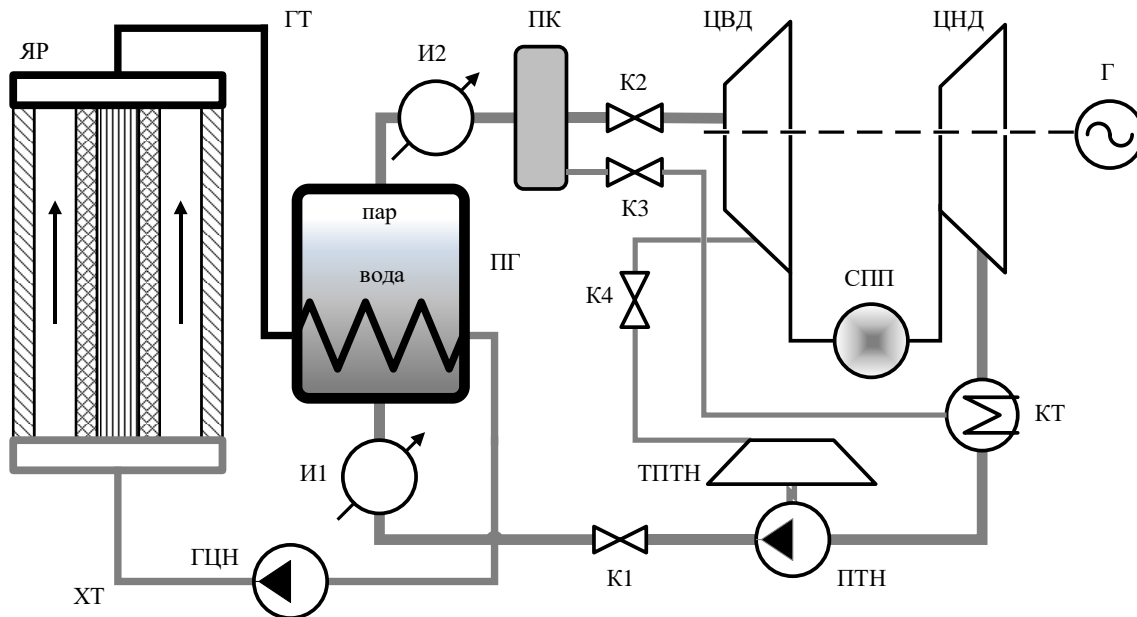


Рис. 1.2. Схема энергоблока с реактором водоводяного типа.

ЯР – ядерный реактор, ХТ – холодный трубопровод, ГТ – горячий трубопровод, ЦВД и ЦНД – цилиндры высокого и низкого давлений турбины, Г – электрогенератор, СПП – сепаратор пароперегреватель, КТ – конденсатор турбины, ГЦН – главный циркуляционный насос, ТПТН – турбина ПТН, ПТН – питательный турбонасос, ПК – паровой коллектор, ПГ – парогенератор, И – измеритель расхода, К – клапан.

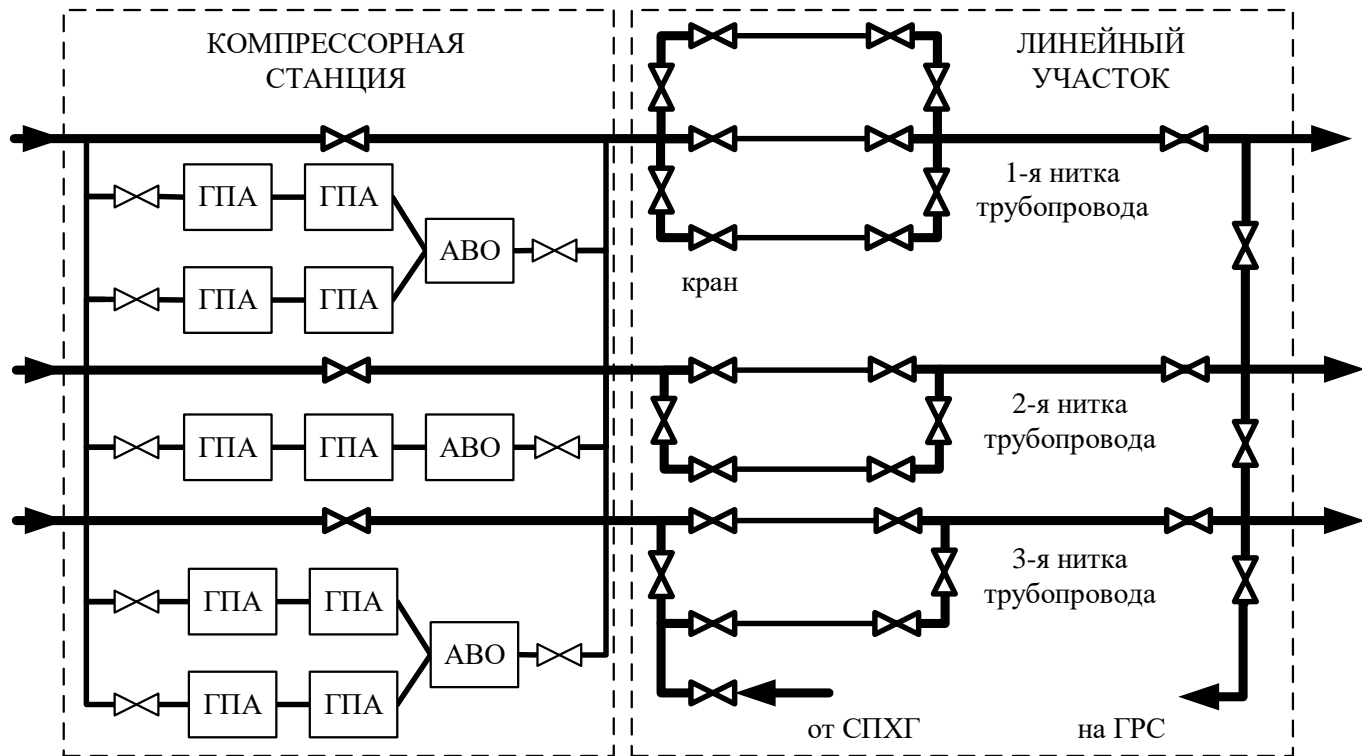


Рис. 1.3. Схема фрагмента магистрального газопровода. Здесь ГПА – газоперекачивающий агрегат, АВО – аппарат воздушного охлаждения, ГРС – газораспределительная станция, СПХГ – станция подземного хранения газа.

Топологическая сложность и разнообразие физических явлений, наблюдаемых в системообразующих объектах, являются основными препятствиями на пути создания эффективных моделей ЭС. Их построение путем простого объединения моделей отдельных объектов приводит к образованию большой совокупности алгебраических и дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных, отражающих электромагнитные, механические, гидравлические, тепловые и другие явления. Содержащая нелинейности, такая совокупность уравнений, как правило, не поддается не только аналитическому исследованию, но и, в ряде случаев, численному анализу на современных вычислительных ресурсах. Поэтому создание моделей ЭС требует специальных подходов.

Основными из них являются поиск взаимно однозначных соответствий между математическими описаниями различных явлений и разработка эффективных методов анализа, дающих наглядные, физические результаты. Если поиск соответствий с привлечением теории подобия и моделирования позволяет использовать достижения разных технических дисциплин для получения наглядных результатов исследования [7, 23, 25, 35, 46, 58, 60, 67, 70, 75, 84, 90, 99, 100, 109, 118, 131, 136, 137, 140, 158, 162, 163, 178, 185, 209, 224, 232, 245, 273, 279, 302, 307, 319, 325, 332, 351, 355], то разработка эффективных методов анализа в рамках прикладной и вычислительной математики обеспечивает широкие возможности реализации моделей ЭС на современных вычислительных средствах, вплоть до создания программных комплексов научно-исследовательского или производственного назначения [15, 45, 47, 49, 54, 71-73, 78, 82, 86, 87, 106-109, 114, 119, 127, 141, 144, 157, 164, 168, 182-190, 194, 197, 205, 214, 217, 218, 221, 227, 229, 231, 233, 234, 246-248, 269-272, 274, 275, 308, 328, 329, 335, 341, 342, 345, 346, 348, 349, 351, 356].

Привлечение электроаналогий, построение эквивалентных электрических цепей с ориентацией на соответствующие методы их анализа

– наиболее распространенный подход к построению моделей ЭС. Физико-математическая общность описаний стационарных электрических и гидравлических процессов, подчиняющихся одним и тем же законам сохранения материи и энергии (законом Кирхгофа) и экстремальным принципам механики, послужила основой создания теории гидравлических цепей [23-25, 182-185, 324]. Эта теория «заимствует» у теоретической электротехники методы контурных токов (расходов) и узловых потенциалов, а также теорему Максвила (I.C.Maxweel, 1973) о принципе наименьшего теплового действия для пассивной электрической цепи. Распространение указанных выше методов и теорем на нелинейные гидравлические цепи повышает эффективность их численного анализа и позволяет давать физические интерпретации результатам, получаемым в ходе вычислений.

Теория графов и матрично-топологические методы анализа цепей являются основой эксэргетических расчетов энергетических объектов [46, 65, 205]. В работе [335] для расчета стационарных режимов тепловых схем энергоблоков используется понятие теплогидравлической цепи. На операторных методах расчета электрических цепей с применением теории графов связей базируются методы временного и частотного анализа электромеханических [34, 70, 90, 100, 118, 130, 162, 163, 209, 210, 230, 252, 278, 281, 307, 319, 323], гидравлических [11, 23-25, 31, 35, 75-77, 82, 84, 108-109, 140, 218, 230, 248, 279, 298, 325, 337], тепловых [136, 137, 155, 178, 186, 218, 226, 332, 336] систем. Работы [75-77] посвящены вопросам математического моделирования нестационарного движения сплошной среды в разветвленных, сложных системах на основе представлений о пневмогидравлической цепи с сосредоточенными или распределенными параметрами.

Однако возможности установления соответствий между электромагнитными и другими явлениями не безграничны. Попытка их использования для анализа ЭС, где можно наблюдать в неразрывной связи

друг с другом два и более разнородных явления, приводит к необходимости независимого рассмотрения последних, т.е. к принятию упрощающих явления допущений. Примерами могут служить гидравлические и тепловые процессы в энергоблоках и трубопроводных системах. Здесь для упрощения наблюдаемых явлений часто прибегают к разделению процессов в пространственно-временном отношении, что, естественно, сказывается на адекватности моделей [71, 82, 108-109, 148, 175, 185, 205].

Моделирование ЭС целесообразно выполнять в рамках представлений об энергетической цепи [25, 355]. В основе построения такой цепи используются схемы замещения с элементами, описываемыми математическими соотношениями, подобными соотношениям для элементов электрической цепи.

Энергетическая цепь является обобщением электрической цепи, хотя в качестве ее элементов выступают резисторы, емкости и индуктивности. Обобщение заключается в том, что токи и напряжения являются лишь частным случаем обобщенных последовательных и параллельных переменных, определяемых в соответствии со способами подключения измеряемого их прибора. В работе [25] приведены следующие условия, которые должны выполняться для любой энергетической цепи:

1. Цепь должна описываться скалярными переменными двух типов. Переменные первого типа должны, хотя бы в принципе, измеряться с помощью прибора, включенного последовательно с элементом цепи, с которым связана измеряемая переменная. В электрической цепи этой обобщенной последовательной переменной соответствует электрический ток. Переменные второго типа должны, хотя бы в принципе, измеряться с помощью прибора, подключенного параллельно элементу цепи, с которым связана измеряемая переменная. Таким переменным, называемым обобщенными параллельными переменными, в электрической цепи соответствуют напряжения.

2. Обобщенные последовательные переменные должны подчиняться первому закону Кирхгофа, параллельные – второму закону.

Размерности переменных обоого типа должны быть физически совместными, а их произведение – определять поток энергии.

3. Рассмотрим однородные явления. Количество теплоты, массы, электричества, проходящее через поперечное сечение элемента энергетической цепи, т.е. поток плотностью  $J$ , определяется градиентом фактора интенсивности потенциального поля, т.е. обобщенной напряженностью  $E$ . Для стационарного состояния энергетической цепи в случае независимого рассмотрения явлений имеем [12, 16, 22, 37, 56, 57, 68, 79, 198]:

а) закон Ома, устанавливающий связь между плотностью  $J_{\mathcal{E}} = -\gamma_{\mathcal{E}} grad \varphi_{\mathcal{E}} = \gamma_{\mathcal{E}} E_{\mathcal{E}}$  электрического тока и градиентом электрического потенциала  $\varphi_{\mathcal{E}}$

$$J_{\mathcal{E}} = -\gamma_{\mathcal{E}} grad \varphi_{\mathcal{E}} = \gamma_{\mathcal{E}} E_{\mathcal{E}}, \quad \gamma_{\mathcal{E}} > 0, \quad E_{\mathcal{E}} = -grad \varphi_{\mathcal{E}}; \quad (1.1)$$

б) закон теплопроводности Фурье – между потоком теплоты плотностью  $J_T$  и градиентом температуры  $T$

$$J_T = -\gamma_T grad T = \gamma_T E_T, \quad \gamma_T > 0, \quad E_T = -grad T; \quad (1.2)$$

в) закон фильтрации Дарси – плотностью  $J_M$  потока компонента смеси и градиентом давления  $p$

$$J_M = -\gamma_M grad p = \gamma_M E_M, \quad \gamma_M > 0, \quad E_M = -grad p \quad (1.3)$$

и т.п. Откуда в обобщенном виде имеем

$$J = \gamma E, \quad (1.4)$$

где  $\gamma$  – удельная проводимость потока  $J$ , вызванного обобщенной напряженностью  $E$ .

Введем в рассмотрение элементы, в которых одновременно существуют два и более явлений. В случае термоэлектричества, согласно

постулату Л.Онзагера о линейности соотношений между потоками и обобщенными напряженностями (силами) [22, 56], имеем

$$\mathbf{J}_\Phi = -\gamma_\Phi \text{grad } \varphi_\Phi - \gamma_{\Phi T} \text{grad } T, \quad (1.5)$$

т.е. плотность тока в элементе возникает как под действием градиента электрического потенциала, так и под действием градиента температур. Здесь  $\gamma_{\Phi T}$  – кинетический коэффициент термоэлектричества. Одновременно с электрическим током возникает поток тепла с плотностью

$$\mathbf{J}_T = -\gamma_{T\Phi} \text{grad } \varphi_\Phi - \gamma_T \text{grad } T. \quad (1.6)$$

Из соотношения взаимности Л.Онзагера следует  $\gamma_{\Phi T} = \gamma_{T\Phi}$ .

Выражения (1.5) – (1.6) и аналогичные им удобно представлять в векторно-матричном виде

$$\vec{\mathbf{J}} = \mathbf{\Gamma} \vec{\mathbf{E}}. \quad (1.7)$$

Эта запись по сути выражает в дифференциальной форме закон Ома для проводника энергетической цепи, в котором протекают несколько взаимосвязанных явлений. Поэтому матрица  $\mathbf{\Gamma}$  характеризует удельную проводимость. В работах [16, 57] доказано, что, при соответствующем выборе векторов  $\vec{\mathbf{J}}$  и  $\vec{\mathbf{E}}$ , матрица  $\mathbf{\Gamma}$  является симметричной, т.е. имеется симметрия во взаимодействии различных явлений.

Полагая граничные поверхности (входы-выходы) проводника эквипотенциальными и интегрируя выражение (1.7) вдоль пути  $l$  потоков  $\vec{\mathbf{J}}$ , а также по площади  $\Omega$  их поперечного сечения, в простейшем случае, когда направления потоков совпадают, найдем

$$\mathbf{i} = \int_{\Omega} \vec{\mathbf{J}} d\Omega = \mathbf{\Omega} \vec{\mathbf{J}}, \quad \mathbf{u} = \int_l \vec{\mathbf{E}} dl = l \vec{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{Y} \mathbf{u}, \quad \mathbf{Y} = l^{-1} \mathbf{\Omega} \mathbf{\Gamma}, \quad (1.8)$$

где ток  $\mathbf{i}$  – вектор с компонентами типа: электрический ток, поток теплоты, поток массы вещества и т.п.; напряжение  $\mathbf{u}$  – вектор с компонентами типа: разностей электрических потенциалов, температур, давлений и т.п. на концах



проводника; матрица  $\mathbf{Y}$  – проводимость, а обратная ей матрица  $(\det \mathbf{Y} \neq 0) \mathbf{R} = \mathbf{Y}^{-1}$  – сопротивление.

Обращаясь к приведенному выше определению энергетической цепи, отметим, что ток  $i$  образуется из совокупности последовательных переменных, а напряжение  $u$  – из совокупности параллельных переменных.

Все компоненты вектора  $i$  удовлетворяют первому закону Кирхгофа, поскольку поток вектора  $\vec{J}$  через замкнутую поверхность  $\Omega_C$  равен нулю:

$$\oint_{\Omega_C} \vec{J} d\Omega_C = 0, \quad (1.9)$$

т.е. алгебраическая сумма токов  $i$  в узле  $V$ , ограниченном  $\Omega_C$ , равна нулю:

$$\sum_V i = 0. \quad (1.10)$$

Напряжения  $u$  на элементах энергетической цепи удовлетворяют второму закону Кирхгофа, поскольку циркуляция вектора напряженности  $\vec{E}$  по контуру  $K$ , не содержащему источников энергии, равна нулю:

$$\oint_K \vec{E} dK = 0, \quad (1.11)$$

т.е. алгебраическая сумма напряжений  $u$  на элементах  $dK$  контура  $K$  равна нулю:

$$\sum_K u = 0. \quad (1.12)$$

Скалярное произведение

$$P = (\mathbf{i}, \mathbf{u}) \quad (1.13)$$

состоит из слагаемых, которые характеризуют мощности рассеивания различных видов энергии в проводнике.

Из соотношений (1.8) – (1.10) и (1.8), (1.11) – (1.12) следует, что методы контурных токов и узловых потенциалов могут быть использованы

для анализа энергетических цепей, содержащих как линейные, так и нелинейные элементы. Обоснованием такой возможности являются принципы минимума производства энтропии, минимума теплового действия в электрической цепи, классический экстремальный принцип механики [16, 22, 184]. Концентрированное выражение таких экстремальных принципов для энергетической цепи из  $N$  элементов имеет вид

$$P_{\Sigma} \rightarrow \min, \quad (1.14)$$

где

$$P_{\Sigma} = \sum_{n=1}^N (i_n, u_n).$$

Таким образом, методы анализа электрических цепей можно распространить на энергетические цепи. При этом вопрос о топологической сложности моделируемых ЭС решается положительно, но при условии, если можно использовать эти методы для анализа не только стационарных, но и нестационарных режимов функционирования энергетических цепей, содержащих как резистивные, так и другие пассивные и активные элементы. Выясним такую возможность, обратившись к основным соотношениям между последовательными и параллельными переменными в механических, гидравлических, тепловых и электромагнитных цепях.

## **1.2. Обобщенные переменные в энергетических цепях с сосредоточенными параметрами.**

Используя результаты исследования энергетических цепей [23-25, 355], рассмотрим структуру связей между последовательными и параллельными переменными (таблицы 1.1 – 1.2).

Таблица 1.1.

## Параллельные и последовательные переменные состояния

Физические явления	Переменные состояния	
	параллельные	последовательные
Электричество	Магнитный поток $\Phi$ , Вб	Заряд $q$ , К
Механика	Перемещение $x$ , м	Импульс $K$ , $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$
	Угол поворота $\theta$ , рад	Момент импульса $M$ , $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$
Тепло	Не определена	Энтропия $S$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$
		Количество теплоты $Q$ , Дж
Гидравлика	Не определена	Объем $V$ , м <sup>3</sup>

Анализ переменных электрического и механического взаимодействий показывает, что произведение параллельных и последовательных переменных действия определяет мощности:

$$P_{\mathcal{E}} = ui, \quad P_{МП} = \nu F, \quad P_{MB} = \omega N. \quad (1.15)$$

Тогда для энергий диссипации имеем

$$W_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}} = \int_0^t ui dt, \quad W_{МП}^{\mathcal{D}} = \int_0^t \nu F dt, \quad W_{MB}^{\mathcal{D}} = \int_0^t \omega N dt. \quad (1.16)$$

Интегрирование последовательных переменных действия по параллельным переменным состояния дает кинетическую энергию механических взаимодействий:

$$W_{\mathcal{E}}^K = \int_0^{\Phi} i d\Phi, \quad W_{МП}^{\Pi} = \int_0^x F dx, \quad W_{MB}^{\Pi} = \int_0^{\theta} N d\theta. \quad (1.17)$$

Таблица 1.2.

## Параллельные и последовательные переменные действия

Физические явления	Переменные действия	
	параллельные	последовательные
Электричество	Напряжение $u = \frac{d\Phi}{dt}$ , В	Сила тока $i = \frac{dq}{dt}$ , А
Механика	Линейная скорость $v = \frac{dx}{dt}$ , $\frac{м}{с}$	Сила $F = \frac{dK}{dt}$ , Н
	Угловая скорость $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , $\frac{рад}{с}$	Момент силы $N = \frac{dM}{dt}$ , Н·м
Тепло	Температура $T$ , К	Поток энтропии $\sigma = \frac{dS}{dt}$ , $\frac{Вт}{К}$
Гидравлика	Давление $p$ , Па	Объемный расход $G_r = \frac{dV}{dt}$ , $\frac{м^3}{с}$ .
	Пьезометрический напор, $H$ , м	

Интегрирование параллельных переменных действия по последовательным переменным состояниям определяет потенциальную энергию электрического взаимодействия и кинетическую энергию механических взаимодействий:

$$W_{\mathcal{E}}^{\Pi} = \int_0^q u dq, \quad W_{МП}^K = \int_0^K v dK, \quad W_{MB}^K \int_0^M \omega dM. \quad (1.18)$$

В соотношениях (1.17) – (1.18) можно видеть неоднородность энергий электрических и механических взаимодействий. Для ее устранения целесообразно обратиться к электромеханическим аналогиям, приведенным, например, в работах [70, 90, 209, 301, 302]. Тогда, изменив в таблицах 1.1 –

1.2 местоположение последовательных и параллельных переменных, получим желаемую однородность в определении кинетических и потенциальных энергий (таблицы 1.3 – 1.4).

Таблица 1.3.

Параллельные и последовательные переменные состояния

Физические явления	Переменные состояния	
	параллельные	последовательные
Электричество	Заряд $q$ , К	Магнитный поток $\Phi$ , Вб
Механика	Перемещение $x$ , м	Импульс $K$ , $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$
	Угол поворота $\theta$ , рад	Момент импульса $M$ , $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$
Тепло	Энтропия $S$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	Не определено
Гидравлика	Перемещение $x_\Gamma$ , м	Импульс движущейся жидкости $K_\Gamma = \int_V \rho \cdot \frac{dx_\Gamma}{dt} \cdot dV, \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ $\rho - \text{плотность, } \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ $V - \text{объем, м}^3$

Обращаясь к переменным теплового взаимодействия, аналогично имеем мощность потока

$$P_T = T\sigma = \frac{TdS}{dt} = \frac{dQ}{dt} = q_T, \quad (1.19)$$

энергию диссипации тепла

$$W_T^D = \int_0^T T\sigma dt = \int_0^t \frac{dQ}{dt} dt = \int_0^t dQ \quad (1.20)$$

и потенциальную (внутреннюю) энергию

$$W_T^{\Pi} = \int_0^S T dS . \quad (1.21)$$

Кинетической энергии теплового взаимодействия не существует. Таким образом, температура, поток энтропии и энтропия являются определяющими переменными теплового взаимодействия в элементах энергетической цепи.

Таблица 1.4.

*Параллельные и последовательные переменные действия*

Физические явления	Переменные действия	
	параллельные	последовательные
Электричество	Напряжение $u = \frac{d\Phi}{dt}$ , В	Сила тока $i = \frac{dq}{dt}$ , А
Механика	Сила $F = \frac{dK}{dt}$ , Н	Линейная скорость $v = \frac{dx}{dt}$ , $\frac{м}{с}$
	Момент силы $N = \frac{dM}{dt}$ , Н·м	Угловая скорость $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , $\frac{рад}{с}$
Тепло	Температура $T$ , К	Поток энтропии $\sigma = \frac{dS}{dt}$ , $\frac{Вт}{К}$
Гидравлика	Сила напора $F_{\Gamma} = \int_{\Pi} p \cdot d\Pi = \frac{dK_{\Gamma}}{dt}$ , Н $\Pi$ – поверхность объема $V$ , м <sup>2</sup> $p$ – давление, Па	Средняя в поперечном сечении скорость движения жидкости $v_{\Gamma} = \frac{dx_{\Gamma}}{dt}$ , $\frac{м}{с}$

Для гидравлического взаимодействия система определяющих переменных, приведенных в таблицах 1.1 – 1.2, является неполной. Поэтому, следуя работам [75 – 77], рассмотрим соответствующие последовательные и параллельные переменные, приведенные в таблицах 1.3 – 1.4. Откуда для гидравлического взаимодействия имеем выражения, содержащие значения мощности потока и энергии диссипации

$$P_{\Gamma} = F_{\Gamma} v_{\Gamma}, \quad W_{\Gamma}^{\Pi} = \int_0^t F_{\Gamma} v_{\Gamma} dt, \quad (1.22)$$

а также потенциальной энергии столба жидкости пьезометрической высоты  $H$  с давлением  $p$  у основания с площадью поперечного сечения  $\Pi$

$$W_{\Gamma}^{\Pi} = \int_0^H \left( \int_{\Pi} p d\Pi \right) dx = p \Pi H = m g H \quad (1.23)$$

и кинетической энергии жидкости, движущейся по трубопроводу постоянного диаметра

$$W_{\Gamma}^K = \int_0^{K_{\Gamma}} v_{\Gamma} dK_{\Gamma} = \int_0^{K_{\Gamma}} v_{\Gamma} d \left( \int_V \rho v_{\Gamma} dV \right) = \int_0^{v_{\Gamma}} \rho V v_{\Gamma} dv_{\Gamma} = \rho V \frac{v_{\Gamma}^2}{2}, \quad (1.24)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Анализ приведенных выше выражений для мощностей и энергий позволяет ввести обобщающие их понятия – мощность, характеризуемая переменными действия и энергия, определяемая последовательными или параллельными переменными (таблица 1.5). Возникающие в соответствующих выражениях коэффициенты пропорциональности  $R$ ,  $G$ ,  $C$  и  $L$  имеют смысл обобщенных сопротивления, проводимости, емкости и индуктивности, определение которых, в зависимости от вида взаимодействий, можно найти в таблице 1.6. Очевидно, обобщенная емкость характеризует способность элемента цепи запасать потенциальную энергию, а обобщенная индуктивность – запасать кинетическую энергию.

Таблица 1.5.

## Энергетические аналогии

Физические явления	Мощность (определяется переменными действия)	Кинетическая энергия (определяется последовательными переменными)	Потенциальная энергия (определяется параллельными переменными)
Электричество	$P_E = u \cdot i$ $= P_E \cdot i^2$ $= G_E \cdot u^2$	$W_E^K = \int_0^\Phi i \cdot d\Phi$ $= L_E \frac{i^2}{2}$	$W_E^\Pi = \int_0^q u \cdot dq$ $= C_E \frac{u^2}{2}$
Механика	$P_{МП} = F \cdot v$ $= P_{МП} \cdot v^2$ $= G_{МП} \cdot F^2$	$W_{МП}^K = \int_0^K v \cdot dK$ $= L_{МП} \frac{v^2}{2}$	$W_{МП}^\Pi = \int_0^x F \cdot dx$ $= C_{МП} \frac{F^2}{2}$
	$P_{МО} = N \cdot \omega$ $= P_{МО} \cdot \omega^2$ $= G_{МО} \cdot N^2$	$W_{МО}^K = \int_0^M \omega \cdot dM$ $= L_{МО} \frac{\omega^2}{2}$	$W_{МО}^\Pi = \int_0^\theta N \cdot d\theta$ $= C_{МО} \frac{N^2}{2}$
Тепло	$P_T = T \cdot \sigma$ $= P_T \cdot \sigma^2$ $= G_T \cdot T^2$	Не определено	$W_T^\Pi = \int_0^S T \cdot dS$ $= C_T \frac{T^2}{2}$
Гидравлика	$P_\Gamma = F_\Gamma \cdot v_\Gamma$ $= P_\Gamma \cdot v_\Gamma^2$ $= G_\Gamma \cdot F_\Gamma^2$	$W_\Gamma^K = \int_0^{K_\Gamma} v_\Gamma \cdot dK_\Gamma$ $= L_\Gamma \frac{v_\Gamma^2}{2}$	$W_\Gamma^\Pi = \int_0^{x_\Gamma} F_\Gamma \cdot dx_\Gamma$ $= C_\Gamma \frac{F_\Gamma^2}{2}$



Таблица 1.6.

Сосредоточенные параметры элементов энергетической цепи

Физические явления	Сопротивление	Проводимость	Индуктивность	Емкость
Электричество	$R_E = \frac{du}{di}$ , Ом	$G_E = \frac{di}{du}$ , См	$L_E = \frac{d\Phi}{di}$ , Гн	$C_E = \frac{dq}{du}$ , Ф
Механика	$R_{МП} = \frac{dF}{dv}$ , $\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$	$G_{МП} = \frac{dv}{dF}$ , $\frac{\text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}}$	$L_{МП} = \frac{dK}{dv}$ , кг	$C_{МП} = \frac{dx}{dF}$ , $\frac{\text{м}}{\text{Н}}$
	$R_{МО} = \frac{dN}{d\omega}$ , Н · с · м	$G_{МО} = \frac{d\omega}{dN}$ , Н <sup>-1</sup> · с <sup>-1</sup> · м <sup>-1</sup>	$L_{МО} = \frac{dM}{d\omega}$ , кг · м <sup>2</sup>	$C_{МО} = \frac{d\theta}{dN}$ , Н <sup>-1</sup> · м <sup>-1</sup>
Тепло	$R_T = \frac{dT}{d\sigma}$ , $\frac{\text{К}^2}{\text{Вт}}$	$G_T = \frac{d\sigma}{dT}$ , $\frac{\text{Вт}}{\text{К}^2}$	Не определена	$C_T = \frac{dS}{dT}$ , $\frac{\text{Дж}}{\text{К}^2}$
Гидравлика	$R_G = \frac{dF_G}{dv_G}$ , $\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$	$G_G = \frac{dv_G}{dF_G}$ , $\frac{\text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}}$	$L_G = \frac{dK_G}{dv_G}$ , кг	$C_G = \frac{dx_G}{dF_G}$ , $\frac{\text{м}}{\text{Н}}$

Глубинный смысл энергетических аналогий проявляется в возможности использования законов сохранения энергии для создания моделей элементов энергетических цепей, в которых наблюдаются неоднородные физические явления, а введение векторных групп обобщенных последовательных и параллельных переменных дает возможность описать взаимосвязи между переменными с помощью матричных аналогов сопротивлений, проводимостей, емкостей и индуктивностей. В результате

оказывается возможным применять базовые принципы и методы анализа электрических цепей для анализа энергетических цепей. Действительно, образуя вектор-функции  $\mathbf{i} = \mathbf{i}(t)$  и  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  из последовательных и параллельных переменных действия, для пассивного элемента энергетической цепи запишем

$$dW^K + dW^{\Pi} + dW^{\Delta} = 0 \quad (1.25)$$

где

$$\begin{aligned} dW^K &= d(\mathbf{L}\mathbf{i}, \mathbf{i})/2 = (\mathbf{L}\mathbf{i}, d\mathbf{i}), \\ dW^{\Pi} &= d(\mathbf{C}\mathbf{u}, \mathbf{u})/2 = (\mathbf{C}\mathbf{u}, d\mathbf{u}), \\ dW^{\Delta} &= (\mathbf{u}, \mathbf{i})dt. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь выражение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  обозначает скалярное произведение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , а параллельные и последовательные переменные являются векторами вида

$$\mathbf{u} = \left| \begin{array}{cccccc} u & F & N & T & F_{\Gamma} \end{array} \right|^T \quad \text{и} \quad \mathbf{i} = \left| \begin{array}{ccccc} i & \nu & \omega & \sigma & \nu_{\Gamma} \end{array} \right|^T, \quad (1.27)$$

а диагональные матрицы  $L$  и  $C$  вида

$$\text{diag}L = \left| \begin{array}{ccccc} L_E & L_{МП} & L_{МО} & L_T & L_{\Gamma} \end{array} \right|, \quad \text{diag}C = \left| \begin{array}{ccccc} C_E & C_{МП} & C_{МО} & C_T & C_{\Gamma} \end{array} \right|,$$

содержат параметры, определенные в таблице 1.6.

Энергетические соотношения лежат в основе построения моделей кондукционного ускорения макротел при использовании емкостного накопителя энергии [3], метания твердых тел малой электропроводности в рельсотронных ускорителях [123], электрического взрыва проводников [147], электромеханического преобразования энергии [80, 130, 163, 221, 307, 311, 312].

В качестве примера рассмотрим математическую модель машины постоянного тока с одной обмоткой возбуждения и одной парой щеток (машина работает в режиме двигателя; влиянием явлений в коммутируемых секциях и влиянием реакции якоря на цепь возбуждения пренебрегаем;

процессы в машине происходят в пределах прямолинейной частотной характеристики холостого хода) [239]:

$$\begin{cases} R_{\text{ЭВ}} i_B + L_{\text{ЭВ}} \frac{di_B}{dt} = u_B, \\ R_{\text{ЭЯ}} i_Y + L_{\text{ЭЯ}} \frac{di_Y}{dt} = u_Y - M_L \omega i_B, \\ N_C + L_{MB} \frac{d\omega}{dt} = M_L i_B i_Y, \end{cases} \quad (1.28)$$

где  $R_{\text{ЭВ}}$  и  $L_{\text{ЭВ}}$  – сопротивление и индуктивность цепи возбуждения;  $R_{\text{ЭЯ}}$  и  $L_{\text{ЭЯ}}$  – то же для цепи якоря;  $u_B$  и  $u_Y$  – напряжения на полюсах обмоток;  $i_B$  и  $i_Y$  – токи в цепях возбуждения и якоря;  $M_L$  – взаимная индуктивность между обмотками возбуждения и якоря;  $\omega$  – угловая скорость вращения якоря;  $N_C = R_{MB} \omega$  – момент сил сопротивления, в том числе сил вязкого трения;  $L_{MB}$  – момент инерции вращающихся масс.

Преобразуем систему уравнений (1.28) к виду (1.25). Для этого умножим на  $i_B$ ,  $i_Y$  и  $\omega$ , соответственно, первое, второе и третье уравнения системы (1.28). В результате будем иметь

$$\begin{cases} R_{\text{ЭВ}} i_B^2 dt + d\left(L_{\text{ЭВ}} \frac{i_B^2}{2}\right) = u_B i_B dt, \\ R_{\text{ЭЯ}} i_Y^2 dt + d\left(L_{\text{ЭЯ}} \frac{i_Y^2}{2}\right) = u_Y i_Y dt - M_L i_Y i_B \omega dt, \\ R_{MB} \omega^2 dt + d\left(L_{MB} \frac{\omega^2}{2}\right) = M_L i_Y i_B \omega dt. \end{cases} \quad (1.29)$$

Величина  $M_L i_Y i_B \omega dt = (M_L i_Y i_B) \frac{d\theta}{dt} = N_{\text{ЭМ}} d\theta = dW_{\text{ЭМ}}^{\Pi}$  характеризует изменение потенциальной энергии электромагнитного момента силы  $N_{\text{ЭМ}}$  при изменении угла поворота якоря на  $d\theta$  [138, 139]. Величины  $R_{\text{ЭВ}} i_B^2 dt = dW_{\text{ЭВ}}^{\Pi}$ ,  $R_{\text{ЭЯ}} i_Y^2 dt = dW_{\text{ЭЯ}}^{\Pi}$ ,  $R_{MB} \omega^2 dt = dW_{MB}^{\Pi}$ , определяют

приращения энергий диссипации соответственно в цепях возбуждения якоря, в результате вязкого трения подвижных частей, а величины  $u_B i_B dt = dW_{\Delta B}^{внеш}$  и  $dW_{\Delta Я}^{внеш}$  характеризуют приращение электромагнитных энергий, подводимых к обмоткам от внешнего источника за время  $dt$ .

Учитывая принятые выше обозначения, систему уравнений (1.28) запишем в виде

$$\begin{vmatrix} R_{\Delta B} & 0 & 0 \\ 0 & R_{\Delta Я} & 0 \\ 0 & 0 & R_{MB} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_B \\ i_Я \\ \omega \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_{\Delta B} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\Delta Я} & 0 \\ 0 & 0 & L_{MB} \end{vmatrix} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} i_B \\ i_Я \\ \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_B \\ u_Я - \varepsilon_Я \\ N_{\Delta M} \end{vmatrix}, \quad (1.30)$$

где э.д.с. якоря

$$\varepsilon_Я = \frac{\omega}{i_Я} N_{\Delta M}. \quad (1.31)$$

Из (1.31) следует выражение

$$\varepsilon_Я i_Я = \omega N_{\Delta M}, \quad (1.32)$$

которое устанавливает равенство мощностей электрического и механического взаимодействий. Таким образом, уравнение (1.30) является математической моделью обобщенного преобразователя энергии. Этот преобразователь обратим и неидеален, поскольку имеет место диссипация энергии в электрических и механических частях [25].

Векторно-матричное уравнение (1.30) можно представить в форме

$$\left( R + L \frac{d}{dt} \right) \mathbf{i} = (E - K_u) \mathbf{u}, \quad (1.33)$$

где  $E$  – единичная матрица;  $K_u$  – матрица преобразования параллельных переменных вида

$$K_u = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega / i_Я \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.34)$$

Путем энергетических аналогий легко получить уравнения преобразователей для емкостных и индуктивно-емкостных машин [138]. Математические модели таких преобразователей будут отличаться от модели (1.35) наличием «емкостной» составляющей. Изменится также матрица преобразования  $K_u$ .

Кроме пассивных, преобразующих элементов, энергетические цепи могут содержать активные элементы, обеспечивающие ввод или вывод энергии из цепи.

Источники энергии делятся на источники параллельных переменных и источники последовательных переменных.

В отличие от электрических цепей, где источники э.д.с. и тока имеют по одной характеристике (рис. 1.4, *a* и *б*, соответственно), в энергетических цепях источники последовательных и параллельных переменных имеют в общем случае некоторое множество характеристик. Например, в случае газового промысла, как источника параллельных переменных (давления  $p_0$  и температуры  $T_0$ ) в газотранспортной сети, обращаются к двум характеристикам  $p_0(M)$  и  $T_0(M)$  (рис. 1.4, *в*), где  $M$  – массовый расход газа, являющийся последовательной переменной, [197, 270, 296, 300]. В случае узла редуцирования газа имеем источник параллельной переменной  $p_{ред}$  и двумерную характеристику  $p_{ред}(M, T)$  (рис.1.4.). Наконец, источником параллельной или последовательной переменной может быть компрессорная станция. В зависимости от режима ее работы имеем характеристики  $p_0(M, T)$  и  $M_0(p, T)$  (рис. 1.4, *д* и *е*). Первая характеристика отражает режим функционирования станции с управлением по заданному выходному давлению  $p$ , а вторая характеристика – с управлением по заданному расходу газа  $M$  через станцию [300].

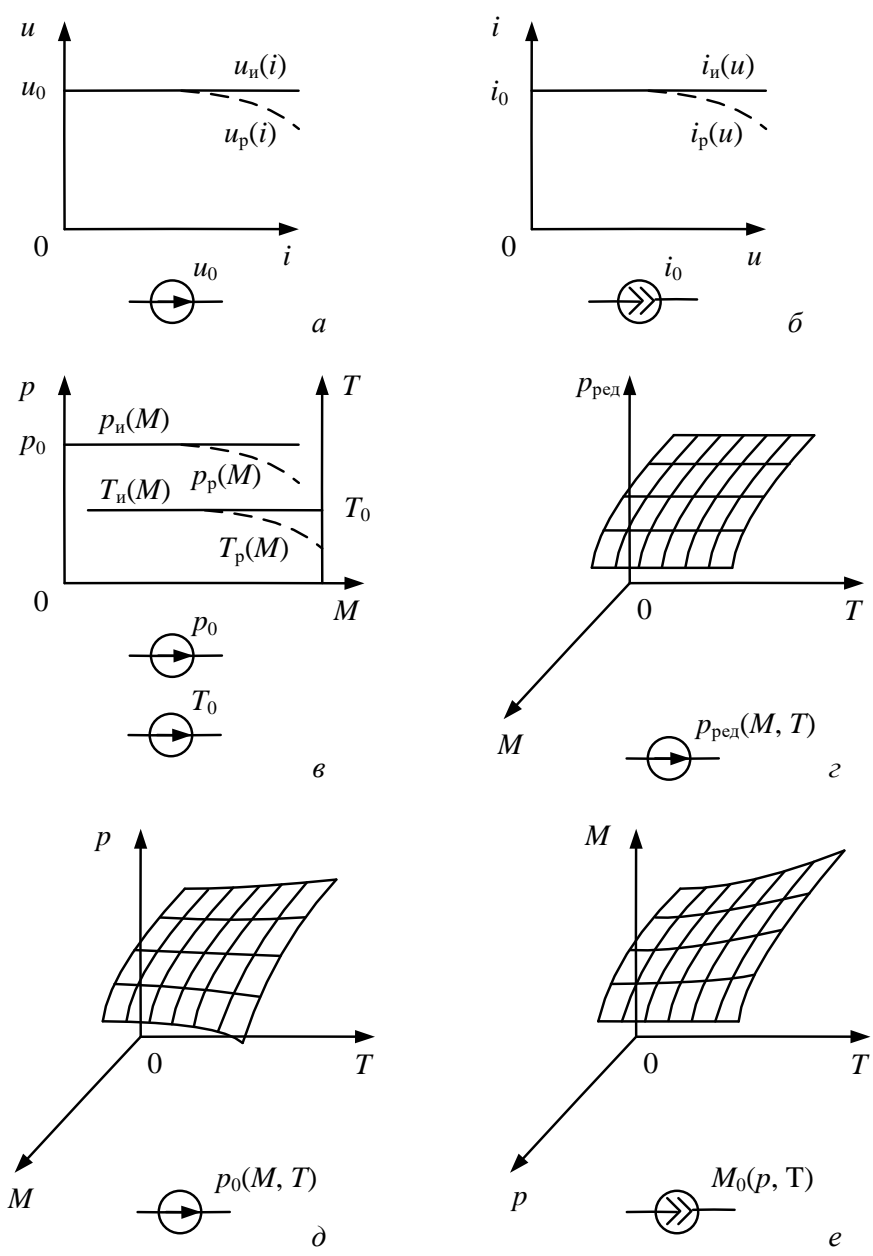


Рис. 1.4. Характеристики источников энергии в энергетических цепях.

Энергия внешних источников может быть введена в энергетическую цепь с помощью усилителей. Различают усилители параллельных и последовательных переменных, а также усилители мощности [25]. Все они представляют собой шестиполусники, имеющие полюса входа, выхода и питания. Усилители характеризуются матричными коэффициентами усиления  $K_y^u$ ,  $K_y^i$ ,  $K_y^p$ , причем

$$\mathbf{u}_{\text{вых}} = K_y^u \mathbf{u}_{\text{вх}}, \quad \mathbf{i}_{\text{вых}} = K_y^i \mathbf{i}_{\text{вх}}, \quad \mathbf{P}_{\text{вых}} = K_y^p \mathbf{P}_{\text{вх}}, \quad (1.35)$$

где вектор  $\mathbf{P}$  составлен из мощностей различных видов физических взаимодействий.

В качестве примера рассмотрим уравнения газоперекачивающего агрегата, являющегося усилителем термодинамических потенциалов  $p$  и  $T$ , т.е. усилителем параллельных переменных. Аналогичными уравнениями описываются насосы во многих жидкостных распределительных и питательных системах энергетики [82, 106-109, 185, 227, 232, 247, 282, 283, 299, 300, 306, 324, 325, 337].

Обозначим давление, температуру и массовый расход газа на входе и выходе агрегата, соответственно, через  $P_{\text{вх}}$ ,  $P_{\text{вых}}$ ,  $T_{\text{вх}}$ ,  $T_{\text{вых}}$ ,  $M_{\text{вх}}$ ,  $M_{\text{вых}}$ . Математическая модель агрегата представляется следующей системой нелинейных алгебраических уравнений [101, 156, 296]:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\text{вых}} = M_{\text{вх}}, P_{\text{вых}} = P_{\text{вх}} \left[ \bar{y}^2 (\bar{\varepsilon}_0^{\bar{\alpha}} - 1) + 1 \right]^{\frac{1}{\bar{\alpha}}}, \\ T_{\text{вых}} = T_{\text{вх}} + T_{\text{вх}} \bar{y}^2 (\bar{\varepsilon}_0^{\bar{\alpha}} - 1), \quad \bar{\alpha} = \frac{\bar{k} - 1}{k \eta_0}, \\ \bar{y}^2 = \left( \frac{\bar{n}}{\bar{n}_0} \right)^2 \frac{(z \bar{R} T)_{\text{вх}}}{(z \bar{R} T)_{\text{вх}}}, \quad \varepsilon_0 = \sum_{v=0}^2 \varepsilon_{0v} Q_{np}^v, \quad \eta_0 = \sum_{v=0}^4 \eta_{0v} Q_{np}^v, \end{array} \right. \quad (1.36)$$

где  $\bar{n}$  – обороты нагнетателя, приводимого в действие от внешнего источника энергии (электрический двигатель либо турбоустановка);  $\bar{k}$  – показатель политропы ( $\bar{k} = 1,30 \dots 1,31$ );  $(z\bar{R}T)_0$  и  $n_0$  – параметры приведения для данного типа нагнетателя, которые задаются вместе с коэффициентами аппроксимации  $\varepsilon_{0v}$  и  $\eta_{0v}$  его характеристик  $\varepsilon_0(Q_{np})$  и  $\eta_0(Q_{np})$ ;  $Q_{np} = M_{ex}\bar{n}_0(z\bar{R}T)_{ex}/(P_{ex}\bar{n})$  – приведенный объемный расход газа;  $\bar{R}$  – газовая постоянная;  $z = z(p, T)$  – коэффициент сжатия газа.

Очевидно, система уравнений (1.36) представима в виде

$$\begin{vmatrix} P_{ввх} \\ T_{ввх} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [\bar{y}(\varepsilon_0^{\bar{\alpha}} - 1) + 1]^{\frac{1}{\bar{\alpha}}} & 0 \\ 0 & 1 + \bar{y}^2(\varepsilon_0^{\bar{\alpha}} - 1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_{ex} \\ T_{ex} \end{vmatrix}, \quad (1.37)$$

или

$$\mathbf{u}_{ввх} = K_y^u \mathbf{u}_{ex},$$

где  $K_y^u = K_y^u(\mathbf{u}_{ex}, M_{ex})$  – существенно нелинейный матричный коэффициент усиления параллельных переменных  $\mathbf{u}_{ex} = \begin{vmatrix} P_{ex} \\ T_{ex} \end{vmatrix}^T$ .

Таким образом, при рассмотрении соотношений между последовательными и параллельными переменными для основных элементов энергетических цепей с сосредоточенными параметрами можно видеть их подобие соотношениям между напряжениями и токами для соответствующих элементов электрических цепей. Отличие состоит лишь в матрично-векторной форме представления математических моделей элементов. Как указывалось в предыдущем разделе, такая форма представления моделей элементов не создает препятствий распространению существующих методов анализа электрических цепей на энергетические цепи.



### 1.3. Энергетические цепи с распределенными параметрами.

Расширим представления об энергетических цепях, за счет объектов с параметрами, распределенными по одной из координат пространства, например, по  $x$ . Для этого возьмем за основу математическую модель линии электропередачи, переходные процессы в которой описываются системой уравнений в частных производных вида

$$\begin{cases} -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = r_{\text{Э}} i(x,t) + L_{\text{Э}} \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = g_{\text{Э}} u(x,t) + C_{\text{Э}} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{u(x_j,t)}{R_{\text{Э}j}} \delta(x-x_j) \end{cases}, \quad (1.38)$$

где  $r_{\text{Э}}$ ,  $g_{\text{Э}}$ ,  $L_{\text{Э}}$  и  $C_{\text{Э}}$  – удельные сопротивление, проводимость утечки, индуктивность и емкость линии;  $R_{\text{Э}j}$  – промежуточные нагрузки, подключающиеся к линии в точках  $x = x_j$  ( $j = \overline{1, n}$ );  $\delta(x-x_j)$  – дельта-функция Дирака [12, 36, 125, 142, 143, 198]. Очевидно, что функции  $u(x,t)$  и  $i(x,t)$  можно отнести соответственно к параллельным и последовательным переменным.

Покажем, каким образом устанавливаются энергетические аналогии между переменными и параметрами моделей различных видов физических взаимодействий. Для этого рассмотрим одномерные уравнения динамики жидкости и распространения тепла. Неустановившееся течение жидкости в

трубопроводе описывается системой уравнений, отражающей законы сохранения вещества и импульса сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\text{Пр}(x,t)] = -\frac{\lambda|v|}{2D} M(x,t) \\ \Pi \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = \text{Пр} k_\phi [p_n - p(x,t)] + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{\Gamma j}} [p_n - p(x_j,t)] \delta(x - x_j) \end{array} \right. \quad (1.39)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $M(x,t)$  – массовый расход;  $p(x,t)$  – давление;  $\Pi$  – площадь поперечного сечения трубы диаметра  $D$  и периметра  $\text{Пр}$ ;  $v$  – скорость движения жидкости;  $\lambda$  – коэффициент гидравлического сопротивления трубы;  $k_\phi$  – распределенный коэффициент фильтрации жидкости через стенку трубопровода;  $R_{\Gamma j}$  – локальное сопротивление утечки жидкости через отверстие  $j$ ;  $x_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – местоположение отверстий на оси  $x$ ;  $n$  – их общее количество [82, 109, 166, 253, 282, 325, 331, 333].

В системе уравнений (1.39) последовательными и параллельными переменными являются функции  $M(x,t)$  и  $p(x,t)$ . Их можно поставить в соответствие функциям  $i(x,t)$  и  $u(x,t)$  системы уравнений (1.38). Тогда систему уравнений (1.39) целесообразно представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = r_\Gamma M(x,t) + L_\Gamma \frac{\partial M(x,t)}{\partial t}, \\ -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = g_\Gamma [p(x,t) - p_n] + C_\Gamma \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{\Gamma j}} [p(x_j,t) - p_n] \delta(x - x_j) \end{array} \right. \quad (1.40)$$

где распределенные параметры  $r_\Gamma$ ,  $g_\Gamma$ ,  $L_\Gamma$  и  $C_\Gamma$  определяются соотношениями

$$r_\Gamma = \frac{\lambda|v|}{2D\Pi}, \quad g_\Gamma = \text{Пр} k_\phi, \quad L_\Gamma = \Pi^{-1}, \quad C_\Gamma = \Pi \frac{\partial \rho}{\partial p}. \quad (1.41)$$

Поскольку переменная  $u(x,t)$  является разностью потенциалов линии и подстилающей поверхности или оплетки кабеля, а переменная  $p(x,t)$  – собственно потенциалом, то наличие параметра  $p_n$  не снижает общности систем уравнений (1.38) и (1.40).

Обратимся теперь к уравнению, описывающему распространение тепла в стержне, вида

$$\Pi c_p \rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Pi k_T \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right] + \alpha \text{Пр} [T_n - T(x,t)], \quad (1.42)$$

где  $c_p = c_p(x,t)$  – удельная теплоемкость стержня на единицу длины;  $\rho = \rho(x,t)$  – плотность вещества;  $k_T = k_T(x,T)$  – коэффициент теплопроводности;  $\alpha = \alpha(x,T)$  – коэффициент теплообмена с внешней средой;  $T_n = T_n(x,t)$  – температура внешней среды;  $T = T(x,t)$  – температура стержня [20, 22, 56, 64, 68, 86, 95, 96, 113, 137, 190, 219, 226, 291].

Для преобразования уравнения (1.42) к виду (1.38) необходимо выделить последовательную и параллельную переменную. Выбор параллельной переменной очевиден – это температура  $T(x,t)$ . Последовательная переменная может быть установлена, если ввести в рассмотрение тепловой поток  $q_T(x,t)$ . Тогда уравнение (1.42) представляется в виде системы уравнений

$$\begin{cases} q_T(x,t) = -\Pi k_T \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}, \\ \Pi c_p \rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial q_T(x,t)}{\partial x} + \alpha \text{Пр} [T_n - T(x,t)] \end{cases} \quad (1.43)$$

Откуда имеем

$$\begin{cases} -\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = r_T q_T(x,t) \\ -\frac{\partial q_T(x,t)}{\partial x} = g_T [T(x,t) - T_n] + C_T \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \end{cases}, \quad (1.44)$$

где распределенные параметры  $r_T$ ,  $g_T$  и  $C_T$  определяются выражениями:

$$r_T = (\Pi k_T)^{-1}, \quad g_T = \alpha \text{Пр}, \quad C_T = \Pi c_p \rho. \quad (1.45)$$

В системе уравнений (1.44) отсутствие составляющей с коэффициентом  $L_T$  свидетельствует о невозможности накопления тепловой энергии в кинетической форме. Отсутствует также составляющая с сосредоточенными в точках  $x_j$  отборами тепла, что связано с рассмотрением традиционной исходной формы уравнения (1.42).

Приведенные модели неустановившегося движения жидкости, распространения тепла и передачи электроэнергии, после соответствующих преобразований, могут быть представлены в обобщенной форме, без привязки к конкретному виду взаимодействия – гидравлическому, тепловому или электрическому.

Обратимся теперь к разнородным взаимодействиям таким, например, как теплогидравлические и магнитогидродинамические.

Теплогидравлические явления наблюдаются во многих объектах энергетики [5, 33, 47-49, 86-87, 96, 113, 190, 226-228, 327]. В частности, такие явления возникают в эксплуатационных режимах работы магистральных нефте- и газопроводов, систем пневмотранспорта и мазутопроводов. Нестационарное, неизотермическое течение газа в трубе постоянного диаметра  $D$  описывается системой трех нелинейных уравнений в частных производных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = \frac{4k_{\phi}}{D}(p_n - p) \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) = -\rho \left( g \frac{dh}{dx} + \frac{\lambda v|v|}{2D} \right) \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial \left[ \rho v \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \right]}{\partial x} = \frac{4\alpha}{D}(T_n - T) + \rho v g \frac{dh}{dx} + \\ + 4k_{\phi} D^{-1}(p_n - p) \left( E + p \rho^{-1} \right) \end{array} \right. , \quad (1.46)$$

где  $p(x,t)$  – давление;  $T(x,t)$  – температура;  $\rho(p,T)$  – плотность газа;  $v(x,t)$  – скорость его движения;  $E(v,p,T)$  – полная энергия единицы массы газа;  $p_n$  и  $T_n$  – давление и температура внешней среды на поверхности трубы;  $h(x)$  – высота заложения трубы относительно нулевого уровня;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\lambda$ ,  $\alpha$ , и  $k_{\phi}$  – коэффициенты, соответственно, гидравлического сопротивления, теплопередачи и фильтрации газа через стенку трубы. В уравнениях (1.46) отражены законы сохранения вещества, количества движения и энергии [166, 197, 260, 296].

Для установления энергетических аналогий между рассматриваемой системой уравнений (1.46) и системой уравнений линии электропередачи (1.38) необходимо выделить определяющий вектор искомых функций и классифицировать в нем последовательные и параллельные переменные. Соответствующий выбор легко осуществить, если учесть физический смысл ранее выделенных переменных для систем уравнений гидравлики (1.40) и теплопроводности (1.44). Очевидно, последовательными переменными могут быть массовый расход газа  $M(x,t) = \Pi \rho v$  и поток полной энергии  $q_{\mathcal{E}}(x,t) = \Pi \rho v E$  (здесь  $\Pi$  – площадь поперечного сечения потока), а параллельными переменными – давление  $p(x,t)$  и температура  $T(x,t)$ , т.е.

$$\mathbf{i}(x,t) = |M(x,t) \quad q_{\mathcal{E}}(x,t)|^T, \quad \mathbf{u}(x,t) = |p(x,t) \quad T(x,t)|^T. \quad (1.47)$$

Заметим, что такой базис искомым функций является избыточным, превышающим по количеству неизвестных число уравнений в системе (1.46). Анализируя функции, можно видеть, что  $q_{\mathcal{E}} = q_{\mathcal{E}}(M, p, T)$ , т.е. эта функция определяется тремя остальными. Поэтому в базисе искомым функций оставим массовый расход  $M$ , давление  $p$  и температуру  $T$ .

Для преобразования системы уравнений (1.46) к виду (1.38) запишем ее в векторной форме

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = V_3$$

или

$$\frac{\partial V_1}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = V_3, \quad (1.48)$$

где

$$V_1 = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{vmatrix}, \quad V_2 = \begin{vmatrix} \rho v \\ p + \rho v^2 \\ \rho v \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} M \\ p \\ T \end{vmatrix},$$

$$V_3 = \begin{vmatrix} 4D^{-1}k_{\phi}(p_n - p) \\ -\rho \left( g \frac{dh}{dx} + \frac{\lambda v |v|}{2D} \right) \\ 4D^{-1}\alpha(T_n - T) - \rho v g \frac{dh}{dx} + 4D^{-1}k_{\phi} \left( E + \frac{p}{\rho} \right) (p_n - p) \end{vmatrix}, \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial Y} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \rho}{\partial p} & \frac{\partial \rho}{\partial T} \\ \Pi^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{v}{\Pi} & \left( \varepsilon - \frac{v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial p} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} - 1 & \left( \varepsilon - \frac{v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial T} + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial Y} = \begin{vmatrix} \Pi^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{2v}{\Pi} & 1 - v^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} & -v^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \\ \frac{\varepsilon + 3v^2/2}{\Pi} & \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} - v^3 \frac{\partial \rho}{\partial p} & \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - v^3 \frac{\partial \rho}{\partial T} \end{vmatrix}$$

так как  $E = \frac{v^2}{2} + \varepsilon$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(p, T)$  – внутренняя энергия единицы массы газа.

При  $v \neq 0$   $\det(\partial V_2 / \partial Y) \neq 0$ , поэтому уравнение (1.48) можно представить в виде

$$-\frac{\partial Y}{\partial x} = A(Y - Y_n) + B \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad (1.50)$$

где  $Y_n = |0 \quad p_n \quad T_n|^T$ ,  $B = \left( \frac{\partial V_2}{\partial Y} \right)^{-1} \frac{\partial V_1}{\partial Y}$ ,  $A = - \left( \frac{\partial V_2}{\partial Y} \right)^{-1} A_n V_3$ . Здесь

$A_n = \text{diag} \left\{ 1, (p - p_n)^{-1}, (T - T_n)^{-1} \right\}$ . Учитывая зависимость

$$\partial q_{\varepsilon} = \partial \left\{ M \left[ \varepsilon(p, T) + \frac{M^2}{2\rho^2(p, T)} \right] \right\} = \frac{\partial q_{\varepsilon}}{\partial M} \partial M + \frac{\partial q_{\varepsilon}}{\partial p} \partial p + \frac{\partial q_{\varepsilon}}{\partial T} \partial T,$$

на основе соотношения (1.50) установим связь между последовательными и параллельными переменными в трубопроводе:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = g_{TT}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n) + C_{TT} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + K_i \mathbf{i} + K_i^t \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \\ -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = r_{TT} \mathbf{i} + L_{TT} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + K_u \mathbf{u} + K_u^t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \end{cases} \quad (1.51)$$

где матрицы проводимости  $g_{TG}$ , емкости  $C_{TG}$ , сопротивления  $r_{TG}$ , индуктивности  $L_{TG}$ , а также матричные коэффициенты преобразования переменных –  $K_i$ ,  $K_i^t$ ,  $K_u$ ,  $K_u^t$  имеют следующие структурные особенности:

$$g_{TG} = \begin{vmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{vmatrix}, \quad C_{TG} = \begin{vmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{vmatrix}, \quad r_{TG} = \begin{vmatrix} \times & 0 \\ \times & 0 \end{vmatrix}, \quad L_{TG} = \begin{vmatrix} \times & 0 \\ \times & 0 \end{vmatrix},$$

$$K_i = \begin{vmatrix} \times & 0 \\ \times & 0 \end{vmatrix}, \quad K_i^t = \begin{vmatrix} \times & 0 \\ \times & 0 \end{vmatrix}, \quad K_u = \begin{vmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{vmatrix}, \quad K_u^t = \begin{vmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{vmatrix}.$$

Ненулевые элементы отмечены символом "×". Получение аналитических выражений для этих элементов затруднено. Поэтому изложенный выше подход порождает лишь конструктивный способ их машинного вычисления.

Система уравнений (1.51) отличается от ранее рассмотренных тем, что содержит матричные параметры, причем размерность матриц определяется только количеством учитываемых в описании явлений. Кроме того, возникают матричные коэффициенты преобразования последовательных и параллельных переменных, а также их частных производных по временной координате. О таких коэффициентах уже говорилось при рассмотрении математической модели обобщенного электромеханического преобразователя энергии вида (1.33).

Наконец, рассмотрим случай электромагнитных, гидравлических и тепловых процессов, наблюдаемых совместно в импульсных плазменных ускорителях эрозионного типа. Для случая плоской симметрии одномерные уравнения магнитной гидродинамики в системе лагранжевых массовых переменных имеют вид:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_m} - \frac{J_{\mathcal{E}} H_{\mathcal{E}}}{\rho}, \quad v = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad J_{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{4\pi} \frac{\partial H_{\mathcal{E}}}{\partial x_m}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial x_m}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H_{\mathcal{E}}}{\rho} \right) = \frac{\partial E_{\mathcal{E}}}{\partial x_m}, \quad J_{\mathcal{E}} = \gamma_{\mathcal{E}} E_{\mathcal{E}}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial v}{\partial x_m} + \frac{J_{\mathcal{E}} E_{\mathcal{E}}}{\rho} - \frac{\partial q_T}{\partial x_m}, \quad q_T = -\chi \rho \frac{\partial T}{\partial x_m}, \\ \rho = \rho(p, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(p, T), \quad \gamma_{\mathcal{E}} = \gamma_{\mathcal{E}}(p, T), \quad \chi = \chi(p, T), \end{array} \right. \quad (1.52)$$

где  $t$  – время ( $t > 0$ );  $x$  – эйлерова координата частицы;  $x_m$  – лагранжева массовая координата ( $0 < x_m < m$ ,  $m$  – масса вещества в ускорителе, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения);  $H_{\mathcal{E}}$  – напряженность магнитного поля;  $E_{\mathcal{E}}$  и  $J_{\mathcal{E}}$  – напряженность электрического поля и плотность тока;  $\gamma_{\mathcal{E}}$  – электропроводность среды;  $\rho$  – плотность вещества;  $\varepsilon$  – его внутренняя энергия;  $p$  и  $T$  – давление и температура;  $q_T$  – поток энергии теплового излучения;  $\chi$  – коэффициент поглощения энергии излучения;  $v$  – скорость лагранжевых частиц [260]. В системе уравнений (1.52) отражены уравнения Максвелла, применительно к единице объема проводящей среды и уравнения движения плазмы: сохранения масс, сил, тепловой баланс [37].

Анализируя входящие в уравнения функции, можно выделить группы последовательных и параллельных переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}(x_m, t) &= |H_{\mathcal{E}}(x_m, t) \quad v(x_m, t) \quad q_T(x_m, t)|^T, \\ \mathbf{u}(x_m, t) &= |E_{\mathcal{E}}(x_m, t) \quad p(x_m, t) \quad T(x_m, t)|^T. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Выбор теплогидравлических последовательных и параллельных переменных  $(v, q_T)$  и  $(p, T)$  очевиден. Для обоснования выбора электромагнитных переменных  $E_{\mathcal{E}}$  и  $H_{\mathcal{E}}$  обратимся к электрической схеме, в которую включен канал разряда накопительной емкости (рис. 1.5). Ток, поступающий из

внешней части цепи в канал разряда, создает электромагнитное поле напряженностью по магнитной составляющей

$$H_{\mathcal{E}}(x_m, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_m = m; \\ -4\pi I(t)/C_0 & \text{при } x_m = 0, \end{cases}$$

и по электрической составляющей

$$E_{\mathcal{E}}(0, t) = L_0 dI(t)/dt + R_0 I(t) - U(t).$$

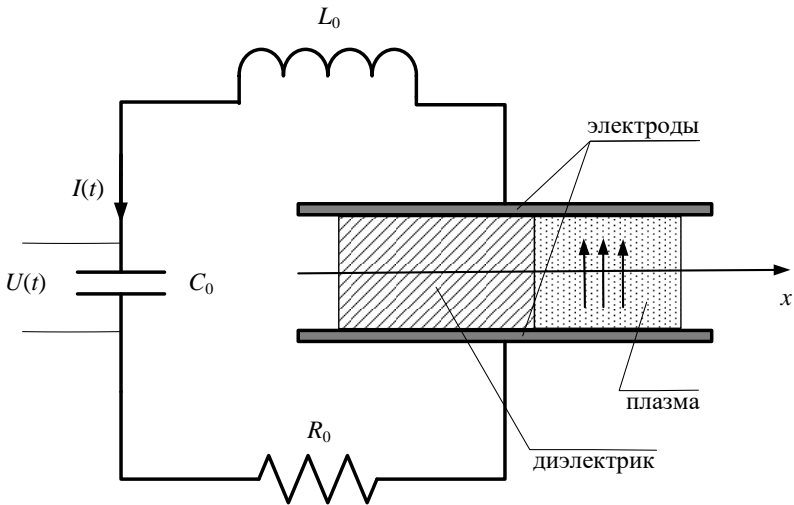


Рис. 1.5. Схема импульсного плазменного ускорителя эрозионного типа.

Из приведенных соотношений следует, что функции  $H_{\mathcal{E}}(x_m, t)$  и  $E_{\mathcal{E}}(x_m, t)$  соответствуют переменным  $I$  и  $U$  в электрической части цепи, т.е. являются последовательной и параллельной переменными, соответственно.

Относительно векторов последовательных и параллельных переменных (1.53) система уравнений (1.52) имеет вид

$$\begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_m} = r_{МГД} \mathbf{i} + L_{МГД} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + K_u^t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \\ -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x_m} = g_{МГД} \mathbf{u} + C_{МГД} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \end{cases} \quad (1.54)$$

где матрицы проводимости  $g_{MGД}$ , емкости  $C_{MGД}$ , сопротивления  $r_{MGД}$ , индуктивности  $L_{MGД}$ , а также матрица преобразования параллельных переменных  $K_u^t$ , имеют вид:

$$r_{MGД} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{\text{Э}} E_{\text{Э}} \rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^{-1} g^{-1} \end{vmatrix}, \quad L_{MGД} = \begin{vmatrix} -\rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$g_{MGД} = \begin{vmatrix} -\frac{4\pi \gamma_{\text{Э}}}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma_{\text{Э}} E_{\text{Э}}}{\rho} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad K_u^t = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial p} & \rho^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \\ 0 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \end{vmatrix},$$

$$C_{MGД} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) & \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \\ 0 & \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) & \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \end{vmatrix}.$$

В отличие от приведенных выше уравнений (1.38), (1.40), (1.44), (1.51) уравнения (1.54) содержат «пространственную» переменную  $x_m$ , имеющую смысл лагранжевой массовой координаты. При необходимости переход к эйлеровой координате  $x$  осуществляется с помощью соотношения  $v = \partial x / \partial t$ , которое может быть включено в систему уравнений (1.54) [166, 260].

Приведенные выше описания элементов энергетических цепей с распределенными параметрами и различными видами физических взаимодействий содержат уравнения энергетического баланса. Наличие этих уравнений дает некоторую свободу выбора последовательной переменной,

соответствующей потоку энтропии в цепях с сосредоточенными параметрами. В случае теплогидравлических взаимодействий вместо потока энтропии был взят поток полной энергии газового потока, а в случае магнитодинамических взаимодействий – поток теплового излучения. Выбор этих переменных значительно упрощает преобразования исходных систем уравнений. В отношении других переменных – энергетические аналогии в цепях с распределенными и с сосредоточенными параметрами совпадают.

Отметим также общность математического описания разнородных физических процессов в энергетических цепях с распределенными параметрами:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_i & g \\ r & K_u \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K'_i & C \\ L & K'_u \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \end{vmatrix}. \quad (1.55)$$

Оно отличается от описания линии электропередачи содержанием параметров преобразования последовательных и параллельных переменных. Кроме того, все параметры – матрицы, размерность которых определяется количеством учитываемых видов физических взаимодействий.

Энергетические цепи могут содержать элементы, параметры которых распределены не только по одной координате  $x$ , но и по другим пространственным координатам. Примером служат пластинчатые теплообменники. Взаимодействие тепловых потоков в пределах одной пластины (рис. 1.6, *a*) описывается двумерными уравнениями в частных производных вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{M_1}{\Pi_1 \rho_1} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\alpha_1}{c_{p1} \rho_1} \frac{\text{Пр}_1}{\Pi_1} (T_1 - T_2) &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\lambda_2}{c_{p2} \rho_2} \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{c_{p2} \rho_2} \frac{\text{Пр}_1}{\Pi_2} (T_2 - T_1) + \frac{\alpha_3}{c_{p2} \rho_2} \frac{\text{Пр}_3}{\Pi_2} (T_2 - T_3), & \quad (1.56) \\ \frac{\partial T_3}{\partial t} + \frac{M_3}{\Pi_3 \rho_3} \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\alpha_3}{c_{p3} \rho_3} \frac{\text{Пр}_3}{\Pi_3} (T_3 - T_2) &= 0, \end{aligned}$$

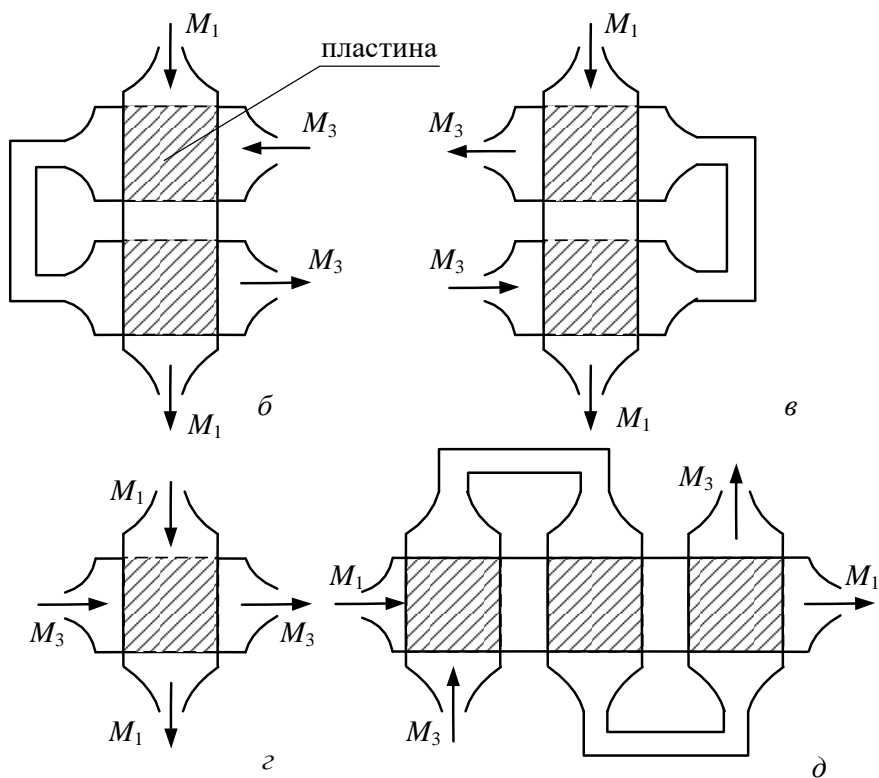
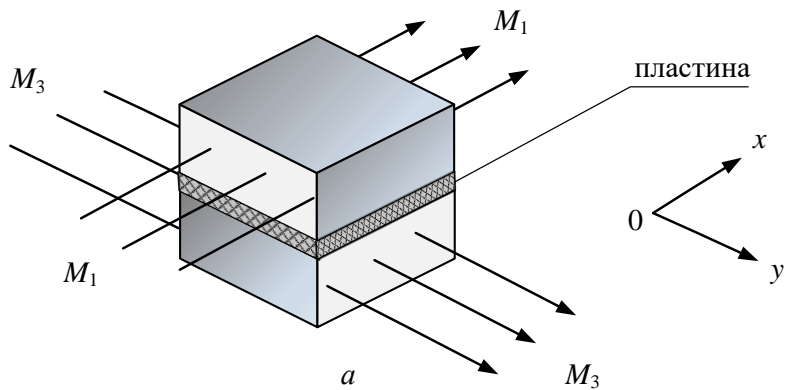


Рис. 1.6. Схемы взаимодействия тепловых потоков в теплообменниках.

где  $T_1 = T_1(x, y, t)$  и  $T_3 = T_3(x, y, t)$  – температуры потоков жидкостей, характеризуемые массовыми расходами  $M_1 = M_1(t)$  и  $M_3 = M_3(t)$ ;  $T_2 = T_2(x, y, t)$  – температура пластины, удельным весом  $\rho_2 = const$ , теплоемкостью  $c_{p2} = const$  и теплопроводностью  $\lambda_2 = const$ ;  $\alpha_1 = \alpha_1(T_1, T_2)$  и  $\alpha_3 = \alpha_3(T_2, T_3)$  – коэффициенты теплопередачи между потоками и пластиной;  $c_{p1} = c_{p1}(p_1, T_1)$  и  $\rho_1 = \rho_1(p_1, T_1)$  – теплоемкость и плотность вещества в первом потоке;  $c_{p3} = c_{p3}(p_3, T_3)$  и  $\rho_3 = \rho_3(p_3, T_3)$  – тоже во втором потоке;  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  – площади поперечного сечения потоков;  $\text{Пр}_1$  и  $\text{Пр}_3$  – их периметры;  $x$  и  $y$  – пространственные координаты;  $t$  – время. Возможные схемы организации взаимодействия потоков приведены на рис. 1.6, б – д [56, 57, 65, 68, 95, 96, 129, 291, 326, 344].

В математической модели (1.56) последовательными переменными являются потоки энергий, определяемые векторами  $\mathbf{q}_1 = \overrightarrow{M_1 T_1}$  и  $\mathbf{q}_3 = \overrightarrow{M_3 T_3}$ , а также тепловой поток в пластине  $\mathbf{J}_2 = -\lambda_2 \text{grad } T_2$ , а параллельными переменными – температуры  $T_1, T_2, T_3$ . Связь между последовательными и параллельными переменными задается выражением

$$\begin{aligned}
 -\text{div} \begin{vmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1 \text{Пр}_1}{c_{p1}} & -\frac{\alpha_1 \text{Пр}_1}{c_{p1}} & 0 \\ -\frac{\alpha_1 \text{Пр}_1}{\Pi_2} & \frac{\alpha_1 \text{Пр}_1 + \alpha_3 \text{Пр}_3}{\Pi_2} & -\frac{\alpha_3 \text{Пр}_3}{\Pi_2} \\ 0 & -\frac{\alpha_3 \text{Пр}_3}{c_{p3}} & \frac{\alpha_3 \text{Пр}_3}{c_{p3}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} \Pi_1 \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{p2} \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3 \rho_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{vmatrix}, \quad (1.57)
 \end{aligned}$$

$$-\text{grad } T_2 = \lambda_2^{-1} \mathbf{J}_2, \quad \overrightarrow{M_1 T_1} = \mathbf{q}_1, \quad \overrightarrow{M_3 T_3} = \mathbf{q}_3.$$

Сопоставляя системы уравнений (1.57) и (1.55), можно видеть несовпадение форм рассмотренных ранее одномерных моделей и двумерной модели (1.56). Различие становится еще более заметным при рассмотрении гидравлических, электромагнитных, теплогидравлических, магнитогидродинамических и других однородных и разнородных явлений на полевом уровне. Существующие системы аналогий (ЭГДА – электрогидродинамическая, МАГА – магнитогазовая, МАГДА – магнитогидродинамическая в потенциальных полях и ВЭГА – электрогидродинамическая, ЭМГА – электромагнитогидродинамическая в вихревых полях) не позволяют устранить эти различия, поскольку они ориентированы только на модели установившихся процессов [99, 313]. Для выяснения возможности использования уравнений вида (1.57) в математических моделях энергетических цепей рассмотрим способы формирования таких моделей.

#### 1.4. Математическое описание цепи

Для получения математической модели электрической цепи с сосредоточенными параметрами необходимо указать номера ее узлов, параметры ветвей и инцидентность ветвей соответствующим узлам. Тогда на основе первого и второго законов Кирхгофа можно сформировать систему интегродифференциальных линейных или нелинейных уравнений. При реализации матрично-топологических методов на ЭВМ процесс формирования математической модели цепи завершается образованием системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормализованной форме

$$\frac{dw}{dt} = f(w, t, z), \quad w(t_0) = w_0, \quad t \geq t_0, \quad (1.58)$$

где  $w$  –  $N$ -мерный вектор искомых токов и (или) напряжений;  $f(w, t, z)$  –  $N$ -мерная вектор-функция;  $z$  –  $N$ -мерный вектор внешних воздействий;  $w_0$  –  $N$ -мерный вектор значений токов и (или) напряжений в момент времени  $t_0$  [12, 36, 39, 42, 92, 170, 176, 179, 198, 200, 212, 241, 277].

Очевидно, что в случае взаимодействия  $k$  разнородных физических явлений в каждом элементе энергетической цепи с сосредоточенными  $RLC$  – матричными параметрами, процесс формирования ее математической модели можно осуществлять на основе тех же методов формирования моделей электрических цепей, образуя систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.58) размерностью в  $k$  раз большей.

Широко распространен случай, когда в различных системообразующих элементах энергетической цепи наблюдается разное количество физически неоднородных явлений. При этом может быть потеряна связность цепи по потокам различных видов энергии – тепловой, гидравлической, электромагнитной. Например, в двухконтурной схеме энергоблока с реактором водо-водяного типа (1.2) имеем односвязную цепь по потокам тепловой энергии и двухсвязную цепь по потокам механической энергии движущейся жидкости. Поэтому процесс формирования математических моделей энергетических цепей с такими специфическими физико-топологическими свойствами целесообразно осуществлять последовательно по однотипным потокам энергии, используя первый закон Кирхгофа. В результате получим интегро-дифференциальную систему уравнений вида

$$f \left( \frac{dw}{dt}, \int_{t_0}^t w(\tau) d\tau, w, t, z \right) = 0, \quad w(t_0) = y_0, \quad t \geq t_0, \quad (1.59)$$



где  $w = \{u_n(t) | n = \overline{1, N}\}$  – вектор параллельных переменных для энергетической цепи, содержащей  $N$  узлов.

Особый случай представляют энергетические цепи, содержащие элементы с распределенными параметрами. Математические модели таких цепей формируются на основе законов сохранения энергетических потоков в узлах. Основой формирования является метод узловых параллельных переменных – аналог метода узловых потенциалов в электрических цепях. Аналог метода контурных токов для энергетических цепей с распределенными параметрами не используется, так как в нестационарных режимах потоки на входе и выходе элементов не совпадают. Тем самым нарушаются условия применимости этого метода [75].

Если параллельные и последовательные переменные на границах элементов с номерами  $n = \overline{1, N}$  обозначить, соответственно, через

$$\{u_n(0, t), u_n(l, t), i_n(0, t), i_n(l, t) | n = \overline{1, N}\}, \quad (1.60)$$

а значения узловых потенциалов (узловых параллельных переменных) через

$$\{u_j(t) | j = \overline{1, j_0}\}, \quad (1.61)$$

где  $j_0$  – общее количество узлов в цепи, то математическую модель энергетической цепи с распределенными параметрами можно представить в виде

$$A \{i_n(0, t), i_n(l, t) | n = \overline{1, N}\} = \{i_j(t) | j = \overline{1, j_0}\}, \quad (1.62)$$

$$\begin{cases} u_n(0, t) = u_j(t) & \text{для } j_n^0 = j \\ u_n(l, t) = u_j(t) & \text{для } j_n^l = j \end{cases} | j = \overline{1, j_0} \quad (1.63)$$

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} u_n(x, t) \\ i_n(x, t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{un} & r_n \\ g_n & K_{in} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_n(x, t) \\ i_n(x, t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{un}^t & L_n \\ C_n & K_{in}^t \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} u_n(x, t) \\ i_n(x, t) \end{vmatrix} \right\}_{n = \overline{1, N}}. \quad (1.64)$$

Здесь  $\{a_1 | a_2\}$  – вектор с элементами  $a_1$ , упорядоченными по параметру  $a_2$ . Система уравнений (1.62) отражает первый закон Кирхгофа для последовательных переменных на границах элементов, примыкающих к узлам цепи.  $A$  – матрица соединений размерности  $(k j_0) \times (2Nk)$ ;  $i_j(t)$  – последовательные переменные внешних источников или потребителей вещества и энергии, примыкающих к узлу  $j$ . В системе уравнений (1.63) устанавливается связь между параллельными переменными на границах элементов и в узлах цепи.  $j_n^0$  и  $j_n^l$  – номера узлов, к которым примыкают соответственно левая и правая границы  $n$ -го элемента. Система уравнений (1.64) представляет совокупность математических моделей элементов энергетической цепи с распределенными параметрами.

В качестве примера рассмотрим математическую модель энергетической цепи с теплогидравлическими процессами в ее элементах. Если энергетический поток  $n$ -го элемента вблизи узла с номером  $j$  характеризуется массовым расходом  $M_n = M_n(x, t)$ , полной энергией единичной массы  $E_n = E_n(x, t)$ , давлением  $p_n = p_n(x, t)$  и температурой  $T_n = T_n(x, t)$ , то балансовые соотношения в узлах представляются системой алгебраических уравнений вида

$$\left\{ \sum_{n \in G_j^+} \left| \frac{M_n}{q_n} \right| + \left| \frac{M_{*j}}{q_{*j}} \right| = \sum_{n \in G_j^-} \left| \frac{M_n}{q_n} \right| \right\} \Bigg|_{j = \overline{1, j_0}}, \quad (1.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n = \tilde{p}_j \quad \text{для всех } n \in G_j^+ \text{ и } n \in G_j^- \\ T_n = \tilde{T}_j \quad \text{для всех } n \in G_j^- \\ E_{*j} = E_j \quad \text{при } M_{*j} < 0 \end{array} \right\} \Bigg|_{j = \overline{1, j_0}} \quad (1.66)$$

а моделям элементов соответствуют уравнения в частных производных (1.51) вида:

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} M_n \\ q_n \\ p_n \\ T_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{in} & g_{Tn} \\ r_{Tn} & K_{un} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_n \\ q_n \\ p_n \\ T_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K'_{in} & C_{Tn} \\ L_{Tn} & K'_{un} \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} M_n \\ q_n \\ p_n \\ T_n \end{vmatrix} - g_{Tn} \begin{vmatrix} p_{nn} \\ T_{nn} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Big|_{n=1, \overline{N}} \right\}, \quad (1.67)$$

где  $q = ME$ ;  $G_j^+$  и  $G_j^-$  – множества номеров элементов соответственно отдающих и потребляющих вещество в  $j$ -м узле;  $\tilde{p}_j = \tilde{p}_j(t)$  и  $\tilde{T}_j = \tilde{T}_j(t)$  – узловые давление и температура.

В случае  $M_{*j} > 0$  параметры  $M_{*j}$  и  $E_{*j}$ , которые задаются функциями времени  $M_{*j}(t)$  и  $E_{*j}(t)$ , однозначно характеризуют потоки массы и энергии, поступающие в теплогидравлическую цепь. Если множество  $G_j^+$  является пустым, то в  $j$ -м узле могут быть заданы параллельные переменные – узловые термодинамические потенциалы  $\tilde{p}_j$  и  $\tilde{T}_j$ , которые определяют потоки массы и энергии от внешних источников.

При относительной малости скоростей потоков, значительно меньших скорости звука в веществе, в соотношениях (1.65) – (1.66) допускается замена полной энергии  $E$  температурой  $T$  [197].

Как правило, энергетические цепи с распределенными параметрами неоднородны по элементному составу. Они могут содержать различного рода усилители последовательных и параллельных переменных (компрессоры, насосы), трансформаторы (теплообменные устройства), аттенюаторы (холодильники, аппараты воздушного охлаждения, дроссельные краны). В этом случае математическое описание энергетической цепи дополняется совокупностью алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений, а также уравнениями в частных производных, учитывающими многомерность процессов. Очевидно, принципиальных трудностей включения моделей таких элементов в общую модель энергетической цепи

вида (1.62) – (1.64) не возникает так, как последняя уже содержит выделенные модели элементов вида (1.64). Включаемые модели должны быть корректно составлены относительно последовательных и параллельных переменных. Кроме того, на границах элементов необходимо согласование одноименных переменных.

Например, обращаясь к двумерной математической модели пластинчатого теплообменника вида (1.57), запишем:

$$A_1 \left\{ q_{1n}(0, y, t), q_{1n}(x_0, y, t) \Big| n = \overline{1, N} \right\} = \left\{ q_{j_1}(y, t) \Big| j_1 = \overline{1, j_{10}} \right\},$$

$$\left\{ J_{2n}^x(0, y, t), J_{2n}^x(x_0, y, t), J_{2n}^y(x, 0, t), J_{2n}^y(x, y_0, t) \Big| n = \overline{1, N} \right\}, \quad (1.68)$$

$$A_2 \left\{ q_{3n}(x, 0, t), q_{3n}(x, y_0, t) \Big| n = \overline{1, N} \right\} = \left\{ q_{j_3}(x, t) \Big| j_3 = \overline{1, j_{30}} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1n}(x, y, t) \Big|_{x=0 \vee x=x_0} = T_{j_1}(y, t) \Big| j_1 = \overline{1, j_{10}} \\ T_{3n}(x, y, t) \Big|_{y=0 \vee y=y_0} = T_{j_2}(x, t) \Big| j_2 = \overline{1, j_{20}} \end{array} \right\}, \quad (1.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -div \begin{vmatrix} \mathbf{q}_{1n} \\ \mathbf{J}_{2n} \\ \mathbf{q}_{3n} \end{vmatrix} = g_n \begin{vmatrix} T_{1n} \\ T_{2n} \\ T_{3n} \end{vmatrix} + C_n \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} T_{1n} \\ T_{2n} \\ T_{3n} \end{vmatrix} \\ -grad(T_{2n}) = \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{J}_{2n}, \\ \overrightarrow{M_{1n} T_{1n}} = \mathbf{q}_{1n}, \quad \overrightarrow{M_{3n} T_{3n}} = \mathbf{q}_{3n} \end{array} \Big| n = \overline{1, N} \right\}, \quad (1.70)$$

где  $j_1, j_2$  – номера границ в пластинах, контактирующих с потоками  $M_1$  и  $M_3$ , соответственно;  $T_{j_1}(y, t), T_{j_2}(x, t)$  – граничные значения температур этих потоков;  $j_{10}, j_{30}$  – общее количество границ, выделенных в каждом из двух каналов теплоносителей;  $N$  – общее число пластин;  $J^x$  и  $J^y$  –

проекция вектора  $\mathbf{J}$ ;  $q_{j1}(y,t)$  и  $q_{j3}(x,t)$  – распределения тепловых потоков, поступающих или покидающих теплообменник на границах  $j_1$  и  $j_3$  его элементов;  $x_0$ ,  $y_0$  – геометрические размеры пластин;  $A_1$  и  $A_2$  – матрицы соединений потоков по каналам теплоносителей.

Анализируя уравнения (1.58) – (1.70), видим, что математические модели энергетических цепей представляют собой совокупность алгебраических уравнений и дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных, причем последние могут быть многомерными. Кроме того, большинство уравнений являются нелинейными.

## 1.5. Задачи анализа энергетических цепей

Все задачи теории электрических цепей делятся на два больших класса. Это задачи анализа и синтеза. Анализ включает прямые задачи и сводится к расчету токов и напряжений при заданных характеристиках элементов цепи, законах изменения действующий источников э.д.с. или т.д.с. При синтезе, т.е. при решении обратных задач, осуществляется поиск структуры цепи и характеристик ее элементов, для которых распределение токов и напряжений и их изменение во времени под действием внешних источников будут подчиняться желаемым закономерностям [12, 36, 39, 42, 170, 176, 177, 198, 241].

Так же классифицируются задачи исследования энергетических цепей, которые возникают при проектировании и эксплуатации энергетических объектов.

На этапе проектирования анализ энергетических цепей в основном сводится к расчету стационарных состояний, определяемых на множестве

характеристик элементов и топологических структур. Критериальные оценки состояний позволяют выбрать рациональную структуру, элементный состав, конструктивные параметры объекта, определить финансовые издержки на его строительство и эксплуатацию [5, 61, 86, 100, 113, 126, 129, 157, 173, 205, 214, 227, 228, 275, 296, 298, 309, 325, 327, 356]. Немногочисленные расчеты переходных режимов, выполняемых на этом этапе, используются для уточнения прочностных и конструктивных параметров ответственных элементов, для определения запаса устойчивости или границ управляемости проектируемой энергосистемы. Так, анализ переходных режимов электроэнергетических систем позволяет уточнить параметры изоляционных, токнесущих, коммутационных и других элементов линий электропередачи, мест установки аппаратуры релейной защиты на линиях и т.п. [14, 81 143, 165]. Проектные расчеты переходных режимов газопроводов выполняются совместно с прочностными расчетами труб с целью определения их сортамента и необходимых теплоизоляционных покрытий [5, 82, 327].

Несмотря на разнообразие задач анализа и синтеза, возникающих на этапе проектирования энергетических объектов, они решаются в условиях нелимитированного времени компьютерных вычислений. Кроме того, в таких условиях используются математические модели энергетических цепей разной сложности – нелинейные и линеаризованные, полные и упрощенные.

Принципиально иная ситуация наблюдается при моделировании эксплуатационных режимов энергосистемы. В этом случае потребителем информации, получаемой в процессе моделирования, является диспетчерский персонал. Необходимость получения информации в текущем или ускоренном времени при обеспечении адекватности модели и объекта создает трудности решения соответствующих задач на современных вычислительных ресурсах. Кроме того, стремление обеспечить адекватность модели и объекта стимулирует совершенствование самих моделей, которые становятся

нелинейными, учитывающими разнородные физические явления и распределенность параметров элементов.

Возникает множество задач синтеза энергетических цепей: идентификация параметров элементов, оценивание текущего состояния объекта и распознавание аварийных ситуаций, поиск оптимальных управляющих воздействий, а также множество задач анализа: прогнозирование технологически допустимых режимов функционирования и аварийных ситуаций. При этом задачи анализа и синтеза тесно связаны между собой, они становятся и решаются в рамках единого комплекса задач моделирования эксплуатационных режимов энергосистем.

Впервые комплексная постановка и решение задач были осуществлены при исследовании электроэнергетических систем [45, 119, 164, 165, 180, 188, 229, 231, 286, 308]. Однородность физических процессов и относительная простота моделей, представляемых алгебраическими и обыкновенными дифференциальными уравнениями, способствовали созданию автоматизированных средств управления такими системами. Достижения последних лет в области создания автоматизированных средств управления и опыт эксплуатации этих средств 98 энергообъединениями 20 стран мира излагаются в работе [308].

Модель энергообъединения, используемая для анализа текущей ситуации, представляет собой электрическую цепь, описываемую с помощью переменных, измеримых в узлах и ветвях. Модель состоит из двух частей - внутренней, тесно связанной каналами телеметрии с диспетчерским центром, и внешней, представляющей сопредельную часть энергообъединения. Процесс построения модели показан на рис. 1.7.

"Типичная периодичность выполнения цикла, т.е. определение текущей топологии сети и оценивание ее состояния, составляет 5-10 мин. Тем самым через каждые несколько минут становятся доступными новые данные об узловых нагрузках системы" [45]. Количество узлов моделируемой сети

достигает несколько тысяч, а время решения задач синтеза и анализа весьма ограничено. Даже при относительно простых математических моделях в виде систем алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений возникают значительные трудности решения задач. Трудности преодолеваются благодаря использованию современных численных методов, обеспечивающих высокую точность аппроксимации и согласованность дискретных уравнений с измеренными данными при эффективном решении уравнений на современной вычислительной технике.

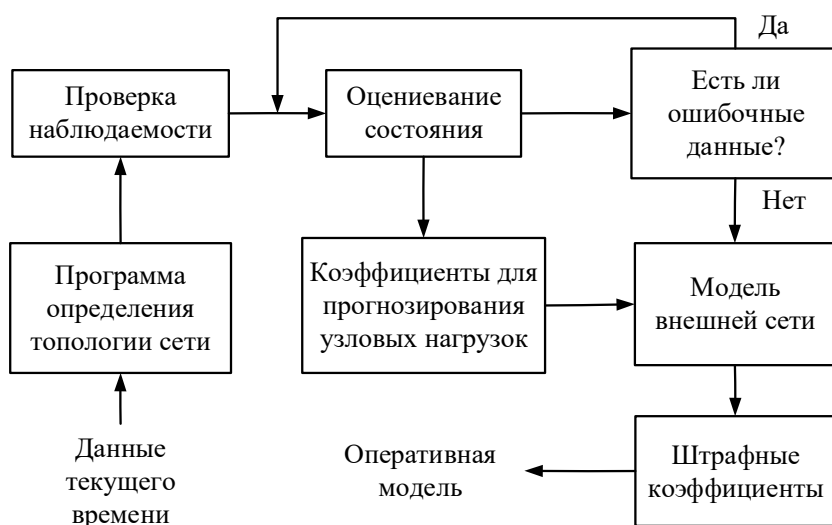


Рис. 1.7. Алгоритм построения модели энергообъединения.

Основные принципы построения моделей электроэнергетических систем в настоящее время распространяются на другие энергетические системы, например, газотранспортные [33, 47-49, 82, 885, 108, 109, 156, 175, 217, 233, 270, 282, 300, 339] и тепловые [15, 86, 87, 126, 213, 214]. Отличительной особенностью математических моделей этих систем является наличие большой совокупности уравнений в частных производных, описывающих теплогидравлические явления в элементах с распределенными



параметрами, например, в трубопроводах. Присутствие указанных элементов значительно усложняет задачи анализа и синтеза.

В настоящее время решения задач синтеза базируется на относительно простых математических моделях стационарного течения энергоносителей. Однако, особенность управления газотранспортными и тепловыми сетями состоит в том, что получаемые диспетчерским персоналом измеренные значения имеют смысл лишь в тех случаях, когда они обновляются. Это означает, что используемые математические модели в каждый момент времени должны отражать текущее состояние сетей. Очевидно, в уравнениях вида (1.62) – (1.64) эти требования учтены. В отличие от энергетических цепей с сосредоточенными параметрами, где адекватность модели и объекта достигается идентификацией коэффициентов соответствующих уравнений, в энергетических цепях с распределенными параметрами, вместе с идентификацией коэффициентов, необходимо оценивать функции граничных условий. В этом заключается сложность задачи синтеза энергетической цепи, находящейся в режиме оперативного управления.

Существует большое число аналитических и численных методов решения уравнений в частных производных. Это методы прямых, конечных и граничных элементов, интегральных преобразований (Лапласа, Фурье, Меллина, Бесселя, Гринбергера и др.), разделения переменных Фурье, функций Грина, взвешенных невязок (коллокаций, Галеркина, моментов), сведения к интегральным и дифференциальным уравнениям (подстановкой функциональной зависимости и готовых форм решения) и другие [6, 8, 13, 17, 21, 31, 32, 38, 40, 53, 63, 64, 82, 108, 125, 128, 141, 142, 153, 171, 197, 207, 219, 253-257, 260, 270, 282, 305, 314, 325, 340, 343]. Среди них лишь незначительная часть пригодна для решения систем уравнений в частных производных, определенных на некотором графе. Возможности использования этих методов для решения задач оперативного анализа и

синтеза энергетических цепей с распределенными параметрами обсуждаются в следующем разделе.

## 2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 2.1. Решение уравнений энергетической цепи с помощью интегральных преобразований Лапласа и Фурье

Интегральные преобразования Лапласа и Фурье являются основой построения аналитических и численно-аналитических методов решения линейных уравнений в обыкновенных и частных производных [38, 53, 98, 105, 160]. Эти методы широко используются для анализа переходных процессов в электрических [36, 81, 124, 125, 128, 142, 143, 151, 161, 179, 198, 200, 209, 212], гидравлических [61, 75, 76, 82, 108, 109, 140, 325, 331, 337], тепловых [56, 129, 332, 336] и механических [74, 118, 162, 163, 209, 230, 309, 323] цепях.

Рассмотрим особенности применения преобразования Лапласа к решению систем уравнений вида (1.62) – (1.64). При описании однородных физических явлений векторы  $u_n(x, t)$  и  $i_n(x, t)$  являются одномерными, а коэффициенты преобразований последовательных и параллельных переменных и их частных производных по  $t$  равны нулю

$$K_{un} = K_{in} = K_{un}^t = K_{in}^t = 0 \quad (2.1)$$

В силу этого система уравнений (1.64) принимает вид

$$-\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} u_n \\ i_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & r_n \\ g_n & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_n \\ i_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & L_n \\ C_n & 0 \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} u_n \\ i_n \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

где одномерными вектор-функциями представлены соответствующими скалярными функциями.

При неизменных параметрах  $r_n, g_n, L_n, C_n$  и заданных начальных условиях  $u_n(x,0) = u_{n0}(x), i_n(x,0) = i_{n0}(x)$ , систему уравнений в частных производных вида (2.2) легко преобразовать к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$-\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} U_n(x,s) \\ I_n(x,s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & r_n + sL_n \\ g_n + sC_n & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_n(x,s) \\ I_n(x,s) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} L_n i_{n0}(x) \\ C_n u_{n0}(x) \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{vmatrix} U_n(x,s) \\ I_n(x,s) \end{vmatrix} = \int_0^\infty e^{-st} \begin{vmatrix} u_n(x,t) \\ i_n(x,t) \end{vmatrix} dt = \mathcal{L} \left\{ \begin{vmatrix} u_n(x,t) \\ i_n(x,t) \end{vmatrix} \right\} \quad (2.4)$$

и

$$s \begin{vmatrix} U_n(x,s) \\ I_n(x,s) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{n0}(x) \\ i_{n0}(x) \end{vmatrix} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} u_n(x,t) \\ i_n(x,t) \end{vmatrix} dt = \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} u_n(x,t) \\ i_n(x,t) \end{vmatrix} \right\} \quad (2.5)$$

являются изображения по Лапласу двумерных функций  $u_n(x,t), i_n(x,t)$  и их частных производных  $\partial u_n(x,t)/\partial t, \partial i_n(x,t)/\partial t$ .

Преобразование Лапласа для системы уравнений (2.2) выполняется только по независимой переменной  $t$ , т.е. по той независимой переменной, область определения которой  $0 \leq t < \infty$  содержит точку  $t=0$ , где решение системы уравнений (2.2) известно. Область определения независимой переменной  $x$  таких точек не содержит. Поэтому дальнейшее решение уравнений (2.3) требует специальных подходов. В частности, дифференцированием по  $x$  уравнения (2.3) можно преобразовать к виду

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 U_n(x,s)}{dx^2} - (r_n + sL_n)(g_n + sC_n)U_n(x,s) &= \begin{vmatrix} \overline{N} \\ \overline{N} \end{vmatrix} \\ = L_n \frac{di_{n0}(x)}{dx} - C_n(r_n + sL_n)u_{n0}(x) & \end{aligned} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 I_n(x, s)}{dx^2} - (r_n + sL_n)(g_n + sC_n)I_n(x, s) &= \\ = C_n \frac{d}{dx} u_{n0}(x) - L_n(g_n + sC_n)i_{n0}(x) \end{aligned} \right\}_{n=\overline{1, N}} \quad (2.7)$$

Полученные неоднородные уравнения приводятся к однородным. При этом начальные условия  $u_{n0}(x)$  и  $i_{n0}(x)$  полагаются равными нулю. Решения соответствующих однородных уравнений записываются в виде [82, 98, 108, 124, 143]

$$U_n^*(x, s) = A_{n1}e^{\gamma_n x} + A_{n2}e^{-\gamma_n x}, \quad (2.8)$$

$$I_n^*(x, s) = \beta_n (A_{n2}e^{-\gamma_n x} - A_{n1}e^{\gamma_n x}), \quad (2.9)$$

где

$$\beta_n = \beta_n(s) = \sqrt{\frac{g_n + sC_n}{r_n + sL_n}}, \quad \gamma_n = \gamma_n(s) = \sqrt{(r_n + sL_n)(g_n + sC_n)},$$

а постоянные  $A_{n1}$  и  $A_{n2}$  определяются граничными условиями.

Решения неоднородных уравнений (2.6) – (2.7) представляются в виде сумм решений однородных уравнений и частных решений неоднородных уравнений. Частные решения записывают в виде интегралов свертки, содержащих функции Грина [282, 290]. Таким образом, можно найти

$$U_n(x, s) = U_n^*(x, s) + \frac{l_n - x}{l_n} U_n(0, s) + \frac{x}{l_n} U_n(l_n, s) + \int_0^{l_n} \frac{sh \gamma_n x sh \gamma_n (l_n - \xi)}{\gamma_n sh l_n \gamma_n} \times \\ \times l_n \left\{ C_n (\gamma_n + sL_n) u_{n0}(\xi) - L_n \frac{d}{d\xi} i_{n0}(\xi) - \gamma_n^2 [(l_n - \xi) U_n(0, s) + \xi U_n(l_n, s)] \right\} d\xi,$$

$$I_n(x, s) = I_n^*(x, s) + \frac{l_n - x}{l_n} I_n(0, s) + \frac{x}{l_n} I_n(l_n, s) + \int_0^{l_n} \frac{sh \gamma_n x sh \gamma_n (l_n - \xi)}{\gamma_n sh l_n \gamma_n} \times \\ \times l_n \left\{ L_n (g_n + sC_n) i_{n0}(\xi) - C_n \frac{d}{d\xi} u_{n0}(\xi) - \gamma_n^2 [(l_n - \xi) I_n(0, s) + \xi I_n(l_n, s)] \right\} d\xi.$$

Анализ полученных выражений показывает, что соответствующие интегралы не могут быть взяты в общем виде. Поэтому такие решения не находят практического применения при исследовании энергетических цепей. Обычно ограничиваются рассмотрением решений (2.8) – (2.9) [82, 98, 108, 124, 143]. При этом полагают, что функции  $u_n(x,t)$  и  $i_n(x,t)$  определяют отклонения от заданных начальных условий, либо считают, что  $u_n(x,0)=i_n(x,0)=0$ . Тогда  $u_n(x,t)=u_n^*(x,t)$  и  $i_n(x,t)=i_n^*(x,t)$ .

Полагая заданными граничными условия  $U_n(0,s)$  и  $U_n(l_n,s)$ , из (2.3), (2.8) – (2.9) найдем постоянные  $A_{n1}$  и  $A_{n2}$  и запишем выражения для последовательных переменных  $I_n(0,s)$  и  $I_n(l_n,s)$  в виде

$$\begin{vmatrix} I_n(0,s) \\ I_n(l_n,s) \end{vmatrix} = \frac{\beta_n(s)}{sh[\gamma_n(s)l_n]} \begin{vmatrix} ch[\gamma_n(s)l_n] & -1 \\ 1 & -ch[\gamma_n(s)l_n] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_n(0,s) \\ U_n(l_n,s) \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Найденная операторная форма уравнений в частных производных (1.64) используется для формирования системы балансовых уравнений энергетической цепи. Система балансовых уравнений составляется относительно параллельных узловых переменных, которые, следуя (1.63), совпадают с аналогичными переменными на границах элементов цепи. Такое формирование уравнений энергетической цепи соответствует формированию уравнений электрической цепи по методу узловых потенциалов [36, 39, 42, 92, 170, 176, 198–200].

В систему балансовых уравнений, кроме уравнений элементов с распределенными параметрами, могут быть включены уравнения элементов с сосредоточенными параметрами. Например, для цепи, изображенной на рис. 2.1, система балансовых уравнений имеет вид

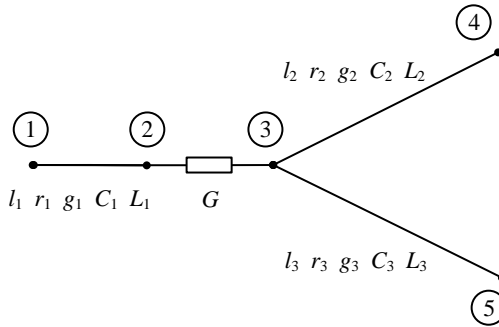


Рис. 2.1. Пример электрической цепи из элементов с распределенными и сосредоточенными параметрами

$-a_1(s)$	$b_1(s)$	0	0	0
$b_1(s)$	$-a_1(s) - G$	$G$	0	0
0	$G$	$-G - a_2(s)$ $-a_3(s)$	$b_2(s)$	$b_3(s)$
0	0	$b_2(s)$	$-a_2(s)$	0
0	0	$b_3(s)$	0	$-a_3(s)$

$$\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \\ U_4(s) \\ U_5(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1(s) \\ 0 \\ 0 \\ I_4(s) \\ I_5(s) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где  $U_j(s) = \mathcal{L}\{u_j(t)\}$ ,  $I_j(s) = \mathcal{L}\{i_j(t)\}$  – изображения по Лапласу узловых параллельных и последовательных переменных, а функции  $a_n(s)$  и  $b_n(s)$  определяются распределенными параметрами элементов и их геометрическими размерами:

$$a_n(s) = \frac{\beta_n(s) \operatorname{ch}[\gamma_n(s) l_n]}{\operatorname{sh}[\gamma_n(s) l_n]} = \sqrt{\frac{g_n + sC_n}{r_n + sL_n}} \frac{\operatorname{ch}[l_n \sqrt{(r_n + sL_n)(g_n + sC_n)}]}{\operatorname{sh}[l_n \sqrt{(r_n + sL_n)(g_n + sC_n)}}$$

$$b_n(s) = \frac{\beta_n(s)}{\operatorname{sh}[\gamma_n(s) l_n]} = \sqrt{\frac{g_n + sC_n}{r_n + sL_n}} \frac{1}{\operatorname{sh}[l_n \sqrt{(r_n + sL_n)(g_n + sC_n)}}$$

Коэффициенты уравнений (2.11) являются функциями комплексной переменной  $s$ , их решение представляет самостоятельный интерес. Так в работах [82, 282] описаны алгоритмы матрично-топологического анализа цепей с применением теории графов, а в работе [108] приведены алгоритмы специальных символьных преобразований. Оба подхода приводят к выражениям для функций  $U_n(x,s)$  и  $I_n(x,s)$ , удовлетворяющим интегральным уравнениям (2.4).

Имеющиеся в настоящее время таблицы соответствий между функциями-оригиналами и функциями-изображениями охватывают далеко не все необходимые для практики случаи. Поэтому переход от функций  $U_n(x,s)$  и  $I_n(x,s)$  к функциям  $u_n(x,t)$  и  $i_n(x,t)$  осуществляется приближенно с применением численных методов обращения, основанных на вариационных принципах и на аппроксимациях функций  $U_n(x,s)$  и  $I_n(x,s)$  степенными многочленами Тейлора, Лежандра, Чебышева, Лягерра, тригонометрическими полиномами Фурье и другими удобными для обращения функциональными зависимостями [98, 153]. В работе [153] отмечается некорректность операции обращения и связанная с ней проблема построения устойчивых численных методов обращения с равномерной сходимостью к искомым функциям.

Обратимся теперь к интегральным преобразованиям Фурье, которые широко используются при исследовании тепловых процессов. В предыдущей главе отмечалось, что тепловые цепи не содержат индуктивных элементов, т.е.  $L_n = 0$ . С учетом этого обстоятельства, а также полагая  $g_n = 0$ , и опуская индекс  $n$ , запишем систему уравнений (2.2) в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} u(x,t) \\ i(x,t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r i(x,t) \\ C \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \end{vmatrix}, \quad (2.12)$$

где



$$\frac{1}{rC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Пусть это простейшее уравнение теплопроводности описывает процессы в цепи состоящей из одного элемента бесконечной протяженности ( $-\infty < x < \infty$ ). Если в момент времени  $t=0$  ( $0 \leq t < \infty$ ) определена функция  $u(x,0)$ , то решение уравнения (2.13) можно получить, применяя интегральные преобразования Фурье.

Полагая, что функция  $f(x,t)$  удовлетворяет условиям Дирихле, запишем преобразования Фурье в виде [154]

$$F(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega x} dx = \mathcal{F}\{f(x, t)\}, \quad (2.14)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega, t)\}. \quad (2.15)$$

Так как функция  $u(x,t)$ , удовлетворяющая уравнению (2.13) и начальному условию  $u(x,0)$ , определена в области  $(-\infty, \infty)$  пространственной переменной  $x$ , то преобразования (2.14) – (2.15) применимы к уравнению (2.13). Сделав это, получим

$$\frac{dU(\omega, t)}{dt} = -\frac{\omega^2}{rC} U(\omega, t) \quad \text{при} \quad U(\omega, 0) = \mathcal{F}\{u(x, 0)\}.$$

Откуда

$$U(\omega, t) = U(\omega, 0) e^{-\frac{\omega^2}{rC} t}$$

или

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega, t)\} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{rC}}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, 0) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4rC} t} d\xi. \quad (2.16)$$

В случае ограниченной области определения независимой переменной  $x$ , например,  $0 \leq x \leq l$ , применяются конечные синус- или косинус-преобразования Фурье, а функция  $u(x,t)$  представляется по  $x$  соответствующими рядами Фурье [282]. При этом заданные граничные условия определяют ту или иную форму разложения  $u(x,t)$  в ряд.

Сопоставляя изложенные выше методы анализа энергетических цепей, можно сделать следующие выводы. Интегральные преобразования Фурье, выполняемые по пространственной координате  $x$ , применимы к отдельно взятым элементам цепи и не распространяются на цепи, содержащие несколько элементов и имеющие внутренние узлы. Интегральные преобразования Лапласа, преобразующие уравнения в частных производных по временной координате  $t$ , приводят к алгебраическим операторным выражениям, удобным для формирования уравнений энергетической цепи в целом.

Общий недостаток методов, основанных на интегральных преобразованиях, состоит в том, что они применимы для анализа только линейных цепей. Кроме того, выше мы ограничились рассмотрением случая, когда уравнения (2.2) элементов цепи описывают однородные физические явления и содержат одномерные последовательные и параллельные переменные. В случае неоднородности физических явлений, соответствующие переменные становятся векторными и объединяются уравнениями вида (1.64). Аналитические решения таких уравнений, даже после их преобразования по координате  $t$ , могут оказаться недоступными из-за большой размерности.

Очевидно, для анализа более сложных линейных и нелинейных энергетических цепей необходимо обращаться к численным методам.

## 2.2. Численные методы расчета

В настоящее время метод сеток является наиболее употребительным при численном решении уравнений в частных производных. Решение с его помощью осуществляется в три этапа. Первый этап связан с построением разностной сетки – конечного дискретного множества точек. На втором – осуществляется аппроксимация дифференциальных операторов, действующих в исходной непрерывной области, разностными операторами, действующими в сеточной области. Здесь же аппроксимируются граничные условия. В результате составляется система алгебраических уравнений, число которых определяется числом узлов сетки. На третьем этапе осуществляется решение полученной системы уравнений.

Выбранная аппроксимация операторов и граничных условий обуславливает не только характер методической погрешности численной схемы, но и трудности решения дискретных уравнений. Если для вычисления производных по пространственным координатам берутся известные значения переменных с предыдущих временных слоев, а производные по временной координате определяются значения переменных, взятых с текущего и предшествующих временных слоев, то такая аппроксимация производных приводят к явным численным схемам. Их основное достоинство проявляется в эффективно реализуемых на вычислительных ресурсах рекуррентных алгоритмах решения дискретных уравнений. Недостаток заключается в существенном ограничении шага дискретизации по временной координате, определяемом условиями Куранта для области устойчивости этих схем

$$C \leq a \frac{h_x}{h_t}, \quad (2.17)$$

где  $C$  – предельная скорость распространения возмущений в среде, например, скорость звука в газе;  $h_x$  и  $h_t$  – шаги дискретизации задачи по координатам  $x$  и  $t$  соответственно;  $a > 0$  – некоторый коэффициент, который в зависимости от модификации явной схемы (двухслойная, трехслойная схемы, схема Лакса, "чехарда" или схема Лакса-Вендрофа и другие) может принимать разные численные значения [8, 71, 122, 172, 219, 222, 254, 260]. В ряде случаев коэффициент  $a$  равен единице.

Ограничение (2.17) не позволяет получить с помощью явных численных схем решение системы уравнений (1.62) – (1.64) для стационарного режима. Этот режим удастся воспроизвести лишь приближенно, решая нестационарную задачу до установления процесса. Такой подход приводит к значительным затратам машинного времени и является неэффективным.

Более эффективными оказываются методы, основанные на применении неявных разностных схем [47, 48, 49, 54, 55, 63, 64, 156, 197, 233, 234, 269, 270]. Здесь аппроксимация производных и граничных условий осуществляется таким образом, что все переменные текущего временного слоя объединяются в единую систему алгебраических уравнений. В результате значительно возрастают вычислительные затраты на решение дискретных уравнений большой размерности. Однако такие затраты оказываются оправданными, поскольку неявные разностные схемы обеспечивают устойчивость вычислений при различных соотношениях шагов дискретизации  $h_x$  и  $h_t$ . В частности, при  $h_t \rightarrow \infty$ , т.е. полагая производные по временной координате равными нулю, имеем решение стационарной задачи [156, 269, 270].

В работах [63, 64, 156] при моделировании теплогидравлических процессов в газотранспортных системах, гидравлических явлений в устройствах пневмотранспорта и в руслах рек частные производные

аппроксимируются направленными разностями по временной координате  $t$  и центральными разностями по пространственной координате  $x$ . Например, для системы уравнений (1.64) такая аппроксимация производных имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n(x, t) \\ \mathbf{i}_n(x, t) \end{matrix} \right| \approx \frac{1}{h_t} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n(x_\mu, t_\nu) - \mathbf{u}_n(x_\mu, t_{\nu-1}) \\ \mathbf{i}_n(x_\mu, t_\nu) - \mathbf{i}_n(x_\mu, t_{\nu-1}) \end{matrix} \right| = \frac{1}{h_t} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_\nu - \frac{1}{h_t} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu-1}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n(x, t) \\ \mathbf{i}_n(x, t) \end{matrix} \right| \approx \frac{1}{2h_x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n(x_{\mu+1}, t_\nu) - \mathbf{u}_n(x_{\mu-1}, t_\nu) \\ \mathbf{i}_n(x_{\mu+1}, t_\nu) - \mathbf{i}_n(x_{\mu-1}, t_\nu) \end{matrix} \right| = \frac{1}{2h_x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu, \mu+1} - \frac{1}{2h_x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu, \mu-1}, \quad (2.19)$$

где  $x_\mu = \mu h_x$ ;  $t_\nu = \nu h_t$ ;  $\nu = 0, 1, \dots$ ;  $\mu = 1, 2, \dots, \mu_n - 1$ ; ( $\mu_n = l_n / h_x$ ). В граничных узлах используются направленные разности

$$\frac{\partial}{\partial x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n(0, t) \\ \mathbf{i}_n(0, t) \end{matrix} \right| \approx \frac{1}{h_x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu, 1} - \frac{1}{h_x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu, 0}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n(l_n, t) \\ \mathbf{i}_n(l_n, t) \end{matrix} \right| \approx \frac{1}{h_x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu, \mu_n} - \frac{1}{h_x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu, \mu_n-1}. \quad (2.21)$$

В результате такой аппроксимации производных система уравнений (1.64) представляется в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2h_x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu, \mu-1} - \frac{1}{2h_x} \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu, \mu+1} \right\} = \left| \begin{matrix} K_{un} & r_n \\ g_n & K_{in} \end{matrix} \right|_\nu \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_\mu + \\ & + \frac{1}{h_t} \left| \begin{matrix} K_{un}^t & L_n \\ C_n & K_{in}^t \end{matrix} \right|_\nu \left( \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_\nu - \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu-1} \right) \Big|_{\mu=1, \mu_n-1}, \\ & \frac{1}{h_x} \left( \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu, 0}^{\bar{\nu}} - \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu, 1}^{\bar{\nu}} \right) = \left| \begin{matrix} K_{un} & r_n \\ g_n & K_{in} \end{matrix} \right|_0 \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_0 + \frac{1}{h_t} \left| \begin{matrix} K_{un}^t & L_n \\ C_n & K_{in}^t \end{matrix} \right|_0 \left( \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_0 - \left| \begin{matrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{matrix} \right|_{\nu-1, 0} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{h_x} \left( \begin{array}{c} \left| \mathbf{u}_n \right|_{\bar{\mu}} \\ \left| \mathbf{i}_n \right|_{\mu_n} \end{array} \Big|_{\nu} - \begin{array}{c} \left| \mathbf{u}_n \right|_{\bar{\mu}} \\ \left| \mathbf{i}_n \right|_{\mu_n} \end{array} \Big|_{\nu-1} \right) = \begin{array}{c} K_{un} \\ g_n \end{array} \begin{array}{c} \left| \bar{\mu} \right| \\ \left| \nu \right| \end{array} \begin{array}{c} \left| \mathbf{u}_n \right|_{\mu_n} \\ \left| \mathbf{i}_n \right|_{\mu_n} \end{array} \Big|_{\nu} + \frac{1}{h_t} \begin{array}{c} K_{un}^t \\ C_n \end{array} \begin{array}{c} \left| \bar{\mu} \right| \\ \left| \nu \right| \end{array} \begin{array}{c} \left| \mathbf{u}_n \right|_{\mu_n} \\ \left| \mathbf{i}_n \right|_{\mu_n} \end{array} \Big|_{\nu-1} \left( \begin{array}{c} \left| \mathbf{u}_n \right|_{\bar{\mu}} \\ \left| \mathbf{i}_n \right|_{\mu_n} \end{array} \Big|_{\nu} - \begin{array}{c} \left| \mathbf{u}_n \right|_{\bar{\mu}} \\ \left| \mathbf{i}_n \right|_{\mu_n} \end{array} \Big|_{\nu-1} \right) \\ \text{при } \nu = 0, 1, \dots; n = \overline{1, N} \} \quad (2.22)$$

Здесь параметры  $\bar{\nu}$  и  $\bar{\mu}$  указывают на то, что соответствующие подсистемы системы уравнений (2.22) аппроксимируют те уравнения системы (1.64), которые соответствуют характеристическим направлениям, приходящим на границу области определения  $x$  [197, 260]. В частности, если последовательные переменные на границах удовлетворяют условиям  $\mathbf{i}_n(0, t_\nu) \geq \mathbf{0}$  и  $\mathbf{i}_n(l_n, t_\nu) \geq \mathbf{0}$ , где вектор  $\mathbf{0}$  составлен из нулевых элементов, то в указанных подсистемах вычеркивается верхняя половина строк. При этом параметры  $\bar{\nu}$  и  $\bar{\mu}$  принимают целочисленные значения от единицы до значения размерности векторов  $\mathbf{i}_n(x, t)$  и  $\mathbf{u}_n(x, t)$ .

Одновременно с дискретизацией уравнений элементов (1.64) осуществляется дискретизация узловых уравнений цепи (1.62) – (1.63). В результате имеем

$$A \left\{ \mathbf{i}_n(0, t_\nu), \mathbf{i}_n(l_n, t_\nu) \Big| n = \overline{1, N} \right\} = \left\{ \mathbf{i}_j(t_\nu) \Big| j = \overline{1, j_0} \right\}, \quad (2.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_n(0, t_\nu) = \mathbf{u}_j(t_\nu) \quad \text{для } j_n^0 = j \\ \mathbf{u}_n(l_n, t_\nu) = \mathbf{u}_j(t_\nu) \quad \text{для } j_n^l = j \end{array} \Big| j = \overline{1, j_0} \right\}. \quad (2.24)$$

Система дискретных уравнений (2.22) – (2.24) имеет большую размерность, поскольку объединяет как «внешние» узловые переменные, так и «внутренние» переменные элементов энергетической цепи. В качестве примера на рис. 2.2 представлена структура матрицы алгебраизованной модели газотранспортной сети, изображенной на рис. 2.3. Пример взят из работы [156].

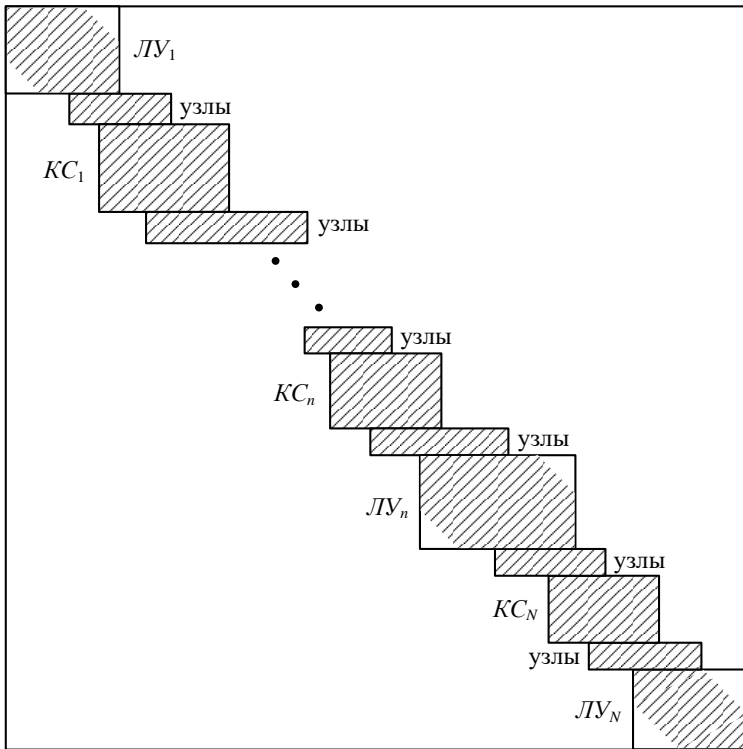


Рис. 2.2. Структура матрицы алгебраической модели магистрального газопровода.

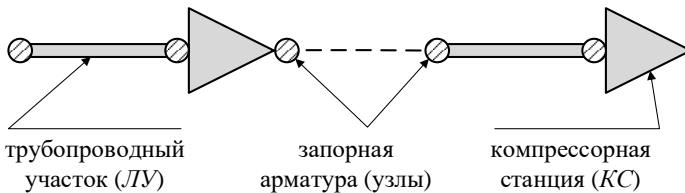


Рис. 2.3. Схема магистрального газопровода

Сама по себе большая размерность не создает принципиальных трудностей на пути разработки эффективных алгоритмов решения системы алгебраических уравнений [97, 223, 334]. Однако, в случае моделирования

энергетических цепей такие препятствия возникают из-за плохой обусловленности системы, вызванной разнообразием учитываемых физических явлений, различия скоростей протекания процессов и существенного разброса значений коэффициентов уравнений, отражающих различные физические законы.

Исследования показывают, что число обусловленности алгебраических систем уравнений увеличивается при увеличении числа  $N$  – общего количества элементов, учитываемых в модели (2.22) – (2.24) энергетической цепи. Если количество элементов не превышает трех-десяти, то вычисления устойчивы. В противном случае имеет место неконтролируемый рост вычислительной погрешности.

Неустойчивость вычислений исчезает при использовании «системы граничных условий», которая вытекает из разностных уравнений (2.22). «Цель построения этой системы граничных условий заключается в том, чтобы, во-первых, выразить неизвестные параметры потока на концах отрезков через параметры в вершине и, во-вторых, исключить эти неизвестные на концах отрезков из балансовых соотношений» [197, стр.55]. В нашем случае параметры потока представляются векторами  $u_n(x,t)$ , и  $i_n(x,t)$ , а параметры в вершинах – векторами  $u_j(t)$  и  $i_j(t)$ .

Для исключения неизвестных во внутренних узлах разностной сетки в работах [63, 64, 197] предлагается модифицированный метод прогонки. Метод рассматривается применительно к уравнениям одномерного нестационарного течения газа в трубах, где неизвестными являются функции массового расхода  $M_n(x,t)$ , давления  $p_n(x,t)$  и температуры  $T_n(x,t)$ . В результате применения метода к системе дискретных уравнений газовой динамики, подобной системе уравнений (2.22), для  $n$ -го элемента можно получить систему связи граничных параметров в виде



$$\begin{vmatrix} M_n(0, t_v) \\ M_n(l_n, t_v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_n(0, t_v) \\ T_n(0, t_v) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_n(l_n, t_v) \\ T_n(l_n, t_v) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}. \quad (2.25)$$

Если  $M(0, t_v) \leq 0$ , то к уравнениям (2.25) добавляется уравнение

$$T_n(0, t_v) = d_{11}p_n(0, t_v) + d_{12}p_n(l_n, t_v) + d_{13}T_n(l_n, t_v) + c_3, \quad (2.26)$$

если  $M_n(l_n, t) \geq 0$ , то добавляется уравнение

$$T_n(l_n, t_v) = d_{21}p_n(0, t_v) + d_{22}p_n(l_n, t_v) + d_{23}T_n(0, t_v) + c_4. \quad (2.27)$$

Поскольку уравнения (2.25) – (2.26) получены в результате тождественных преобразований дискретных уравнений элементов, то вместе с уравнениями (1.65) – (1.66) они образуют замкнутую систему, в которой неизвестными являются узловые и граничные параметры газового потока. Для решения таких систем в работе [197] предлагаются различные итерационные процедуры эффективно реализуемые на вычислительных ресурсах.

Соотношение (2.25) сопоставимо с операторным соотношением (2.10). Здесь последовательные переменные на границах  $M_n(0, t_v)$  и  $M_n(l_n, t_v)$  выражены через параллельные переменные  $p_n(0, t_v)$ ,  $T_n(0, t_v)$  и  $p_n(l_n, t_v)$ ,  $T_n(l_n, t_v)$  в тех же точках пространства. Отличие состоит в том, что не все указанные параллельные переменные тождественны узловым переменным, и поэтому из соотношений (2.25) непосредственно нельзя сформировать систему балансовых уравнений энергетической цепи подобно тому, как это осуществляется в операторных методах на основе интегральных преобразований Лапласа.

Метод матричной прогонки с параметрами, исключаяющий «внутренние» неизвестные элементов энергетической цепи, ориентирован на одномерные уравнения. Он не может быть использован в случае многомерных уравнений, которыми описываются, например, пластинчатые теплообменники, поскольку матрицы соответствующих дискретных уравнений не имеют трехдиагональной структуры.

Рассмотренные неявные разностные схемы обеспечивают устойчивость вычислений при различных шагах дискретизации пространственных и временных независимых переменных, но обладают низкой аппроксимационной точностью, что ограничивает возможности интегрирования уравнений в частных производных с большими шагами дискретизации [156, 197].

Существенное повышение аппроксимационной точности обеспечивают методы, основанные на дифференциальных и локально-интегральных преобразованиях, а также на основе преобразований Лагранжа.

### 2.3. Дифференциальные преобразования и их применение к анализу энергетических цепей

Дифференциальные преобразования основаны на возможности представления аналитической функции  $f(t)$  рядом Тейлора [238–240, 243–244]. При этом формулы прямого и обратного преобразований имеют вид соответственно

$$F(\mu, t_0) = \left\{ \frac{d^\mu f(t)}{dt^\mu} \right\}_{t=t_0}, \quad (2.28)$$

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^k F(\mu, t_0) \frac{(t-t_0)^\mu}{\mu!}, \quad (2.29)$$

где  $F(\mu, t_0)$  – тейлоровское изображение функции  $f(t)$  в точке  $t_0$ , представляющее собой функцию целочисленного аргумента  $\mu$ .

В случае функции двух переменных  $f(x, t)$  прямое и обратное преобразования представляются выражениями

$$F(\nu, \mu, x_0, t_0) = \left\{ \frac{\partial^{\nu+\mu} f(x, t)}{\partial^\nu x \partial^\mu t} \right\}_{x=x_0, t=t_0}, \quad (2.30)$$

$$f(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \sum_{\nu+\mu=m} F(\nu, \mu, x_0, t_0) \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} \frac{(t-t_0)^\mu}{\mu!}. \quad (2.31)$$

Дифференциальные преобразования одномерных функций широко используются при решении задач Коши.

Например, для линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d \mathbf{w}(t)}{dt} = a \mathbf{w}(t) + f(t) \quad (2.32)$$

с начальными условиями  $\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0$ , используя преобразование (2.28), найдем

$$\mathbf{W}(\mu + 1, t_0) = a \mathbf{W}(\mu, t_0) + \mathbf{F}(\mu, t_0). \quad (2.33)$$

Учитывая начальные условия, имеем простую рекуррентную процедуру вычисления составляющих изображения  $\mathbf{W}(\mu, t_0)$  искомой вектор-функции  $\mathbf{w}(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(0, t_0) &= \mathbf{w}_0, \\ \mathbf{W}(1, t_0) &= a \mathbf{w}_0 + \mathbf{F}(0, t_0), \\ \mathbf{W}(2, t_0) &= a \mathbf{W}(1, t_0) + \mathbf{F}(1, t_0) = a^2 \mathbf{w}_0 + a \mathbf{F}(0, t_0) + \mathbf{F}(1, t_0) \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Применив обратное преобразование (2.29) к найденному изображению  $\mathbf{W}(\mu, t_0)$ , найдем

$$\tilde{\mathbf{w}}(t) = \sum_{\mu=0}^k \mathbf{W}(\mu, t_0) \frac{(t-t_0)^\mu}{\mu!}, \quad (2.35)$$

где  $\tilde{\mathbf{w}}(t)$  аппроксимирует функцию  $\mathbf{w}(t)$ .

Описанная процедура реализует численно-аналитический метод решения задачи (2.32) и относится к классу явных Т-методов [244].

Характерной особенностью аппроксимации функций степенными многочленами вида (2.35) является монотонная зависимость погрешности от величины  $(t - t_0)$ , причем пропорционально величине  $(t - t_0)^{k+1}$  [32]. Для устранения таких явлений в работах [239, 244] предлагаются другие способы аппроксимации функций, не использующие многочлены Тейлора в обратном преобразовании и названные преобразованиями нетейлоровского типа. Здесь, вместо аппроксимирующей функции (2.35), используются дробно-рациональные функции, тригонометрические полиномы, многочлены Лагерра, Чебышева, Якоби и разные комбинации этих и других функций. Выбор функциональных зависимостей определяется априорной информацией о характере решений. В частности, выбор дробно-рациональной функции определяется поведением решений при  $t \rightarrow \infty$ , когда решения представляются в виде

$$\tilde{w}_\nu(t) = \frac{\alpha_{0\nu} + \alpha_{1\nu}t + \dots + \alpha_{l\nu}t^l}{1 + \beta_{1\nu}t + \dots + \beta_{q\nu}t^q}, \quad l + q = k, \quad (2.36)$$

где  $\tilde{w}_\nu(t)$  –  $\nu$ -й элемент вектора  $\tilde{w}(t)$ . Неопределенные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  находятся путем перехода к изображениям и сопоставления значений  $\tilde{W}_\nu(\mu, t_0)$  с соответствующими значениями элементов векторов  $W(\mu, t_0)$ , найденными по формулам (2.34).

Численно-аналитические методы, построенные таким образом, оказываются эффективными для линейных и нелинейных задач Коши. Однако они не могут быть использованы при решении краевых задач, т.е. в тех случаях, когда условия, дополняющие дифференциальные уравнения, не могут быть заданы при одном значении аргумента.

Действительно, обращаясь к уравнениям (2.2) энергетической цепи с распределенными параметрами и переходя от них согласно (2.30) к изображениям, найдем

$$\left\{ \begin{array}{l} -U_n(\nu+1, \mu, x_0, t_0) = r_n I_n(\nu, \mu, x_0, t_0) + L_n I_n(\nu, \mu+1, x_0, t_0) \\ -I_n(\nu+1, \mu, x_0, t_0) = g_n U_n(\nu, \mu, x_0, t_0) + C_n U_n(\nu, \mu+1, x_0, t_0) \end{array} \right|_{n=1, N} \quad (2.37)$$

Для заданных начальных условий  $u_n(x, t_0)$  и  $i_n(x, t_0)$  имеем  $U_n(\nu, 0, x_0, t_0)$  и  $I_n(\nu, 0, x_0, t_0)$ . Граничные функции  $u_n(0, t)$ ,  $i_n(0, t)$  и  $u_n(l_n, t)$ ,  $i_n(l_n, t)$ , удовлетворяющие условиям (1.62) – (1.63), имеют изображения  $U_n(0, \mu, 0, t_0)$ ,  $I_n(0, \mu, 0, t_0)$  и  $U_n(0, \mu, l_n, t_0)$ ,  $I_n(0, \mu, l_n, t_0)$ , которые удовлетворяют условиям

$$A \left\{ I_n(0, \mu, 0, t_0), I_n(0, \mu, l_n, t_0) \right|_{n=1, N} \} = \left\{ I_j(\mu, t_0) \right|_{j=1, j_0} \}, \quad (2.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_n(0, \mu, 0, t_0) = U_j(\mu, t_0) & \text{для } j_n^0 = j \\ U_n(0, \mu, l_n, t_0) = U_j(\mu, t_0) & \text{для } j_n^l = j \end{array} \right|_{j=1, j_0} \}. \quad (2.39)$$

Система дискретных уравнений (2.37) – (2.39) не может быть решена непосредственно, как это было сделано при решении уравнения (2.33) для задачи Коши. Здесь недостает связей между изображениями функций  $u_n(x, t)$  и  $i_n(x, t)$ , найденными в точках  $(x_0, t_0)$ ,  $(0, t_0)$  и  $(l_n, t_0)$ . Такие связи можно установить, используя обратное преобразование (2.31). Тогда

$$U_n(0, \mu, 0, t_0) = \sum_{\nu=\mu}^k U_n(\nu, \mu, x_0, t_0) \frac{(-x_0)^\nu}{\nu!}, \quad (2.40)$$

$$I_n(0, \mu, 0, t_0) = \sum_{\nu=\mu}^k I_n(\nu, \mu, x_0, t_0) \frac{(-x_0)^\nu}{\nu!}, \quad (2.41)$$

$$U_n(0, \mu, l_n, t_0) = \sum_{\nu=\mu}^k U_n(\nu, \mu, x_0, t_0) \frac{(l_n - x_0)^\nu}{\nu!}, \quad (2.42)$$

$$I_n(0, \mu, l_n, t_0) = \sum_{\nu=\mu}^k I_n(\nu, \mu, x_0, t_0) \frac{(l_n - x_0)^\nu}{\nu!}. \quad (2.43)$$

Эти соотношения позволяют преобразовать систему дискретных уравнений (2.37) – (2.39) к такому виду, когда неизвестными являются дискреты  $\left\{ U_n(v, \mu, x_0, t_0), I_n(v, \mu, x_0, t_0) \mid v + \mu = \overline{0, k} \right\}$ .

В отличие от рассмотренных выше численных методов алгебраизации уравнений энергетической цепи, численно-аналитические методы, основанные на дифференциальных преобразованиях (2.28) – (2.31), Обеспечивает высокую точность аппроксимации уравнений. Численные схемы для решения задачи Коши (2.32) и для решения уравнений в частных производных (2.2) имеют порядок точности  $k$ . Однако, такие схемы являются явными и имеют тот же недостаток, что и явные конечноразностные схемы – они неустойчивы при больших шагах дискретизации временной координаты. Попытка же использовать неявные Г-методы, предпринятая в работах [48, 156], натолкнулись на значительные трудности при их компьютерной реализации, особенно в случаях, когда системы уравнений (2.2) оказываются нелинейными. Такие методы порождают алгебраические системы большой размерности с практически полностью заполненными матрицами. Многократное решение алгебраических систем большой размерности в задачах оперативного управления требует недопустимо больших вычислительных затрат. Кроме того, жесткие условия (2.38) – (2.39) сопряжения тейлоровских изображений неизвестных на границах элементов и в узлах цепи выполнимы для конечных значений соответствующих частных производных. В задачах моделирования энергетических цепей это требование в ряде случаев не выполняется, например, при различного рода коммутациях, связанных с подключением – отключением элементов, а также при скачкообразном характере изменений граничных условий цепи.

В силу указанных причин дифференциальные преобразования уравнений вида (2.2) осуществляются по временной координате  $t$ , а по

пространственной координате  $x$  используются конечноразностные методы аппроксимации [244]. В частности, после дискретизации уравнений (2.2) по  $x$  и аппроксимации соответствующих частных производных центральными и направленными разностями (2.19) – (2.21), запишем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u_n(0,t) \\ i_n(0,t) \end{vmatrix}^{\bar{v}} &= \begin{vmatrix} -g_n C_n^{-1} & (C_n h_x)^{-1} \\ (L_n h_x)^{-1} & -r_n L_n^{-1} \end{vmatrix}^{\bar{v}} \begin{vmatrix} u_n(0,t) \\ i_n(0,t) \end{vmatrix}^{\bar{v}} + \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & -(C_n h_x)^{-1} \\ -(L_n h_x)^{-1} & 0 \end{vmatrix}^{\bar{v}} \begin{vmatrix} u_n(x_1,t) \\ i_n(x_1,t) \end{vmatrix}^{\bar{v}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u_n(x_m,t) \\ i_n(x_m,t) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & (2C_n h_x)^{-1} \\ (2L_n h_x)^{-1} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_n(x_{m-1},t) \\ i_n(x_{m-1},t) \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} -\frac{g_n}{C_n} & 0 \\ 0 & -\frac{r_n}{L_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_n(x_m,t) \\ i_n(x_m,t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & (-2L_n h_x)^{-1} \\ (-2L_n h_x)^{-1} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_n(x_{m+1},t) \\ i_n(x_{m+1},t) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u_n(l_n,t) \\ i(l_n,t) \end{vmatrix}^{\bar{\mu}} &= \begin{vmatrix} 0 & C_n^{-1} h_x^{-1} \\ L_n^{-1} h_x^{-1} & 0 \end{vmatrix}^{\bar{\mu}} \begin{vmatrix} u_n(l_n - h_x, t) \\ i_n(l_n - h_x, t) \end{vmatrix}^{\bar{\mu}} + \\ &+ \begin{vmatrix} -g_n / C_n & -C_n^{-1} h_x^{-1} \\ -L_n^{-1} h_x^{-1} & -r_n / L_n \end{vmatrix}^{\bar{\mu}} \begin{vmatrix} u_n(l_n, t) \\ i_n(l_n, t) \end{vmatrix}^{\bar{\mu}}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

где  $x_m = mh_x$ ;  $m = \overline{1, M-1}$ ;  $h_x = i_n / M$ ; параметры  $\bar{v}$  и  $\bar{\mu}$  определяются характеристическими направлениями на границах  $n$ -го элемента цепи и указывают на удаляемые строки в соответствующих равенствах, так же как в равенствах (2.22).

Уравнения (2.44) – (2.46), вместе с уравнениями (2.38) – (2.39), при заданных начальных условиях представляют собой задачу Коши. Ее решение осуществляется с помощью дифференциальных преобразований вида (2.28) – (2.29) аналогично решению задачи Коши вида (2.32).

К сожалению такой подход к решению уравнений (1.62) – (1.64) по-прежнему требует ограниченности производных на границах элементов и в

узлах цепи. Кроме того, применение высокоточных методов аппроксимации производных по одной независимой переменной  $t$  в сочетании с грубой аппроксимацией производных по другой независимой переменной  $x$  не может приводить к существенному повышению точности решения задачи.

## 2.4. Преобразования Лагранжа

В 50-х годах проблемы нелинейной электротехники определили разработку точечного исчисления [167, 236-237, 240-241, 284]. Тогда впервые была реализована идея о возможности представления функций некоторым набором чисел, а операторов дифференцирования и интегрирования – соответствующими матрицами.

В точечном исчислении рассматривались такие функции  $f(t)$ , которые можно представить на отрезке  $[0, T]$  суммой некоторых известных функций  $\varphi_\mu(t)$  в виде

$$f(t) = \sum_{\mu=0}^k \alpha_\mu \varphi_\mu(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.47)$$

где  $\alpha_\mu$  – весовые коэффициенты. В работах [42, 44, 201, 241] в качестве функций  $\varphi_\mu(t)$  использовались степенные и тригонометрические функции.

Рассмотрим случай, когда

$$\varphi_\mu(t) = \frac{t(t-h)(t-2h)\dots(t-\mu h+h)(t-\mu h-h)\dots(t-T+h)}{\mu h(\mu h-h)(\mu h-2h)\dots h(-h)\dots(\mu h-T+h)}, \quad (2.48)$$

где  $h = T/k$ . Тогда функция (2.47) является интерполяционной формулой Лагранжа. На ее основе легко построить прямое преобразование



$$\alpha_{\mu} = F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \mu h) dt = f(\mu h) \quad (2.49)$$

и обратное преобразование

$$f(t) = \sum_{\mu=0}^k F(\mu) \varphi_{\mu}(t), \quad (2.50)$$

которые будем называть преобразованиями Лагранжа.

Если множество значений функции  $F(\mu)$  целочисленного аргумента  $\mu$  представить в виде вектора

$$\mathbf{F} = [f(0) \quad f(h) \quad \dots \quad f(T)]^T, \quad (2.51)$$

то получим изображение по Лагранжу функции  $f(t)$ .

Дифференцируя выражение (2.47) по переменной  $t$  и переходя к изображениям, последовательно найдем

$$y(t) = \frac{df(t)}{dt} = \sum_{\mu=0}^k F(\mu) \frac{d\varphi_{\mu}(t)}{dt}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}(k) \mathbf{F}, \quad (2.53)$$

где  $\mathbf{D}(k)$  – матрица дифференцирования

$$\mathbf{D}(k) = \begin{vmatrix} \varphi_0'(0) & \varphi_1'(0) & \dots & \varphi_k'(0) \\ \varphi_0'(h) & \varphi_1'(h) & \dots & \varphi_k'(h) \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ \varphi_0'(T) & \varphi_1'(T) & \dots & \varphi_k'(T) \end{vmatrix}. \quad (2.54)$$

Матрицы дифференцирования могут быть также построены на основе известных формул численного дифференцирования [240].

При построении матричных операторов интегрирования обращаются к соотношению

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \sum_{\mu=0}^k F(\mu) \int_0^t \varphi_{\mu}(\tau) d\tau. \quad (2.55)$$

Откуда

$$Y = I(k)F, \quad (2.56)$$

где  $I(k)$  – искомая матрица интегрирования:

$$I(k) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \int_0^h \varphi_0(\tau) d\tau & \int_0^h \varphi_1(\tau) d\tau & \dots & \int_0^h \varphi_k(\tau) d\tau \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \int_0^{2h} \varphi_0(\tau) d\tau & \int_0^{2h} \varphi_1(\tau) d\tau & \dots & \int_0^{2h} \varphi_k(\tau) d\tau \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^T \varphi_0(\tau) d\tau & \int_0^T \varphi_1(\tau) d\tau & \dots & \int_0^T \varphi_k(\tau) d\tau \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.57)$$

При одинаковых значениях параметра  $k$  операторы интегрирования и дифференцирования лагранжевых изображений не являются взаимобратными. Поэтому, применяя их к решению одного и того же дифференциального уравнения, можно получить различные результаты [241].

Алгебраизация уравнений в частных производных с помощью преобразований Лагранжа может осуществляться в различных вариантах [240].

Рассмотрим вариант, при котором сначала осуществляется дискретизация пространственной координаты  $x$  с аппроксимацией соответствующих частных производных конечными разностями. При этом уравнения (2.2) преобразуются в уравнения (2.44) – (2.46). Полученные обыкновенные дифференциальные уравнения алгебраизуются с помощью преобразований Лагранжа. В результате преобразований имеем

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} \mathcal{D}^t(k) \mathbf{U}_n(0) \\ \mathcal{D}^t(k) \mathbf{I}_n(0) \end{array} \right|^{\bar{v}} &= \left| \begin{array}{cc} -\frac{g_n}{C_n} & \frac{1}{C_n h_x} \\ \frac{1}{L_n h_x} & -\frac{r_n}{L_n} \end{array} \right|^{\bar{v}} \left| \begin{array}{c} \mathbf{U}_n(0) \\ \mathbf{I}_n(0) \end{array} \right| + \\ &+ \left| \begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{C_n h_x} \\ -\frac{1}{L_n h_x} & 0 \end{array} \right|^{\bar{v}} \left| \begin{array}{c} \mathbf{U}_n(x_1) \\ \mathbf{I}_n(x_1) \end{array} \right|, \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} \mathcal{D}^t(k) \mathbf{U}_n(x_m) \\ \mathcal{D}^t(k) \mathbf{I}_n(x_m) \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{2C_n h_x} \\ \frac{1}{2L_n h_x} & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{U}_n(x_{m-1}) \\ \mathbf{I}_n(x_{m-1}) \end{array} \right| + \\ &+ \left| \begin{array}{cc} -\frac{g_n}{C_n} & 0 \\ 0 & -\frac{r_n}{L_n} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{U}_n(x_m) \\ \mathbf{I}_n(x_m) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{2C_n h_x} \\ -\frac{1}{2L_n h_x} & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{U}_n(x_{m+1}) \\ \mathbf{I}_n(x_{m+1}) \end{array} \right|, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} \mathcal{D}^t(k) \mathbf{U}_n(l_n) \\ \mathcal{D}^t(k) \mathbf{I}_n(l_n) \end{array} \right|^{\bar{\mu}} &= \left| \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{C_n h_x} \\ \frac{1}{L_n h_x} & 0 \end{array} \right|^{\bar{\mu}} \left| \begin{array}{c} \mathbf{U}_n(l_n - h_x) \\ \mathbf{I}_n(l_n - h_x) \end{array} \right| + \\ &+ \left| \begin{array}{cc} -\frac{g_n}{C_n} & -\frac{1}{C_n h_x} \\ -\frac{1}{L_n h_x} & -\frac{r_n}{L_n} \end{array} \right|^{\bar{\mu}} \left| \begin{array}{c} \mathbf{U}_n(l_n) \\ \mathbf{I}_n(l_n) \end{array} \right|, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где  $m = \overline{1, M-1}$ ;  $\mathbf{U}_n(x_m)$  и  $\mathbf{I}_n(x_m)$  – изображения по Лагранжу функций  $u_n(x_m, t)$  и  $i_n(x_m, t)$ , взятые по координате  $t$ ;  $\mathcal{D}^t(k)$  – матричные операторы дифференцирования по  $t$ ;  $n = \overline{1, N}$ .

Применив преобразование Лагранжа к граничным условиям (1.62) – (1.63), для одномерных векторов последовательных и параллельных переменных найдем

$$A_L \left\{ \mathbf{I}_n(0), \mathbf{I}_n(l_n) \mid n = \overline{1, N} \right\} = \left\{ \mathbf{I}_j \mid j = \overline{1, j_0} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_n(0) = \mathbf{U}_j \quad \text{для} \quad j_n^0 = j \\ \mathbf{U}_n(l_n) = \mathbf{U}_j \quad \text{для} \quad j_n^l = j \end{array} \mid j = \overline{1, j_0} \right\}, \quad (2.61)$$

где  $\mathbf{I}_j$  и  $\mathbf{U}_j$  – изображения по Лагранжу функций  $i_j(t)$  и  $u_j(t)$ , а матрица  $A_L$  отличается от матрицы  $A$  тем, что состоит из матричных элементов, полученных из соответствующих элементов матрицы  $A$  путем их умножения на единичную матрицу размерности  $(k+1) \times (k+1)$ .

В замкнутой системе уравнений (2.58) – (2.61) оказываются неучтенными начальные условия, что является следствием применения преобразований Лагранжа по независимой переменной  $t$ . Для учета начальных условий в работах [240–241] предлагается два подхода. Первый – связан с применением методов минимизации невязок, например, метода наименьших квадратов. Второй подход состоит в использовании матричных операторов интегрирования  $\mathbf{I}(k)$  для алгебраизации уравнений, предварительно записанных в интегральной форме. Тогда начальные условия учитываются естественным образом при аппроксимации операторов интегрирования.

Применение преобразований Лагранжа по координате  $t$  приводит к неявным численным схемам, которые отличаются от традиционных схем тем, что имеют высокую точность аппроксимации соответствующих частных производных. При этом в  $(k+1)$  раз увеличивается размерность дискретных систем уравнений. Отсюда следуют трудности реализации таких методов, аналогичные неявным схемам для тейлоровских преобразований. Отличие от последних заключается в отсутствии производных в граничных условиях (2.61) для лагранжевых изображений.

Использование преобразований Лагранжа для дискретизации уравнений (1.64) по пространственной координате  $x$  не представляется возможным, поскольку соответствующие матричные операторы не позволяют учитывать граничные условия (1.62) – (1.63), которые должны выполняться точно, а не в смысле средних квадратов.

Отмеченные выше трудности использования преобразований Лагранжа для алгебраизации уравнений энергетической цепи в значительной мере устраняются, если обратиться к локально-интегральным преобразованиям.

## 2.5. Анализ энергетических цепей с помощью локально-интегральных преобразований

Локально-интегральные преобразования кусочно-непрерывной функции  $f(t)$  основаны на соотношениях [26–31]

$$F(v) = \frac{1}{h_t} \int_{(v-1)h_t}^{vh_t} f(t) dt = \mathcal{L}_i\{f(t)\}, \quad (2.62)$$

$$f(t) = \mathcal{L}_i^{-1}\{F(v)\} = \lim_{v_0 \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{v_0} F(v) \mathbf{1}_v(h_t, t), \quad (2.63)$$

где  $t \in [0, T)$ ;  $h_t = \frac{T}{v_0}$ ;

$$\mathbf{1}_v(h_t, t) = \begin{cases} 1, & t \in [(v-1)h_t, vh_t), \\ 0, & t \notin [(v-1)h_t, vh_t). \end{cases} \quad (2.64)$$

Если интервал осреднения  $\xi_t h_t$  не совпадает с шагом дискретизации  $h_t$ , выражение (2.62) имеет вид [29–31]

$$F(v) = \frac{1}{\xi_t h_t} \int_{(v-\xi_t)h_t}^{vh_t} f(t) dt. \quad (2.65)$$

Операторы интегрирования и дифференцирования в области изображений представляются матрицами, элементы которых, как и изображения  $F(v)$ , зависят от величины параметра осреднения  $\xi_t$ . При решении задачи Коши в каждой строке алгебраизованного уравнения реализуется многошаговая численная схема [29]. В частности, при  $\xi_t = 0$  и  $\xi_t = 1$  реализуются численные схемы, соответственно, методов Гира и методов Адамса. Методы Гира, уступая методам Адамса в точности, обладают абсолютной устойчивостью и предназначены для решения жестких уравнений [249, 287, 334]. Если  $0 < \xi_t < 1$ , то соответствующие численные схемы отличаются от схем методов Гира и Адамса.

Указанные особенности численных схем, основанных на локально-интегральных преобразованиях, сохраняются при решении уравнений в частных производных. В этом случае осуществляется покоординатное преобразование функций. Тогда характеристики численных схем решения уравнений в частных производных будут зависеть от значений параметров покоординатного осреднения  $\xi_t$  и  $\xi_x$ .

Пусть функция  $f(x, t)$  определена на множестве значений  $t \in [0, T)$  и  $x \in [0, l_n)$ . Тогда ее средними значениями будут

$$F(v, \mu) = \frac{1}{\xi_t h_t} \int_{(v-\xi_t)h_t}^{vh_t} \frac{1}{\xi_x h_x} \int_{(\mu-\xi_x)h_x}^{\mu h_x} f(x, t) dx dt. \quad (2.66)$$

Средние значения можно находить путем покоординатных преобразований

$$F(v, x) = \frac{1}{\xi_t h_t} \int_{(v-\xi_t)h_t}^{vh_t} f(x, t) dt, \quad (2.67)$$

$$F(v, \mu) = \frac{1}{\xi_x h_x} \int_{(\mu - \xi_x) h_x}^{\mu h_x} F(v, x) dx. \quad (2.68)$$

Здесь и выше  $v = \overline{1, v_0}$ ;  $\mu = \overline{1, \mu_0}$ ;  $h_t = \frac{T}{v_0}$ ;  $h_x = \frac{l_n}{\mu_0}$ .

В работах [30, 270] локально-интегральные преобразования (2.67) – (2.68) использованы для построения параметрических численных схем решения одномерных уравнений нестационарного неизотермического течения газа в трубах.

Воспользуемся преобразованиями (2.67) – (2.68) для алгебраизации системы уравнений (2.2) энергетической цепи.

На первом этапе преобразований решим систему уравнений относительно частных производных по  $t$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} u_n(x, t) \\ i_n(x, t) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} g_n C_n^{-1} & 0 \\ 0 & r_n L_n^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_n(x, t) \\ i_n(x, t) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & C_n^{-1} \\ L_n^{-1} & 0 \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} u_n(x, t) \\ i_n(x, t) \end{vmatrix} \quad (2.69)$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{w}_n(x, t)}{\partial t} = A_n \mathbf{w}_n(x, t) + B_n \frac{\partial \mathbf{w}_n(x, t)}{\partial x}. \quad (2.70)$$

Используя выражение (2.67), запишем уравнение (2.70) в виде

$$W_n^t(v, x) = A_n W_n(v, x) + B_n \frac{\partial W_n(v, x)}{\partial x}, \quad (2.71)$$

где

$$W_n(v, x) = \frac{1}{\xi_t h_t} \int_{(v - \xi_t) h_t}^{v h_t} \begin{vmatrix} u_n(x, t) \\ i_n(x, t) \end{vmatrix} dt, \quad (2.72)$$

$$W_n^t(v, x) = \frac{1}{\xi_t h_t} \int_{(v - \xi_t) h_t}^{v h_t} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} u_n(x, t) \\ i_n(x, t) \end{vmatrix} dt. \quad (2.73)$$

Аппроксимируя по  $t$  функции  $u_n(x, t)$  и  $i_n(x, t)$  интерполяционными полиномами Ньютона  $k$ -го порядка с интерполяцией назад, преобразуем уравнение (2.71) к виду

$$\mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t) - h_t \tilde{b}_0 \left[ A_n \mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t) + \frac{\partial \mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t)}{\partial x} \right] = \gamma_n(x, \mathcal{V}_t), \quad (2.74)$$

где

$$\gamma_n(x, \mathcal{V}_t) = \sum_{q=1}^k \left\{ \tilde{a}_q \mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t - qh_t) + h_t \tilde{b}_q \left[ A_n \mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t - qh_t) + B_n \frac{\partial \mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t - qh_t)}{\partial x} \right] \right\}.$$

Фиксируя  $x$ , отметим, что уравнение (2.74) определяет параметрическую многошаговую схему для координаты  $t$ . Эта схема по форме совпадает с многошаговой схемой, используемой в работе [29] для решения задачи Коши. При  $1 \leq \nu \leq k - 1$  соотношение (2.74) реализуется путем последовательного увеличения вместе с номером  $\nu$  значения параметра  $k$ , начиная с  $k=1$ . Такая процедура определяет начало таблицы многошаговой схемы.

Весовые коэффициенты  $\tilde{a}_q$  и  $\tilde{b}_q$  являются функциями параметра осреднения  $\xi_t$ . Покажем это на примере, выбрав интерполяцию 2-го порядка с узлами  $t_\nu = \mathcal{V}_t$ ,  $t_{\nu-1} = (\nu-1)h_t$ ,  $t_{\nu-2} = (\nu-2)h_t$ . В этом случае для любой непрерывной функции  $f(x, t)$  можно записать

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f(x, t_\nu) + \frac{\Delta f(x, t_\nu)}{1! h_t} (t - t_\nu) + \frac{\Delta^2 f(x, t_\nu)}{2! h_t^2} (t - t_\nu)(t - t_{\nu-1}), \\ \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \frac{\Delta f(x, t_\nu)}{h_t} + \frac{\Delta^2 f(x, t_\nu)}{h_t^2} \left( t + \frac{t_\nu + t_{\nu-1}}{2} \right), \\ F(\nu, x) &= f(x, t_\nu) - \frac{\xi_t}{2} \Delta f(x, t_\nu) - \frac{\xi_t}{4} \left( 1 - \frac{2\xi_t}{3} \right) \Delta^2 f(x, t_\nu), \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$F^t(\nu, x) = \frac{\Delta f(x, t_\nu)}{h_t} + \frac{1 - \xi_t}{2h_t} \Delta^2 f(x, t_\nu), \quad (2.76)$$



где  $\Delta f(x, t_\nu) = f(x, t_\nu) - f(x, t_{\nu-1})$ ,  $\Delta^2 f(x, t_\nu) = \Delta f(x, t_\nu) - \Delta f(x, t_{\nu-1})$ . Учитывая (2.75) – (2.76), представим уравнение (2.74) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta w_n(x, \nu h_t)}{h_t} + \frac{1 - \xi_t}{2h_t} \Delta^2 w_n(x, \nu h_t) = \\ & = A_n w_n(x, \nu h_t) + B_n \frac{\partial w_n(x, \nu h_t)}{\partial x} \\ & - \frac{\xi_t}{2} \Delta \left[ A_n w_n(x, \nu h_t) + B_n \frac{\partial w_n(x, \nu h_t)}{\partial x} \right] - \\ & - \frac{\xi_t}{4} \left( 1 - \frac{2\xi_t}{3} \right) \Delta^2 \left[ A_n w_n(x, \nu h_t) + B_n \frac{\partial w_n(x, \nu h_t)}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, после перегруппировки членов и их умножения на коэффициент  $2h_t/(3 - \xi_t)$ , получим

$$\begin{aligned} & w_n(x, \nu h_t) + h_t \tilde{b}_0 \left[ A_n w_n(x, \nu h_t) + B_n \frac{\partial w_n(x, \nu h_t)}{\partial x} \right] = \\ & = \tilde{a}_1 w_n(x, \nu h_t - h_t) + \tilde{a}_2 w_n(x, \nu h_t - 2h_t) + \\ & + h_t b_1 \left[ A_n w_n(x, \nu h_t - h_t) + B_n \frac{\partial w_n(x, \nu h_t - h_t)}{\partial x} \right] + \\ & + h_t \tilde{b}_2 \left[ A_n w_n(x, \nu h_t - 2h_t) + B_n \frac{\partial w_n(x, \nu h_t - 2h_t)}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \frac{4 - 2\xi_t}{3 - \xi_t}, & \tilde{a}_2 &= \frac{\xi_t - 1}{3 - \xi_t}, \\ \tilde{b}_0 &= \frac{12 - 9\xi_t + 2\xi_t^2}{18 - 6\xi_t}, & \tilde{b}_1 &= \frac{2\xi_t}{3}, & \tilde{b}_2 &= \frac{2\xi_t^2 - 3\xi_t}{18 - 6\xi_t}. \end{aligned}$$

Зависимость коэффициентов  $\tilde{a}_q$  и  $\tilde{b}_q$  от параметра осреднения  $\xi_t$  можно использовать при адаптации численной схемы к решаемой задаче.

Таким образом, на первом этапе преобразования система уравнений (2.2) аппроксимируется обыкновенными дифференциальными уравнениями

(2.74) с граничными условиями (1.62) – (1.63). При этом точность аппроксимации имеет  $k$ -й порядок.

На втором этапе система уравнений (2.74) переводится в область изображений преобразованием вида (2.68) по пространственной координате  $x$ . С этой целью уравнение (2.74) решается относительно производной

$$\frac{\partial \mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t)}{\partial x} = \mathbf{y}_n(x, \mathcal{V}_t), \quad (2.77)$$

$$\mathbf{y}_n(x, \mathcal{V}_t) = \left( h_t \tilde{b}_0 B_n \right)^{-1} \left[ \mathbf{y}_n(x, \mathcal{V}_t) - \mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t) + h_t \tilde{b}_0 A_n \mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t) \right]$$

и записывается в области изображений дважды

$$\frac{1}{\xi_x h_x} \int_{(\mu - \xi_x) h_x}^{\mu h_x} \frac{\partial \mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t)}{\partial x} dx = \frac{1}{\xi_x h_x} \int_{(\mu - \xi_x) h_x}^{\mu h_x} \mathbf{y}_n(x, \mathcal{V}_t) dx, \quad \mu = \overline{1, \mu_0}, \quad (2.78)$$

$$\frac{1}{\xi_x h_x} \int_{(\mu_0 - \tilde{\mu}) h_x}^{\mu_0 - (\tilde{\mu} - \xi_x) h_x} \frac{\partial \mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t)}{\partial x} dx = \frac{1}{\xi_x h_x} \int_{(\mu_0 - \tilde{\mu}) h_x}^{\mu_0 - (\tilde{\mu} - \xi_x) h_x} \mathbf{y}_n(x, \mathcal{V}_t) dx, \quad \tilde{\mu} = \overline{\mu_0 - 1, 0}. \quad (2.79)$$

Соотношения (2.78) и (2.79) аппроксимируют краевую задачу (2.77) внутри интервала  $[0, l_n]$  так, что выражение (2.78) связано с правой границей, а выражение (2.79) – с левой.

Используя интерполяционные полиномы Ньютона первого порядка с интерполяцией назад и вперед для представления функций  $\mathbf{w}_n(x, \mathcal{V}_t)$  и  $\mathbf{y}_n(x, \mathcal{V}_t)$  и суммируя равенства (2.78) и (2.79) при одинаковых индексах  $\mu$  и  $\tilde{\mu}$ , получаем систему алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{w_n(h_x, \nu h_t) - w_n(0, \nu h_t)}{h_x} = \\
= \frac{2 - \xi_x}{2} y_n(0, \nu h_t) + \frac{\xi_x}{2} y_n(h_x, \nu h_t), \\
\frac{w_n((\mu + 1)h_x, \nu h_t) - w_n((\mu - 1)h_x, \nu h_t)}{2h_x} = \\
= \frac{2 - \xi_x}{2} y_n(\mu h_x, \nu h_t) + \frac{\xi_x}{4} [y_n((\mu + 1)h_x, \nu h_t) + y_n((\mu - 1)h_x, \nu h_t)], \\
\frac{w_n(\mu_0 h_x, \nu h_t) - w_n((\mu_0 - 1)h_x, \nu h_t)}{h_x} = \\
= \frac{2 - \xi_x}{2} y_n(\mu_0 h_x, \nu h_t) + \frac{\xi_x}{2} y_n((\mu_0 - 1)h_x, \nu h_t),
\end{array} \right. \quad (2.80)$$

где  $n = \overline{1, N}$ ;  $\mu = \overline{1, \mu_0 - 1}$ ;  $\nu = \overline{1, 2, \dots}$

При  $\xi_x = 0$  система уравнений (2.80) определяет центрально-разностную аппроксимацию уравнения (2.74). При  $\xi_x = 1$  на границах аппроксимация более высокого порядка, поскольку осреднение в правой части первого и последнего равенств системы (2.80) осуществляется по методу трапеций. Если же  $\xi_x = 2/3$ , то аппроксимация внутри интервала  $[0, l_n]$  соответствует формуле Симпсона, имеющей четвертый порядок точности.

Таким образом, в результате покоординатного преобразования системы уравнений (2.69), в области изображений можно получить численные схемы, свойства которых определяются параметрами осреднения  $\xi_t$  и  $\xi_x$ .

Дискретная модель элементов энергетической цепи вида (2.80) является линейной, поскольку получена в предположении неизменности параметров  $r_n$ ,  $g_n$ ,  $L_n$ ,  $C_n$ . В работе [30] применен тот же способ для дискретизации нелинейных уравнений нестационарного неизотермического

течения газа в трубах, где последовательные и параллельные переменные  $\mathbf{i}_n(x,t)$  и  $\mathbf{u}_n(x,t)$  являются двумерными векторами.

Получаемые при этом системы алгебраических уравнений имеют большую размерность, а матрицы – трехдиагональную структуру. В работе [270] описан модифицированный метод матричной прогонки с параметрами, исключающий внутренние неизвестные в таких системах. Там же показано, как выделением последовательных и параллельных переменных на границах элементов цепи дискретные уравнения типа (2.80) преобразуются к виду

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_n(0, \mathcal{V}_t) \\ \mathbf{i}_n(l_n, \mathcal{V}_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_n(1,1) & G_n(1,2) \\ G_n(2,1) & G_n(2,2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n(0, \mathcal{V}_t) \\ \mathbf{u}_n(l_n, \mathcal{V}_t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_n(1) \\ V_n(2) \end{pmatrix}, \quad (2.81)$$

где матрицы  $G_n(1,1)$ ,  $G_n(1,2)$ ,  $G_n(2,1)$ ,  $G_n(2,2)$  и векторы  $V_n(1)$ ,  $V_n(2)$  вычисляются в ходе преобразований.

Уравнение (2.81) подобно уравнению (2.10), полученному с помощью преобразований Лапласа. Отличием уравнения (2.81) является то, что оно содержит численные операторы и называется численным операторным уравнением элементов энергетической цепи.

С помощью операторных уравнений (2.81) легко формируется система балансовых уравнений в узлах расчетной схемы цепи [272]. Она отличается от исходной дискретной системы уравнений небольшой размерностью и простотой программной реализации. Ее решение осуществляется эффективным методом блочной  $LU$ -факторизации.

Описанные выше методы и алгоритмы использованы в программных комплексах моделирования стационарных и нестационарных режимов магистральных газопроводов [233, 272].

К недостаткам численных методов, основанных на локально-интегральных преобразованиях, следует отнести трудности учета начальных и граничных условий, характерные для всех многошаговых численных схем. В силу этого имеет место низкая аппроксимационная точность решения

уравнений энергетических цепей с переменной топологией и скачкообразным изменением граничных условий. Кроме того, покоординатное преобразование многомерных функций может быть использовано только в случае прямоугольной области определения. Если же элемент энергетической цепи имеет плоскую или объемную непрямоугольную форму, то такие преобразования соответствующих уравнений и функций неприменимы.

## **2.6. Основные требования к методам исследования энергетических цепей на вычислительных ресурсах**

Возможности рассмотренных в этой главе анализа энергетических цепей с распределенными параметрами систематизированы в таблице 2.1.

Основные требования, предъявляемые к методам анализа, можно объединить в три группы.

Требования первой группы вытекают из рассмотренных в первой главе математических моделей элементов энергетических цепей. Эти требования связаны с необходимостью обеспечения высокой аппроксимационной точности при алгебраизации нелинейных уравнений в частных производных с различными по форме областями определения решений.

Требования второй группы связаны с необходимостью объединения разнородных математических моделей элементов в модель энергетической цепи. Здесь необходимы методы и специальные алгоритмы преобразования сложных математических моделей элементов к простому операторному виду, где последовательные переменные на границах элементов выражаются через параллельные переменные в узлах цепи.

Таблица 2.1.

Свойства методов решения задач моделирования энергетических цепей

Свойство	Методы решения задач моделирования цепей					
	численные, основанные на разностных схемах:		численно-аналитические, основанные на преобразованиях Лапласа	численные операторные, основанные на преобразованиях:		
	явных	неявных		Лагранжа	дифференциальных	локально-интегральных
Решение нелинейных уравнений	да	да	нет	да	да	да
Получение негладких решений	да	да	да	да	нет	да
Порядок аппроксимации решений по времени	низкий	низкий	высокий	высокий	высокий	высокий
Порядок аппроксимации решений по пространству	низкий	низкий	метод не применяется	низкий	метод не применяется	низкий
Разнообразие форм области решений	да	да	да	да	да	нет
Формирование операторных уравнений элементов цепи	нет	нет	да	да	да	да
Сложность программной реализации	нет	да	нет	да	нет	да
Вычислительная сложность	нет	нет	нет	да	нет	нет

Требования третьей группы обусловлены необходимостью решения задач моделирования энергетических цепей для служб оперативного управления. Сюда относятся требования о негладкости граничных условий, обусловленной коммутациями в цепи и резкими изменениями режимных параметров, а также требования по быстродействию и к занимаемой оперативной памяти.

Сравнительный анализ показывает, что ни один из рассмотренных выше численных и численно-аналитических методов в полном объеме не удовлетворяет этим требованиям. Здесь нужны специальные численные операторные методы, сочетающие возможности численных методов алгебраизации сложных уравнений элементов и возможности операторных методов Лапласа для преобразования алгебраизованных уравнений и составления уравнений цепи в целом. Ниже рассматриваются преобразования Ньютона, порождающие такие методы.

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЬЮТОНА

#### 3.1. Прямое и обратное преобразования одномерных функций

Если в основе дифференциальных преобразований аналитической функции  $x(t)$  лежит ряд Тейлора вида

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k X_T(i, \tau) T(i, t - \tau), \quad (3.1)$$

где

$$X_T(i, \tau) = \left\{ \frac{d^i x(t)}{dt^i} \right\}_{t=\tau}, \quad (3.2)$$

$$T(i, t - \tau) = \frac{(t - \tau)^i}{i!}, \quad (3.3)$$

то в основе  $\mathcal{N}$  – преобразований аналитической и целой функции  $x(t)$  лежит ряд Ньютона вида

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k X_N(i, \tau, h) N(i, t - \tau, h), \quad (3.4)$$

где

$$X_N(i, \tau, h) = \left\{ \frac{\Delta^i x(t)}{h^i} \right\}_{t=\tau}, \quad (3.5)$$

$$N(i, t - \tau, h) = \frac{(t - \tau)(t - \tau + h) \dots (t - \tau + ih - h)}{i!}. \quad (3.6)$$



$\Delta$  – разностный оператор:  $\Delta x(t) = x(t) - x(t-h)$ ,  $\Delta^2 x(t) = \Delta x(t) - \Delta x(t-h)$ ,  
 ...,  $\Delta^k x(t) = \Delta^{k-1} x(t) - \Delta^{k-1} x(t-h)$  [13, 17, 32].

Формулы (3.4) и (3.5) как формулы (3.1) и (3.2), связывают множество коэффициентов  $\left\{ X_N(i, \tau, h) \middle| i = \overline{1, \infty} \right\}$  или, соответственно,  $\left\{ X_T(i, \tau) \middle| i = \overline{1, \infty} \right\}$  с функцией  $x(t)$ , порождая прямое и обратное преобразования.

Получим изображения некоторых элементарных функций. С этой целью введем обозначение для прямого и обратного преобразований

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\{x\} &= X_N(i, \tau, h), \\ \mathcal{X}^{-1}\{X_N\} &= x(t). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Подставив в первое из выражений (3.5) функцию  $x(t) = c = const$ , найдем

$$\mathcal{X}\{c\} = \frac{\Delta^i}{h^i} c = \begin{cases} c, & i = 0, \\ 0, & i \geq 1. \end{cases}$$

Если  $x(t) = e^{\alpha t}$ , то

$$\mathcal{X}\{e^{\alpha t}\} = \left\{ \frac{\Delta^i}{h^i} e^{\alpha t} \right\}_{t=\tau} = \begin{cases} e^{\alpha \tau}, & i = 0, \\ \left( \frac{1 - e^{-\alpha h}}{h} \right) e^{\alpha \tau}, & i \geq 1. \end{cases}$$

Для  $x(t) = c^t$  имеем

$$\mathcal{X}\{c^t\} = \left\{ \frac{\Delta^i}{h^i} c^t \right\}_{t=\tau} = \begin{cases} c^\tau, & i = 0, \\ \left( \frac{1 - c^{-h}}{h} \right) c^\tau, & i \geq 1. \end{cases}$$

В случае  $x(t) = t^l$ , где  $l$  – целое число, последовательно находим

$$\mathcal{X}\{t\} = \left\{ \frac{\Delta^i}{h^i} t \right\}_{t=\tau} = \begin{cases} \tau, & i = 0, \\ 1, & i = 1, \\ 0, & i \geq 2, \end{cases}$$

$$\mathcal{X}\{t^2\} = \left\{ \frac{\Delta^i}{h^i} t^2 \right\}_{t=\tau} = \begin{cases} \tau^2, & i=0, \\ 2\tau-h, & i=1, \\ 2, & i=2, \\ 0, & 1 \geq 3, \end{cases}$$

$$\mathcal{X}\{t^l\} = \left\{ \frac{\Delta^i}{h^i} t^l \right\}_{t=\tau} = \begin{cases} \tau^l, & i=0, \\ \varphi_i, & 1 \leq i \leq l-1, \\ l!, & i=l, \\ 0, & i \geq l+1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i = & \sum_{n_1=1}^l (-h)^{n_1-1} \frac{l(l-1)\dots(l-n_1+1)}{n_1!} \times \\ & \times \sum_{n_2=1}^{l-n_1} (-h)^{n_2-1} \frac{(l-n_1)(l-n_1-1)\dots(l-n_1-n_2+1)}{n_2!} \times \dots \times \\ & \times \sum_{n_i=1}^{l-n_1-\dots-n_{i-1}} (-h)^{n_i-1} \times \\ & \times \frac{(l-n_1-\dots-n_{i-1})(l-n_1-\dots-n_{i-1}-1)\dots(l-n_1-\dots-n_{i-1}-n_i+1)}{n_i!} \times \\ & \times \tau^{l-n_1-\dots-n_i}. \end{aligned}$$

Изображение тригонометрических функций  $x(t) = \sin(\omega t)$  и  $x(t) = \cos(\omega t)$  имеют вид, соответственно,

$$\mathcal{X}\{\sin(\omega t)\} = \left\{ \frac{\Delta^i}{h^i} \sin(\omega t) \right\}_{t=\tau} = \left( \frac{2}{h} \sin \frac{\omega t}{2} \right)^i \sin \left( \omega \tau + i \frac{\pi - \omega h}{2} \right)$$

и

$$\mathcal{X}\{\cos(\omega t)\} = \left\{ \frac{\Delta^i}{h^i} \cos(\omega t) \right\}_{t=\tau} = \left( \frac{2}{h} \sin \frac{\omega h}{2} \right)^i \cos \left( \omega \tau + i \frac{\pi - \omega h}{2} \right).$$

Очевидно, в случае произвольной функции  $x(t)$  функцию  $X_N(i, \tau, h)$ , для заданных значений параметров  $h$  и  $\tau$ , можно легко образовать из набора значений  $x(\tau)$ ,  $x(\tau - h)$ ,  $x(\tau - ih)$ .

Между преобразованиями (3.1) – (3.2) и (3.4) – (3.5) существует тесная взаимосвязь. Для ее установления прибегнем к нетрадиционным формам записи этих преобразований, используя обобщенную  $\delta$ -функцию. Тогда, вместо соотношений (3.2) и (3.5), определяющих прямые преобразования, будем иметь соответственно

$$\begin{aligned} X_T(i, \tau) &= \left\{ \frac{d^i x(t)}{dt^i} \right\}_{t=\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (-1)^i \delta^{(i)}(t - \tau) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{i!}{(t - \tau)^i} \delta(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) T^{-1}(i, t - \tau) \delta(t - \tau) dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

и

$$\begin{aligned} X_N(i, \tau, h) &= \left\{ \frac{\Delta^i}{h^i} x(t) \right\}_{t=\tau} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{l=0}^i \frac{i! (t - \tau + lh)}{(t - \tau)(t - \tau + h) \dots (t - \tau + ih)} \delta(t - \tau + lh) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{l=0}^i \frac{(t - \tau + lh) \delta(t - \tau + lh)}{(t - \tau + ih) N(i, t - \tau, h)} dt, \end{aligned} \quad (3.9)$$

так как  $x(t) \delta(t - \tau) = x(\tau) \delta(t - \tau)$ .

С учетом тождеств (3.8) и (3.9) легко установить, что

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} X_N(i, t - \tau, h) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \sum_{l=0}^i \frac{(t - \tau + lh) \delta(t - \tau + lh)}{(t - \tau + ih) N(i, t - \tau, h)} \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \lim_{h \rightarrow 0} \left[ (-1)^i \frac{\Delta^i}{h^i} \delta(t - \tau + ih) \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (-1)^i \delta^{(i)}(t - \tau) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) T^{-1}(i, t - \tau) \delta(t - \tau) dt = X_T(i, \tau). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Следовательно, прямое  $\mathcal{X}$ -преобразование в пределе при  $h \rightarrow 0$  переходит в прямое дифференциальное преобразование. В случае конечных

$h$  эти преобразования подобны в отношении систем функций, по которым осуществляются разложения функции  $x(t)$ .

Система степенных многочленов, используемых в дифференциальных преобразованиях

$$T(0, t - \tau) = 1, \quad T(1, t - \tau) = \frac{t - \tau}{1!}, \quad T(2, t - \tau) = \frac{(t - \tau)^2}{2!}, \dots$$

удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dt} T(i, t - \tau) = T(i - 1, t - \tau).$$

Система факториальных многочленов

$$N(0, t - \tau, h) = 1, \quad N(1, t - \tau, h) = \frac{t - \tau}{1!}, \quad N(2, t - \tau, h) = \frac{(t - \tau)(t - \tau + h)}{2!}, \dots,$$

используемых в  $\mathcal{X}$ -преобразованиях, удовлетворяют условию

$$\frac{\Delta}{h} N(i, t - \tau, h) = N(i - 1, t - \tau, h).$$

Таким образом, дифференциальный или конечноразностный оператор, действуя на  $i$ -й элемент соответствующей системы функций, переводит его в  $(i - 1)$ -й элемент этой системы.

Для определения условий сходимости ряда Ньютона рассмотрим систему факториальных многочленов  $\{\Phi\}$  с элементами

$$\Phi\left(i, \frac{t - \tau}{h}, 1\right) = h^{-i} N(i, t - \tau, h) = \frac{t - \tau \left(\frac{t - \tau}{h} + 1\right) \dots \left(\frac{t - \tau}{h} + i - 1\right)}{i!}$$

и запишем ряд Ньютона в виде

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k h^i X_N(i, \tau, h) \Phi\left(i, \frac{t - \tau}{h}, 1\right). \quad (3.11)$$

Последовательность факториальных многочленов  $\{\Phi\}$  для любого вещественного значения  $\left| \frac{t-\tau}{h} \right| \leq 1$ , начиная с некоторого  $i > M$ , является монотонной и ограниченной, т.е.

$$0 < \frac{\Phi\left(i+1, \frac{t-\tau}{h}, 1\right)}{\Phi\left(i, \frac{t-\tau}{h}, 1\right)} = \frac{\frac{t-\tau}{h} + i}{i+1} \leq 1 \quad \text{при} \quad M > \left| \frac{t-\tau}{h} \right|.$$

Согласно признаку Абеля, ряд (3.11) сходится, если ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} h^i X_N(i, \tau, h) = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i x(\tau). \quad (3.12)$$

На основе признака Даламбера получим

$$\left| \frac{\Delta^{i+1} x(\tau)}{\Delta^i x(\tau)} \right| = \left| 1 - \frac{\Delta^i x(\tau-h)}{\Delta^i x(\tau)} \right| < 1. \quad (3.13)$$

Таким образом, условия сходимости ряда (3.4) требуют, чтобы функция  $x(t)$  была регулярна в некоторой области  $\left\{ 0 \leq \frac{t-\tau}{h} \leq 1 \right\}$  и удовлетворяла условиям роста (3.13).

Условия сходимости ряда Ньютона (3.4) жестче условий сходимости ряда Тейлора (3.1), когда для функции  $x(t)$  необходимо и достаточно существование константы  $C$  такой, что при любых  $t$  и  $k$   $|x^{(k)}(t)| < C$  [154, 243]. Поэтому не все функции, которые разлагаются в ряд Тейлора, могут быть разложены в ряд Ньютона. Например, для функции  $x(t) = \sin(t)$  не существует разложения в ряд Ньютона.

Кроме того, формула (3.4) обратного  $\mathcal{N}$ -преобразования содержит операцию бесконечного суммирования и поэтому ее компьютерная реализация связана с необходимостью аппроксимации функции  $x(t)$  на

некотором интервале  $(\tau_0, \tau_M)$  кусочно-полиномиальной функцией  $\tilde{x}(t)$ , непрерывной на подынтервалах  $\left\{(\tau_{m-1}, \tau_m) \mid m = \overline{1, M}\right\}$ . На каждом подынтервале длины  $H_m = \tau_m - \tau_{m-1}$  функция  $x(t)$  аппроксимируется интерполяционным многочленом Ньютона  $k_m$ -го порядка. В узлах интерполяции

$$\tau_{m-1}, \tau_{m-1} + h_m, \tau_{m-1} + 2h_m, \dots, \tau_{m-1} + k_m h_m = \tau_m,$$

где  $h_m = H_m/k_m$ , значения функций  $\tilde{x}(t)$  и  $x(t)$  совпадают. В точках  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1}$  функция  $\tilde{x}(t)$ , так же как функция  $x(t)$ , может претерпевать разрывы 1-го рода. Преобразования (3.4) – (3.5) в этом случае имеют вид

$$\left\{ \mathbf{X}_N(i, \tau_m, h_m) = \left\{ \frac{\Delta^i}{h_m^i} x(t) \right\}_{t=\tau_m} \mid m = \overline{1, M} \right\}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{1}(t - \tau_m, H_m) \sum_{i=0}^{k_m} \mathbf{X}_N(i, \tau_m, h_m) \mathbf{N}(i, t - \tau_m, h_m) \quad (3.15)$$

и называются дискретно-непрерывными  $\mathcal{X}$ -преобразованиями. Здесь функция  $\mathbf{1}(t - \tau_m, H_m)$  определяется выражением

$$\mathbf{1}(t - \tau_m, H_m) = \begin{cases} 1, & t \in (\tau_m - H_m, \tau_m), \\ 0, & t \notin (\tau_m - H_m, \tau_m). \end{cases} \quad (3.16)$$

В  $\mathcal{X}$ -преобразованиях (3.14) – (3.15) для приближенного восстановления функции  $x(t)$  используется интерполяционная формула Ньютона с интерполяцией назад. Ошибка  $O_x$  приближенного представления  $x(t)$  не превосходит значения [32]

$$O_x = \max_{(\tau_0, \tau_M)} |x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \max_m C_{k_m+1} \frac{A_m}{(k_m+1)!} h_m^{k_m+1}, \quad (3.17)$$

где

$$C_{k_m+1} = \max_{[-k_m-1,0]} |\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k_m)|, \quad A_m = \max_{(\tau_{m-1}, \tau_m)} |x^{(k_m+1)}(t)|.$$

$\mathcal{X}$ -преобразования тесно связаны с преобразованиями Лагранжа вида

$$X_{L_g}(i, \tau, h) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (-1)^j h^k \binom{k}{i} \frac{(t-\tau+ih)\delta(t-\tau+ih)}{(t-\tau+kh)N(k, t-\tau, h)} dt, \quad (3.18)$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^k X_{L_g}(i, \tau, h) \frac{(t-\tau+kh)N(k, t-\tau, h)}{(-1)^j h^k \binom{k}{i} (t-\tau+ih)}. \quad (3.19)$$

Равенство (3.18) тождественно равенству

$$X_{L_g}(i, \tau, h) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-\tau+ih) dt = x(\tau-ih), \quad (3.20)$$

так как

$$\begin{aligned} & (-1)^j h^k \binom{k}{i} \frac{(t-\tau+ih)\delta(t-\tau+ih)}{(t-\tau+kh)N(k, t-\tau, h)} = \\ & = (-1)^j h^k \binom{k}{i} \frac{\delta(t-\tau+ih)}{\left[ \frac{(t-\tau+kh)N(k, t-\tau, h)}{t-\tau+ih} \right]_{t=\tau-ih}} = \\ & = (-1)^j h^k \binom{k}{i} \frac{1}{(-1)^j h^k \binom{k}{i}} \delta(t-\tau+ih) = \delta(t-\tau+ih). \end{aligned} \quad (3.21)$$

На основе выражений (3.9) и (3.18) можно установить связь между функциями  $X_N(i, \tau, h)$  и  $X_{L_g}(i, \tau, h)$  в виде

$$X_N(i, \tau, h) = \sum_{l=0}^i \frac{i!}{(-1)^j h^i \binom{i}{l}} X_{L_g}(l, \tau, h), \quad (3.22)$$

$$\mathbf{X}_{L_g}(i, \tau, h) = \sum_{l=0}^i \frac{i!}{(-h)^l \binom{i}{l}} \mathbf{X}_N(l, \tau, h) \quad (3.23)$$

или в виде

$$\bar{\mathbf{X}} = \Pi \bar{x}, \quad \bar{x} = \Pi^{-1} \bar{\mathbf{X}}. \quad (3.24)$$

Здесь  $(k+1)$ - мерные векторы  $\bar{\mathbf{X}}$  и  $\bar{x}$ , а также матрица преобразований  $\Pi$  размерности  $(k+1) \times (k+1)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}} &= \left| \mathbf{X}_N(0, \tau, h) \quad \mathbf{X}_N(1, \tau, h) \quad \mathbf{X}_N(2, \tau, h) \quad \dots \quad \mathbf{X}_N(k, \tau, h) \right|^T = \\ &= \left| x(\tau) \quad \frac{\Delta}{h} x(\tau) \quad \frac{\Delta^2}{h^2} x(\tau) \quad \dots \quad \frac{\Delta^k}{h^k} x(\tau) \right|^T, \\ \bar{x} &= \left| \mathbf{X}_{L_g}(0, \tau, h) \quad \mathbf{X}_{L_g}(1, \tau, h) \quad \mathbf{X}_{L_g}(2, \tau, h) \quad \dots \quad \mathbf{X}_{L_g}(k, \tau, h) \right|^T = \\ &= \left| x(\tau) \quad x(\tau-h) \quad x(\tau-2h) \quad \dots \quad x(\tau-kh) \right|^T, \\ \Pi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ h^{-1} & -h^{-1} & 0 & 0 & \vdots \\ h^{-2} & -2h^{-2} & h^{-2} & 0 & \vdots \\ h^{-3} & -3h^{-3} & 3h^{-3} & -h^{-3} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & -h & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & -2h & h^2 & 0 & \vdots \\ 1 & -3h & 3h^2 & -h^3 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для функции  $\tilde{x}(t)$ , интерполирующей функцию  $x(t)$  на интервалах  $(\tau_{m-1}, \tau_m)$ , с учетом (3.14) – (3.15) и (3.22) – (3.24), получим выражения

$$\mathcal{X}\{x\} = \left\{ \bar{\mathbf{X}}_m = \Pi_m \bar{x}_m = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \Pi_m \bar{\delta}_m(t) \right] dt \mid m = \overline{1, M} \right\}, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{X}^{-1}\left\{ \bar{\mathbf{X}}_m \mid m = \overline{1, M} \right\} = \sum_{m=1}^M N_m(t) \bar{\mathbf{X}}_m = \tilde{x}(t), \quad (3.26)$$

где нижний индекс  $m$  указывает на принадлежность функций, векторов и матриц  $m$ -му интервалу  $(\tau_{m-1}, \tau_m)$ , а матрица-строка  $N_m(t)$  имеет вид



$$N_m(t) = \mathbf{1}(t - \tau_m, H_m) | N(0, t - \tau_m, h_m) \quad N(1, t - \tau_m, h_m) \quad \dots \quad N(k_m, t - \tau_m, h_m) |.$$

В дискретно-непрерывных  $\mathcal{X}$ -преобразованиях (3.25) – (3.26) лангранжевы изображения  $\{\bar{x}_m \mid m = \overline{1, M}\}$  функции  $x(t)$  образуются в результате свертки функции  $x(t)$  с «гребенкой» из  $\delta$ -функций

$$\bar{\delta}_m(t) = |\delta(t - \tau_m) \quad \delta(t - \tau_m + h_m) \quad \dots \quad \delta(t - \tau_{m-1})|^T.$$

В заключение отметим, что при построении операторов дифференцирования и интегрирования используется связь  $\mathcal{X}$ -преобразований с преобразованиями Лагранжа, а многомерные преобразования Ньютона строятся на основе аналогий с многомерными дифференциальными преобразованиями. Разработка же численных операторных методов осуществляется в соответствии с подходами, принятыми в теории локально-интегральных преобразований.

### 3.2. Операторы интегрирования и дифференцирования одномерных функций

Рассмотрим выражения

$$\frac{d}{dt} [x(m, t)] = y(m, t) \tag{3.27}$$

и

$$x(m, t) = \int_{\tau_{m-1}}^t y(m, \xi) d\xi + x(m, \tau_{m-1}). \tag{3.28}$$

Если функция  $y(m, t)$  является полиномом  $(k_m + 1)$ -го порядка, то функция  $x(m, t)$  должна быть полиномом  $k_m$ -го порядка.

Применив  $\mathcal{X}$ -преобразования (3.14) – (3.15) к функциям  $\tilde{x}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$ , запишем

$$\left\{ \mathbf{X}_N(i, \tau_m, h_m) = \left\{ \frac{\Delta^i}{h_m^i} \tilde{x}(t) \right\}_{t=\tau_m} = \left\{ \frac{\Delta^i}{h_m^i} x(m, t) \right\}_{t=\tau_m} \mid m = \overline{1, M} \right\}, \quad (3.29)$$

$$\left\{ x(m, t) = \sum_{i=0}^{k_m} \mathbf{X}_N(i, \tau_m, h_m) \mathbf{N}(i, t - \tau_m, h_m) \mid m = \overline{1, M} \right\}, \quad (3.30)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{1}(t - \tau_m, H_m) x(m, t) \quad (3.31)$$

и

$$\left\{ \mathbf{Y}_N(i, \tau_m, h) = \left\{ \frac{\Delta^i}{h_m^i} \tilde{y}(t) \right\}_{t=\tau_m} = \left\{ \frac{\Delta^i}{h_m^i} y(m, t) \right\}_{t=\tau_m} \mid m = \overline{1, M} \right\}, \quad (3.32)$$

$$\left\{ y(m, t) = \sum_{i=0}^{k_m-1} \mathbf{Y}_N(i, \tau_m, h_m) \mathbf{N}(i, t - \tau_m, h_m) \mid m = \overline{1, M} \right\}, \quad (3.33)$$

$$\tilde{y}(t) = \sum_{m=1}^M \mathbf{1}(t - \tau_m, H_m) y(m, t). \quad (3.34)$$

В обратных  $\mathcal{X}$ -преобразованиях (3.30) и (3.33) функции  $\tilde{x}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$  являются интерполяционными полиномами Ньютона  $x(m, t)$  и  $y(m, t)$  с узлами интерполяции  $\tau_m, \tau_m - h_m, \tau_m - 2h_m, \dots, \tau_m - k_m h_m = \tau_m - H_m = \tau_{m-1}$  и  $\tau_m, \tau_m - h_m, \dots, \tau_m - k_m h_m + h_m$ , соответственно.

На основе равенств (3.27) и (3.28) можно установить, что

$$y(m, t) = \frac{d}{dt} [x(m, t)] = \sum_{i=0}^{k_m} \mathbf{X}_n(i, \tau_m, h_m) \frac{d}{dt} [\mathbf{N}(i, t - \tau_m, h_m)], \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
x(m, t) &= \int_{\tau_{m-1}}^t y(m, \xi) d\xi + x(m, \tau_{m-1}) = \\
&= \sum_{i=0}^{k_m-1} Y_N(i, \tau_m, h_m) \int_{\tau_{m-1}}^t N(i, \xi - \tau_m, h_m) d\xi + x(m, \tau_{m-1}).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Выражения (3.35) – (3.36) в области  $\mathcal{X}$ -изображений имеют вид

$$Y_N(j, \tau_m, h_m) = \left\{ \frac{\Delta^j}{h_m^j} y(m, t) \right\}_{t=\tau_m} = \sum_{i=0}^{k_m} X_N(i, \tau_m, h_m) \left\{ \frac{\Delta^j}{h_m^j} N'(i, t - \tau_m, h_m) \right\}_{t=\tau_m}, \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
X_N(j, \tau_m, h_m) &= \left\{ \frac{\Delta^j}{h_m^j} x(m, t) \right\}_{t=\tau_m} = \sum_{i=0}^{k_m-1} Y_N(i, \tau_m, h_m) \times \\
&\times \left\{ \frac{\Delta^j}{h_m^j} \int_{\tau_{m-1}}^t N(i, \xi - \tau_m, h_m) d\xi \right\}_{t=\tau_m} + \begin{cases} x(m, \tau_{m-1}), & j=0, \\ 0, & j \geq 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

ИЛИ

$$\begin{vmatrix} Y_N(0, \tau_m, h_m) \\ Y_N(1, \tau_m, h_m) \\ \vdots \\ Y_N(k_m - 1, \tau_m, h_m) \end{vmatrix} = D_N(k_m, h_m) \begin{vmatrix} X_N(0, \tau_m, h_m) \\ X_N(1, \tau_m, h_m) \\ \vdots \\ X_N(k_m, \tau_m, h_m) \end{vmatrix}, \tag{3.39}$$

$$\begin{vmatrix} X_N(0, \tau_m, h_m) \\ X_N(1, \tau_m, h_m) \\ \vdots \\ X_N(k_m, \tau_m, h_m) \end{vmatrix} = I_N(k_m, h_m) \begin{vmatrix} Y_N(0, \tau_m, h_m) \\ Y_N(1, \tau_m, h_m) \\ \vdots \\ Y_N(k_m - 1, \tau_m, h_m) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x(m, \tau_{m-1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{3.40}$$

Матрицы  $D_N(k_m, h_m)$  и  $I_N(k_m, h_m)$  размерности  $k_m \times (k_m + 1)$  и  $(k_m + 1) \times k_m$  являются операторами дифференцирования и интегрирования  $\mathcal{X}$ -изображений. Их элементы зависят от параметров  $k_m$  и  $h_m$

$$I_{j,i} = \left\{ \frac{\Delta^{j-1}}{h_m^{j-1}} \int_{\tau_{m-1}}^t N(i-1, \xi - \tau_m, h_m) d\xi \right\}_{t=\tau_m}, \quad (j = \overline{1, k_m + 1}, \quad i = \overline{1, k_m}),$$

$$D_{j,i} = \left\{ \frac{\Delta^{j-1}}{h_m^{j-1}} N'(i-1, t - \tau_m, h_m) \right\}_{t=\tau_m}, \quad (j = \overline{1, k_m}, \quad i = \overline{1, k_m + 1}).$$

Однако, с помощью преобразований (3.24) выражения (3.39) – (3.40) можно значительно упростить, представив их в эквивалентном виде

$$H_m^{-1} \widehat{D}(k_m) \bar{x}(\widehat{m}) - x(m, \tau_{m-1}) H_m^{-1} \vec{N}_{\widehat{D}}(k_m) = \bar{y}(\widehat{m}), \quad (3.41)$$

$$\bar{x}(\widehat{m}) = H_m \widehat{I}(k_m) \bar{y}(\widehat{m}) + x(m, \tau_{m-1}) \vec{N}_{\widehat{I}}(k_m), \quad (3.42)$$

где  $\widehat{D}(k_m)$  и  $\widehat{I}(k_m)$  – матричные операторы дифференцирования и интегрирования размерности  $(k_m \times k_m)$ ;  $\vec{N}_{\widehat{D}}(k_m)$  и  $\vec{N}_{\widehat{I}}(k_m)$   $k_m$ -мерные векторы, учитывающие начальное условие  $x(m, \tau_{m-1})$ . Элементы  $k_m$ -мерных векторов  $\bar{x}(\widehat{m})$  и  $\bar{y}(\widehat{m})$  совпадают с первыми  $k_m$  элементами  $(k_m + 1)$ -мерных векторов  $\bar{x}(m)$  и  $\bar{y}(m)$ . В векторах  $\bar{x}(\widehat{m})$  и  $\bar{y}(\widehat{m})$  отсутствуют элементы  $x(m, \tau_{m-1})$  и  $y(m, \tau_{m-1})$  соответственно. Значения элементов матриц  $\widehat{D}(k_m)$ ,  $\widehat{I}(k_m)$  и вектора  $\vec{N}_{\widehat{D}}(k_m)$  для  $k_m = 1 \div 10$  приведены в Приложении.

Из выражений (3.41) – (3.42) следует, что операторы интегрирования и дифференцирования являются взаимно обратными:

$$\widehat{D}(k_m) \widehat{I}(k_m) = \widehat{I}(k_m) \widehat{D}(k_m) = E, \quad (3.43)$$

где  $E$  – единичная матрица, и удовлетворяют соотношениям

$$\widehat{D}(k_m) \vec{N}_{\widehat{I}}(k_m) = \vec{N}_{\widehat{D}}(k_m), \quad \widehat{I}(k_m) \vec{N}_{\widehat{D}}(k_m) = \vec{N}_{\widehat{I}}(k_m). \quad (3.44)$$

### 3.3. Преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений

С помощью  $\mathcal{X}$ -преобразований легко осуществить алгебраизацию линейных и нелинейных дифференциальных уравнений.

Пусть задано уравнение

$$x' = f(x, t), \quad x(\tau_0) = x_0, \quad t \in [\tau_0, \tau_M]. \quad (3.45)$$

Осуществим  $\mathcal{X}$ -преобразование этого уравнения с учетом обозначения  $x'(t) = y(t)$

$$\mathcal{X}\{x'(t)\} = \mathcal{X}\{y(t)\} = \left\{ Y_N(i, \tau_m, h_m) \middle| m = \overline{1, M} \right\}, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{X}\{f(x, t)\} = \left\{ F_N(i, \tau_m, h_m) \middle| m = \overline{1, M} \right\},$$

$$\left\{ Y_N(i, \tau_m, h_m) = F_N(i, \tau_m, h_m) \middle| m = \overline{1, M} \right\}.$$

На основании выражения (3.24) запишем равенство

$$\left\{ \Pi(m) \bar{y}(m) = \Pi(m) \bar{f}(m) \middle| m = \overline{1, M} \right\},$$

тождественное равенству

$$\left\{ \bar{y}(m) = \bar{f}(m) \middle| m = \overline{1, M} \right\}, \quad (3.47)$$

где  $m$  – номер интервала  $(\tau_{m-1}, \tau_m)$ ;  $M$  – количество интервалов, на которые разделен отрезок  $[\tau_{m-1}, \tau_m]$ ; векторы

$$\bar{y}(m) = \left| x'(\tau_m) \quad x'(\tau_m - h_m) \quad \dots \quad x'(\tau_m - k_m h_m) \right|^T,$$

$$\bar{f}(m) = \left| f[x(\tau_m), \tau_m] \quad f[x(\tau_m - h_m), \tau_m - h_m] \quad \dots \quad f[x(\tau_m - k_m h_m), \tau_m - k_m h_m] \right|^T$$

содержат параметры преобразования  $\tau_m$ ,  $k_m$ ,  $h_m$  и имеют размерность  $k_m + 1$ .

Выражение (3.47) представляет собой систему уравнений (3.45), записанных для конечной совокупности дискретных значений аргумента  $t$ . Подобная дискретизация уравнений вида (3.45) применяется в конечно-разностных методах [13, 17, 32, 103, 211], а также в методах коллокации [314] и точек [44, 236, 237].

Для перехода к алгебраическим уравнениям уравнение (3.47) необходимо дополнить операторным соотношением (3.41), связывающим дискретные значения функции  $x(t)$  и ее производной  $y(t)$ . На каждом интервале  $(\tau_{m-1}, \tau_m)$  такая связь устанавливается для  $k_m$  значений этих функций. При этом не учитываются начальное условие  $x_0$  и условия сопряжения в точках деления отрезка  $[\tau_0, \tau_m]$  значений искомой функции  $x(t)$ .

Начальное условие  $x_0$  учитывается в операторных соотношениях вида (3.41), а условия сопряжения значений функции  $x(t)$  на границах интервалов  $\{(\tau_{m-1}, \tau_m) | m = \overline{1, M}\}$  вида

$$\{x(\tau_m - 0) = x(\tau_m + 0) = x(\tau_m) | m = \overline{0, M}\} \quad (3.48)$$

определяются условиями теоремы Коши о существовании и единственности решения задачи (3.45).

С учетом (3.41) и (3.48), уравнение (3.47) можно записать в виде

$$\{H_m^{-1} \bar{D}(k_m) \bar{x}(\bar{m}) - f(\bar{m}) = x(\tau_{m-1}) H_m^{-1} \bar{N}_{\bar{D}}(k_m) | m = \overline{1, M}\}. \quad (3.49)$$

Полученное выражение вместе с условием  $x(\tau_0) = x_0$  является искомой алгебраической формой уравнения (3.45).

Рассмотрим задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра [287]:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f_1 \left\{ x(t), t, \int_{\tau_0}^t f_2[t, \tau, x(\tau)] d\tau \right\} \\ t \in [\tau_0, \tau_m], \quad x(\tau_0) = x_0. \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Уравнение (3.50) называется уравнением с бесконечным запаздыванием, так как  $x'(t)$  зависит от всех предшествующих значений  $x(t)$ .

Введем обозначение

$$z(t) = \int_{\tau_0}^t f_2[t, \tau, x(\tau)] d\tau \quad (3.51)$$

и представим задачу (3.50) в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f_1[x(t), t, z(t)], \\ z(t) = \int_{\tau_0}^t f_2[t, \tau, x(\tau)] d\tau \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t \in [\tau_0, \tau_m], \\ x(\tau_0) = x_0, z(\tau_0) = 0. \end{array} \quad (3.52)$$

Дополнив систему уравнений (3.52) условиями непрерывности функций  $z(t)$  и  $x(t)$  вида (3.48), преобразуем ее с помощью соотношения (3.14). На основании тождеств (3.24) и операторных соотношений (3.41) – (3.42) найдем

$$\left\{ \begin{array}{l} H_m^{-1} \bar{D}(k_m) \bar{x}(\bar{m}) - \bar{f}_1(\bar{m}) = x(\tau_{m-1}) H_m^{-1} \bar{N}_{\bar{D}}(k_m) \Big|_{m=\overline{1, M}} \\ \bar{z}(\bar{m}) - H_m \bar{H}(k_m) \bar{f}_2(\bar{m}) = z(\tau_{m-1}) \bar{N}_{\bar{H}}(k_m) \Big|_{m=\overline{1, M}} \end{array} \right. \quad (3.53)$$

Операторные уравнения (3.53) являются системой алгебраических уравнений и замыкаются начальными условиями  $x(\tau_0) = x_0$ ,  $z(\tau_0) = 0$ . Рассмотрим особенности применения  $\mathcal{N}$ -преобразований и алгебраизацию краевых задач на примере уравнений [103]:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = 128(1+t)^2 x_1 - 512(3t^4 + 3t^3 - 2t^2 - t + 1), \end{cases} \quad (3.54)$$

$$\begin{cases} x_1(0) = -1, \\ x_1(1) = 0, \end{cases} \quad (3.55)$$

где  $t \in [0,1]$ .

При учете краевых условий необходимо в число точек  $\{\tau_m | m = \overline{1, M-1}\}$ , разделяющих заданный отрезок  $[0,1]$  на интервалы  $\{(\tau_{m-1}, \tau_m) | m = \overline{1, M}\}$ , включить и те точки, в которых заданы краевые условия (3.55). Возьмем, например,  $M = 3$  и  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_1 = 0,2$ ,  $\tau_2 = 0,8$ ,  $\tau_3 = 1,0$ . Деление отрезка  $[0,1]$  на три интервала различной длины  $H_1 = H$ ,  $H_2 = 3H$ ,  $H_3 = H$  ( $H = 0,2$ ) выполнено с учетом особенностей решения задачи (3.54) – (3.55).

Операторы дифференцирования для краевых задач строятся на основе операторного соотношения (3.41). Полагая в нем, например,  $k_m = 3$  для двух значений  $h_m = H_m/3$  и  $h_m = -H_m/3$  имеем, соответственно,

$$\begin{vmatrix} x'(\tau_m) \\ x'(\tau_m - H_m/3) \\ x'(\tau_m - 2H_m/3) \end{vmatrix} = \frac{1}{2H_m} \begin{vmatrix} 11 & -18 & 9 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & 1 \\ -1 & 6 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x(\tau_m) \\ x(\tau_m - H_m/3) \\ x(\tau_m - 2H_m/3) \\ x(\tau_{m-1}) \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} x'(\tau_m - H_m/3) \\ x'(\tau_m - 2H_m/3) \\ x'(\tau_{m-1}) \end{vmatrix} = \frac{1}{2H_m} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 & 1 \\ -1 & 6 & -3 & -2 \\ 2 & -9 & 18 & -11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x(\tau_m) \\ x(\tau_m - H_m/3) \\ x(\tau_m - 2H_m/3) \\ x(\tau_{m-1}) \end{vmatrix}$$

ИЛИ



$$\begin{vmatrix} x'(\tau_m) \\ x'(\tau_m - H_m/3) \\ x'(\tau_m - 2H_m/3) \\ x'(\tau_{m-1}) \end{vmatrix} = \frac{1}{2H_m} \begin{vmatrix} 11 & -18 & 9 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & 1 \\ -1 & 6 & -3 & -2 \\ 2 & -9 & 18 & -11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x(\tau_m) \\ x(\tau_m - H_m/3) \\ x(\tau_m - 2H_m/3) \\ x(\tau_{m-1}) \end{vmatrix} \quad (3.56)$$

Учитывая условие сопряжения значений функции  $x'(t)$  в точках  $\{\tau_m \mid m=1,2\}$  вида

$$x'(\tau_m) = \frac{1}{2} [x'(\tau_m + 0) + x'(\tau_m - 0)],$$

на основании равенства (3.56) получим искомое операторное соотношение для задачи (3.54) – (3.55)

$$x'(t) = \frac{1}{2H} \begin{vmatrix} 11 & -18 & 9 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{9}{2} & 9 & -\frac{11}{3} & -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 & -1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & 3 & \frac{11}{3} & -9 & \frac{9}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -9 & 18 & -11 \end{vmatrix} x(t), \quad (3.57)$$

где

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \frac{H}{3} & 1 - \frac{2H}{3} & 0,8 & 0,6 & 0,4 & 0,2 & 0,2 - \frac{H}{3} & 0,2 - \frac{2H}{3} & 0 \end{bmatrix}^T$$

$\mathcal{X}$ -преобразование системы дифференциальных уравнений (3.54) осуществляется аналогично  $\mathcal{X}$ -преобразованиям задачи Коши. Отличие состоит в используемых операторах для производных – выражения (3.57) и (3.49) соответственно. В операторном выражении (3.57) не учитываются краевые условия (3.55). Для их учета в алгебраической системе уравнений вычеркиваются уравнения, определяющие  $x_1'(1)$  и  $x_1'(0)$ . Вместо этих уравнений в систему помещаются уравнения  $x_1(1)=0$  и  $x_1(0)=-1$  из условий (3.55). Тогда первое уравнение системы принимает вид:

$$\frac{1}{2H} \begin{pmatrix} 2H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -9/2 & 9 & -11/3 & -3 & 3/2 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & -2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2 & -1 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -3/2 & 3 & 11/3 & -9 & 9/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2H \end{pmatrix} x_1(t)=x_2(t) \quad (3.58)$$

При алгебраизации второго уравнения системы (3.54) используется операторное соотношение (3.57).

Решение алгебраизованной системы уравнений приведено ниже для  $H = 0,2$ :

$$x_1(1)=0, \quad x_1\left(1-\frac{H}{3}\right)=1,90495, \quad x_1\left(1-\frac{2H}{3}\right)=2,43724,$$

$$x_1(0,8)=1,74546, \quad x_1(0,6)=1,20381, \quad x_1(0,4)=1,14972, \quad x_1(0,2)=1,84935,$$

$$x_1\left(0,2-\frac{H}{3}\right)=1,75914, \quad x_1\left(0,2-\frac{2H}{3}\right)=1,04345, \quad x_1(0)=-1,00000;$$

$$x_2(1)=-103,032, \quad x_2\left(1-\frac{H}{3}\right)=-17,9078, \quad x_2\left(1-\frac{2H}{3}\right)=1,56771,$$

$$x_2(0,8)=11,1488, \quad x_2(0,6)=1,71117, \quad x_2(0,4)=-1,39203, \quad x_2(0,2)=-2,82626,$$

$$x_2\left(0,2-\frac{H}{3}\right)=4,28850, \quad x_2\left(0,2-\frac{2H}{3}\right)=18,9378, \quad x_2(0)=50,2393.$$

Сопоставление полученных результатов с результатами, приведенными в работе [103], показывает, что численные методы на основе  $\mathcal{X}$ -преобразований обеспечивают более высокую точность решения, чем конечно-разностные методы и методы экспоненциальной подгонки.

### 3.4. Устойчивость численных схем , порождаемых преобразованиями Ньютона

Рассмотрим преобразованную задачу Коши вида (3.49). Эта система нелинейных алгебраических уравнений имеет размерность  $N_C = \prod_{m=1}^M k_m$ . Ее решение можно осуществить последовательно за  $M$  шагов. Тогда на  $m$ -м шаге порядок  $N_C$  системы понизится до значения  $k_m$ . В результате решения этой подсистемы получаем блок значений искоемых переменных  $\vec{x}(\bar{m})$ . В нем содержится элемент  $x(\tau_m)$ , который используется в качестве начального условия на  $(m+1)$ -м шаге решения. Естественно, что такая рекурсивная вычислительная процедура должна быть исследована на устойчивость.

Для проверки устойчивости различных численных схем обычно обращаются к тестовому уравнению [287, 334, 338]:

$$x' = \lambda x, \quad x(0)=1 \tag{3.59}$$

где  $\lambda$  в общем случае представляет собой комплексное число.

На основании (3.49) запишем уравнение (3.59) в виде

$$\left\{ \left[ H_m^{-1} \bar{D}(k_m) - \lambda E \right] \bar{x}(\bar{m}) = x(\tau_{m-1}) H_m^{-1} \bar{N}_{\bar{D}}(k_m) \mid m = \overline{1, M} \right\}. \quad (3.60)$$

Зафиксируем параметры  $\mathcal{O}$ -преобразования  $\left\{ k_m = k \mid m = \overline{1, M} \right\}$  и  $\left\{ H_m = H \mid m = \overline{1, M} \right\}$ . Решая системы уравнений (3.60) относительно неизвестных  $x(\tau_m)$ , содержащихся в векторах  $\bar{x}(\bar{m})$ , получим:

$$\left\{ x(\tau_m) = \frac{1}{1 - \lambda H} x(\tau_{m-1}) \mid m = \overline{1, M} \right\} \text{ для } k = 1, \quad (3.61)$$

$$\left\{ x(\tau_m) = \frac{1 + \frac{\lambda H}{4}}{1 - \frac{3}{4} \lambda H + \frac{\lambda^2 H^2}{4}} x(\tau_{m-1}) \mid m = \overline{1, M} \right\} \text{ для } k = 2, \quad (3.62)$$

$$\left\{ x(\tau_m) = \frac{1 + \frac{\lambda H}{3} + \frac{\lambda^2 H^2}{27}}{1 - \frac{2}{3} \lambda H + \frac{11}{54} \lambda^2 H^2 - \frac{\lambda^3 H^3}{27}} x(\tau_{m-1}) \mid m = \overline{1, M} \right\} \text{ для } k = 3 \quad (3.63)$$

$$\left\{ x(\tau_m) = \frac{\left( 1 + \frac{3}{8} \lambda H + \frac{11}{192} \lambda^2 H^2 + \frac{\lambda^3 H^3}{256} \right) x(\tau_{m-1})}{1 - \frac{5}{8} \lambda H + \frac{35}{192} \lambda^2 H^2 - \frac{25}{768} \lambda^3 H^3 + \frac{\lambda^4 H^4}{256}} \mid m = \overline{1, M} \right\} \text{ для } k = 4 \quad (3.64)$$

и так далее,

$$\left\{ x(\tau_m) = \varphi_k(\lambda H) x(\tau_{m-1}) \mid m = \overline{1, M} \right\} \text{ для любого } k. \quad (3.65)$$

Рекурсивные процедуры решения уравнений (3.65) будут устойчивы по начальным данным  $\left\{ x(\tau_{m-1}) \mid m = \overline{1, M} \right\}$  для тех значений  $\lambda H$ , которые удовлетворяют условиям

$$\left| \varphi_k(\lambda H) \right| < 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.66)$$

Такие значения  $\lambda H$  образуют на комплексной плоскости  $(Re(\lambda H), Im(\lambda H))$  области устойчивости (неустойчивости), ограниченные кривыми  $\Gamma_k$ , точки которых удовлетворяют равенствам

$$|\varphi_k(\lambda H)|=1, \quad k=1, 2, \dots \quad (3.67)$$

Решение уравнений вида (3.67) осуществлялось численно для  $k=1 \div 10$ . Анализ полученных данных о кривых  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{10}$  показал, что они замкнуты и располагаются в правой полуплоскости  $(Re(\lambda H) > 0)$ . Функции  $\varphi_k(\lambda H)$  в областях, ограниченных кривыми  $\Gamma_k$ , не удовлетворяют условию (3.66). Следовательно, внутри этих областей вычислительные процедуры не устойчивы. Вне их условия (3.66) выполняются и устойчивость вычислений обеспечивается. Кривые  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , и  $\Gamma_6, \Gamma_{10}$  изображены, соответственно, на рис. 3.1, а и б.

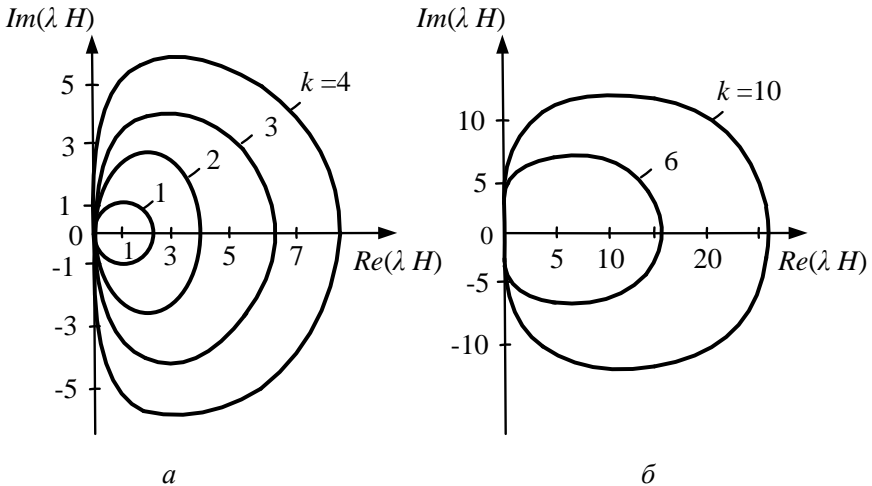


Рис. 3.1. Области устойчивости численных операторных методов, порожденных  $\mathcal{U}$ -преобразованиями.

Численные методы с такими областями устойчивости характеризуются как жесткоустойчивые. Они отличаются от методов Гира и формул дифференцирования назад тем, что сохраняют жесткую устойчивость независимо от значения  $k$  (методы Гира теряют жесткую устойчивость при  $k > 5$  [17, 211]).

Полученные для тестового примера (3.59) теоретические оценки устойчивости численной схемы (3.49) были подтверждены результатами решения жестких систем уравнений с постоянными, переменными и нелинейными параметрами, которые приведены ниже.

Пример I. Жесткая система линейных уравнений с постоянными коэффициентами [287]:

$$\begin{cases} y_1' = 998y_1 + 1998y_2, & y_1(0) = 1, \\ y_2' = -999y_1 - 1999y_2, & y_2(0) = 1. \end{cases} \quad (3.68)$$

Ее точное решение

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 4e^{-t} - 3e^{-1000t}, \\ y_2(t) &= -2e^{-t} + 3e^{-1000t}. \end{aligned}$$

Параметры  $\mathcal{R}$ -преобразований и результаты решения системы (3.68) приведены в таблице. 3.1. Погрешность решения в последней точке  $\tau_{22}$  составляет:

$$\begin{aligned} |y_1(\tau_{22}) - y_1(22, \tau_{22})| &= 0,001082, \\ |y_2(\tau_{22}) - y_2(22, \tau_{22})| &= 0,000541. \end{aligned}$$

Относительная величина длин интервалов  $H_{22} = \tau_{22} - \tau_{21}$  и  $H_1 = \tau_1 - \tau_0$  равна  $\approx 1218$ . Во столько раз увеличился первоначально заданный параметр  $H_1$  при сохранении точности и устойчивости вычислений.

Таблица 3.1.

Результаты решения жесткой системы уравнений (3.68)

$m$	$k_m$	$\tau_m$	$y_1(m, \tau_m)$	$y_2(m, \tau_m)$
1	4	2,50000E-04	1,66253E+00	3,36903E-01
2	4	4,06249E-04	1,99992E+00	-7,53402E-04
3	4	6,01561E-04	2,35369E+00	-3,54924E-01
4	4	8,45703E-04	2,70880E+00	-7,10527E-01
5	4	1,15087E-03	3,04625E+00	-1,04859E+00
6	4	1,53234E-03	3,34569E+00	-1,34880E+00
7	4	2,00918E-03	3,58956E+00	-1,59363E+00
8	4	2,60522E-03	3,76779E+00	-1,77306E+00
9	4	3,35028E-03	3,88122E+00	-1,88800E+00
10	3	4,28160E-03	3,94118E+00	-1,94981E+00
11	3	5,83380E-03	3,96763E+00	-1,97935E+00
12	3	8,42079E-03	3,96554E+00	-1,98241E+00
13	2	1,27324E-02	3,94922E+00	-1,97461E+00
14	2	2,35116E-02	3,90687E+00	-1,95343E+00
15	2	5,04595E-02	3,80295E+00	-1,90147E+00
16	3	1,17829E-01	3,55510E+00	-1,77755E+00
17	3	2,30112E-01	3,17738E+00	-1,58869E+00
18	3	4,17250E-01	2,63484E+00	-1,31742E+00
19	4	7,29147E-01	1,92780E+00	-9,63903E-01
20	4	1,11901E+00	1,30474E+00	-6,52374E-01
21	4	1,60635E+00	8,01205E-01	-4,00603E-01
22	4	1,91094E+00	5,90682E-01	-2,95341E-01

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений с переменными коэффициентами [91]:

$$y'(t) = A(t) \begin{vmatrix} -\alpha^{-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} A^{-1}(t) y(t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (3.69)$$

где  $\alpha$  – параметр жесткости (с уменьшением  $\alpha$  коэффициент жесткости системы возрастает);

$$A(t) = \begin{vmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix}.$$

Начальные условия

$$y(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 + \alpha\lambda \end{vmatrix}, \text{ где } \lambda = \frac{-1 - \alpha^{-1} + \sqrt{(1 - \alpha^{-1})^2 - 4}}{2}.$$

Точное решение

$$y(t) = A(t) \begin{vmatrix} \alpha e^{\lambda t} \\ (1 + \alpha\lambda) e^{\lambda t} \end{vmatrix}.$$

В соответствии с рекомендациями по решению системы уравнений (3.69), приведенными в работе [91], численный эксперимент выполнялся для двух фиксированных значений параметров  $H_m$ :

$$\left\{ H_m = H = \frac{2\pi}{40} \mid m = \overline{1,40} \right\} \text{ и } \left\{ H_m = H = \frac{2\pi}{80} \mid m = \overline{1,80} \right\}.$$

При этом оценивались абсолютные погрешности  $\varepsilon_{40}$  и  $\varepsilon_{80}$  в точке  $\tau_m = 2\pi$  (для  $\pi$  использовалось приближение 3,14159265). Полученные результаты для двух значений параметров жесткости  $\alpha = 10^{-1}$  и  $\alpha = 10^{-8}$  приведены в таблице 3.2. Здесь же представлены порядки сходимости методов  $S = \log_2(\varepsilon_{40} / \varepsilon_{80})$  для различных  $k_m$ .

Сопоставление экспериментальных данных с данными, приведенными в работе [91], свидетельствуют о высокой точности и жесткой устойчивости численных методов на основе  $\mathcal{N}$ -преобразований. Кроме того, эти методы независимо от значений параметра  $\alpha$  сохраняют порядок сходимости  $s \approx k_m$ . Лишь некоторые, специально разработанные в [91],



неявные методы Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений дают аналогичные результаты.

Таблица 3.2.  
Погрешности решения жесткой системы уравнений (3.69)

$k_m$	$\alpha$	$\varepsilon_{40}$		$\varepsilon_{80}$		$S$
		для $y_1$	для $y_2$	для $y_1$	для $y_2$	
2	$10^{-1}$	$1,18 \cdot 10^{-6}$	$1,10 \cdot 10^{-5}$	$3,07 \cdot 10^{-7}$	$3,05 \cdot 10^{-6}$	1,85
2	$10^{-8}$	$4,50 \cdot 10^{-13}$	$2,13 \cdot 10^{-5}$	$1,17 \cdot 10^{-13}$	$5,70 \cdot 10^{-6}$	1,90
3	$10^{-1}$	$4,70 \cdot 10^{-8}$	$4,30 \cdot 10^{-7}$	$6,10 \cdot 10^{-9}$	$5,65 \cdot 10^{-8}$	2,93
3	$10^{-8}$	$1,32 \cdot 10^{-14}$	$7,78 \cdot 10^{-7}$	$1,72 \cdot 10^{-15}$	$1,01 \cdot 10^{-7}$	2,94
4	$10^{-1}$	$6,01 \cdot 10^{-10}$	$5,22 \cdot 10^{-9}$	$3,90 \cdot 10^{-11}$	$3,30 \cdot 10^{-10}$	3,95
4	$10^{-8}$	$9,20 \cdot 10^{-17}$	$7,90 \cdot 10^{-9}$	$6,00 \cdot 10^{-19}$	$5,00 \cdot 10^{-10}$	3,98

Пример 3. Жесткая система уравнений с нелинейными коэффициентами [287]:

$$\begin{cases} y_1' + 0,04y_1 - 10^4 y_2 y_3 = 0, \\ y_2' - 0,04y_1 + 10^4 y_2 y_3 + 3 \cdot 10^7 y_2^2 = 0, \\ y_3' - 3 \cdot 10^7 y_2^2 = 0, \end{cases} \quad (3.70)$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad t \in [0, 100].$$

Система уравнений (3.70) характеризуется коэффициентом жесткости порядка  $10^4 \div 10^5$ .

Ее решение на  $m$ -м интервале осуществлялось последовательно для  $k_m = 1, 2, 3, 4, 5$  с одновременным контролем по всем трем переменным относительной погрешности

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \max_{(\tau_{m-1}, \tau_m)} \left| \frac{y_{k_m+1}(m, t) - y_{k_m}(m, t)}{y_{k_m}(m, t)} \right|.$$

Если относительная погрешность  $\varepsilon_{\text{отн}}$  не превосходила допустимого значения, то процесс поиска приближенного решения на интервале  $(\tau_{m-1}, \tau_m)$  заканчивался для некоторого значения  $k_m \leq 5$ . В противном случае, путем

деления пополам изменялась длина интервала  $H_m$  и процесс поиска решения повторялся.

Переход от  $m$ -го интервала решения к  $(m+1)$ -му сопровождался увеличением длины интервала  $H_m$  в  $(1+k_m^{-1})$  раз.

Приведенная выше оценка погрешности  $\varepsilon_{\text{отн}}$  принципиально отличается от оценки погрешности, приведенной в работе [287]. В нашем случае сопоставляются функции, а в работе [287] сопоставляются числа, получаемые на каждом шаге с помощью явной и неявной численных схем первого порядка. Выполненные исследования показали невозможность достижения даже самой низкой точности  $\varepsilon_{\text{отн}} \leq 10^{-1}$  численными методами, рекомендованными в [287].

Определенные представления о трудностях решения системы уравнений (3.93) дают экспериментальные данные, приведенные в таблице 3.3. Анализ этих данных показывает, что при высоких требованиях к точности решения системы уравнений (3.70) нужны методы, которые обладают не только жесткой устойчивостью, но и высокой аппроксимационной точностью ( $k_m > 1$ ).

Таблица 3.3.

Параметры аппроксимации решений жесткой системы уравнений (3.70)

$k_m$	$\varepsilon_{\text{отн}} \leq 10^{-2}$			$\varepsilon_{\text{отн}} \leq 10^{-3}$		
	Количество шагов в интервалах			Количество шагов в интервалах		
	(0; 0,001)	(0,001; 0,1)	(0,1; 100)	(0; 0,001)	(0,001; 0,1)	(0,1; 100)
2	–	4	1	–	2	–
3	4	3	11	2	5	9
4	7	–	–	21	3	8

В заключение отметим, что полученные в области  $\mathcal{X}$ -преобразований уравнения вида (3.49) определяют блочные численные методы [287]. Появление этих методов в конце 60-х годов было вызвано трудностями численного решения жестких дифференциальных уравнений и уравнений Вольтерра.

В настоящее время развитие блочных методов стимулируется разработками параллельных алгоритмов для многопроцессорных систем. Эффективность их реализации значительно превосходит эффективность реализации традиционных многошаговых и одношаговых численных схем. Эти обстоятельства определяют широкие возможности применения  $\mathcal{X}$ -преобразований к анализу динамических систем на вычислительных ресурсах с различной архитектурой.

### 3.5. Преобразования многомерных функций

Построим многомерные  $\mathcal{X}$ -преобразования на основе их связи с дифференциальными преобразованиями.

Пусть функция  $x = x(t_1, t_2)$  определена и непрерывна вместе со своими частными производными до порядка  $k$  включительно ( $k \geq 1$ ) в  $\delta$ -окрестности точки  $(\tau_1, \tau_2)$ . Тогда для всех  $t_1$  и  $t_2$ , удовлетворяющих условию  $\sqrt{(t_1 - \tau_1)^2 + (t_2 - \tau_2)^2} < \delta$ , существует такое  $\theta = \theta(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)$ ,  $0 < \theta < 1$ , что справедлива формула

$$\begin{aligned}
x(t_1, t_2) &= x(\tau_1, \tau_2) + \frac{\partial x(\tau_1, \tau_2)}{\partial t_1} (t_1 - \tau_1) + \frac{\partial x(\tau_1, \tau_2)}{\partial t_2} (t_2 - \tau_2) + \\
&+ \frac{1}{2!} \left[ (t_1 - \tau_1) \frac{\partial}{\partial t_1} + (t_2 - \tau_2) \frac{\partial}{\partial t_2} \right]^{[2]} x(\tau_1, \tau_2) + \\
&+ \frac{1}{3!} \left[ (t_1 - \tau_1) \frac{\partial}{\partial t_1} + (t_2 - \tau_2) \frac{\partial}{\partial t_2} \right]^{[3]} x(\tau_1, \tau_2) + \dots + \\
&+ \frac{1}{k!} \left[ (t_1 - \tau_1) \frac{\partial}{\partial t_1} + (t_2 - \tau_2) \frac{\partial}{\partial t_2} \right]^{[k]} x(\tau_1, \tau_2) + O_x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2),
\end{aligned}$$

тождественная формуле

$$x(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \left[ (t_1 - \tau_1) \frac{\partial}{\partial t_1} + (t_2 - \tau_2) \frac{\partial}{\partial t_2} \right]^{[i]} x(\tau_1, \tau_2) + O_x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2), \quad (3.71)$$

где

$$\begin{aligned}
O_x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) &= \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \left[ (t_1 - \tau_1) \frac{\partial}{\partial t_1} + (t_2 - \tau_2) \frac{\partial}{\partial t_2} \right]^{[k+1]} x(\tau_1 + \theta(t_1 - \tau_1), \tau_2 + \theta(t_2 - \tau_2)), \quad (3.72)
\end{aligned}$$

Формула (3.71) известна как формула Тейлора порядка  $k$  с остаточным членом  $O_x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)$  в форме Лагранжа [154]. Она обобщается на случай  $N$  независимых переменных выражениями

$$x(t) = \sum_{0 \leq |i| \leq k} \frac{\partial^{|i|}}{\partial t^i} x(\tau) \frac{(t - \tau)^i}{i!} + O_x(t - \tau), \quad (3.73)$$

$$O_x(t - \tau) = \sum_{|i|=k+1} \frac{\partial^{|i|}}{\partial t^i} x(\tau + \theta(t - \tau)) \frac{(t - \tau)^i}{i!}, \quad (3.74)$$

в которых использованы мультииндексные обозначения

$$\begin{aligned}
t &= (t_1, t_2, \dots, t_N), \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_N), \quad |i| = i_1 + i_2 + \dots + i_N, \\
i! &= i_1! i_2! \dots i_N!, \quad (t - \tau)^i = (t_1 - \tau_1)^{i_1} (t_2 - \tau_2)^{i_2} \dots (t_N - \tau_N)^{i_N},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^{|i|}}{\partial t^i} x(\tau) = \frac{\partial^{|i|}}{\partial \tau_1^{i_1} \partial \tau_2^{i_2} \dots \partial \tau_N^{i_N}} x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N),$$

$$\tau + \theta(t - \tau) = (\tau_1 + \theta(t_1 - \tau_1), \tau_2 + \theta(t_2 - \tau_2), \dots, \tau_N + \theta(t_N - \tau_N)).$$

В случае  $k \rightarrow \infty$  выражение (3.73) определяет многомерный ряд Тейлора, который лежит в основе дифференциальных преобразований вида

$$X_T(i, \tau) = \left\{ \frac{\partial^{|i|}}{\partial t^i} x(t) \right\}_{t=\tau}, \quad (3.75)$$

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq |i| \leq k} X_T(i, \tau) T(i, t - \tau), \quad (3.76)$$

где

$$T(i, t - \tau) = \frac{(t_1 - \tau_1)^{i_1} (t_2 - \tau_2)^{i_2} \dots (t_N - \tau_N)^{i_N}}{i_1! i_2! \dots i_N!}.$$

Эти выражения в мультииндексных обозначениях соответствуют выражениям, полученным для дифференциальных преобразований в обычных обозначениях, в работе [240].

Для ограниченных значений  $k$ , множества целочисленных значений дискретных аргументов  $i$  заполняют симплексные области, т.е. функция  $X_T(i, \tau)$  для фиксированного значения  $\tau$  в одномерном случае определяется на множестве эквидистантных точек отрезка прямой линии, в двумерном случае – на множестве точек прямоугольного треугольника, а в трехмерном случае – на множестве эквидистантных точек тетраэдра, примыкающего к координатным осям (рис. 3.2). Однако вид области определения функции  $X_T(i, \tau)$  никак не связан с видом области определения функции  $x(t)$ .

Условие ограниченности значения  $k$  является практическим требованием таким, которое позволяет находить обратное дифференциальное

преобразование (3.76) путем компьютерных вычислений. В соответствии с этим условием, вместо функции  $x(t)$  имеем ее приближение  $\tilde{x}(t)$ . Величина

$$\varepsilon_T = \max_{t \in \Omega} |x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \sum_{|i|=k+1} A(i) \max_{t \in \Gamma} |\mathbf{T}(i, t - \tau)| \quad (3.77)$$

позволяет оценить близость функций  $x(t)$  и  $\tilde{x}(t)$ . Здесь  $\Gamma$ -граница области определения  $\Omega$  функции  $x(t)$ , а величины

$$A(i) = \max_{t \in \Omega} |\mathbf{X}_T(i, t)| = \max_{0 < \theta < 1} \left| \frac{\partial^{|i|}}{\partial t^i} x(\tau + \theta(t - \tau)) \right|$$

получены в результате сопоставления выражений (3.73) – (3.74) с выражением (3.76) для случая ограниченного  $k$ .

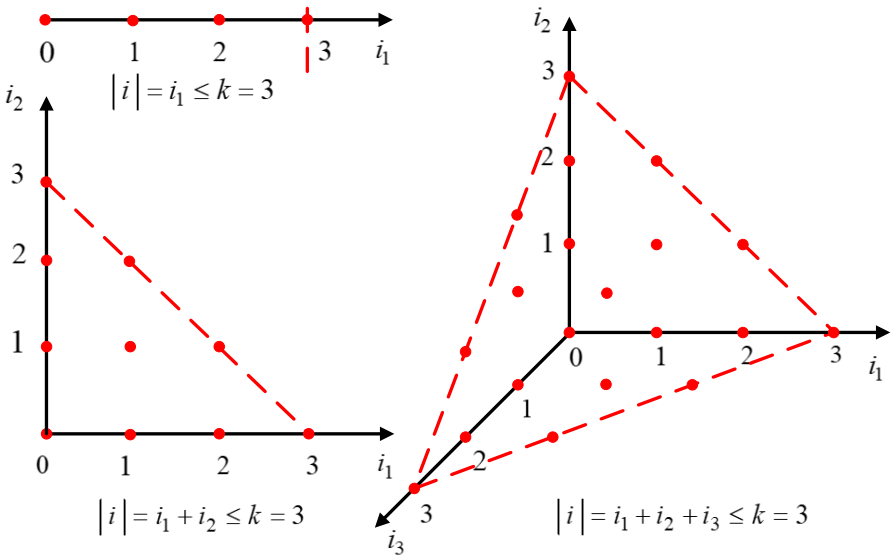


Рис. 3.2. Области определения изображающих функций в многомерных дифференциальных преобразованиях

Анализируя соотношения (3.74) и (3.77), замечаем, что значения  $x(\tau)$  и  $\tilde{x}(\tau)$  совпадают. По мере приближения к границе значение

остаточного члена  $O_x(t-\tau)$  меняется в пределах, заданных величиной  $\varepsilon_T$ . Это свойство многочленов Тейлора остро ставит проблему выбора рационального способа деления области  $\Omega$  на подобласти  $\{\Omega_m \mid m = \overline{1, M}\}$  таких размеров и форм, при которых обеспечивается приемлемая точность аппроксимации функции  $x(t)$ , определенной на  $\Omega$  кусочно-полиномиальной функцией

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=1}^M \tilde{x}(m, t) \mathbf{1}(m, t),$$

определенной на  $\tilde{\Omega} = \bigcup_{m=1}^M \Omega_m$ , где

$$\mathbf{1}(m, t) = \begin{cases} 1, & t \in \Omega_m, \\ 0, & t \notin \Omega_m. \end{cases}$$

В основе  $\mathcal{X}$ -преобразований многомерной функции  $x(t)$  лежит пара соотношений

$$\mathcal{X}\{x(t)\} = \left\{ \frac{\Delta^i}{h_1^i} \left( \frac{\Delta^i}{h_2^i} \dots \left( \frac{\Delta^i}{h_N^i} x(t) \right) \dots \right) \right\}_{t=\tau} = X_N(i, \tau, h), \quad (3.78)$$

$$\mathcal{X}^{-1}\{X_N(i, \tau, h)\} = x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq |i| \leq k} X_N(i, \tau, h) N(i, t - \tau, h), \quad (3.79)$$

где  $\Delta^{i_n} x(t) = \Delta^{i_n-1} x(t_1, \dots, t_n, \dots, t_N) - \Delta^{i_n-1} x(t_1, \dots, t_n - h_n, \dots, t_N)$ ,

$$\begin{aligned} N(i, t - \tau, h) &= \frac{(t - \tau_1)(t_1 - \tau_1 + h_1) \dots (t_1 - \tau_1 + i_1 h_1 - h_1)}{i_1!} \times \\ &\times \frac{(t_2 - \tau_2)(t_2 - \tau_2 + h_2) \dots (t_2 - \tau_2 + i_2 h_2 - h_2)}{i_2!} \times \dots \times \\ &\times \frac{(t_N - \tau_N)(t_N - \tau_N + h_N) \dots (t_N - \tau_N + i_N h_N - h_N)}{i_N!} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Выражение (3.79) будем называть многомерным рядом Ньютона.

Прямое  $\mathcal{X}$ -преобразование функции  $x(t)$  переходит в прямое дифференциальное преобразование при условии

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \mathcal{X}\{x(t)\} &= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} X_N(i, \tau, h) = \\ &= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta^i}{h_1^i} \left( \frac{\Delta^i}{h_2^i} \dots \left( \frac{\Delta^i}{h_N^i} x(t) \right) \dots \right) \right\}_{t=\tau} = \left\{ \frac{\partial^{|i|}}{\partial t^i} x(t) \right\}_{t=\tau} = X_T(i, \tau), \end{aligned}$$

где  $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_N^2}$ .

При конечных значениях  $h$  для дифференциальных преобразований система степенных функций

$$f_j = \{T(i, t - \tau) \mid |i| = j\}$$

для любого  $j \geq 1$  удовлетворяет условию

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t_n} : f_j \rightarrow f_{j-1} \mid n = \overline{1, N} \right\}.$$

Здесь множества функций  $f_j$  ( $0 \leq j \leq k$ ) дополнены нулевыми элементами таким образом, что их кардинальные числа совпадают с кардинальным числом множества  $f_k$ . Ненулевые элементы в зависимости от номера  $j$  ( $0 \leq j \leq k$ ) определяются выражениями

$$\begin{aligned} j=1: & \left\{ \frac{t_n - \tau_n}{1!} \mid n = \overline{1, N} \right\}, \\ j=2: & \left\{ \begin{array}{l} \frac{(t_n - \tau_n)^2}{2!} \mid n = \overline{1, N}, \\ \frac{(t_n - \tau_n)(t_m - \tau_m)}{1!1!} \mid m \neq n, m+n = \overline{3, 2N-1} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$



$$j=3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{(t_n - \tau_n)^3}{3!} \Big| n = \overline{1, N}, \\ \frac{(t_n - \tau_n)(t_m - \tau_m)}{1! 2!} \Big| m \neq n, m+n = \overline{3, 2N-1}, \\ \frac{(t_n - \tau_n)(t_m - \tau_m)(t_l - \tau_l)}{1! 1! 1!} \Big| m \neq n, m \neq l, m+n+l = \overline{6, 3N-3} \end{array} \right\},$$

....

Система многочленов, используемых в  $\mathcal{X}$ -преобразованиях вида

$$f_j = \{N(i, t - \tau, h) \mid |i| = j\},$$

при  $j \geq 1$  удовлетворяет условию

$$\left\{ \frac{\Delta^{1n}}{h_n} : f_j \rightarrow f_{j-1} \mid n = \overline{1, N} \right\}.$$

Здесь множества  $f_j$  ( $0 \leq j \leq k$ ) также дополнены нулевыми элементами, а ненулевые элементы определяются выражениями

$$j=1: \left\{ \frac{t_n - \tau_n}{1!} \Big| n = \overline{1, N} \right\},$$

$$j=2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{(t_n - \tau_n)(t_n - \tau_n + h_n)}{2!} \Big| n = \overline{1, N}, \\ \frac{(t_n - \tau_n)(t_m - \tau_m)}{1! 1!} \Big| m \neq n, \\ m+n = \overline{3, 2N-1} \end{array} \right\},$$

$$j=3: \left\{ \begin{array}{l} \frac{(t_n - \tau_n)(t_n - \tau_n + h_n)(t_n - \tau_n + 2h_n)}{3!} \Big| n = \overline{1, N}, \\ \frac{(t_n - \tau_n) \cdots (t_m - \tau_m)(t_m - \tau_m + h_m)}{1! 2!} \Big| m \neq n, \\ m+n = \overline{3, 2N-1}, \\ \frac{(t_n - \tau_n)(t_m - \tau_m)(t_l - \tau_l)}{1! 1! 1!} \Big| m \neq n, m \neq l, n \neq l, \\ m+n+l = \overline{6, 3N-3}, \end{array} \right\}$$

....

Таким образом, воздействие дифференциального и конечноразностного операторов на элементы  $j$ -го множества соответствующих систем функций обеспечивает переход к элементам  $(j-1)$ -го множества этих систем.

Выражение для многомерного ряда Ньютона с остаточным членом имеет вид

$$x(t) = \sum_{0 \leq |i| \leq k} X_n(i, \tau, h) N(i, t - \tau, h) + O_x(t - \tau, h), \quad (3.81)$$

где

$$O_x(t - \tau, h) = \sum_{|i|=k+1} N(i, t - \tau, h) x^{(i)}(\xi_i), \quad \xi_i = \xi_{(i_1, i_2, \dots, i_N)} \in \Omega, \quad (3.82)$$

а конечная сумма в (3.81) определяет многомерный интерполяционный полином.

Оценим величину остаточного члена  $O_x(t - \tau, h)$  в любой точке  $t \in \Omega$ . Для этого введем вспомогательную функцию

$$g(s) = x(s) - \tilde{x}(s) - \sum_{|i|=k+1} N(i, s - \tau, h) \alpha_i.$$

В этом выражении  $s = (s_1, s_2, \dots, s_N) \in \Omega$ ,  $\alpha_i = \alpha_{(i_1, i_2, i_3, \dots, i_N)}$  – коэффициенты, количество которых  $\eta^\alpha = [(N+k)! / ((N-1)!(k+1)!)]$  равно количеству возможных комбинаций элементов мультииндекса  $i = (i_1, i_2, \dots, i_N)$  при условии  $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_N = k+1$ ,  $\{i_n = \overline{0, k+1} \mid n = \overline{1, N}\}$ . Как следует из (3.82) остаточный член в узлах интерполяции равен нулю. Рассмотрим функцию  $O_x(t - \tau, h)$  в заданной точке  $t \in \Omega$ , не являющейся узлом интерполирования. В этом случае константы  $\alpha_i$  следует выбирать из условия  $g(t) = 0$ .

Предположим, функция  $x(s)$  в области  $\Omega$  имеет  $\eta^\alpha$  непрерывных производных порядка  $k+1$  вида

$$\left\{ \frac{\partial^{k+1}}{\partial s_1^{i_1} \partial s_2^{i_2} \dots \partial s_N^{i_N}} x(s) \mid |i| = k+1 \right\}.$$

Функция  $g(s)$  имеет не менее  $\eta^\mu + 1$  нулей в  $\eta^\mu = [(N+k)!]/[k!N!]$  узлах интерполирования и в точке  $t$ . Поэтому существуют точки  $\xi_i \in \Omega$ , в которых справедливы соотношения

$$\left\{ \frac{\partial^{k+1}}{\partial s_1^{i_1} \partial s_2^{i_2} \dots \partial s_N^{i_N}} g(\xi_i) = 0 \mid |i| = k+1 \right\}.$$

Поскольку

$$\left\{ \frac{\partial^{k+1}}{\partial s_1^{i_1} \partial s_2^{i_2} \dots \partial s_N^{i_N}} g(s) = \frac{\partial^{k+1}}{\partial s_1^{i_1} \partial s_2^{i_2} \dots \partial s_N^{i_N}} x(s) - \alpha_i \mid |i| = k+1 \right\},$$

окончательно получаем

$$O_x(t-\tau, h) = x(t) - \tilde{x}(t) = \sum_{|i|=k+1} N(i, t-\tau, h) x^{(i)}(\xi).$$

Следовательно, остаточный член многомерной полиномиальной интерполяции Ньютона можно представлять в виде (3.82). Заметим, что логика этого доказательства соответствует логике построения формулы остаточного члена для одномерного случая ( $N=1$ ), приведенного, например, в работе [262].

Лежащий в основе  $\mathcal{X}$ -преобразования (3.81) интерполяционный полином Ньютона

$$x(t) \approx \sum_{0 \leq |i| \leq k} N(i, t-\tau, h) X_N(i, \tau, h) = \tilde{x}(t)$$

на множестве значений  $t$  имеет симплексные области определения. Изображение  $X_N(i, \tau, h)$  на множестве значений  $i$  имеет такие же

симплексные области определения (рис. 3.3). Таким образом, формы областей определения изображений и оригиналов инвариантны относительно  $\mathcal{X}$ -преобразований.

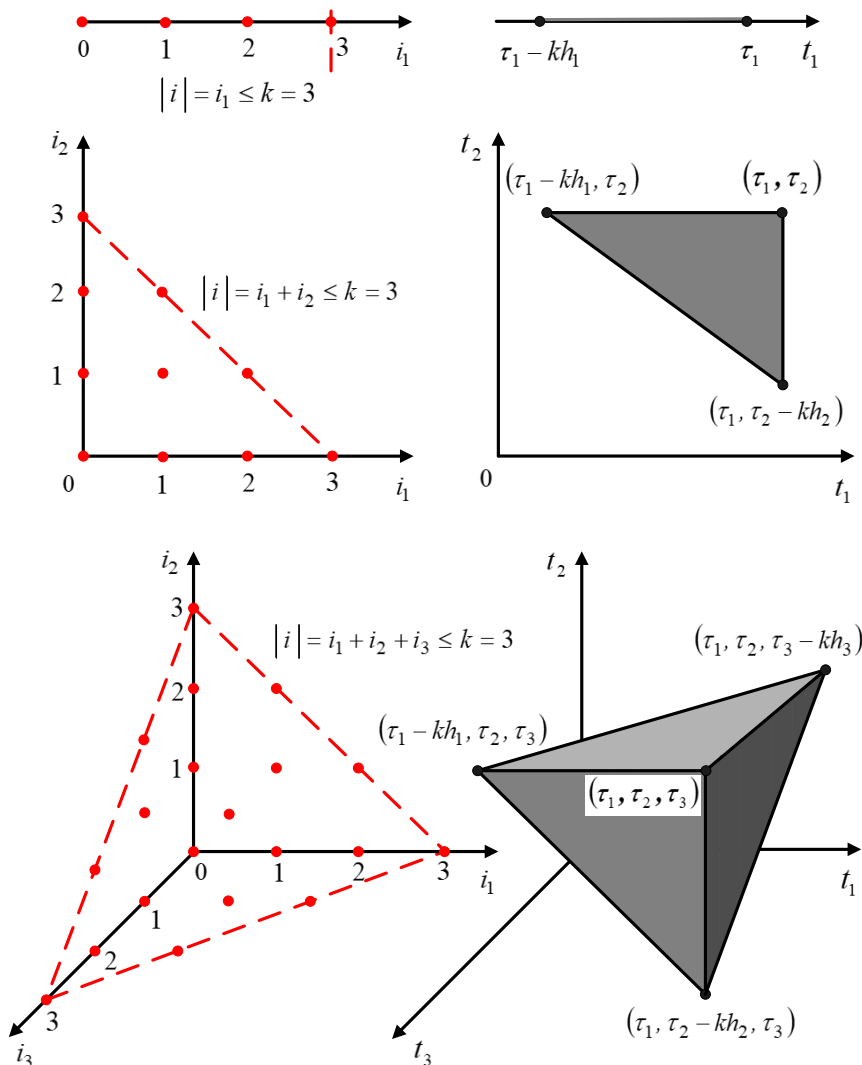


Рис. 3.3. Формы областей определения изображений и оригиналов в преобразованиях Ньютона.

Если область  $\Omega$  не симплексная, то она разделяется замкнутыми границами  $\{\Gamma_m \mid m = \overline{1, M}\}$  на симплексные подобласти  $\{\Omega_m \mid m = \overline{1, M}\}$ . На каждой подобласти  $\Omega_m$  функция  $x(t)$  аппроксимируется многомерным интерполяционным полиномом Ньютона  $\tilde{x}(m, t)$   $k$ -го порядка. На границах  $\{\Gamma_m \mid m = \overline{1, M}\}$  кусочно-полиномиальная функция

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=1}^M \tilde{x}(m, t) \mathbf{1}(m, t), \quad (3.83)$$

так же как функция  $x(t)$ , может быть непрерывной, либо иметь разрывы I-го рода.

Поскольку непосредственное применение  $\mathcal{X}$ -преобразований функции  $x(t)$  на произвольных симплексных подобластях  $\{\Omega_m \mid m = \overline{1, M}\}$  затруднено, целесообразно использовать преобразования глобальной системы координат  $(0, t)$  симплексных подобластей  $\{\Omega_m \mid m = \overline{1, M}\}$  в локальную систему  $(0, l)$  нормированной симплексной области  $\Omega_n$ . Одна из вершин этой области совпадает с началом координат системы  $(0, l)$ , а  $N$  остальных вершин располагаются по ее осям в точках  $\{l_n = -1 \mid n = \overline{1, N}\}$  (рис. 3.4). В основе таких преобразований [207, 280] лежит линейное соотношение

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 - \tau_1^{(1)} & \tau_1 - \tau_1^{(2)} & \dots & \tau_1 - \tau_1^{(N)} \\ \tau_2 - \tau_2^{(1)} & \tau_2 - \tau_2^{(2)} & \dots & \tau_2 - \tau_2^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_N - \tau_N^{(1)} & \tau_N - \tau_N^{(2)} & \dots & \tau_N - \tau_N^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_N \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

где  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$  – точка, принадлежащая глобальной системе координат  $(0, t)$  и совпадающая с  $(N+1)$ -й вершиной симплексной

подобласти  $\Omega_m$ . В точках  $\{(\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \mid n = \overline{1, N}\}$  лежат остальные  $N$  вершин этой области.

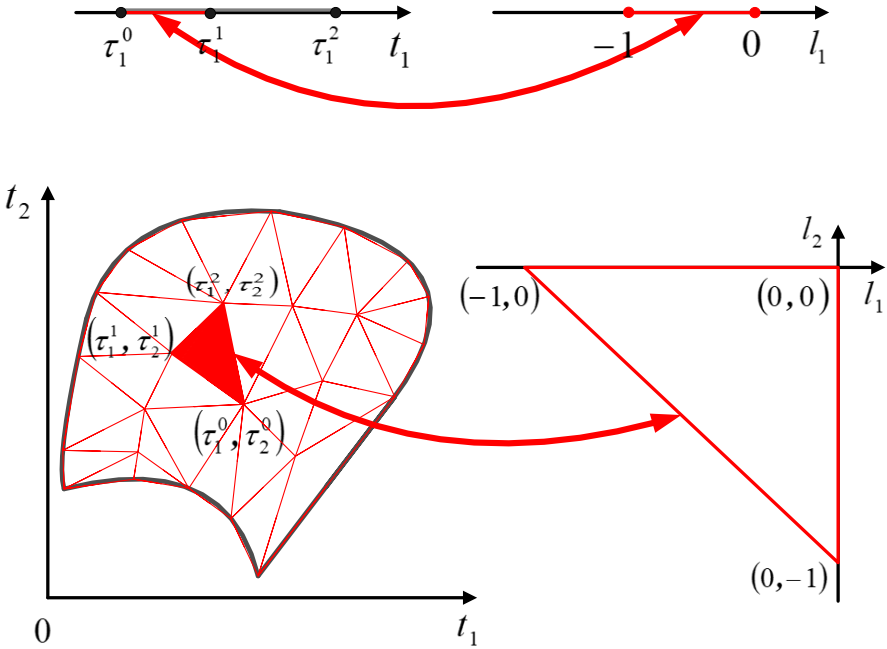


Рис. 3.4. Преобразование симплексных подобластей глобальной системы координат  $(0, t)$  в нормированную симплексную область локальной системы координат  $(0, l)$ .

Очевидно, что соотношение (3.84), записанное для любой подобласти  $\Omega_m$  в виде

$$t - \tau(m) = K(m)l, \quad (3.85)$$

является обратным преобразованием  $\{K(m): \Omega_n \rightarrow \Omega_m \mid m = \overline{1, M}\}$ , а соотношение вида

$$l = K^{-1}(m)(t - \tau(m)) \quad (3.86)$$

прямым преобразованием  $\left\{ \mathbf{K}^{-1}(m) : \Omega_m \rightarrow \Omega_n \mid m = \overline{1, M} \right\}$ .

Используя выражения (3.78), (3.81) – (3.86), для  $N$ -мерной функции  $x(t)$ , определенной на множестве  $t \in \Omega$ , запишем последовательность преобразований

$$\Omega \approx \tilde{\Omega}_M = \bigcup_{m=1, \overline{M}} \Omega_m, \quad (3.87)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}^{-1}(m) : \Omega_m \rightarrow \Omega_n, \\ t \rightarrow l, \\ \tau(m) \rightarrow \tau_n = \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 0)}_{N \text{ раз}}, \\ x(t) \rightarrow y(m, l), \end{array} \right\} \Big|_{m = \overline{1, M}}, \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \left\{ y(m, l) \mid m = \overline{1, M} \right\} &= \left\{ \mathbf{Y}_N^m(i, \tau_n, h_n) \mid m = \overline{1, M} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\Delta^i}{k^{-i_1}} \left( \frac{\Delta^{i_2}}{k^{-i_2}} \dots \left( \frac{\Delta^{i_N}}{k^{-i_N}} y(m, l) \right) \dots \right) \right\} \Big|_{l = \tau_n, m = \overline{1, M}, |i| = \overline{1, k}}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} \left\{ \mathbf{Y}_N^m(i, \tau_n, h_n) \mid m = \overline{1, M} \right\} &= \\ &= \left\{ \begin{array}{l} y(m, l) = \tilde{y}(m, l) + O_y^m(l, h_n) = \\ = \sum_{0 \leq |i| \leq k} \mathbf{Y}_N^m(i, \tau_n, h_n) N(i, l, h_n) + \sum_{|i| = k+1} N(i, l, h_n) y^{(i)}(m, \chi_i) \end{array} \right\} \Big|_{\substack{\chi_i \in \Omega_n \\ m = \overline{1, M}}}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}(m) : \Omega_n \rightarrow \Omega_m, l \rightarrow t, \tau_n \rightarrow \tau(m), h_n \rightarrow h(m), \\ \tilde{y}(m, l) \rightarrow \tilde{x}(m, t), O_y^m(l, h_n) \rightarrow O_x^m(t - \tau(m), h(m)) \end{array} \right\} \Big|_{m = \overline{1, M}} \quad (3.91)$$

$$x(t) = \sum_{m=1}^M \tilde{x}(m, t) \mathbf{1}(m, t) + O_x(t), \quad (3.92)$$

$$O_x(t) + \sum_{m=1}^M O_x^m(t - \tau(m), h(m)) \mathbf{1}(m, t). \quad (3.93)$$

В этих выражениях

$$\begin{aligned}
 h_n &= (k^{-1}, k^{-1}, \dots, k^{-1}), \\
 h(m) &= h_1(m), h_2(m), \dots, h_N(m), \\
 h_n(m) &= \frac{1}{k} \left\| \bar{\tau}(m) - \bar{\tau}^{(n)}(m) \right\|_2,
 \end{aligned}$$

где  $\left\| \bar{\tau}(m) - \bar{\tau}^{(n)}(m) \right\|_2$  – расстояние между  $n$ -ой вершиной симплексной подобласти  $\Omega_m$  с координатами  $\tau^{(n)}(m) = (\tau_1^{(n)}(m), \tau_2^{(n)}(m), \dots, \tau_N^{(n)}(m))$  и точкой  $\tau(m) = (\tau_1(m), \tau_2(m), \dots, \tau_N(m))$  соответствующей  $(N+1)$ -й вершине этой подобласти.

В отличие от преобразований (3.78) – (3.79) преобразования (3.87) – (3.93) могут применяться к функциям  $x(t)$ , заданным на различных по форме областях  $\Omega$ . Преобразования координат (3.88) и (3.91) обеспечивают взаимно-однозначное соответствие между каждой функцией  $x(t)$ , заданной на аппроксимированной области  $\Omega$  и множеством из  $M$  функций  $\{y(m, l) | m = \overline{1, M}\}$ , определенных в нормированной симплексной области  $\Omega_n$ .

Точность преобразований (3.87) – (3.93) определяется порядком  $k$  аппроксимации функции  $x(t)$  интерполяционными полиномами  $\{\tilde{x}(m, t) | m = \overline{1, M}\}$  и размерами симплексных подобластей  $\{\Omega_m | m = \overline{1, M}\}$ , которые зависят от параметров  $\{h(m) | m = \overline{1, M}\}$  и  $M$ . В случае аналитической, либо кусочно-аналитической функции  $x(t)$  для любого фиксированного  $k$  погрешности преобразований (3.87) – (3.93) могут быть уменьшены до сколь угодно малых величин при условиях  $\{\|h(m)\| \rightarrow 0 | m = \overline{1, M}\}$ ,  $M \rightarrow \infty$ . В случае целой либо кусочно-целой функции  $x(t)$  это достигается при конечных значениях  $M$  и  $h(m)$ , путем



неограниченного увеличения  $k$  [13, 32], если область  $\Omega$  определения функции  $x(t)$  удовлетворяет условию  $\Omega = \bigcup_{m=1, \overline{M}} \Omega_m \mid M \geq M_0$ , где  $M_0$  – некоторое конечное число разбиений, при котором возможно точное представление  $\Omega$  в виде объединения симплексных подобластей  $\{\Omega_m \mid m=1, \overline{M}\}$ .

### 3.6. Операторы дифференцирования двумерных функций

В одномерном случае ( $N=1$ ) изображение  $Y_N^m(i, \tau_n, h_n)$  функции  $y(m, l)$ , определяемое соотношением (3.89), удобно представлять в виде вектора  $\vec{Y}_1$ . Опуская для краткости записи параметры  $m, \tau_n, h_n$ , имеем определение

$$\vec{Y}_1 = | Y_N(0) \ Y_N(1) \ Y_N(2) \ \dots \ Y_N(k) |^T. \quad (3.94)$$

Используя тождества (3.24), свяжем вектор  $\vec{Y}_1$  с вектором

$$\vec{y}_1 = | y(0) \ y(-k^{-1}) \ y(-2k^{-1}) \ \dots \ y(-1) |^T \quad (3.95)$$

равноотстоящих значений функции  $y(l)$

$$\vec{Y}_1 = \Pi_1 \vec{y}_1, \quad (3.96)$$

$$\vec{y}_1 = \Pi_1^{-1} \vec{Y}_1, \quad (3.97)$$

где матрицы преобразований  $\Pi_1$  и  $\Pi_1^{-1}$  размерности  $(k+1) \times (k+1)$  имеют вид

$$\Pi_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ k & -k & 0 & 0 & \cdot \\ k^2 & -2k^2 & k^2 & 0 & \cdot \\ k^3 & -3k^3 & 3k^3 & -k^3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \quad \Pi_1^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -k^{-1} & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -2k^{-1} & k^{-2} & 0 & \cdot \\ 1 & -3k^{-1} & 3k^{-2} & k^{-3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \quad (3.98)$$

Обращаясь к  $\mathcal{X}$ -преобразованиям (3.89) – (3.90) и образуя из функций  $N(i, l, k^{-1})$  вектор-строку

$$\bar{N}_1(l) = \left| 1 \quad N(1, l, k^{-1}) \quad N(2, l, k^{-1}) \quad \dots \quad N(k, l, k^{-1}) \right|, \quad (3.99)$$

для функции  $\tilde{y}(l)$ , интерполирующей функцию  $y(l)$ , запишем выражения

$$\mathcal{X}\{\tilde{y}(l)\} = \bar{Y}_1 = \Pi_1 \bar{y}_1, \quad (3.100)$$

$$\mathcal{X}^{-1}\{\bar{Y}_1\} = \bar{N}_1(l) \bar{Y}_1 = \tilde{y}(l). \quad (3.101)$$

Для построения операторов дифференцирования одномерных функций по переменной  $l$  воспользуемся соотношениями (3.100) – (3.101), а также тождеством

$$\bar{y}_1 = y(\bar{L}_1), \quad \text{где} \quad \bar{L}_1 = \left| 0 \quad -k^{-1} \quad -2k^{-1} \quad \dots \quad -1 \right|^T. \quad (3.102)$$

Если функции  $\tilde{x}(l)$  и  $\tilde{y}(l)$  удовлетворяют условию

$$\frac{d}{dl}[\tilde{x}(l)] = \tilde{y}(l), \quad (3.103)$$

то, на основании соотношений (3.100) – (3.102), получим

$$\mathcal{X}\left\{\frac{d}{dl}\bar{N}_1(l)\right\} \Pi_1 x(\bar{L}_1) = \Pi_1 y(\bar{L}_1) \quad (3.104)$$

или

$$D(1, k)x(\bar{L}_1) = y(\bar{L}_1), \quad (3.105)$$

где  $D(1, k)$  – квадратная  $(k+1) \times (k+1)$  матрица дифференцирования, которая для первых четырех значений параметра  $k$  представляется в виде

$$D(1,1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, D(1,2) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}, D(1,3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 11 & -18 & 9 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & 1 \\ -1 & 6 & -3 & -2 \\ 2 & -9 & 18 & -11 \end{vmatrix},$$

$$D(1,4) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 25 & -48 & 36 & -16 & 3 \\ 3 & 10 & -18 & 6 & -1 \\ -1 & 8 & 0 & -8 & 1 \\ 1 & -6 & 18 & -10 & -3 \\ -3 & 16 & -36 & 48 & -25 \end{vmatrix}. \quad (3.106)$$

Используя выражение (3.105), получим операторы дифференцирования, учитывающие краевые условия слева или справа, т.е. в точках  $l = -1 = b$  или  $l = 0 = a$ , соответственно.

Для учета краевого условия слева необходимо в системе равенств (3.105) удалить последнее уравнение, а  $(k+1)$ -й столбец образовавшейся прямоугольной матрицы вместе с соответствующим элементом вектора  $x(\bar{L}_1)$  выделить отдельным слагаемым. В результате таких преобразований найдем

$$D^b(1, k) x(\bar{L}_1^b) - x(b) \bar{N}_D^b(1, k) = y(\bar{L}_1^b), \quad (3.107)$$

где вектор  $\bar{L}_1^b$  отличается от вектора  $\bar{L}_1$  тем, что имеет размерность  $k$  и не содержит последнего элемента  $-1$ ; вектор  $\bar{N}_D^b(1, k)$  образован из взятых с обратным знаком первых  $k$  элементов  $(k+1)$ -го столбца матрицы  $D(1, k)$ . Обращаясь к выражению (3.41), отметим тождества

$$\bar{D}(k_m) = D^b(1, k) \text{ и } \bar{N}_{\bar{D}}(k_m) = \bar{N}_D^b(1, k).$$

Для учета краевого условия справа необходимо в системе равенств (3.105) удалить первое уравнение. Затем первый столбец образовавшейся прямоугольной матрицы, вместе с соответствующим элементом вектора  $x(\bar{L}_1)$ , выделить отдельным слагаемым. В результате найдем

$$D^a(1,k)x(\bar{L}_1^a) - x(a)\bar{N}_D^a(1,k) = y(\bar{L}_1^a), \quad (3.108)$$

где вектор  $\bar{L}_1^a$  отличается от вектора  $\bar{L}_1$  тем, что имеет размерность  $k$  и не содержит первого элемента 0; вектор  $\bar{N}_D^a(1,k)$  образован из взятых с обратным знаком последних  $k$  элементов 1-го столбца матрицы  $D(1,k)$ .

В отличие от одномерного случая в двумерном случае ( $N=2$ ) изображение  $Y_N^m(i, \tau_n, h_n)$  функции  $y(m,l)$ , определяемое соотношением (3.89), удобно представлять в виде блочного вектора  $\bar{Y}_2$ , который без учета индексов  $m, \tau_n, h_n$  задается выражением

$$\bar{Y}_2 = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \boxed{Y_N(0,0)} & \boxed{Y_N(0,1)} & \boxed{Y_N(0,2)} & \boxed{\dots} & \boxed{Y_N(0,k)} \\ \boxed{Y_N(1,0)} & \boxed{Y_N(1,1)} & \vdots & & \\ \boxed{Y_N(2,0)} & \vdots & \boxed{Y_N(k-2,2)} & & \\ \vdots & & & & \\ \boxed{Y_N(k,0)} & \boxed{Y_N(k-1,1)} & & & \end{array} \right]^T, \quad (3.109)$$

где  $T$  – символ транспонирования этого вектора по блочным элементам;  $(i_1, i_2)$  – значения элементов мультииндекса  $i$ .

Используя тождества (3.24), свяжем вектор  $\bar{Y}_2$  с блочным вектором-столбцом

$$\vec{y}_2 = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} y(0,0) & y\left(0, -\frac{1}{k}\right) & y\left(0, -\frac{2}{k}\right) & \dots & y(0,-1) \\ y\left(-\frac{1}{k}, 0\right) & y\left(-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right) & \vdots & & \\ y\left(-\frac{2}{k}, 0\right) & \vdots & y\left(-\frac{k-2}{k}, -\frac{2}{k}\right) & & \\ \vdots & & & & \\ y(-1,0) & y\left(-\frac{k-1}{k}, -\frac{1}{k}\right) & & & \end{array} \right]^T \quad (3.110)$$

равноотстоящих в нормированной области  $\Omega_n$  значений функции  $y(l)$

$$\vec{Y}_2 = \Pi_2 \vec{y}_2, \quad (3.111)$$

$$\vec{y}_2 = \Pi_2^{-1} \vec{Y}_2, \quad (3.112)$$

где матрицы преобразований  $\Pi_2$  и  $\Pi_2^{-1}$  имеют размерность  $\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right] \times \left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]$  и образуются из матриц  $\Pi_1$  и  $\Pi_1^{-1}$  определяемых выражением (3.98).

Предварительно обнулив все элементы матрицы  $\Pi_2$ , заполним ее диагональ матричными блоками  $\Pi_1(k)$ ,  $\Pi_1(k-1)$ ,  $\Pi_1(k-2)$ , ...,  $\Pi_1(0)$  размерностей  $(k+1) \times (k+1)$ ,  $k \times k$ ,  $(k-1) \times (k-1)$ , ...,  $1 \times 1$ , соответственно,

$$\left| \begin{array}{cccc} \Pi_1(k) & & & \\ & \Pi_1(k-1) & & \\ & & \Pi_1(k-2) & \\ & & & \ddots \\ & & & & \Pi_1(0) \end{array} \right|. \quad (3.113)$$

Матрица  $\Pi_1(k)$  является матрицей  $\Pi_1$ , а все последующие матрицы  $\Pi_1(k-j)$  для  $0 < j \leq k$  получаются из нее путем удаления  $j$  последних строк и  $j$  последних столбцов.

На основе диагональных матричных блоков формируются остальные матричные блоки нижней треугольной матрицы  $\Pi_2$ . При

формировании блоков первого столбца матрицы  $\Pi_2$  используются элементы первого столбца матрицы  $\Pi_1$  и диагональный блок  $\Pi_1(k)$ . Если в диагональном блоке  $\Pi_1(k)$  удалить  $j$  последних строк, а оставшиеся элементы умножить на  $j$ -й элемент первого столбца матрицы  $\Pi_1$ , то получим  $j$ -й блок первого столбца матрицы  $\Pi_2$ . Для образования  $j$ -го блока второго столбца матрицы  $\Pi_2$  используются диагональный матричный блок  $\Pi_1(k-1)$  и элементы второго столбца матрицы  $\Pi_1$ . Для получения  $j$ -го блока ( $j \geq 2$ ) второго столбца матрицы  $\Pi_2$  необходимо в матрице  $\Pi_1(k-1)$  удалить  $(j-1)$  последних строк, и каждый элемент образованного матричного блока умножить на  $j$ -й элемент второго столбца матрицы  $\Pi_1$ . Аналогичные преобразования над диагональными матричными блоками  $\Pi_1(k-2)$ ,  $\Pi_1(k-3)$ , ...,  $\Pi_1(0)$ , с учетом соответствующих элементов 3-го, 4-го, ...,  $k$ -го столбцов матрицы  $\Pi_1$ , завершают процесс формирования матрицы  $\Pi_2$ .

Для формирования матрицы  $\Pi_2^{-1}$  в описанном выше алгоритме необходимо осуществить замену матрицы  $\Pi_1$  на  $\Pi_1^{-1}$ , а матрицы  $\Pi_2$  на  $\Pi_2^{-1}$ . Ниже представлены матрицы  $\Pi_2$  и  $\Pi_2^{-1}$ , полученные для случая  $k = 2$ ,

$$\Pi_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^2 & -2k^2 & k^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ k^2 & -k^2 & 0 & -k^2 & k^2 & 0 \\ \hline k^2 & 0 & 0 & -2k^2 & 0 & k^2 \\ \hline \end{array} \\ , \end{array}$$

$$\Pi_2^{-1} = \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2k^{-2} & k^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -k^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & -k^{-1} & 0 & -k^{-1} & k^{-2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2k^{-1} & 0 & k^{-2} \\ \hline \end{array} . \quad (3.114)$$

Опуская мультииндекс  $h_n$  и раскрывая  $i$ , на основе выражений (3.89), (3.90) образуем из функций  $N((i_1, i_2), l)$  блочную вектор-строку

$$\bar{N}_2(l) = \begin{array}{|l} | N((0,0),l) \ N((1,0),l) \ N((2,0),l) \ \dots \ N((k,0),l) | \\ | N((0,1),l) \ N((1,1),l) \ \dots \ N((k-1,1),l) | \\ | N((0,2),l) \ \dots \ N((k-2,2),l) | \\ \vdots \\ | N((0,k),l) | \end{array} . \quad (3.115)$$

Для функции  $\tilde{y}(l)$ , интерполирующей функцию  $y(l)$ , запишем

$$\mathcal{R}\{\tilde{y}(l)\} = \bar{Y}_2 = \Pi_2 \bar{y}_2, \quad (3.116)$$

$$\mathcal{R}^{-1}\{\bar{Y}_2\} = \bar{N}_2(l) \bar{y}_2 = \tilde{y}(l). \quad (3.117)$$

Эти преобразования легко реализуются на вычислительных ресурсах и могут применяться для вычисления изображений сложных двумерных функций, так как

$$\bar{y}_2 = y_2(\bar{L}_2), \quad (3.118)$$

где блочный вектор-столбец

$$\bar{L}_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline (0,0) & \left(0, -\frac{1}{k}\right) & \left(0, -\frac{2}{k}\right) & \dots & (0,-1) \\ \left(-\frac{1}{k}, 0\right) & \left(-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right) & \vdots & & \\ \left(-\frac{2}{k}, 0\right) & \vdots & \left(-\frac{k-2}{k}, -\frac{2}{k}\right) & & \\ \vdots & \left(-\frac{k-1}{k}, -\frac{1}{k}\right) & & & \\ (-1,0) & & & & \\ \hline \end{array} . \quad (3.119)$$

Приведенная структура блочного вектора  $\vec{L}_2$  повторяет по форме двумерную нормированную симплексную область  $\Omega_n$  (рис. 3.4), повернутую относительно начала координат на  $90^\circ$  против часовой стрелки.

Привлекая соотношения (3.116) – (3.119), для непрерывной двумерной функции  $x(l)$  можно построить операторы дифференцирования по переменным  $l_1$  и  $l_2$ . Если функции  $\tilde{x}(l)$  и  $\tilde{y}(l)$ , интерполирующие функции  $x(l)$  и  $y(l)$ , удовлетворяют условию

$$\frac{\partial}{\partial l_1} [\tilde{x}(l)] = \tilde{y}(l), \quad (3.120)$$

то получим

$$\mathcal{D} \left\{ \frac{\partial}{\partial l_1} \vec{N}_2(l) \right\} \Pi_2 x(\vec{L}_2) = \Pi_2 y(\vec{L}_2) \quad (3.121)$$

или

$$D_{11}(2,k)x(\vec{L}_2) = y(\vec{L}_2), \quad (3.122)$$

где  $D_{11}(2,k)$  – квадратная размерности  $\left[ \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \right] \times \left[ \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \right]$  матрица расширенного оператора дифференцирования двумерной функции по переменной  $l_1$ . Для вычисления элементов матрицы  $D_{11}(2,k)$  необходимо продифференцировать по переменной  $l_1$  множество функций  $\vec{N}_2(l)$  вида (3.80), найти значения элементов образовавшейся матрицы  $\partial \vec{N}_2(l) / \partial l_1 |_{l = \vec{L}_2}$  и умножить ее на матрицу  $\Pi_2$ . Эту трудоемкую операцию можно упростить.

С этой целью, предварительно обнулив все элементы матрицы  $D_{11}(2,k)$ , заполним ее диагональ матричными блоками  $D(1,k)$ ,



$\frac{k}{k-1}D(1, k-1), \frac{k}{k-2}D(1, k-2), \dots, kD(1, 1), 0,$  размерностью  $(k+1) \times (k+1), k \times k, (k-1) \times (k-1), \dots, 2 \times 2, 1 \times 1,$  соответственно, где матрицы  $\left\{ D(1, \nu) \mid \nu = \overline{1, k} \right\}$  являются расширенными операторами дифференцирования одномерных функций вида (3.106). Матрица  $D_{II}(2, k)$  является блочной нижнетреугольной. Поэтому, вычисления ее ненулевых блоков  $d_{\mu\nu}$  для всех  $\mu > \nu$  осуществляются в соответствии с формулой

$$d_{\mu\nu} = \alpha_\nu(\mu) \sum_{j=\nu}^{\mu} (-1)^{j-\nu} \alpha_{j-\nu+1}(\mu-\nu+1) \frac{k}{k-j+1} \tilde{D}(1, k-j+1), \quad (3.123)$$

в которой значения весовых коэффициентов  $\alpha$  берутся из треугольника Паскаля (таблица 3.4).

Таблица 3.4.

Весовые коэффициенты формулы (3.123) вычисления блоков матричного оператора  $D_{II}(2, k)$  дифференцирования двумерных функций

$\mu$	$\alpha_1(\mu)$	$\alpha_2(\mu)$	$\alpha_3(\mu)$	$\alpha_4(\mu)$	$\alpha_5(\mu)$	$\alpha_6(\mu)$	$\alpha_7(\mu)$	...
1	1							
2	1	1						
3	1	2	1					
4	1	3	3	1				
5	1	4	6	4	1			
6	1	5	10	10	5	1		
7	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Матрицы  $\left\{ \tilde{D}(1, k-j+1) \mid j = \overline{\nu, \mu} \right\}$  образуются из матриц  $\left\{ D(1, k-j+1) \mid j = \overline{\nu, \mu} \right\}$  путем удаления такого количества последних строк, при котором достигается равенство строк матриц

$\{\tilde{D}(1, k-j+1) | j = \overline{\nu, \mu-1}\}$  и матрицы  $D(1, k-\mu+1)$ . Кроме того, полученные матрицы, кроме матрицы  $\tilde{D}(1, k-\nu+1)$ , дополняются справа нулевыми столбцами так, чтобы суммируемые с весами  $\alpha$  матрицы  $\{D(1, k-j+1) | j = \overline{\nu, \mu}\}$  имели одинаковое число столбцов.

В соответствии с описанным выше алгоритмом были получены операторы дифференцирования  $D_{II}(2, k)$ , которые для первых четырех значений параметра  $k$  имеют вид

$$D_{II}(2, 4) = \frac{1}{3} D_{II}(2, 1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$D_{II}(2, 2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 4 & -4 & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$D_{II}(2, 3) = \frac{1}{2} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 11 & -18 & 9 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 6 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -9 & 18 & -11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -6 & 6 & -2 & 9 & -12 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 3 & -3 & 1 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -6 & 6 & -2 & -3 & 12 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 3 & -2 & 6 & -12 & 6 & 6 & -6 & 0 \\ \hline 2 & -3 & 0 & 1 & -6 & 12 & -6 & 6 & -6 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & -2 & -9 & 0 & 9 & 18 & -18 & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$D_{11}(2,4) = \frac{1}{3} \times$$

	25	-48	36	-16	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	10	-18	6	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1	8	0	-8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	-6	18	-10	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-3	16	-36	48	-25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
×	3	-12	18	-12	3	22	-36	18	-4	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1	4	-6	4	-1	4	6	-12	2	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	-4	6	-4	1	-2	12	-6	-4	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	12	-18	12	-3	4	-18	36	-22	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1	0	6	-8	3	8	-24	24	-8	18	-24	6	0	0	0	0	0
	1	-2	0	2	-1	-4	12	-12	4	6	0	-6	0	0	0	0	0
	-3	8	-6	0	1	8	-24	24	-8	-6	24	-18	0	0	0	0	0
	1	0	0	-4	3	-6	0	18	-12	18	-36	18	12	-12	0	0	0
	-3	4	0	0	-1	12	-18	0	6	-18	36	-18	12	-12	0	0	0
	-3	0	0	0	3	16	0	0	-16	-36	0	36	48	-48	0	0	0

Найденные матричные операторы  $D_{11}(2,k)$  соответствуют оператору дифференцирования  $\partial/\partial l_1$ . Если же двумерные функции  $\tilde{x}(l)$  и  $\tilde{z}(l)$ , интерполирующие функции  $x(l)$  и  $z(l)$ , удовлетворяют условию

$$\frac{\partial}{\partial l_2}[\tilde{x}(l)] = \tilde{z}(l), \quad (3.125)$$

то нет необходимости в специальном поиске матричных операторов дифференцирования  $D_{12}(2,k)$ , соответствующих оператору  $\partial/\partial l_2$ . Такие матрицы могут быть построены на основе матриц  $D_{11}(2,k)$  и некоторых вспомогательных матриц  $E_*(2,k)$ , преобразующих векторы  $\vec{L}_2$  вида (3.119) в векторы  $\vec{L}_{2*}$ , вида

$$\bar{L}_{2*} = \begin{pmatrix} (0,0) & \left(-\frac{1}{k}, 0\right) & \left(-\frac{2}{k}, 0\right) & \dots & (-1,0) \\ \left(0, -\frac{1}{k}\right) & \left(-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right) & \vdots & & \\ \left(0, -\frac{2}{k}\right) & \vdots & \left(-\frac{2}{k}, -\frac{k-2}{k}\right) & & \\ \vdots & \left(-\frac{1}{k}, -\frac{k-1}{k}\right) & & & \\ (0,-1) & & & & \end{pmatrix}^T. \quad (3.126)$$

Учитывая свойства матриц  $E_*(2, k)$  –

$$E_*^T(2, k) = E_*^{-1}(2, k) = E_*(2, k), \quad \bar{L}_{2*} = E_*(2, k)\bar{L}_2, \quad \bar{L}_2 = E_*(2, k)\bar{L}_{2*}$$

на основе выражения (3.125) запишем равенство

$$D_{l_2}(2, k)x(\bar{L}_2) = z(\bar{L}_2), \quad (3.127)$$

в котором

$$D_{l_2}(2, k) = E_*(2, k) D_{l_1}(2, k) E_*(2, k). \quad (3.128)$$

Матрицы  $E_*(2, k)$  для первых трех значений параметра  $k$  имеют вид

$$E_*(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad E_*(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & 1 \\ & 1 & & & \\ & & & & 1 \\ & & 1 & & \end{pmatrix},$$

$$E_*(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 \\ & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & \end{pmatrix}. \quad (3.129)$$

Здесь пустые клетки соответствуют нулевым элементам. Матрицы  $E_*(2,k)$  имеют регулярную структуру и, поэтому, построение алгоритмов их вычисления и их программная реализация не вызывают трудностей.

Из расширенных матричных операторов дифференцирования  $D_{l1}(2,k)$  и  $D_{l2}(2,k)$ , путем несложных преобразований, можно получить операторы дифференцирования, учитывающие граничные условия.

Обозначим вершины нормированной симплексной области  $\Omega_n$  через  $a = (0,0)$ ,  $b = (-1,0)$ ,  $c = (0,-1)$  (рис.3.5).

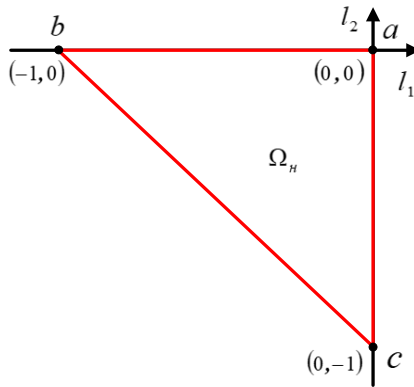


Рис. 3.5. Двумерная нормированная симплексная область.

Очевидно, задание граничных условий для оператора  $D_{l1}(2,k)$  допускается на линиях  $bc$  или  $ca$ , а для оператора  $D_{l2}(2,k)$  – на линиях  $ab$  или  $bc$ . Из множества узлов интерполяции, принадлежащих этим линиям, составим  $(k+1)$ -мерные векторы

$$\bar{L}_2^{bc} = \left| (-1,0) \left( -1 + \frac{1}{k}, -\frac{1}{k} \right) \left( -1 + \frac{2}{k}, -\frac{2}{k} \right) \dots (0,-1) \right|^T, \quad (3.130)$$

$$\bar{L}_2^{ca} = \left| (0,-1) \left(0,-1+\frac{1}{k}\right) \left(0,-1+\frac{2}{k}\right) \dots (0,0) \right|^T, \quad (3.131)$$

$$\bar{L}_2^{ab} = \left| (0,0) \left(-\frac{1}{k},0\right) \left(-\frac{2}{k},0\right) \dots (-1,0) \right|^T. \quad (3.132)$$

Алгоритм преобразования матриц  $D_{I1}(2,k)$  и  $D_{I2}(2,k)$  в операторы дифференцирования  $D_{I1}^{bc}(2,k)$ ,  $D_{I1}^{ca}(2,k)$  и  $D_{I2}^{ab}(2,k)$ ,  $D_{I2}^{bc}(2,k)$ , а также образование матриц  $N_{D_{I1}}^{bc}(2,k)$ ,  $N_{D_{I1}}^{ca}(2,k)$  и  $N_{D_{I2}}^{ab}(2,k)$ ,  $N_{D_{I2}}^{bc}(2,k)$ , учитывающих граничные условия  $x(\bar{L}_2^{bc})$ ,  $x(\bar{L}_2^{ca})$ ,  $x(\bar{L}_2^{ab})$ , аналогичен описанному ранее алгоритму преобразования матриц  $D(1,k)$  в  $D^b(1,k)$  и  $D^a(1,k)$ , и формирования векторов  $\bar{N}_D^b(1,k)$ ,  $\bar{N}_D^a(1,k)$ , учитывающих краевые условия  $x(b)$ ,  $x(a)$  в одномерном случае. Для двумерного случая в преобразованиях участвует группа строк и столбцов матриц  $D_{I1}(2,k)$  и  $D_{I2}(2,k)$  с номерами, определяемыми положением элементов векторов  $\bar{L}_2^{bc}$ ,  $\bar{L}_2^{ca}$ ,  $\bar{L}_2^{ab}$  в векторе  $\bar{L}_2$ . Строки с такими номерами в указанных матрицах вычеркиваются, а столбцы объединяются в отдельные прямоугольные матрицы  $\bar{N}_{D_{I1}}^{bc}(2,k)$ ,  $\bar{N}_{D_{I1}}^{ca}(2,k)$ ,  $\bar{N}_{D_{I2}}^{ab}(2,k)$ ,  $\bar{N}_{D_{I2}}^{bc}(2,k)$ . В результате получаем группу соотношений:

$$\begin{aligned} D_{I1}^{bc}(2,k)x(\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{bc}) - N_{D_{I1}}^{bc}(2,k)x(\bar{L}_2^{bc}) &= y(\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{bc}), \\ D_{I1}^{ca}(2,k)x(\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{ca}) - N_{D_{I1}}^{ca}(2,k)x(\bar{L}_2^{ca}) &= y(\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{ca}), \\ D_{I2}^{ab}(2,k)x(\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{ab}) - N_{D_{I2}}^{ab}(2,k)x(\bar{L}_2^{ab}) &= z(\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{ab}), \\ D_{I2}^{bc}(2,k)x(\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{bc}) - N_{D_{I2}}^{bc}(2,k)x(\bar{L}_2^{bc}) &= z(\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{bc}), \end{aligned} \quad (3.133)$$

где, например,  $\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{bc}$  означает, что в векторе  $\bar{L}_2$  удалены элементы, содержащиеся в векторе  $\bar{L}_2^{bc}$ . Для случая  $k=3$  соответствующие параметры в приведенных соотношениях имеют вид:

$$\begin{aligned}
\bar{L}_2^{ab} &= \left| (0,0) \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \left(-\frac{2}{3}, 0\right) (-1,0) \right|^T, \\
\bar{L}_2^{bc} &= \left| (-1,0) \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) (0,-1) \right|^T, \\
\bar{L}_2^{ca} &= \left| (0,-1) \left(0, -\frac{2}{3}\right) \left(0, -\frac{1}{3}\right) (0,0) \right|^T,
\end{aligned} \tag{3.134}$$

$$\bar{L}_2 / L_2^{ab} = \left| \left(0, -\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \left(0, -\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) (0,-1) \right|^T,$$

$$\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{bc} = \left| (0,0) \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \left(0, -\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \left(0, -\frac{2}{3}\right) \right|^T,$$

$$\bar{L}_2 / \bar{L}_2^{ca} = \left| \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \left(-\frac{2}{3}, 0\right) (-1,0) \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right|^T,$$

$$\mathcal{D}_{11}^{bc}(2,3) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 11 & -18 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 6 & 9 & -12 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 6 & -12 & 6 \end{vmatrix}, \quad N_{\mathcal{D}_{11}}^{bc}(2,3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \end{vmatrix}, \tag{3.135}$$

$$\mathcal{D}_{11}^{ca}(2,3) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 18 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & -2 & 12 & -9 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 12 & -6 & -6 \end{vmatrix}, \quad N_{\mathcal{D}_{11}}^{ca}(2,3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & -2 \end{vmatrix}, \tag{3.136}$$

$$\begin{aligned}
D_{l_2}(2,3) &= E_*(2,3)D_{l_1}(2,3)E_*(2,3) = \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 & 9 & 0 & -2 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & -6 & -12 & 0 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & 6 & 0 & 0 & -12 & -6 & 3 & 6 & -2 \\ 2 & -9 & 18 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & 9 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 6 & 0 & -3 & 12 & -6 & 0 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & -6 & 12 & 0 & 6 & -9 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 18 & 0 & -11 \end{vmatrix}, \quad (3.137)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{l_2}^{ab}(2,3) &= \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ -3 & 12 & -6 & 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ -6 & 12 & 0 & 6 & -9 & -2 \\ -9 & 0 & 0 & 18 & 0 & -11 \end{vmatrix}, \quad N_{D_{l_2}}^{ab}(2,3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (3.138)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{l_2}^{bc}(2,3) &= \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 & -18 & 0 & 9 \\ 2 & 9 & 0 & -6 & -12 & 6 \\ -1 & 6 & 6 & 0 & -12 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}, \quad N_{D_{l_2}}^{bc}(2,3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}. \quad (3.139)
\end{aligned}$$

Операторы дифференцирования  $D_{l_1}(2,k)$  и  $D_{l_2}(2,k)$  действуют на функции, определенные в нормированной симплексной области  $\Omega_n$  локальной системы координат  $(0,t)$ . В случае произвольных двумерных ( $N=2$ ) симплексных подобластей  $\Omega_m$  глобальной системы координат  $(0,t)$  на основе равенства (3.84) получим



$$\begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_1 - \tau_1^{(1)} & \tau_1 - \tau_1^{(2)} \\ \tau_2 - \tau_2^{(1)} & \tau_2 - \tau_2^{(2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{vmatrix} \quad (3.140)$$

и

$$\begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \tau_2 - \tau_2^{(2)} & \tau_1^{(2)} - \tau_1 \\ \tau_2^{(1)} - \tau_2 & \tau_1 - \tau_1^{(1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_1 - \tau_1 \\ t_2 - \tau_2 \end{vmatrix}, \quad (3.141)$$

где  $\alpha = [(\tau_1 - \tau_1^{(1)})(\tau_2 - \tau_2^{(2)}) - (\tau_2 - \tau_2^{(1)})(\tau_1 - \tau_1^{(2)})]^{-1}$ .

Тогда для функций  $x(t_1, t_2)$ ,  $u(t_1, t_2)$ ,  $v(t_1, t_2)$ , определенных в подобласти  $\Omega_m$  и связанных между собой соотношением

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} & \frac{\partial}{\partial t_2} \end{vmatrix}^T x(t_1, t_2) = \begin{vmatrix} u(t_1, t_2) & v(t_1, t_2) \end{vmatrix}^T, \quad (3.142)$$

запишем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial t_1} & \frac{\partial l_2}{\partial t_1} \\ \frac{\partial l_1}{\partial t_2} & \frac{\partial l_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial l_1} \\ \frac{\partial}{\partial l_2} \end{vmatrix} x(t_1, t_2) = \begin{vmatrix} u(t_1, t_2) \\ v(t_1, t_2) \end{vmatrix}. \quad (3.143)$$

Учитывая выражения (3.120), (3.122), (3.125), (3.127), (3.140) - (3.143), запишем

$$\alpha \begin{vmatrix} \tau_2 - \tau_2^{(2)} & \tau_2^{(1)} - \tau_2 \\ \tau_1^{(2)} - \tau_1 & \tau_1 - \tau_1^{(1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_{11}(2, k) \\ D_{12}(2, k) \end{vmatrix} x(\vec{t}) = \begin{vmatrix} u(\vec{t}) \\ v(\vec{t}) \end{vmatrix}, \quad (3.144)$$

где вектор  $\vec{t}$  образован из элементов вектора  $\vec{L}_2$ , преобразованных с помощью соотношений (3.140).

Рассмотрим пример использования операторов  $D_{11}(2, k)$  и  $D_{12}(2, k)$  для дифференцирования функции  $x(t_1, t_2) = 10 \sin \frac{t_1 + t_2}{15}$  в подобласти  $\Omega_m$  с координатами вершин (3,2), (2,4), (6,1) (рис. 3.6).

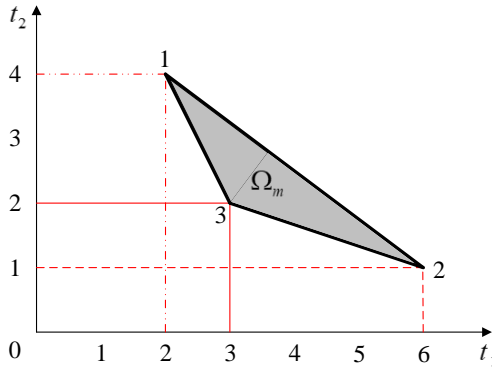


Рис. 3.6. Пример симплексной подобласти  $\Omega_m$

Пусть  $\tau_1 = 3$ ,  $\tau_2 = 2$ ,  $\tau_1^{(1)} = 2$ ,  $\tau_2^{(1)} = 4$ ,  $\tau_1^{(2)} = 6$ ,  $\tau_2^{(2)} = 1$ . Тогда в соответствии с (3.144) найдем

$$u(\vec{t}) = -\frac{1}{5} (D_{I_1}(2, k) + 2D_{I_2}(2, k)) x(\vec{t}).$$

Для  $k = 3$ , учитывая выражения (3.124), (3.137) и (3.119), (3.140), вычислим

$$-\frac{1}{5} (D_{I_1}(2, 3) + 2D_{I_2}(2, 3)) =$$

$$= -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 33 & -18 & 9 & -2 & -36 & 0 & 0 & 18 & 0 & -4 \\ 6 & 21 & -6 & 1 & -12 & -24 & 0 & 12 & 6 & -4 \\ -3 & 18 & 9 & -2 & 0 & -24 & -12 & 6 & 12 & -4 \\ 6 & -27 & 54 & -11 & 0 & 0 & -36 & 0 & 18 & -4 \\ 6 & -6 & 6 & -2 & 15 & -12 & 3 & -12 & 0 & 2 \\ -3 & 9 & -3 & 1 & 9 & 0 & -3 & -6 & -6 & 2 \\ 6 & -18 & 18 & -2 & -9 & 36 & -21 & 0 & -12 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & -2 & 18 & -12 & 6 & 0 & -6 & -4 \\ 6 & -9 & 0 & 1 & -18 & 36 & -6 & 18 & -24 & -4 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -27 & 0 & 9 & 54 & -18 & -22 \end{pmatrix},$$

$$\vec{t} = \left| (3,2) \left( \frac{8}{3}, \frac{8}{3} \right) \left( \frac{7}{3}, \frac{10}{3} \right) (2,4) \left( 4, \frac{5}{3} \right) \left( \frac{11}{3}, \frac{7}{3} \right) \left( \frac{10}{3}, 3 \right) \left( 5, \frac{4}{3} \right) \left( \frac{14}{3}, 2 \right) (6,1) \right|^T$$

$$x(\vec{t}) = \begin{vmatrix} 3,2719469 \\ 3,4811121 \\ 3,6885586 \\ 3,8941833 \\ 3,6885586 \\ 3,8941833 \\ 4,0978855 \\ 4,0978855 \\ 4,2995636 \\ 4,4991189 \end{vmatrix}, \quad u(\vec{t}) = \begin{vmatrix} 0,6299754 \\ 0,6249704 \\ 0,6196589 \\ 0,6140412 \\ 0,6196558 \\ 0,6140412 \\ 0,6081195 \\ 0,6081222 \\ 0,6018976 \\ 0,5953735 \end{vmatrix}, \quad u_{\tau}(\vec{t}) = \begin{vmatrix} 0,62997133 \\ 0,62496866 \\ 0,61965800 \\ 0,61404066 \\ 0,61965800 \\ 0,61404066 \\ 0,60812066 \\ 0,60812066 \\ 0,60190000 \\ 0,59538200 \end{vmatrix}.$$

Для сравнения здесь же приведен вектор  $u_{\tau}(\vec{t})$  точных значений искомой производной.

### 3.7. Дифференцирование многомерных функций

Описанные в предыдущем параграфе алгоритмы построения матриц преобразования  $\Pi_2$  и дифференцирования  $D_{11}(2,k)$  изображений двумерных функций используют в качестве исходных матрицы преобразования  $\Pi_1$  и дифференцирования  $D(1,k)$  изображений одномерных функций. Если, вместо матриц  $\Pi_1$  и  $D(1,k)$ , в качестве исходных взять матрицы  $\Pi_2$  и  $D_{11}(1,k)$ , то с помощью тех же алгоритмов можно получить матрицы преобразования  $\Pi_3$  и дифференцирования  $D_{11}(3,k)$  изображений трехмерных функций.

Изображение  $Y_N^m(i, \tau_H, h_H)$  трехмерной функции  $y(m, l)$  безотносительно к индексам  $m, \tau_n, h_n$  удобно представлять в виде блочного вектора

$$\vec{Y}_3 = \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Y_N(0,0,0) & Y_N(0,1,0) & Y_N(0,2,0) & \dots \\ \hline Y_N(1,0,0) & Y_N(1,1,0) & \vdots & \dots \\ \hline Y_N(2,0,0) & \vdots & Y_N(k-2,2,0) & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \hline Y_N(k,0,0) & Y_N(k-1,1,0) & Y_N(k-2,2,0) & \dots \\ \hline \end{array}^T \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Y_N(0,0,1) & Y_N(0,1,1) & \dots & Y_N(0,k-1,1) \\ \hline Y_N(1,0,1) & \vdots & \dots & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ \hline Y_N(k-1,0,1) & Y_N(k-2,1,1) & \dots & \dots \\ \hline \end{array}^T \\ \vdots \\ Y_N(0,0,k) \end{pmatrix} \quad (3.145)$$

где  $T$  – символ транспонирования соответствующих блочных элементов;  $(i_1, i_2, i_3)$  значения элементов мультииндекса  $i$ .

Установим связь между вектором  $\vec{Y}_3$  и вектором  $y(\vec{L}_3)$  равноотстоящих в нормированной области  $\Omega_n$  значений трехмерной функции  $y(l) = y(l_1, l_2, l_3)$

$$\vec{Y}_3 = \Pi_3 y(\vec{L}_3), \quad (3.146)$$

$$y(\vec{L}_3) = \Pi_3^{-1} \vec{Y}_3, \quad (3.147)$$

где вектор

$$\vec{L}_3 = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{pmatrix} (0,0,0) \\ \left(-\frac{1}{k}, 0, 0\right) \\ \left(-\frac{2}{k}, 0, 0\right) \\ \vdots \\ (-1,0,0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \left(0, -\frac{1}{k}, 0\right) \\ \left(-\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}, 0\right) \\ \vdots \\ \left(\frac{1-k}{k}, -\frac{1}{k}, 0\right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \left(0, -\frac{2}{k}, 0\right) \\ \vdots \\ \left(\frac{2-k}{k}, -\frac{2}{k}, 0\right) \end{pmatrix} & \dots & (0, -1, 0) \\ \hline \begin{pmatrix} \left(0, 0, -\frac{1}{k}\right) \\ \left(-\frac{1}{k}, 0, -\frac{1}{k}\right) \\ \vdots \\ \left(\frac{1-k}{k}, 0, -\frac{1}{k}\right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \left(0, -\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right) \\ \vdots \\ \left(\frac{2-k}{k}, -\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right) \end{pmatrix} & \dots & \dots & \begin{pmatrix} \left(0, \frac{1-k}{k}, -\frac{1}{k}\right) \end{pmatrix} \\ \hline \vdots & & & & \vdots \\ \hline (0, 0, -1) & & & & \end{array} \right]^T. \quad (3.148)$$

а матрицы преобразований  $\Pi_3$  и  $\Pi_3^{-1}$  размерности

$\left[\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)\right] \times \left[\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)\right]$  образуются из матриц  $\Pi_2$  и

$\Pi_2^{-1}$ . В случае  $k=2$  эти матрицы имеют вид

$$\Pi_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^2 & -2k^2 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^2 & -k^2 & 0 & -k^2 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^2 & 0 & 0 & -2k^2 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 & 0 \\ k^2 & -k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k^2 & k^2 & 0 & 0 \\ k^2 & 0 & 0 & -k^2 & 0 & 0 & -k^2 & 0 & k^2 & 0 \\ k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k^2 & 0 & 0 & k^2 \end{array} \end{array},$$

$$\Pi_3^{-1} = \begin{array}{|cccc|cccc|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2k^{-1} & k^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -k^{-1} & 0 & -k^{-1} & k^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2k^{-1} & 0 & k^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k^{-1} & k^{-2} & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -k^{-1} & 0 & 0 & -2k^{-1} & 0 & k^{-2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k^{-1} & 0 & 0 & k^{-2} \\ \hline \end{array}.$$

Опуская мультииндекс  $h_n$  и раскрывая  $i$ , на основе выражений

(3.89) - (3.90) образуем из функций  $N((i_1, i_2, i_3), l)$  блочную вектор-строку

$$\vec{N}_3(l) = \left( \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline | N((0,0,0),l) \ N((1,0,0),l) \ N((2,0,0),l) \ \dots \ N((k,0,0),l) | \\ | N((0,1,0),l) \ N((1,1,0),l) \ \dots \ N((k-1,1,0),l) | \\ | N((0,2,0),l) \ \dots \ N((k-2,2,0),l) | \\ \vdots \\ | N((0,k,0),l) | \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline | N((0,0,1),l) \ N((1,0,1),l) \ \dots \ N((k-1,0,1),l) | \\ | N((0,1,0),l) \ \dots \ N((0,1,0),l) | \\ \vdots \\ N((0,k-1,1),l) \\ \vdots \\ N((0,0,k),l) \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right)^T.$$

Для функции  $\tilde{y}(l)$ , интерполирующей функцию  $y(l)$ , запишем

$$\mathcal{X}\{\tilde{y}(l)\} = \vec{Y}_3 = \Pi_3 y(\vec{L}_3), \quad (3.149)$$

$$\mathcal{X}^{-1}\{\vec{Y}_3\} = \vec{N}_3(l) \vec{Y}_3 = \tilde{y}(l). \quad (3.150)$$

Как и двумерные преобразования Ньютона (3.116) – (3.117) эти трехмерные преобразования легко реализуются на вычислительных ресурсах и могут

применяться для вычисления изображений сложных трехмерных функций. На их основе можно построить операторы дифференцирования функций по переменным  $l_1, l_2, l_3$ .

Если функции  $\tilde{x}(l)$  и  $\tilde{y}(l)$ , интерполирующие функции  $x(l)$  и  $y(l)$ , удовлетворяют условию

$$\frac{\partial}{\partial l_1} [\tilde{x}(l)] = \tilde{y}(l), \quad (3.151)$$

то

$$\mathcal{D} \left\{ \frac{\partial}{\partial l_1} \bar{N}_3(l) \right\} \Pi_3 x(\bar{L}_3) = \Pi_3 y(\bar{L}_3) \quad (3.152)$$

или

$$D_{11}(3, k) x(\bar{L}_3) = y(\bar{L}_3), \quad (3.153)$$

где  $D_{11}(3, k)$  – квадратная размерности

$\left[ \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3) \right] \times \left[ \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3) \right]$  матрица расширенного

оператора дифференцирования трехмерных функций по переменной  $l_1$ .

Формально, для вычисления элементов матрицы  $D_{11}(3, k)$  необходимо продифференцировать по переменной  $l_1$  множество  $\bar{N}_3(l)$  функций вида

(3.80), найти значения элементов образовавшейся матрицы  $\partial \bar{N}_3(l) / \partial l_1 |_{l = \bar{L}_3}$  и

умножить последнюю на матрицу  $\Pi_3$ . Такая трудоемкая процедура может

быть заменена описанным выше алгоритмом вычисления матриц  $D_{11}(2, k)$  по матрицам  $D(1, k)$ , если в нем осуществить замену матриц  $D(1, k)$  на  $D_{11}(2, k)$ .

Полученные таким образом операторы дифференцирования  $D_{11}(3, k)$  для первых трех значений параметра  $k$  имеют вид

$$D_{II}(3,1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$D_{II}(3,2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$D_{II}(3,3) = \frac{1}{2} \times$$

11	-18	9	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	6	-3	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-9	18	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-6	6	-2	9	-12	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	3	-3	1	3	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-6	6	-2	-3	12	-9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	3	-2	6	-12	6	6	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-3	0	1	-6	12	-6	6	-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	-2	-9	0	9	18	-18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-6	6	-2	0	0	0	0	0	0	9	-12	3	0	0	0	0	0	0
-1	3	-3	1	0	0	0	0	0	0	3	0	-3	0	0	0	0	0	0
2	-6	6	-2	0	0	0	0	0	0	-3	12	-9	0	0	0	0	0	0
-1	0	3	-2	3	-6	3	0	0	0	3	-6	3	6	-6	0	0	0	0
2	-3	0	1	-3	6	-3	0	0	0	-3	6	-3	6	-6	0	0	0	0
5	0	-3	-2	-21	12	9	18	-18	0	-3	0	3	12	-12	0	0	0	0
-1	0	3	-2	0	0	0	0	0	0	6	-12	6	0	0	0	6	6	0
2	-3	0	1	0	0	0	0	0	0	-6	12	-6	0	0	0	6	-6	0
2	0	0	-2	-3	0	3	0	0	0	-6	0	6	12	-12	0	6	-6	0
2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	-9	0	9	0	0	0	18	-18	0





$$\vec{L}_{3^{**}} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{pmatrix} (0,0,0) \\ \left(0,0,-\frac{1}{k}\right) \\ \left(0,0,-\frac{2}{k}\right) \\ \vdots \\ (0,0,-1) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{k},0,0\right) \\ \left(-\frac{1}{k},0,-\frac{1}{k}\right) \\ \vdots \\ \left(-\frac{1}{k},0,\frac{1-k}{k}\right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{k},0,0\right) \\ \vdots \\ \left(-\frac{2}{k},0,\frac{2-k}{k}\right) \end{pmatrix} & \dots & (-1,0,0) \\ \hline \begin{pmatrix} \left(0,-\frac{1}{k},0\right) \\ \left(0,-\frac{1}{k},-\frac{1}{k}\right) \\ \vdots \\ \left(0,-\frac{1}{k},\frac{1-k}{k}\right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{k},-\frac{1}{k},0\right) \\ \vdots \\ \left(-\frac{1}{k},-\frac{1}{k},\frac{2-k}{k}\right) \end{pmatrix} & \dots & \dots & \left(\frac{1-k}{k},-\frac{1}{k},0\right) \\ \hline \vdots & & & & \\ \hline (0,-1,0) & & & & \end{array} \right]^T \quad (3.157)$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_{3^*} &= E_*(3,k) \vec{L}_3, & \vec{L}_3 &= E_*(3,k) \vec{L}_{3^*}, \\ \vec{L}_{3^{**}} &= E_{**}(3,k) \vec{L}_3, & \vec{L}_3 &= E^{**T}(3,k) \vec{L}_{3^{**}}, \end{aligned} \quad (3.158)$$

Для учета граничных условий в соотношениях, содержащих операторы дифференцирования трехмерных функций, осуществляются преобразования матриц  $D_{11}(3,k)$ ,  $D_{12}(3,k)$ ,  $D_{13}(3,k)$ , аналогичные описанным ранее преобразованиям матриц  $D_{11}(2,k)$ ,  $D_{12}(2,k)$ . Особенностью трехмерного случая является возможность задания граничных условий на соответствующих поверхностях, ограничивающих нормированную симплексную область  $\Omega_n$ .

Обращаясь к равенству (3.84), для трехмерного случая ( $N=3$ ) произвольной симплексной подобласти  $\Omega_m$  глобальной системы координат  $(0,t)$  запишем

$$\begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_1 - \tau_1^{(1)} & \tau_1 - \tau_2^{(2)} & \tau_1 - \tau_1^{(3)} \\ \tau_2 - \tau_2^{(1)} & \tau_2 - \tau_2^{(2)} & \tau_2 - \tau_2^{(3)} \\ \tau_3 - \tau_3^{(1)} & \tau_3 - \tau_3^{(2)} & \tau_3 - \tau_3^{(3)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{vmatrix}. \quad (3.159)$$

Тогда для функций  $x(t_1, t_2, t_3)$ ,  $u(t_1, t_2, t_3)$ ,  $v(t_1, t_2, t_3)$ ,  $w(t_1, t_2, t_3)$ , определенных в подобласти  $\Omega_m$  и связанных между собой соотношением

$$\begin{vmatrix} \partial / \partial t_1 \\ \partial / \partial t_2 \\ \partial / \partial t_3 \end{vmatrix} x(t_1, t_2, t_3) = \begin{vmatrix} u(t_1, t_2, t_3) \\ v(t_1, t_2, t_3) \\ w(t_1, t_2, t_3) \end{vmatrix} \quad (3.160)$$

или

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial t_1} & \frac{\partial l_2}{\partial t_1} & \frac{\partial l_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial l_1}{\partial t_2} & \frac{\partial l_2}{\partial t_2} & \frac{\partial l_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial l_1}{\partial t_3} & \frac{\partial l_2}{\partial t_3} & \frac{\partial l_3}{\partial t_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial l_1} \\ \frac{\partial}{\partial l_2} \\ \frac{\partial}{\partial l_3} \end{vmatrix} x(t_1, t_2, t_3) = \begin{vmatrix} u(t_1, t_2, t_3) \\ v(t_1, t_2, t_3) \\ w(t_1, t_2, t_3) \end{vmatrix}, \quad (3.161)$$

получим

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{t_1} \\ \mathcal{D}_{t_2} \\ \mathcal{D}_{t_3} \end{vmatrix} x(\vec{t}) = \begin{vmatrix} u(\vec{t}) \\ v(\vec{t}) \\ w(\vec{t}) \end{vmatrix}, \quad (3.162)$$

где вектор  $\vec{t}$  сформирован из элементов вектора  $\vec{L}_3$ , преобразованных с помощью соотношения (3.159); матричные операторы дифференцирования  $\mathcal{D}_{t_1}$ ,  $\mathcal{D}_{t_2}$ ,  $\mathcal{D}_{t_3}$ , действующие в глобальной системе координат  $(0, t)$ , связаны с операторами  $\mathcal{D}_{l_1}(3, k)$ ,  $\mathcal{D}_{l_2}(3, k)$ ,  $\mathcal{D}_{l_3}(3, k)$  локальной системы координат  $(0, l)$  соотношением

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{t_1} \\ \mathcal{D}_{t_2} \\ \mathcal{D}_{t_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 - \tau_1^{(1)} & \tau_1 - \tau_1^{(2)} & \tau_1 - \tau_1^{(3)} \\ \tau_2 - \tau_2^{(1)} & \tau_2 - \tau_2^{(2)} & \tau_2 - \tau_2^{(3)} \\ \tau_3 - \tau_3^{(1)} & \tau_3 - \tau_3^{(2)} & \tau_3 - \tau_3^{(3)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{l_1}(3, k) \\ \mathcal{D}_{l_2}(3, k) \\ \mathcal{D}_{l_3}(3, k) \end{vmatrix}. \quad (3.163)$$

Это соотношение обеспечивает переход от заранее сформированных и неизменных матричных операторов дифференцирования функций в нормированной области  $\Omega_n$  к операторам дифференцирования функций в произвольной по форме симплексной подобласти  $\Omega_m$  с вершинами в точках  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ ,  $(\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}, \tau_3^{(1)})$ ,  $(\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}, \tau_3^{(2)})$ ,  $(\tau_1^{(3)}, \tau_2^{(3)}, \tau_3^{(3)})$  глобальной системы координат.

Основываясь на матричных операторах  $D_{t_1}$ ,  $D_{t_2}$ ,  $D_{t_3}$  легко конструировать более сложные дифференциальные операторы, действующие в скалярных и векторных полях.

Если задано скалярное поле  $u = u(t_1, t_2, t_3)$ , то его градиенту

$$\text{grad } u = \left( \frac{\partial}{\partial t_1} e_1 + \frac{\partial}{\partial t_2} e_2 + \frac{\partial}{\partial t_3} e_3 \right) u \quad (3.164)$$

соответствует выражение

$$\text{GRAD } u(\vec{t}) = (D_{t_1} e_1 + D_{t_2} e_2 + D_{t_3} e_3) u(\vec{t}), \quad (3.165)$$

где  $e_1, e_2, e_3$  – единичные орты.

Для векторного поля

$$D(t_1, t_2, t_3) = D_1(t_1, t_2, t_3) e_1 + D_2(t_1, t_2, t_3) e_2 + D_3(t_1, t_2, t_3) e_3$$

операторному соотношению

$$\text{div } D = \frac{\partial D_1}{\partial t_1} + \frac{\partial D_2}{\partial t_2} + \frac{\partial D_3}{\partial t_3} \quad (3.166)$$

соответствует выражение

$$\begin{aligned} \text{DIV } D(\vec{t}) &= (D_{t_1} e_1 + D_{t_2} e_2 + D_{t_3} e_3) D(\vec{t}) = \\ &= D_{t_1} D_1(\vec{t}) + D_{t_2} D_2(\vec{t}) + D_{t_3} D_3(\vec{t}), \end{aligned} \quad (3.167)$$

а соотношению

$$rot \mathbf{D} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial t_1} & \frac{\partial}{\partial t_2} & \frac{\partial}{\partial t_3} \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} \quad (3.168)$$

соответствует выражение

$$ROT \mathbf{D}(\vec{t}) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ D_{t_1} & D_{t_2} & D_{t_3} \\ D_1(\vec{t}) & D_2(\vec{t}) & D_3(\vec{t}) \end{vmatrix} = (D_{t_2}D_3(\vec{t}) - D_{t_3}D_2(\vec{t}))e_1 + \\ + (D_{t_3}D_1(\vec{t}) - D_{t_1}D_3(\vec{t}))e_2 + (D_{t_1}D_2(\vec{t}) - D_{t_2}D_1(\vec{t}))e_3. \quad (3.169)$$

В заключение отметим, что алгоритмы построения операторов дифференцирования реализуются на множестве целых чисел и обладают свойством вложенности. Такие алгоритмы позволяют строить операторы дифференцирования  $(N + 1)$ -мерных функций из операторов дифференцирования  $N$ -мерных функций. Аналогичным способом можно построить операторы интегрирования, соответствующие параметрическим, криволинейным, контурным, поверхностным и объемным интегралам. Преобразование локальной системы координат в глобальную обеспечивает применимость операторов для произвольной симплексной области. Полученные численные операторные соотношения имеют  $k$ -й порядок полиномиальной точности и могут быть эффективно реализованы в прикладном программном обеспечении не только универсального назначения – для решения краевых задач для уравнений в частных производных, – но и специального назначения – для решения задач моделирования энергетических систем.

## 4. АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЬЮТОНА

### 4.1. Численная операторная форма уравнений цепи с сосредоточенными параметрами

В энергетической цепи с сосредоточенными параметрами связь последовательных и параллельных переменных для резистивных, емкостных и индуктивных элементов устанавливается следующими соотношениями

$$\begin{aligned}
 \vec{u}(t) &= R\vec{i}(t), & \vec{i}(t) &= G\vec{u}(t), \\
 \vec{u}(t) &= \int_0^t C^{-1}\vec{i}(\tau)d\tau + \vec{u}(0), & \vec{i}(t) &= C\frac{d\vec{u}(t)}{dt}, \\
 \vec{u}(t) &= L\frac{d\vec{i}(t)}{dt}, & \vec{i}(t) &= \int_0^t L^{-1}\vec{u}(\tau)d\tau + \vec{i}(0),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где  $R$ ,  $G$ ,  $C$ ,  $L$  – матричные сопротивление, проводимость, емкость, индуктивность;  $\vec{u}(t)$  и  $\vec{i}(t)$  – вектор-функции параллельных и последовательных переменных соответственно.

Для цепей с постоянными параметрами уравнения (4.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \vec{U}(s) &= R\vec{I}(s), & \vec{I}(s) &= G\vec{U}(s) \\
 \vec{U}(s) &= (sC)^{-1}\vec{I}(s) + s^{-1}\vec{u}(0), & \vec{I}(s) &= sC\vec{U}(s) - C\vec{u}(0), \\
 \vec{U}(s) &= sL\vec{I}(s) - L\vec{i}(0), & \vec{I}(s) &= (sL)^{-1}\vec{U}(s) + s^{-1}\vec{i}(0).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь функции  $\vec{U}(s)$  и  $\vec{I}(s)$  являются изображениями по Лапласу функций  $\vec{u}(t)$  и  $\vec{i}(t)$  соответственно. В отличие от уравнений (4.1) уравнения (4.2) не содержат операторов дифференцирования и интегрирования. Операторы  $(sC)^{-1}$ ,  $sC$ ,  $sL$  и  $(sL)^{-1}$  характеризуют адмиттансы и импедансы емкостных и индуктивных элементов, что значительно упрощает анализ энергетических цепей [23–25, 70, 75, 82, 108, 124, 200, 209, 241].

Такую возможность дают преобразования Ньютона. С помощью соотношений (3.4) – (3.6), (3.24), (3.41) – (3.42), (3.102) уравнения (4.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_m &= \mathbf{R}_m \vec{i}_m, \\
 \vec{u}_m &= H_m \mathbf{I}(k_m) \mathbf{C}_m^{-1} \vec{i}_m + \vec{u}(\tau_{m-1}) \vec{N}_H(k_m), \\
 \vec{i}_m &= H_m^{-1} \mathbf{C}_m \mathcal{D}(k_m) \vec{u}_m - H_m^{-1} \mathbf{C}_m \left[ \vec{u}(\tau_{m-1}) \vec{N}_D(k_m) \right], \\
 \vec{u}_m &= H_m^{-1} \mathbf{L}_m \mathcal{D}(k_m) \vec{i}_m - H_m^{-1} \mathbf{L}_m \left[ \vec{i}(\tau_{m-1}) \vec{N}_D(k_m) \right], \\
 \vec{i}_m &= H_m \mathbf{I}(k_m) \mathbf{L}_m^{-1} \vec{u}_m + \vec{i}(\tau_{m-1}) \vec{N}_H(k_m), \\
 \vec{i}_m &= \mathbf{G}_m \vec{u}_m,
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_m &= \left| \begin{array}{cccc} \vec{u}(\tau_m) & \vec{u}(\tau_m - k_m^{-1} H_m) & \dots & \vec{u} \left( \tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} H_m \right) \end{array} \right|^T, \\
 \vec{i}_m &= \left| \begin{array}{cccc} \vec{i}(\tau_m) & \vec{i}(\tau_m - k_m^{-1} H_m) & \dots & \vec{i} \left( \tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} H_m \right) \end{array} \right|^T.
 \end{aligned}$$

Блочнo-диагональные матрицы  $\mathbf{R}_m$ ,  $\mathbf{G}_m$ ,  $\mathbf{L}_m$ ,  $\mathbf{C}_m$  определяются диагональными элементами

$$\text{diag } \mathbf{R}_m = \left\{ R(\vec{u}, \vec{i}, \tau_m), R(\vec{u}, \vec{i}, \tau_m - k_m^{-1} H_m), \dots, R \left( \vec{u}, \vec{i}, \tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} H_m \right) \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{diag } \mathbf{G}_m &= \left\{ G(\bar{u}, \bar{i}, \tau_m), G(\bar{u}, \bar{i}, \tau_m - k_m^{-1} H_m), \dots, G\left(\bar{u}, \bar{i}, \tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} H_m\right) \right\}, \\ \text{diag } \mathbf{C}_m &= \left\{ C(\bar{u}, \bar{i}, \tau_m), C(\bar{u}, \bar{i}, \tau_m - k_m^{-1} H_m), \dots, C\left(\bar{u}, \bar{i}, \tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} H_m\right) \right\}, \\ \text{diag } \mathbf{L}_m &= \left\{ L(\bar{u}, \bar{i}, \tau_m), L(\bar{u}, \bar{i}, \tau_m - k_m^{-1} H_m), \dots, L\left(\bar{u}, \bar{i}, \tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} H_m\right) \right\}. \end{aligned}$$

Блочные элементы матриц  $\mathbf{D}(k_m)$ ,  $\mathbf{I}(k_m)$  и векторов  $\bar{N}_{\mathcal{D}}(k_m)$ ,  $\bar{N}_{\mathcal{I}}(k_m)$  образованы из соответствующих элементов матриц  $\mathcal{D}(k_m)$ ,  $\mathcal{I}(k_m)$  и векторов  $\bar{N}_{\mathcal{D}}(k_m)$ ,  $\bar{N}_{\mathcal{I}}(k_m)$  путем умножения этих элементов на единичную матрицу, размерность которой определяется размерностью векторов  $\bar{u}(t)$  и  $\bar{i}(t)$ .

Соотношения (4.3), в отличие от соотношений (4.2), пригодны для описания нелинейности резистивных, емкостных и индуктивных элементов. В качестве примера рассмотрим некоторую энергетическую цепь, состоящую из последовательно соединенных источника параллельных переменных  $\bar{e}(t)$  и нелинейных индуктивности  $L[\bar{i}(t)]$ , емкости  $C[\bar{u}^c(t)]$ , резистора  $R[\bar{i}(t)]$ .

В соответствии со вторым законом Кирхгофа получим

$$\bar{u}^L(t) + \bar{u}^C(t) + \bar{u}^R(t) = \bar{e}(t), \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}^C(t) &= \int_0^t C^{-1}(\bar{u}^C) \bar{i}(\tau) d\tau + \bar{u}^c(0), \\ \bar{u}^R(t) &= R(\bar{i}) \bar{i}(t), \quad \bar{u}^L(t) = L(\bar{i}) \frac{d\bar{i}(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из соотношений (4.1), (4.3) – (4.5) следуют равенства



$$\begin{aligned}
& \left[ H_m^{-1} \mathbf{L}_m(\vec{i}_m) \mathcal{D}(k_m) + \mathbf{R}_m(\vec{i}_m) \right] \vec{i}_m + \vec{u}_m^C = \\
& = \vec{e}_m + H_m^{-1} \mathbf{L}_m(\vec{i}_m) \left[ i(\tau_{m-1}) \mathbf{N}_{\mathcal{D}}(k_m) \right], \\
& \vec{u}_m^C = H_m \mathbf{H}(k_m) \mathbf{C}_m^{-1}(\vec{u}_m^C) \vec{i}_m + \vec{u}^C(\tau_{m-1}) \mathbf{N}_H(k_m),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}
\vec{e}_m &= \left| \vec{e}(\tau_m) \quad \vec{e}(\tau_m - k_m^{-1} H_m) \quad \dots \quad \vec{e}\left(\tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} H_m\right) \right|^T, \\
\text{diag } \mathbf{R}_m(\vec{i}_m) &= \left\{ R[\vec{i}(\tau_m)], R[\vec{i}(\tau_m - k_m^{-1} H_m)], \dots, R\left[\vec{i}\left(\tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} H_m\right)\right] \right\}, \\
\text{diag } \mathbf{L}_m(\vec{i}_m) &= \left\{ L[\vec{i}(\tau_m)], L[\vec{i}(\tau_m - k_m^{-1} H_m)], \dots, L\left[\vec{i}\left(\tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} H_m\right)\right] \right\}, \\
\text{diag } \mathbf{C}_m(\vec{u}_m) &= \left\{ C[\vec{u}(\tau_m)], C[\vec{u}(\tau_m - k_m^{-1} H_m)], \dots, C\left[\vec{u}\left(\tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} H_m\right)\right] \right\}.
\end{aligned}$$

Система нелинейных алгебраических уравнений вида (4.6) решается последовательно на первом подынтервале  $(0, \tau_1)$  длиной  $H_1$ , на втором подынтервале  $(\tau_1, \tau_2)$  длиной  $H_2$  и т.д. до тех пор, пока не будет перекрыт требуемый интервал  $(0, T)$ . Очевидно, численные схемы, порождаемые соотношением (4.6), могут иметь различные порядки аппроксимации  $k_m$  на подынтервалах  $(\tau_{m-1}, \tau_m)$ . При этом легко учесть начальные условия  $\vec{u}^C(\tau_{m-1})$  и  $\vec{i}(\tau_{m-1})$ , начиная вычисления с заданных значений  $\vec{u}^C(0)$  и  $\vec{i}(0)$ , а затем используя значения  $\vec{u}^C(\tau_{m-1})$  и  $\vec{i}(\tau_{m-1})$  с предыдущего подынтервала  $(\tau_{m-2}, \tau_{m-1})$ . Как отмечалось выше такая вычислительная процедура является устойчивой по начальным данным.

Сопоставляя соотношения (4.2) и (4.3) легко усмотреть аналогию между операторами  $(sC)^{-1}$ ,  $sC$ ,  $sL$ ,  $(sL)^{-1}$  и операторами  $H_m \mathbf{H}(k_m) \mathbf{C}_m^{-1}$ ,

$H_m^{-1} C_m \mathcal{D}(k_m)$ ,  $H_m^{-1} L_m \mathcal{D}(k_m)$ ,  $H_m \mathbf{I}(k_m) L_m^{-1}$ . Первая группа операторов характеризует комплексные проводимости и сопротивления индуктивных и емкостных элементов энергетической цепи. Вторая – характеризует матричные проводимости и сопротивления этих же элементов.

Обратимся теперь к уравнениям (4.4), (4.5) и рассмотрим случай, когда  $R$ ,  $L$ ,  $C$  являются матричными константами. Полагая начальные условия равными нулю, запишем

$$(sL + s^{-1}C^{-1} + R)\vec{I}(s) = \vec{E}(s) \quad (4.7)$$

или

$$Z(s)\vec{I}(s) = \vec{E}(s), \quad Z(s) = sL + s^{-1}C^{-1} + R. \quad (4.8)$$

При тех же условиях преобразования Ньютона приводят к соотношениям

$$\left[ H_m^{-1} L_m \mathcal{D}(k_m) + H_m \mathbf{I}(k_m) C_m^{-1} + R_m \right] \vec{i}_m = \vec{e}_m \quad (4.9)$$

или

$$Z_m \vec{i}_m = \vec{e}_m, \quad Z_m = H_m^{-1} L_m \mathcal{D}(k_m) + H_m \mathbf{I}(k_m) C_m^{-1} + R_m \quad (4.10)$$

Здесь видна аналогия между комплексным сопротивлением  $Z(s)$  и матричным сопротивлением  $Z_m$ .

Следовательно, уравнения вида (4.3), (4.6) и (4.9) относятся к численным операторным уравнениям. Они, определяя блочные численные схемы, сохраняют операторную форму.

## 4.2. Определяющая матрица цепи

Понятие определяющей матрицы  $\mathbf{G}$  линейной динамической системы введено в работе [27]. Там же показано, что для ступенчатых изображений она является аналогом коэффициента передачи  $G(s)$ . Эта матрица, как функция  $G(s)$ , строится по коэффициентам дифференциального уравнения и позволяет исследовать динамическую систему независимо от возмущающих воздействий. В частности, с помощью определяющей матрицы можно получить импульсную реакцию или переходную функцию энергетической цепи.

Найдем определяющую матрицу  $\mathbf{G}$ , порождаемую преобразованиями Ньютона, для чего обратимся к простейшему линейному дифференциальному уравнению вида

$$x' = \lambda x + f, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad \lambda \leq 0. \quad (4.11)$$

Функцию  $x = x(t)$  будем рассматривать как реакцию энергетической цепи на воздействие  $f = f(t)$ .

Преобразуя уравнение (4.11) в соответствии с выражениями (3.14), (3.24) и привлекая соотношение (3.41), запишем соотношения

$$\begin{pmatrix} \bar{x}'(\hat{M}) \\ \bar{x}'(\hat{M}-\hat{1}) \\ \vdots \\ \bar{x}'(\hat{2}) \\ \bar{x}'(\hat{1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{D_M} & \boxed{N_M} & & & 0 \\ & \boxed{D_{M-1}} & \boxed{N_{M-1}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \boxed{D_2} & \boxed{N_2} \\ & & & & \boxed{D_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(\hat{M}) \\ \bar{x}(\hat{M}-\hat{1}) \\ \vdots \\ \bar{x}(\hat{2}) \\ \bar{x}(\hat{1}) \end{pmatrix} - x_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -N_1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

или

$$\bar{x}' = D \bar{x} - x_0 \bar{N}. \quad (4.13)$$

Таким образом,

$$D\bar{x} = \lambda\bar{x} + \bar{f} + x_0\bar{N}, \quad (4.14)$$

а также

$$\bar{x} = G\bar{f} + x_0G\bar{N}, \quad (4.15)$$

где

$$G = (D - \lambda E)^{-1}$$

В блочно-диагональной матрице  $D$  векторы  $N_m = -H_m^{-1}\bar{N}_{\bar{D}}(k_m)$  располагаются над первыми столбцами соответствующих матриц  $D_{m-1} = H_m^{-1}\bar{D}(k_m)$ .

Используя преобразование Лапласа для решения уравнения (4.11), получим равенства

$$X'(s) = sX(s) - x_0\mathcal{L}\{\delta(t)\}, \quad (4.16)$$

$$X(s) = (s - \lambda)^{-1}F(s) + (s - \lambda)^{-1}x_0\mathcal{L}\{\delta(t)\}, \quad (4.17)$$

где изображения  $X(s)$  и  $F(s)$  функций  $x(t)$  и  $f(t)$  определены с помощью (2.2), а  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$  [160].

Сопоставим соотношения (4.13) – (4.15) с соотношениями (4.16) – (4.17) и установим взаимно однозначное соответствие между преобразованиями Лапласа и Ньютона:

$$\begin{aligned} X(s) &\Leftrightarrow \bar{x}, & F(s) &\Leftrightarrow \bar{f}, & \mathcal{L}\{\delta(t)\} &\Leftrightarrow \bar{N}, \\ s &\Leftrightarrow D, & (s - \lambda)^{-1} = G(s) &\Leftrightarrow G = (D - \lambda E)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Из выражения  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} \Leftrightarrow \bar{N}$  следует, что вектор  $\bar{N}$  определяется изображением  $\delta$ -функции в преобразованиях Ньютона. Докажем это утверждение.

Все элементы вектора  $\bar{N}$  нулевые, за исключением одного  $N_1 = H_1^{-1}\bar{N}_{\bar{D}}(k_1)$ . Это означает, что на всем отрезке  $[0, T]$  кусочно-

непрерывная функция  $\tilde{\delta}(t)$ , аппроксимирующая  $\delta(t)$ , не равна нулю только на интервале  $(0, \tau_1) = (0, H_1)$ . На этом интервале функция  $\tilde{\delta}(t)$  равна функции  $\delta(1, t)$ , которая является интерполяционным многочленом Ньютона  $(k_1 - 1)$ -го порядка. Узлы интерполяции функции  $\tilde{\delta}(t)$  содержатся в векторе  $H_1^{-1} \vec{N}_{\bar{D}}(k_1)$ . Виды функций  $\tilde{\delta}(t)$  для первых пяти значений  $k_1$  приведены на рис 4.1. Функции  $\delta(m, t)$  получены с помощью преобразований Ньютона (3.25) – (3.26), которые в этом случае принимают форму

$$\bar{\Delta}_m = \Pi_m \tilde{\delta}_m = \begin{cases} \Pi_1^* [H_1^{-1} \vec{N}_{\bar{D}}(k_1)], & m=1, \\ 0, & m > 1, \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\delta(m, t) = N_m(t) \bar{\Delta}_m = \begin{cases} N_1^*(t) \Pi_1^* [H_1^{-1} \vec{N}_{\bar{D}}(k_1)], & m=1, \\ 0, & m > 1. \end{cases} \quad (4.20)$$

Здесь вектор-функция  $N_1^*(t)$  образована из  $N_1(t)$  удалением  $(k_1 + 1)$ -го элемента, а матрица  $\Pi_1^*$  получена из  $\Pi_1$  вычеркиванием  $(k_1 + 1)$ -й строки и  $(k_1 + 1)$ -го столбца.

Функция  $\tilde{\delta}(t)$  удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}(t) dt = 1, \quad \lim_{H_1 \rightarrow 0} \tilde{\delta}(t) = \delta(t). \quad (4.21)$$

Следовательно, вектор  $\vec{N}$  в состоянии (4.13) представляет изображение  $\delta$ -функции в преобразованиях Ньютона.

При необходимости получения импульсной реакции системы  $\vec{g}$  достаточно построить определяющую матрицу  $\mathbf{G}$  и найти соответствующий порядку интерполяции  $k_1$  вектор  $\vec{N}$ . Тогда  $\vec{g}$  будет определяться выражением

$$\vec{g} = \mathbf{G} \vec{N}. \quad (4.22)$$

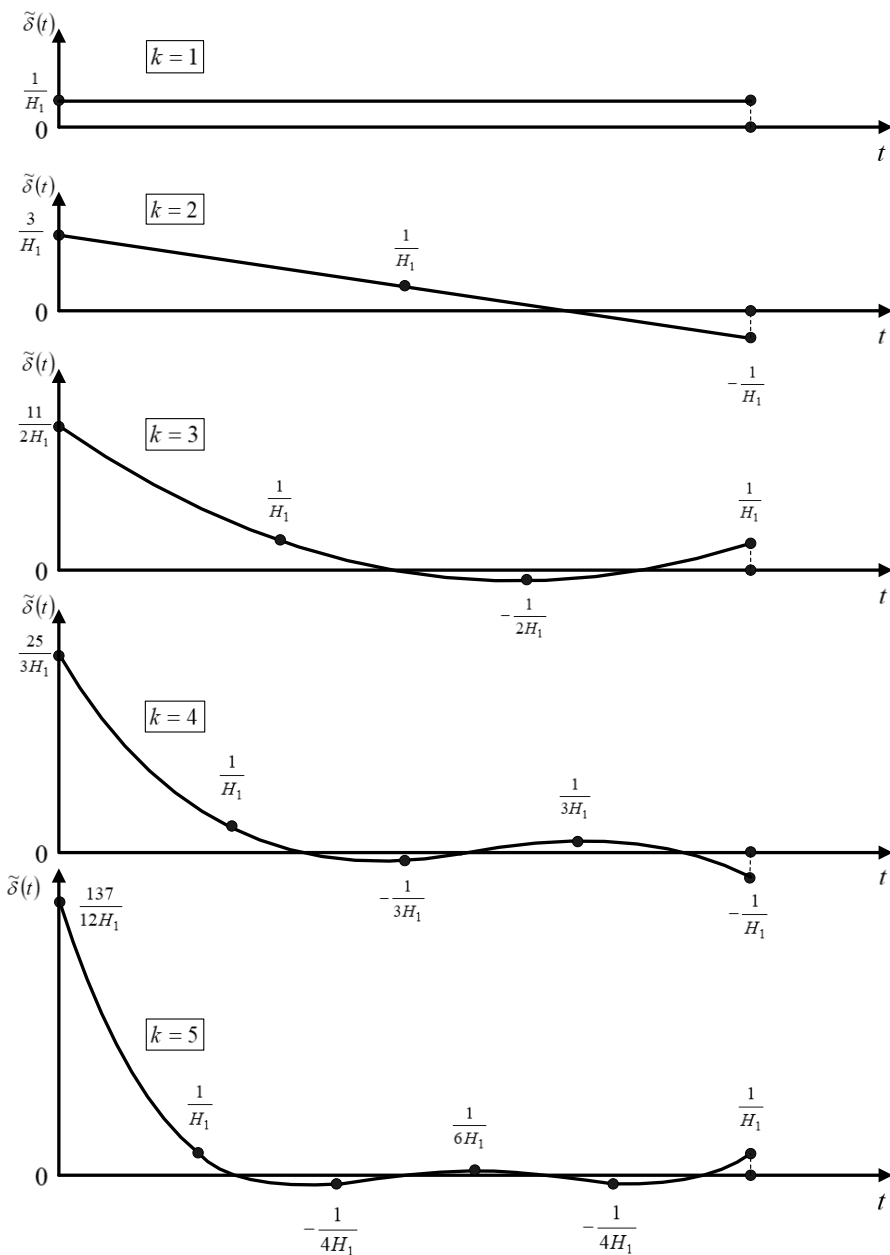


Рис. 4.1. Аппроксимация  $\delta$ -функции в преобразованиях Ньютона

Соотношения (4.18) и (4.22) могут быть использованы для приближенного перехода от функции  $G(s)$  к функции  $g(t)$ . Это обращение легко осуществить численно с использованием компьютерных вычислений. Покажем это на примере функции

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \cos(t). \quad (4.23)$$

Полагая  $M = 1$ ,  $k_1 = 1$ ,  $H_1 = 0,2$ , найдем

$$s \rightarrow D = H_1^{-1} \widehat{D}(1) = H_1^{-1} = 5, \\ G(s) \rightarrow (D^2 + E)^{-1} D [H_1^{-1} \bar{N}_{\widehat{D}}(1)] = g_1(0,2) = 0,96153845.$$

Пусть  $M = 1$ ,  $k_1 = 2$ ,  $H_1 = 0,2$ . Тогда

$$s \rightarrow D = H_1^{-1} \widehat{D}(2) = \begin{vmatrix} 15 & -20 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \\ G(s) \rightarrow (D^2 + E)^{-1} D [H_1^{-1} \bar{N}_{\widehat{D}}(2)] = \begin{vmatrix} g_2(0,2) \\ g_2(0,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,97995212 \\ 0,99491322 \end{vmatrix}.$$

Если  $M = 1$ ,  $k_1 = 3$ ,  $H_1 = 0,2$ , то

$$s \rightarrow D = H_1^{-1} \widehat{D}(3) = \begin{vmatrix} 27,5 & -45 & 22,5 \\ 5 & 7,5 & -15 \\ -2,5 & 15 & -7,5 \end{vmatrix}, \\ G(s) \rightarrow (D^2 + E)^{-1} D [H_1^{-1} \bar{N}_{\widehat{D}}(3)] = \begin{vmatrix} g_3(0,2) \\ g_3(2/15) \\ g_3(1/15) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,9800731 \\ 0,9911299 \\ 0,9977855 \end{vmatrix}.$$

Сопоставление вычисленных значений с точными показывает, что относительная ошибка  $\varepsilon_{\text{отн}}(k_1)$  достигает следующих значений  $\varepsilon_{\text{отн}}(1) = 1,9\%$ ,  $\varepsilon_{\text{отн}}(2) = 0,0117\%$ ,  $\varepsilon_{\text{отн}}(3) = 0,0006\%$ .

Следовательно, при фиксированном  $H_1$  путем увеличения порядка интерполяции  $k_1$  можно достичь высокой точности обращения функции  $G(s)$ .

### 4.3. Исследование энергетических цепей с вентилями

При моделировании энергетических цепей, содержащих коммутирующие устройства такие, как вентили, тиристоры, краны, запорную арматуру, необходимо решать дифференциальные уравнение, правая часть которых, либо частные производные по переменным состояния, терпят разрывы первого рода. Трудности решения таких уравнений обуславливаются неопределенностью во времени моментов коммутации, т.е. моментов времени, в которых правая часть системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка теряет гладкость [263]. Использование численных методов, основанных на преобразованиях Ньютона, позволяет преодолеть эти трудности. Особая роль здесь принадлежит обратному преобразованию вида (3.15), которое позволяет на каждом подынтервале  $(\tau_{m-1}, \tau_m]$  по найденным дискретным значениям  $\bar{u}_m$  и  $\bar{i}_m$  приближенно восстановить вектор-функции параллельных и последовательных переменных в виде соответствующих интерполяционных полиномов Ньютона  $\bar{u}(m,t)$  и  $\bar{i}(m,t)$   $k_m$ -го порядка. С помощью континуальных форм решения уравнений легко определить ближайший к точке  $\tau_{m-1}$  подынтервала  $(\tau_{m-1}, \tau_m]$  момент коммутации  $\tau_k$ , если таковой имеется. Для этого достаточно каким-либо методом, например, методом Ньютона, найти корни функциональной системы уравнений вида  $\varphi[\bar{u}(m,t), \bar{i}(m,t), t] = 0$ , где  $t \in (\tau_{m-1}, \tau_m]$ ,  $\varphi$ -вектор контролируемых параметров, определяющих моменты коммутации. Найденный среди корней



момент коммутации  $\tau_k$  позволяет продолжить численное решение системы дифференциальных уравнений на подынтервале  $(\tau_k, \tau_m]$  с измененной правой частью. При этом условия сопряжения переменных  $\bar{u}(m, \tau_k - 0)$ ,  $\bar{i}(m, \tau_k - 0)$  и  $\bar{u}(m, \tau_k + 0)$ ,  $\bar{i}(m, \tau_k + 0)$  следует выводить из законов коммутации, учитывающих физические явления в элементах энергетической цепи.

Описанный подход был использован при анализе переходных процессов в блоке питания электрофильтра газоочистки [263]. Эквивалентная электрическая схема блока питания приведена на рис. 4.2. Переходные процессы в схеме описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{du_{\pi}}{dt} = C_1^{-1} i_{\Phi}, \\ \frac{du_{\Phi}}{dt} = C_2^{-1} i_{\Phi}, \\ \frac{di_{\Phi}}{dt} = -\frac{u_{\pi} + u_{\Phi} + (R_1 + K R_2) i_{\Phi}}{L_1 + K L_2}. \end{cases} \quad (4.24)$$

Начальные условия определяются зарядами на накопительной емкости  $C_1$  и на емкости электрофильтра  $C_2$ :

$$u_{\pi}(0) = -1, \quad u_{\Phi}(0) = 0,5, \quad i_{\Phi}(0) = 0. \quad (4.25)$$

Состояния ключа описываются выражением

$$K = \frac{1}{2} [1 - \text{sign}(i_{\Phi})]. \quad (4.26)$$

В соответствии с выражениями (3.14), (3.24) и (3.41) система уравнений (4.24) принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} H_m^{-1} \bar{D}(k_m) \bar{u}_n(\hat{m}) - u_n(m, \tau_{m-1}) H_m^{-1} \bar{N}_{\bar{D}}(k_m) &= C_1^{-1} \bar{i}_\Phi(\hat{m}), \\ H_m^{-1} \bar{D}(k_m) \bar{u}_\Phi(\hat{m}) - u_\Phi(m, \tau_{m-1}) H_m^{-1} \bar{N}_{\bar{D}}(k_m) &= C_2^{-1} \bar{i}_\Phi(\hat{m}), \\ H_m^{-1} \bar{D}(k_m) \bar{i}_\Phi(\hat{m}) - i_\Phi(m, \tau_{m-1}) H_m^{-1} \bar{N}_{\bar{D}}(k_m) &= \\ &= -(L_1 + K L_2)^{-1} [\bar{u}_n(\hat{m}) + u_\Phi(\hat{m}) + (R_1 + K R_2) i_\Phi(\hat{m})], \end{aligned} \right. \quad (4.27)$$

а начальные условия (4.25) определяются равенствами

$$u_n(1, \tau_0) = -1, \quad u_\Phi(1, \tau_0) = 0,5, \quad i_\Phi(1, \tau_0) = 0. \quad (4.28)$$

В соотношениях (4.27) – (4.28)  $m = 1, 2, \dots$ ;  $\tau_0 = 0$ ;  $H_m = \tau_m - \tau_{m-1}$ . Моменты

$\tau_k$  коммутации ключа определяются из уравнения

$$i_\Phi(m, t) = 0 \quad \text{при } t \in (\tau_{m-1}, \tau_m]$$

или, учитывая (3.26), из уравнения

$$N_m(t) \bar{I}_{m\Phi} = 0 \quad \text{при } t \in (\tau_m, \tau_{m-1}], \quad (4.29)$$

где  $\bar{I}_{m\Phi} = \Pi \bar{i}_{m\Phi}$ . Вектор  $\bar{i}_{m\Phi}$  образуется из вектора  $\bar{i}_\Phi(\hat{m})$  добавлением элемента  $i_\Phi(m, \tau_{m-1})$ .

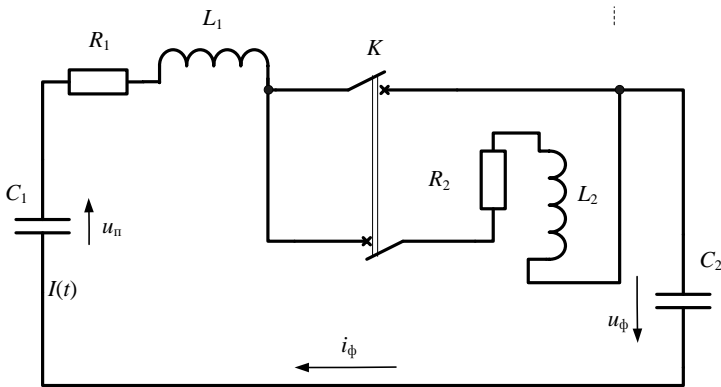


Рис. 4.2. Эквивалентная схема блока питания электрофильтра газоочистки

Результаты расчета переходного процесса показаны на рис. 4.3. Компьютерное моделирование осуществлялось для следующих значений параметров численной схемы:  $m = \overline{1,12}$ ,  $k_m = 2$ ,  $H_m = 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ ,  $C_1 = 0,3 \text{ мкФ}$ ,  $C_2 = 0,07 \text{ мкФ}$ ,  $L_1 = 3,3 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 45 \text{ мГн}$ ,  $R_1 = 26 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 33 \text{ Ом}$ . В ходе расчета были определены моменты коммутации ключа  $\tau_{k1} = 4,1765 \cdot 10^{-5} \text{ с}$  и  $\tau_{k2} = 2,0672 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ . Для сравнения приведем моменты коммутации, полученные при аналитическом решении задачи (4.24) – (4.26):  $\tau_{k1} = 4,2995 \cdot 10^{-5} \text{ с}$  и  $\tau_{k2} = 2,0751 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ . Очевидно, что при необходимости повысить точность решения задачи, следует уменьшать величину  $H_m$  и увеличивать порядок аппроксимации  $k_m$ . Контроль точности решения осуществляется по допустимым абсолютным погрешностям  $\delta u_n$ ,  $\delta u_\phi$  и  $\delta i_\phi$ , которые лишь косвенным образом определяют погрешность  $\delta \tau_k$ .

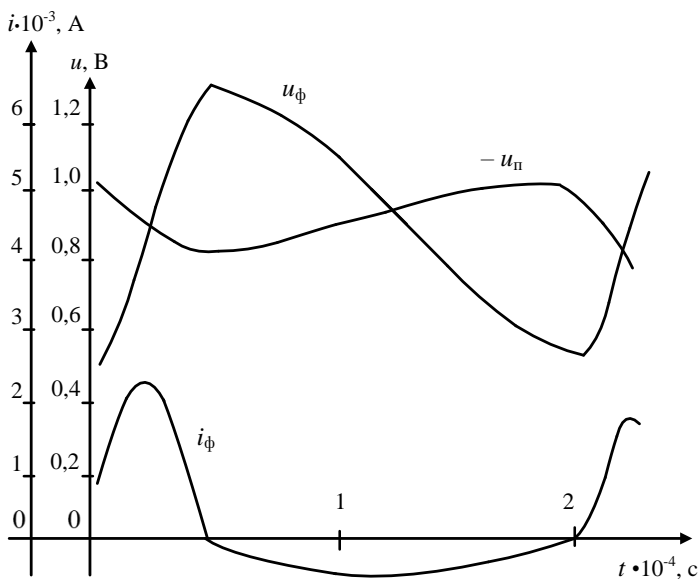


Рис. 4.3. Результаты моделирования переходных процессов в блоке питания электрофильтра газоочистки

#### 4.4. Численные операторы для расчета цепей с распределенными параметрами

Преобразования Ньютона для уравнений в частных производных выполняются независимо по временной и пространственным координатам. Покажем это на примере уравнений (1.64) системы уравнений (1.62) – (1.64). Безотносительно к индексу  $n$  исходную систему уравнений запишем в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} \bar{u}(x,t) \\ \bar{i}(x,t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_u & r \\ g & K_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{u}(x,t) \\ \bar{i}(x,t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_u^t & L \\ C & K_i^t \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \bar{u}(x,t) \\ \bar{i}(x,t) \end{vmatrix}, \quad (4.30)$$

где матричные параметры  $K_u$ ,  $r$ ,  $g$ ,  $K_i$ ,  $K_u^t$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $K_i^t$  могут быть функциями от  $\bar{u}(x,t)$ ,  $\bar{i}(x,t)$ ,  $x$  и  $t$ .

Выполняя преобразования по независимой переменной  $x$ , разделим область определения, которая задана отрезком  $[0, l]$ , на  $\nu_0$  частей так, чтобы функции  $\bar{u}(x,t)$  и  $\bar{i}(x,t)$  можно было с необходимой точностью приблизить полиномами  $k_\nu$ -го порядка  $\bar{u}_\nu(x,t)$  и  $\bar{i}_\nu(x,t)$ , где  $x \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$ ,  $\nu = \overline{1, \nu_0}$ . Тогда, используя обозначения  $\frac{\partial \bar{u}(x,t)}{\partial x} = \bar{u}_x(x,t)$  и  $\frac{\partial \bar{i}(x,t)}{\partial x} = \bar{i}_x(x,t)$ , а также выражения (3.84) – (3.86), (3.100) – (3.106), запишем

$$\begin{vmatrix} \bar{u}_x(x_v, t) \\ \bar{u}_x\left(x_v - \frac{H_v}{k_v}, t\right) \\ \bar{u}_x\left(x_v - \frac{2H_v}{k_v}, t\right) \\ \vdots \\ \bar{u}_x(x_{v-1}, t) \end{vmatrix} = H_v^{-1} \mathcal{D}(1, k_v) \begin{vmatrix} \bar{u}(x_v, t) \\ \bar{u}\left(x_v - \frac{H_v}{k_v}, t\right) \\ \bar{u}\left(x_v - \frac{2H_v}{k_v}, t\right) \\ \vdots \\ \bar{u}(x_{v-1}, t) \end{vmatrix} \quad (4.31)$$

и

$$\begin{vmatrix} \bar{i}_x(x_v, t) \\ \bar{i}_x\left(x_v - \frac{H_v}{k_v}, t\right) \\ \bar{i}_x\left(x_v - \frac{2H_v}{k_v}, t\right) \\ \vdots \\ \bar{i}_x(x_{v-1}, t) \end{vmatrix} = H_v^{-1} \mathcal{D}(1, k_v) \begin{vmatrix} \bar{i}(x_v, t) \\ \bar{i}\left(x_v - \frac{H_v}{k_v}, t\right) \\ \bar{i}\left(x_v - \frac{2H_v}{k_v}, t\right) \\ \vdots \\ \bar{i}(x_{v-1}, t) \end{vmatrix}, \quad (4.32)$$

где  $H_v = x_v - x_{v-1}$ . Очевидно, в точках  $x_v$  деления отрезка  $[0, l]$  на части выражения (4.31) – (4.32) определяют частные производные  $\bar{u}_x(x_v, t)$  и  $\bar{i}_x(x_v, t)$  дважды – слева и справа от  $x_v$ . Для однозначного определения производных в этих точках воспользуемся их средними значениями

$$\bar{u}_x(x_v, t) = \frac{1}{2} [\bar{u}_x(x_v - 0, t) + \bar{u}_x(x_v + 0, t)], \quad (4.33)$$

$$\bar{i}_x(x_v, t) = \frac{1}{2} [\bar{i}_x(x_v - 0, t) + \bar{i}_x(x_v + 0, t)]. \quad (4.34)$$

Здесь производные  $\bar{u}_x(x_v - 0, t)$  и  $\bar{i}_x(x_v - 0, t)$  вычисляются путем дифференцирования полиномов  $\bar{u}_v(x, t)$  и  $\bar{i}_v(x, t)$ , а производные  $\bar{u}_x(x_v + 0, t)$  и  $\bar{i}_x(x_v + 0, t)$  – дифференцированием полиномов  $\bar{u}_{v+1}(x, t)$  и  $\bar{i}_{v+1}(x, t)$ .

Из соотношений (4.31) – (4.34) легко получить результирующий оператор  $\mathcal{D}_x$  дифференцирования изображений  $\bar{u}(t)$  и  $\bar{i}(t)$  по

пространственной координате  $x$ . Очевидно матрица  $\mathcal{D}_x$  имеет блочно-диагональную структуру вида

$$\mathcal{D}_x = \left| \begin{array}{ccc|ccc} \hline & & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \end{array} \right|, \quad (4.35)$$

где заштрихованы строки, в которых элементы матриц  $H_{\nu}^{-1} \mathcal{D}(1, k_{\nu})$  делятся на два, а диагональные элементы, находящиеся на пересечении соседних матриц, равны полусумме соответствующих элементов этих матриц. Таким образом учитываются условия (4.33) – (4.34) и условия непрерывности функций  $\bar{u}(x, t)$  и  $\bar{i}(x, t)$  внутри отрезка  $[0, l]$ .

Используя оператор  $\mathcal{D}_x$ , запишем равенства

$$\bar{u}_x(t) = \mathcal{D}_x \bar{u}(t) \quad \text{и} \quad \bar{i}_x(t) = \mathcal{D}_x \bar{i}(t). \quad (4.36)$$

Здесь функции  $\bar{u}_x(t)$ ,  $\bar{u}(t)$ ,  $\bar{i}_x(t)$ ,  $\bar{i}(t)$  или, безотносительно,  $\bar{f}(t)$  определяются выражением

$$\bar{f}(t) = f \left| \begin{array}{c} (l, t) \\ \left( l - \frac{H_{\nu_0}}{k_{\nu_0}}, t \right) \\ \vdots \\ (x_{\nu_0-1}, t) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \left( x_{\nu_0-1} - \frac{H_{\nu_0-1}}{k_{\nu_0-1}}, t \right) \\ \left( x_{\nu_0-1} - \frac{2H_{\nu_0-1}}{k_{\nu_0-1}}, t \right) \\ \vdots \\ (x_{\nu_0-2}, t) \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{c} \left( x_1 - \frac{H_1}{k_1}, t \right) \\ \left( x_1 - \frac{2H_1}{k_1}, t \right) \\ \vdots \\ (0, t) \end{array} \right|^T, \quad (4.37)$$

где  $f = f(x, t)$ , а  $T$  – символ транспонирования вектора по блочным элементам.

В частном случае, когда  $k_\nu = 1$  и  $H_\nu = H$  для  $\nu = \overline{1, \nu_0}$ , матрица  $D_x$  имеет вид

$$D_x = H^{-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad (4.38)$$

а соотношения (4.36) определяют широко известную аппроксимацию производных центральными разностями внутри отрезка  $[0, l]$  и направленными разностями на его границах. Выбором определенных значений  $k_\nu$  и  $H_\nu$  можно существенно повысить точность аппроксимации.

Преобразуя по  $x$  систему уравнений (4.30) и используя равенства (4.36), запишем

$$-\begin{vmatrix} D_x \bar{u}(t) \\ D_x \bar{i}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_u & r \\ g & K_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{i}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_u^t & L \\ C & K_i^t \end{vmatrix} \left| \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{i}(t) \end{vmatrix} \right|, \quad (4.39)$$

где диагональные матрицы  $K_u$ ,  $r$ ,  $g$ ,  $K_i$ ,  $K_u^t$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $K_i^t$  или, безотносительно,  $\varphi$  составлены из элементов, которые могут быть получены из выражения (4.37) заменой  $\bar{f}(t)$  на  $diag \varphi(t)$ , а  $f = f(x, t)$  на  $\varphi = \varphi[\bar{u}(x, t), i(x, t), x, t]$ .

Привлекая соотношения (3.14), (3.24) и (3.41), преобразуем по  $t$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.39) к виду

$$\begin{aligned}
& - \left| \begin{array}{c} \mathcal{D}_x \bar{\mathbf{u}}(\bar{t}) \\ \mathcal{D}_x \bar{\mathbf{i}}(\bar{t}) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \bar{\mathbf{K}}_u & \bar{\mathbf{r}} \\ \bar{\mathbf{g}} & \bar{\mathbf{K}}_i \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \bar{\mathbf{u}}(\bar{t}) \\ \bar{\mathbf{i}}(\bar{t}) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \bar{\mathbf{K}}_u^t & \bar{\mathbf{L}} \\ \bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{K}}_i^t \end{array} \right| \times \\
& \times \left( h_m^{-1} \left| \begin{array}{c} \widehat{\mathcal{D}}_t(k_m) \bar{\mathbf{u}}(\bar{t}) \\ \widehat{\mathcal{D}}_t(k_m) \bar{\mathbf{i}}(\bar{t}) \end{array} \right| - h_m^{-1} \left| \begin{array}{c} \bar{\mathbf{u}}(\tau_{m-1}) N_{\widehat{\mathcal{D}}_t}(k_m) \\ \bar{\mathbf{i}}(\tau_{m-1}) N_{\widehat{\mathcal{D}}_t}(k_m) \end{array} \right| \right).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Здесь  $h_m = \tau_m - \tau_{m-1}$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{t}) = \left| \begin{array}{c} \bar{\mathbf{u}}(\tau_m) \\ \bar{\mathbf{u}}\left(\tau_m - \frac{h_m}{k_m}\right) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}}\left(\tau_m - \frac{k_m-1}{k_m} h_m\right) \end{array} \right|, \quad \bar{\mathbf{i}}(\bar{t}) = \left| \begin{array}{c} \bar{\mathbf{i}}(\tau_m) \\ \bar{\mathbf{i}}\left(\tau_m - \frac{h_m}{k_m}\right) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{i}}\left(\tau_m - \frac{k_m-1}{k_m} h_m\right) \end{array} \right|, \tag{4.41}$$

а элементы матрицы  $\widehat{\mathcal{D}}_t(k_m)$  и вектора  $N_{\widehat{\mathcal{D}}_t}(k_m)$  образованы из соответствующих элементов матрицы  $\widehat{\mathcal{D}}(k_m)$  и вектора  $N_{\widehat{\mathcal{D}}_t}(k_m)$  путем их умножения на единичные матрицы, размерность которых совпадает с размерностью векторов  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  и  $\bar{\mathbf{i}}(t)$ . В отличие от диагональных матриц  $\mathbf{K}_u$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{K}_i$ ,  $\mathbf{K}_u^t$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}_i^t$  или, безотносительно,  $\varphi$  с диагональными элементами  $diag \varphi(t)$ , диагональные матрицы вида  $\bar{\varphi}$  составлены из элементов  $diag \bar{\varphi}(\bar{t})$ , где  $\bar{t} = \left| \begin{array}{cccc} \tau_m & \tau_m - \frac{h_m}{k_m} & \dots & \tau_m - \frac{k_m-1}{k_m} h_m \end{array} \right|^T$ .

В операторном уравнении (4.40) учтены начальные условия  $\bar{\mathbf{u}}(\tau_{m-1})$  и  $\bar{\mathbf{i}}(\tau_{m-1})$  и не учтены граничные условия, которые могут быть заданы по последовательным и параллельным переменным на границах отрезка  $[0, l]$  пространственной координаты  $x$ . Так как граничные условия в исходной системе уравнений (4.30) удовлетворяют уравнениям (1.62) – (1.63), то они заранее неизвестны. Поэтому их можно считать заданными параметрически. Для определенности будем полагать параметрически заданными



параллельные переменные  $\bar{u}(0, t)$  и  $\bar{u}(l, t)$ . Тогда, вычеркнув в системе алгебраических уравнений (4.40) строки с номерами, соответствующие номерам элементов

$$\left| \bar{u}(0, \tau_m) \quad \bar{u}\left(0, \tau_m - \frac{h_m}{k_m}\right) \quad \dots \quad \bar{u}\left(0, \tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} h_m\right) \right|^T = \bar{u}_0(\bar{t}) \quad (4.41)$$

и элементов

$$\left| \bar{u}(l, \tau_m) \quad \bar{u}\left(l, \tau_m - \frac{h_m}{k_m}\right) \quad \dots \quad \bar{u}\left(l, \tau_m - \frac{k_m - 1}{k_m} h_m\right) \right|^T = \bar{u}_l(\bar{t}) \quad (4.42)$$

в векторе  $\bar{u}(\bar{t})$ , преобразуем систему уравнений (4.40) к виду

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{u}_*(\bar{t}) \\ \bar{i}(\bar{t}) \end{vmatrix} = \bar{u}_0(\bar{t}) \begin{vmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{vmatrix} + \bar{u}_l(\bar{t}) \begin{vmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{u}(\tau_{m-1}) B_{13} \\ \bar{i}(\tau_{m-1}) B_{23} \end{vmatrix}, \quad (4.43)$$

где матрицы  $A_{11}, \dots, A_{22}$  и блочные векторы  $B_{11}, \dots, B_{23}$  образованы из соответствующих матриц и векторов уравнения (4.40), а вектор  $\bar{u}_*(\bar{t})$  отличается от вектора  $\bar{u}(\bar{t})$  тем, что в нем отсутствуют элементы, образующие векторы граничных условий  $\bar{u}_0(\bar{t})$  и  $\bar{u}_l(\bar{t})$ . Линеаризуя систему алгебраических уравнений (4.43) и решая ее относительно неизвестных  $\bar{u}_*(\bar{t})$  и  $\bar{i}(\bar{t})$ , получаем искомое операторное соотношение

$$\begin{vmatrix} \bar{i}_0(\bar{t}) \\ \bar{i}_l(\bar{t}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{00} & Y_{0l} \\ Y_{l0} & Y_{ll} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{u}_0(\bar{t}) \\ \bar{u}_l(\bar{t}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_l \end{vmatrix}. \quad (4.44)$$

Здесь векторы  $\bar{i}_0(\bar{t})$  и  $\bar{i}_l(\bar{t})$  по структуре тождественны векторам  $\bar{u}_0(\bar{t})$  и  $\bar{u}_l(\bar{t})$ . Матрицы проводимостей  $Y_{00}, Y_{0l}, Y_{l0}, Y_{ll}$  и векторы последовательных переменных  $\bar{I}_0$  и  $\bar{I}_l$  определяются в ходе преобразований системы уравнений (4.43) в систему уравнений (4.44).

Таким образом, в процессе покоординатных преобразований системы уравнений (4.30) строится численная схема аппроксимационного порядка  $k_v$  по  $x$  и аппроксимационного порядка  $k_m$  по  $t$ , согласованная с начальными и граничными условиями, которые могут быть заданы параметрическим способом. Это позволяет исключить в алгебраизованных уравнениях неизвестные, определенные на внутренней части отрезка  $[0, l]$ , и установить непосредственную связь между граничными значениями последовательных и параллельных переменных.

Численное операторное уравнение (4.44) содержит  $Y$ -параметры некоторого четырехполюсника. При необходимости это уравнение может быть разрешено относительно переменных  $\vec{u}_0(\vec{t})$  и  $\vec{u}_l(\vec{t})$ . Тогда четырехполюсник будет характеризоваться  $Z$ -параметрами. Аналогично могут быть получены и другие, смешанные формы операторных уравнений. Все они значительно упрощают процесс формирования уравнений энергетической цепи с распределенными параметрами.

В частности, при параллельном соединении элементов (рис. 4.4) целесообразно использовать уравнения (4.44) вида

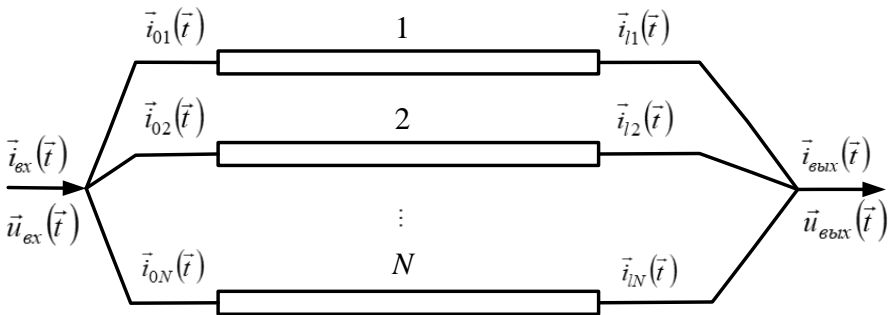


Рис. 4.4. Параллельное соединение элементов энергетической цепи с распределенными параметрами.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i}_{0n}(\vec{t}) \\ \vec{i}_{ln}(\vec{t}) \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} Y_{00n} & Y_{0ln} \\ Y_{l0n} & Y_{lln} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \vec{u}_{0n}(\vec{t}) \\ \vec{u}_{ln}(\vec{t}) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \vec{I}_{0n} \\ \vec{I}_{ln} \end{array} \right|, \quad n = \overline{1, N} \end{array}, \quad (4.45)$$

где  $n$  – номер элемента. Тогда, исходя из условий (1.62) – (1.63), легко получить операторное уравнение цепи

$$\left| \begin{array}{l} \vec{i}_{ex}(\vec{t}) \\ \vec{i}_{бвх}(\vec{t}) \end{array} \right| = \left( \sum_{n=1}^N \left| \begin{array}{cc} Y_{00n} & Y_{0ln} \\ Y_{l0n} & Y_{lln} \end{array} \right| \right) \left| \begin{array}{l} \vec{u}_{ex}(\vec{t}) \\ \vec{u}_{бвх}(\vec{t}) \end{array} \right| + \sum_{n=1}^N \left| \begin{array}{l} \vec{I}_{0n} \\ \vec{I}_{ln} \end{array} \right|. \quad (4.46)$$

В случае последовательного соединения элементов (рис. 4.5) уравнения (4.44) преобразуются к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_{0n}(\vec{t}) \\ \vec{i}_{0n}(\vec{t}) \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{cc} S_{00n} & S_{0ln} \\ S_{l0n} & S_{lln} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \vec{u}_{ln}(\vec{t}) \\ \vec{i}_{ln}(\vec{t}) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \vec{U}_{*n} \\ \vec{I}_{*n} \end{array} \right|, \quad n = \overline{1, N}, \quad (4.47)$$

где

$$\left| \begin{array}{cc} S_{00n} & S_{0ln} \\ S_{l0n} & S_{lln} \end{array} \right| = Y_{l0n}^{-1} \left| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ Y_{l0n} & -Y_{00n} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} Y_{0ln} & 0 \\ Y_{lln} & -1 \end{array} \right|,$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{U}_{*n} \\ \vec{I}_{*n} \end{array} \right| = Y_{l0n}^{-1} \left| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ Y_{l0n} & -Y_{00n} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \vec{I}_{0n} \\ \vec{I}_{ln} \end{array} \right|.$$

Тогда операторное уравнение цепи определяется выражением

$$\left| \begin{array}{l} \vec{u}_{ex}(t) \\ \vec{i}_{ex}(t) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} S_{001} & S_{0l1} \\ S_{l01} & S_{ll1} \end{array} \right| \left( \left( \left| \begin{array}{cc} S_{002} & S_{0l2} \\ S_{l02} & S_{ll2} \end{array} \right| \left( \dots \left| \begin{array}{cc} S_{00N} & S_{0lN} \\ S_{l0N} & S_{llN} \end{array} \right| \times \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left| \begin{array}{l} \vec{u}_{бвх}(\vec{t}) \\ \vec{i}_{бвх}(\vec{t}) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \vec{U}_{*N} \\ \vec{I}_{*N} \end{array} \right| \dots \right) + \left| \begin{array}{l} \vec{U}_{*2} \\ \vec{I}_{*2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \vec{U}_{*1} \\ \vec{I}_{*1} \end{array} \right| \right). \quad (4.48)$$

Операторная форма уравнений элементов вида (4.45) является универсальной и при использовании метода узловых параллельных переменных приводит к системе балансовых уравнений в узлах энергетической цепи произвольной топологии. Этот метод аналогичен методу узловых напряжений. Методы, аналогичные методу контурных токов, в энергетических цепях с распределенными параметрами не используются,

так как необходимое для этого условие  $\vec{i}_0(\vec{t}) = \vec{i}_l(\vec{t})$  как правило не выполняется. Особенности формирования операторных уравнений для решения задач моделирования переходных процессов в линиях электропередачи и в трубопроводах представлены в следующих параграфах.

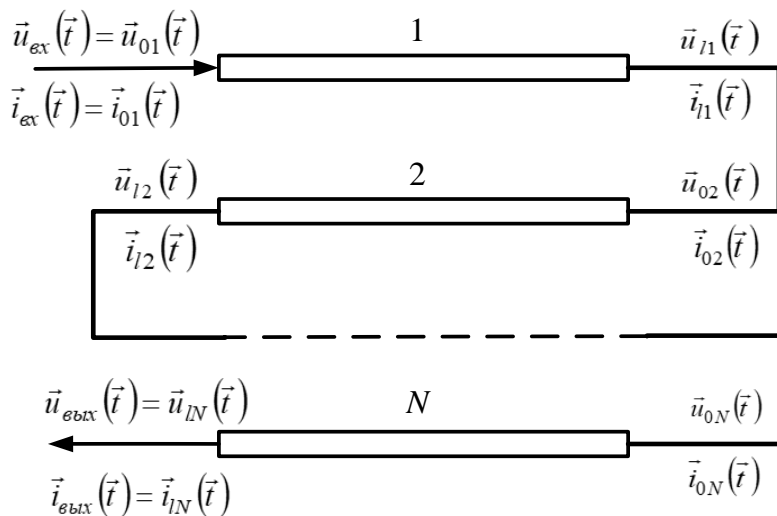


Рис. 4.5. Последовательное соединение элементов энергетической цепи с распределенными параметрами

## 4.5. Расчет переходных режимов в линиях электропередачи

Математическая модель линии электропередачи имеет вид

$$\begin{cases} -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = r i(x,t) + L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = g u(x,t) + C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \end{cases} \quad (4.49)$$

где удельные сопротивления  $r$ , проводимость утечки  $g$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$  – параметры линии.

Полагая параметры постоянными, получим операторное уравнение линии, как элемента некоторой энергетической цепи.

Разделим отрезок  $[0, l]$  области определения пространственной независимой переменной  $x$  на две равные части и осуществим преобразование системы уравнений (4.49) по  $x$  для  $k_v = 2$ . Учитывая соотношения (4.31) – (4.39), запишем

$$\begin{cases} -D_x \vec{u}(t) = r \vec{i}(t) + L \frac{d}{dt} \vec{i}(t), \\ -D_x \vec{i}(t) = g \vec{u}(t) + C \frac{d}{dt} \vec{u}(t), \end{cases} \quad (4.50)$$

где

$$D_x = \frac{2}{l} \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}}(t) = \begin{vmatrix} u(l,t) \\ u\left(\frac{3}{4}l,t\right) \\ u\left(\frac{1}{2}l,t\right) \\ u\left(\frac{1}{4}l,t\right) \\ u(0,t) \end{vmatrix}, \quad \bar{\mathbf{i}}(t) = \begin{vmatrix} i(l,t) \\ i\left(\frac{3}{4}l,t\right) \\ i\left(\frac{1}{2}l,t\right) \\ i\left(\frac{1}{4}l,t\right) \\ i(0,t) \end{vmatrix}.$$

Используя соотношения (3.14), (3.24) и (3.41) при  $k_m = 2$ , преобразуем по  $t$  систему дифференциальных уравнений (4.50) к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} -D_x & 0 \\ 0 & -D_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{u}}(\tau_m) \\ \bar{\mathbf{u}}(\tau_m - H_m) \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}}(\tau_m) \\ \bar{\mathbf{i}}(\tau_m - H_m) \end{vmatrix} + \\ \quad + \frac{L}{2H_m} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}}(\tau_m) \\ \bar{\mathbf{i}}(\tau_m - H_m) \end{vmatrix} + \frac{L}{2H_m} \bar{\mathbf{i}}(\tau_{m-1}) \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \\ \\ \begin{vmatrix} -D_x & 0 \\ 0 & -D_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}}(\tau_m) \\ \bar{\mathbf{i}}(\tau_m - H_m) \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{u}}(\tau_m) \\ \bar{\mathbf{u}}(\tau_m - H_m) \end{vmatrix} + \\ \quad + \frac{C}{2H_m} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{u}}(\tau_m) \\ \bar{\mathbf{u}}(\tau_m - H_m) \end{vmatrix} + \frac{C}{2H_m} \bar{\mathbf{u}}(\tau_{m-1}) \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}. \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Здесь  $H_m = (\tau_m - \tau_{m-1})/2$ ;  $\tau_m$  и  $\tau_{m-1}$  являются точками дискретизации временной координаты  $t$ .

Для учета граничных условий в системе уравнений (4.51) необходимо вычеркнуть строки с номерами 1, 5, 6 и 10, т.е. те строки, которые соответствуют номерам граничных элементов  $u(l, \tau_m)$ ,  $u(0, \tau_m)$  и  $u(l, \tau_m - H_m)$ ,  $u(0, \tau_m - H_m)$  в векторе  $|\bar{\mathbf{u}}(\tau_m) \bar{\mathbf{u}}(\tau_m - H_m)|^T$ . В результате система уравнений (4.51) примет вид

$$\frac{2}{l} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u\left(\frac{3}{4}l, \tau_m\right) \\ u\left(\frac{1}{2}l, \tau_m\right) \\ u\left(\frac{1}{4}l, \tau_m\right) \end{vmatrix} - \left(r + \frac{3L}{2H_m}\right) \begin{vmatrix} i\left(\frac{3}{4}l, \tau_m\right) \\ i\left(\frac{1}{2}l, \tau_m\right) \\ i\left(\frac{1}{4}l, \tau_m\right) \end{vmatrix} + \frac{2L}{H_m} \begin{vmatrix} i\left(\frac{3}{4}l, \tau_m - H_m\right) \\ i\left(\frac{1}{2}l, \tau_m - H_m\right) \\ i\left(\frac{1}{4}l, \tau_m - H_m\right) \end{vmatrix} =$$

(4.52)

$$= \frac{2}{l} u(l, \tau_m) \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{2}{l} u(0, \tau_m) \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{vmatrix} + \frac{L}{2H_m} \begin{vmatrix} i\left(\frac{3}{4}l, \tau_{m-1}\right) \\ i\left(\frac{1}{2}l, \tau_{m-1}\right) \\ i\left(\frac{1}{4}l, \tau_{m-1}\right) \end{vmatrix},$$

$$\frac{2}{l} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u\left(\frac{3}{4}l, \tau_m - H_m\right) \\ u\left(\frac{1}{2}l, \tau_m - H_m\right) \\ u\left(\frac{1}{4}l, \tau_m - H_m\right) \end{vmatrix} - \frac{L}{2H_m} \begin{vmatrix} i\left(\frac{3}{4}l, \tau_m\right) \\ i\left(\frac{1}{2}l, \tau_m\right) \\ i\left(\frac{1}{4}l, \tau_m\right) \end{vmatrix} - r \begin{vmatrix} i\left(\frac{3}{4}l, \tau_m - H_m\right) \\ i\left(\frac{1}{2}l, \tau_m - H_m\right) \\ i\left(\frac{1}{4}l, \tau_m - H_m\right) \end{vmatrix} =$$

(4.53)

$$= \frac{2}{l} u(l, \tau_m - H_m) \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{2}{l} u(0, \tau_m - H_m) \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{vmatrix} - \frac{L}{2H_m} \begin{vmatrix} i\left(\frac{3}{4}l, \tau_{m-1}\right) \\ i\left(\frac{1}{2}l, \tau_{m-1}\right) \\ i\left(\frac{1}{4}l, \tau_{m-1}\right) \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
& -\mathcal{D}_x \bar{\mathbf{i}}(\tau_m) - \left( g + \frac{3C}{2H_m} \right) \begin{vmatrix} 0 \\ u\left(\frac{3}{4}l, \tau_m\right) \\ u\left(\frac{1}{2}l, \tau_m\right) \\ u\left(\frac{1}{4}l, \tau_m\right) \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{2C}{H_m} \begin{vmatrix} 0 \\ u\left(\frac{3}{4}l, \tau_m - H_m\right) \\ u\left(\frac{1}{2}l, \tau_m - H_m\right) \\ u\left(\frac{1}{4}l, \tau_m - H_m\right) \\ 0 \end{vmatrix} = \\
& \quad , \tag{4.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( g + \frac{3C}{2H_m} \right) \begin{vmatrix} u(l, \tau_m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u(0, \tau_m) \end{vmatrix} - \frac{2C}{H_m} \begin{vmatrix} u(l, \tau_m - H_m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u(0, \tau_m - H_m) \end{vmatrix} + \frac{C}{2H_m} \begin{vmatrix} u(l, \tau_{m-1}) \\ u\left(\frac{3}{4}l, \tau_{m-1}\right) \\ u\left(\frac{1}{2}l, \tau_{m-1}\right) \\ u\left(\frac{1}{4}l, \tau_{m-1}\right) \\ u(0, \tau_{m-1}) \end{vmatrix} \\
& -\mathcal{D}_x \bar{\mathbf{i}}(\tau_m - H_m) - \frac{C}{2H_m} \begin{vmatrix} 0 \\ u\left(\frac{3}{4}l, \tau_m\right) \\ u\left(\frac{1}{2}l, \tau_m\right) \\ u\left(\frac{1}{4}l, \tau_m\right) \\ 0 \end{vmatrix} - g \begin{vmatrix} 0 \\ u\left(\frac{3}{4}l, \tau_m - H_m\right) \\ u\left(\frac{1}{2}l, \tau_m - H_m\right) \\ u\left(\frac{1}{4}l, \tau_m - H_m\right) \\ 0 \end{vmatrix} = \\
& \quad . \tag{4.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{C}{2H_m} \begin{vmatrix} u(l, \tau_m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u(0, \tau_m) \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} u(l, \tau_m - H_m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u(0, \tau_m - H_m) \end{vmatrix} - \frac{C}{2H_m} \begin{vmatrix} u(l, \tau_{m-1}) \\ u\left(\frac{3}{4}l, \tau_{m-1}\right) \\ u\left(\frac{1}{2}l, \tau_{m-1}\right) \\ u\left(\frac{1}{4}l, \tau_{m-1}\right) \\ u(0, \tau_{m-1}) \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$



Система алгебраических уравнений (4.52) – (4.55) содержит граничные параметры в правой части. Решая ее при заданных начальных условиях  $\vec{u}(\tau_{m-1})$  и  $\vec{i}(\tau_{m-1})$ , легко установить, что

$$\begin{array}{|c|} \hline i(0, \tau_m) \\ \hline i(0, \tau_m - H_m) \\ \hline i(l, \tau_m) \\ \hline i(l, \tau_m - H_m) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline Y_{00} \quad Y_{0l} \\ \hline Y_{l0} \quad Y_{ll} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline u(0, \tau_m) \\ \hline u(0, \tau_m - H_m) \\ \hline u(l, \tau_m) \\ \hline u(l, \tau_m - H_m) \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \vec{I}_0 \\ \hline \vec{I}_l \\ \hline \end{array} \quad (4.56)$$

или

$$\begin{array}{|c|} \hline \vec{I}_0 \\ \hline \vec{I}_l \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline Y_{00} \quad Y_{0l} \\ \hline Y_{l0} \quad Y_{ll} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \vec{u}_0 \\ \hline \vec{u}_l \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \vec{I}_0 \\ \hline \vec{I}_l \\ \hline \end{array}. \quad (4.57)$$

Соотношение (4.57) является искомым операторным уравнением длинной линии. Использование таких уравнений значительно упрощает процедуру формирования балансовых соотношений в узлах электрической цепи произвольной топологической структуры. Покажем это на примере формирования системы уравнений электрической цепи, изображенной на рис. 4.6. Для этого воспользуемся операторными уравнениями элементов вида (4.3) и (4.57), т.е.

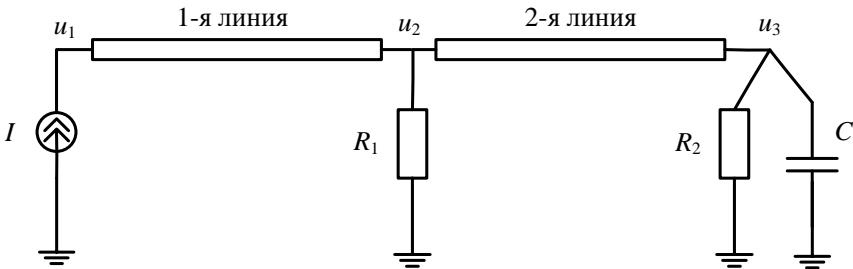


Рис. 4.6. Пример электрической цепи с распределенными и сосредоточенными параметрами.

$$\begin{aligned} \vec{i}_{R1} &= R_1^{-1} \vec{u}_2, \\ \vec{i}_{R2} &= R_2^{-1} \vec{u}_3, \\ \vec{i}_c &= H_m^{-1} C \left[ \widehat{D}(k_m) \vec{u}_3 - u_3(\tau_{m-1}) \vec{N}_{\widehat{D}}(k_m) \right], \\ \begin{vmatrix} \vec{i}_{01} \\ \vec{i}_{l1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} Y_{00}^1 & Y_{0l}^1 \\ Y_{l0}^1 & Y_{ll}^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{I}_0^1 \\ \vec{I}_l^1 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} \vec{i}_{02} \\ \vec{i}_{l2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} Y_{00}^2 & Y_{0l}^2 \\ Y_{l0}^2 & Y_{ll}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{I}_0^2 \\ \vec{I}_l^2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

В соответствии с первым законом Кирхгофа система балансовых уравнений в узлах имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline Y_{00}^1 & Y_{0l}^1 & 0 \\ \hline Y_{l0}^1 & Y_{ll}^1 - R_1^{-1} E - Y_{00}^2 & -Y_{0l}^2 \\ \hline 0 & Y_{l0}^2 & Y_{ll}^2 - R_2^{-1} E - H_m^{-1} C \widehat{D}(k_m) \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \vec{u}_1 \\ \hline \vec{u}_2 \\ \hline \vec{u}_3 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|} \hline \vec{I} - \vec{I}_0^1 \\ \hline \vec{I}_0^2 - \vec{I}_l^1 \\ \hline -\vec{I}_l^2 - u_3(\tau_{m-1}) H_m^{-1} C \vec{N}_{\widehat{D}}(k_m) \\ \hline \end{array}.$$

В результате ее решения оказывается возможным определить граничные значения напряжений  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_3$ , по которым, после подстановки в соотношения (4.58), установить граничные значения токов  $\vec{i}_{01}$ ,  $\vec{i}_{l1}$ ,  $\vec{i}_{02}$ ,  $\vec{i}_{l2}$ , а после подстановки в системы уравнений вида (4.52) – (4.55) – определить значения токов и напряжений внутри линий. В заключение отметим, что такой подход отличается от известных методов макромоделирования длинных линий [92] и синтетических схем [274], поскольку обеспечивает высокую точность аппроксимации частных производных при алгебраизации исходных уравнений вида (4.49).

## 4.6. Исследование нестационарных процессов движения газа в трубе постоянного диаметра

Обратимся теперь к системе трех нелинейных дифференциальных уравнений (1.46), которые описывают нестационарное неизотермическое течение газа в трубопроводе. Запишем эту систему уравнений в компактной форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = F, \quad t \geq 0, \quad x \in [0, l], \quad (4.59)$$

где  $\varphi = \varphi(W)$ ,  $\psi = \psi(W)$ ,  $F = F(W)$  – нелинейные вектор-функции от искомых переменных  $M(x, t)$  – массового расхода,  $p(x, t)$  – давления и  $T(x, t)$  – температуры газа, образующих вектор-функцию  $W(x, t)$ .

Уравнение (4.59) дополняется начальным условием  $W(x, 0)$  и граничным условием  $W_\Gamma(t)$ , которое определяется направлением движения газа:

$$W_\Gamma(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} p(0, t) & T(0, t) & M(l, t) \end{bmatrix}^T, & v(0, t) > 0, \quad v(l, t) \geq 0, \\ \begin{bmatrix} p(0, t) & T(0, t) & p(l, t) & T(l, t) \end{bmatrix}^T, & v(0, t) > 0, \quad v(l, t) < 0, \\ \begin{bmatrix} M(0, t) & p(l, t) & T(l, t) \end{bmatrix}^T, & v(0, t) \leq 0, \quad v(l, t) < 0, \\ \begin{bmatrix} M(0, t) & M(l, t) \end{bmatrix}^T, & v(0, t) \leq 0, \quad v(l, t) \geq 0. \end{cases} \quad (4.60)$$

Алгебраизация уравнения (4.59) осуществляется покоординатно в два этапа.

На первом этапе это уравнение преобразуется по временной координате. Для этого привлекаются соотношения (3.14), (3.24) и (3.41).

Полагая, например,  $k_m = 2$ , запишем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h_t} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \left| \begin{vmatrix} \varphi[W(x, \tau_m)] \\ \varphi[W(x, \tau_m - H_t)] \end{vmatrix} \right| - \frac{1}{2h_t} \begin{vmatrix} -\varphi[W(x, \tau_{m-1})] \\ \varphi[W(x, \tau_m)] \end{vmatrix} \Big| + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} \psi[W(x, \tau_m)] \\ \psi[W(x, \tau_m - H_t)] \end{vmatrix} \Big| = \begin{vmatrix} F[W(x, \tau_m)] \\ F[W(x, \tau_m - H_t)] \end{vmatrix} \Big|, \end{aligned} \quad (4.61)$$

где  $H_t = (\tau_m - \tau_{m-1})/2$ .

На втором этапе преобразуем уравнение (4.61) по пространственной координате. С этой целью воспользуемся соотношениями (4.31) – (4.32) при  $H_v = l$ ,  $\nu_0 = 1$ ,  $k_v = 3$ . В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3l} \begin{vmatrix} 11 & 0 & -18 & 0 & 9 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -18 & 0 & 9 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & -6 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -9 & 0 & 18 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -9 & 0 & 18 & 0 & -11 \end{vmatrix} \left| \begin{vmatrix} \psi[W(l, \tau_m)] \\ \psi[W(l, \tau_m - H_t)] \\ \psi[W(2l/3, \tau_m)] \\ \psi[W(2l/3, \tau_m - H_t)] \\ \psi[W(l/3, \tau_m)] \\ \psi[W(l/3, \tau_m - H_t)] \\ \psi[W(0, \tau_m)] \\ \psi[W(0, \tau_m - H_t)] \end{vmatrix} \right| + \\ & + \frac{1}{2h_t} \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \left| \begin{vmatrix} \varphi[W(l, \tau_m)] \\ \varphi[W(l, \tau_m - H_t)] \\ \varphi[W(2l/3, \tau_m)] \\ \varphi[W(2l/3, \tau_m - H_t)] \\ \varphi[W(l/3, \tau_m)] \\ \varphi[W(l/3, \tau_m - H_t)] \\ \varphi[W(0, \tau_m)] \\ \varphi[W(0, \tau_m - H_t)] \end{vmatrix} \right| = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2h_t} \begin{vmatrix} -\varphi[W(l, \tau_{m-1})] \\ \varphi[W(l, \tau_{m-1})] \\ -\varphi[W(2l/3, \tau_{m-1})] \\ \varphi[W(2l/3, \tau_{m-1})] \\ -\varphi[W(l/3, \tau_{m-1})] \\ \varphi[W(l/3, \tau_{m-1})] \\ -\varphi[W(0, \tau_{m-1})] \\ \varphi[W(0, \tau_{m-1})] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F[W(l, \tau_m)] \\ F[W(l, \tau_m - H_t)] \\ F[W(2l/3, \tau_m)] \\ F[W(2l/3, \tau_m - H_t)] \\ F[W(l/3, \tau_m)] \\ F[W(l/3, \tau_m - H_t)] \\ F[W(0, \tau_m)] \\ F[W(0, \tau_m - H_t)] \end{vmatrix} \quad (4.62)$$

При необходимости погрешность аппроксимации уравнения (4.61) уравнением (4.62) может быть уменьшена не только увеличением порядка аппроксимации  $k_v$ , но и путем деления отрезка  $[0, l]$  на части с применением описанного выше способа дискретизации на каждом отрезке.

В дискретном уравнении (4.62) учет граничных условий (4.60) осуществляется после его линеаризации относительно решения, найденного на предыдущей итерации. В результате параметрического задания  $W_T(t)$  и исключения «внутренних» неизвестных получаем операторное уравнение вида

$$\begin{vmatrix} M(0, \tau_m) & E(0, \tau_m) & M(l, \tau_m) & E(l, \tau_m) \\ M(0, \tau_m - H_m) & E(0, \tau_m - H_t) & M(l, \tau_m - H_t) & E(l, \tau_m - H_t) \end{vmatrix}^T = \quad (4.63)$$

$$= Y \begin{vmatrix} p(0, \tau_m) & T(0, \tau_m) & p(l, \tau_m) & T(l, \tau_m) \\ p(0, \tau_m - H_t) & T(0, \tau_m - H_t) & p(l, \tau_m - H_t) & T(l, \tau_m - H_t) \end{vmatrix}^T + \vec{I}_\Sigma,$$

где

$$\vec{I}_\Sigma = \vec{I} + k_\phi \vec{I}_k + \lambda \vec{I}_\lambda + \alpha \vec{I}_\alpha + T_n \vec{I}_T. \quad (4.64)$$

Уравнение (4.63) связывает потоки масс  $M$  и энергий  $E = MT$  на входе и выходе трубы с давлениями  $p$  и температурами  $T$  на границах. Квадратная матрица  $Y$  размерности  $8 \times 8$  и 8-мерные векторы  $\vec{I}$ ,  $\vec{I}_k$ ,  $\vec{I}_\lambda$ ,  $\vec{I}_\alpha$ ,  $\vec{I}_T$  определяются в процессе преобразований уравнения (4.62) к виду (4.63).

Операторное уравнение (4.63) значительно облегчает решение прямых и обратных задач газовой динамики [268 – 270].

В прямых задачах известны коэффициенты  $k_\Phi$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $T_H$ , а также векторы  $W(x,0)$  и  $W_T(t)$ , определяющие начальные и граничные условия. Задача состоит в определении функции  $W(x,t)$  при  $t > 0$ . Для этого в уравнении (4.63) учитываются значения  $W_T(\tau_m)$  и  $W_T(\tau_m - H_t)$  и определяются значения параметров газового потока на границах трубы:  $W(0, \tau_m)$ ,  $W(0, \tau_m - H_t)$ ,  $W(l, \tau_m)$ ,  $W(l, \tau_m - H_t)$ . Затем используется уравнение (4.62) в линеаризованном относительно  $W(x,t)$  виде и определяются «внутренние» значения параметров газового потока –  $W(2l/3, \tau_m)$ ,  $W(2l/3, \tau_m - H_t)$ ,  $W(l/3, \tau_m)$ ,  $W(l/3, \tau_m - H_t)$ .

В обратных задачах задаются измеренные значения  $W_*(0, \tau_m)$ ,  $W_*(0, \tau_m - H_t)$ ,  $W_*(0, \tau_{m-1})$ , ... и  $W_*(l, \tau_m)$ ,  $W_*(l, \tau_m - H_t)$ ,  $W_*(l, \tau_{m-1})$ , ... . Искомыми являются функции  $W(x,t)$ , коэффициенты  $\lambda$ ,  $\alpha$  и параметры  $k_\Phi$ ,  $T_H$ , удовлетворяющие уравнению (4.59) и условию

$$\sum_m \left\| W(0, \tau_m) - W_*(0, \tau_m) \right\| + \left\| W(0, \tau_m - H_t) - W_*(0, \tau_m - H_t) \right\| + \left\| W(l, \tau_m) - W_*(l, \tau_m) \right\| + \left\| W(l, \tau_m - H_t) - W_*(l, \tau_m - H_t) \right\| \xrightarrow[\lambda, \alpha, k_\Phi, T_H]{W_T(t)} \min. \quad (4.65)$$

Здесь норма разности векторов определяется выражением

$$\|W - W_*\| = \left( \frac{M - M_*}{M_H} \right)^2 + a_E \left( \frac{E - E_*}{E_H} \right)^2 + a_P \left( \frac{P - P_*}{P_H} \right)^2 + a_T \left( \frac{T - T_*}{T_H} \right)^2, \quad (4.66)$$

в котором весовые коэффициенты  $a_E$ ,  $a_P$  и  $a_T$  удовлетворяют уравнениям

$$\left( \frac{\Delta M_{\text{don}}}{M_H} \right)^2 = a_E \left( \frac{\Delta E_{\text{don}}}{E_H} \right)^2 = a_P \left( \frac{\Delta P_{\text{don}}}{P_H} \right)^2 = a_T \left( \frac{\Delta T_{\text{don}}}{T_H} \right)^2. \quad (4.67)$$

Величины  $M_H$ ,  $E_H$ ,  $P_H$ ,  $T_H$  и  $\Delta M_{доп}$ ,  $\Delta E_{доп}$ ,  $\Delta P_{доп}$ ,  $\Delta T_{доп}$  задают номинальные значения параметров газового потока и допустимые погрешности их измерения.

Условие (4.65) обеспечивает адекватность математической модели (4.59) процессу, информация о котором поступает в виде временных последовательностей  $\{W_*(0, \tau)\}$  и  $\{W_*(l, \tau)\}$ . Очевидно, существуют границы «окна», скользящего по временной оси, в пределах которого информацию о реальном процессе необходимо учитывать. Ширина этого «окна»  $\Delta \tau$  определяется временем переходного процесса в трубе и составляет несколько часов для трубопровода длиной 100 км и диаметром (1200 – 1400) мм. В ряде случаев можно ограничиться величиной  $\Delta \tau = \tau_m - \tau_{m-1} \approx (2 - 4)$  ч.

Преобразование системы уравнений одномерной газовой динамики вида (4.59) к операторному уравнению вида (4.63) позволяет осуществить переход от задачи минимизации квадратичного функционала (4.65) к задаче решения соответствующей линейной системы алгебраических уравнений.

Ниже приводятся некоторые результаты решения прямой и обратной задач моделирования режимов течения газа в трубе.

Задача перекрытия трубы длиной 150,1 км диаметром 1200 мм при коэффициенте гидравлического сопротивления  $\lambda = 0,0101$  и коэффициенте теплопередачи  $k_\phi = 1,6$  Вт/м<sup>2</sup> К. Температура грунта  $T_H = 288,15$  К. Профиль прокладки трубопровода горизонтальный, т.е.  $dh/dx = 0$ . При нормальных условиях плотность транспортируемого газа относительно плотности воздуха составляет 0,6.

Исходный режим течения газа стационарный. Он определяется граничными значениями давления  $p = (0,0) = 51$  атм, температуры  $T(0,0) = 314,15$  К и массового расхода  $M(l,0) = 278,65$  кг/с. При  $t > 0$  граничные значения по давлению и температуре остаются неизменными, т.е.

$p(0,t)=51$  атм,  $T(0,t)=314,15$  К, а граничное значение по массовому расходу изменяется: при  $t=10$  мин  $M(l,t)=100,65$  кг/с, при  $t \geq 20$  мин  $M(l,t)=1$  кг/с.

Результаты решения этой задачи отражены на рис. 4.7.

Вычислительный эксперимент проводился при  $k_m = 2$ ,  $k_v = 4$ ,  $H_t = 10$  мин. Эксперимент показал, что увеличение порядков аппроксимации частных производных позволяет увеличить шаг дискретизации временной и пространственной координат, не снижая точности решения задачи и сохраняя устойчивость вычислений. Число итераций при решении систем нелинейных алгебраических уравнений не превышает 3–4. Исключение «внутренних» неизвестных обеспечивает понижение размерности решаемых систем линеаризованных алгебраических уравнений с 30 до 8.

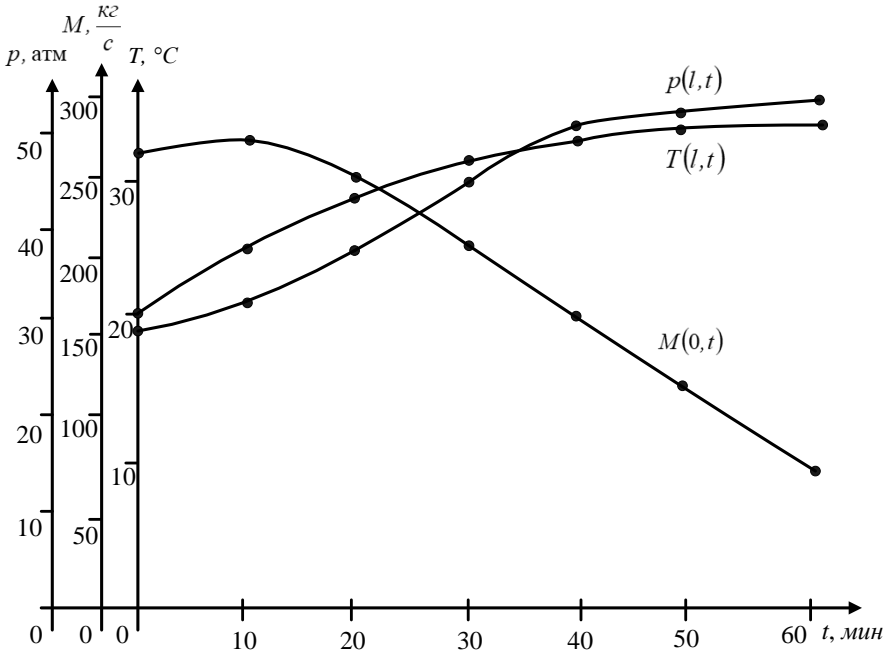


Рис. 4.7. Результаты решения задачи перекрытия трубопровода.



Обратная задача по адаптации математической модели (4.59) в соответствии с условием (4.65) для случая, когда минимизация соответствующего функционала осуществляется только по граничным условиям, т.е. по функции  $W_T(t)$ . Остальные исходные данные этой задачи совпадают с исходными данными задачи перекрытия трубы. На рис. 4.8, а, б и в представлены значения функций

$$M_T(l,t), P_T(0,t), T_T(0,t)$$

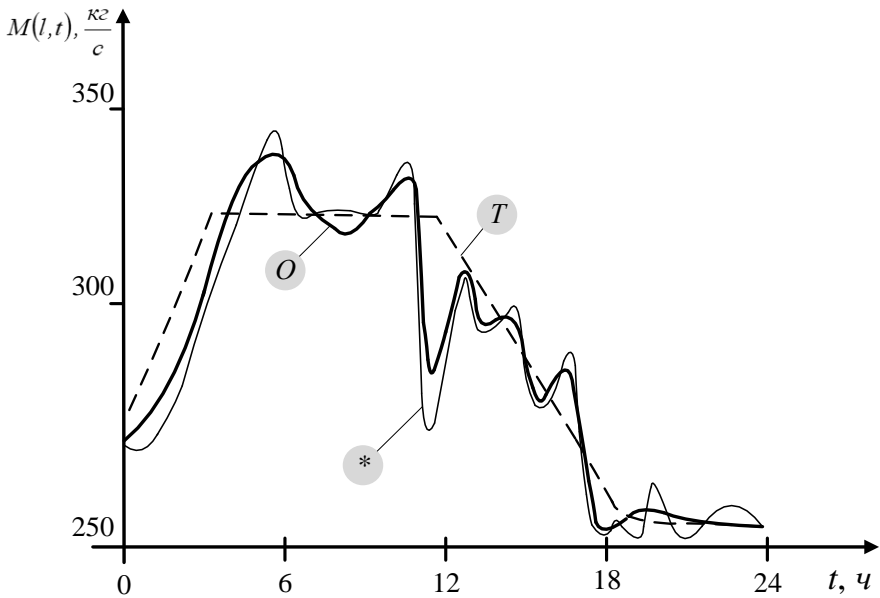
измеренные значения

$$M_*(l,t), P_*(0,t), T_*(0,t)$$

а также оценочные значения, полученные в результате адаптации

$$M_O(l,t), P_O(0,t), T_O(0,t)$$

Они обозначены соответственно «Т» – точные, «\*» – измеренные, «О» – оценочные.



а

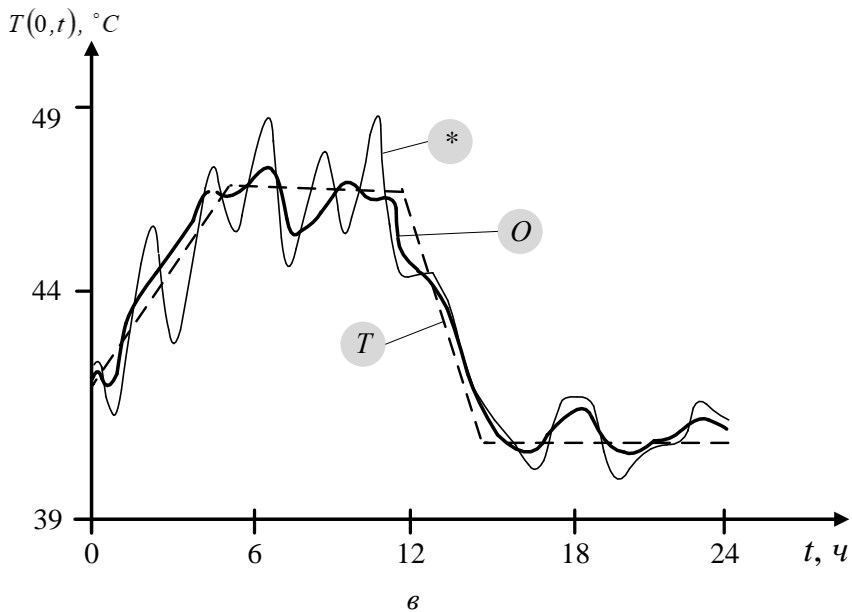
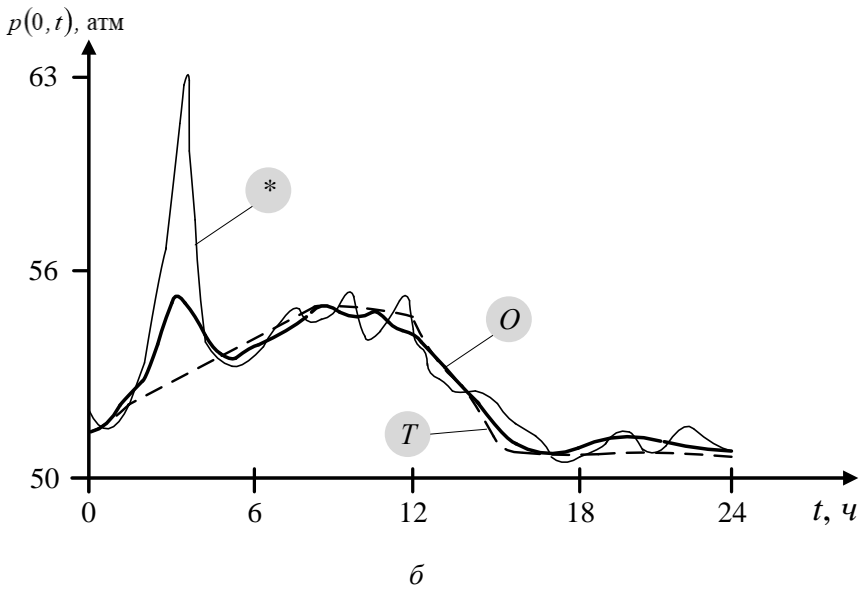


Рис. 4.8. Результаты решения обратной задачи течения газа в трубопроводе –  
оценивание граничных условий по измеренным данным

Вычислительный эксперимент проводился при  $k_m = 2$ ,  $k_v = 4$ ,  $H_t = 14$ . Анализ решений обратной задачи показывает, что при адаптации математической модели (4.59) осуществляется фильтрация «грубых» погрешностей измерений, длительность которых соизмерима с шириной временного «окна»  $\Delta\tau = 2H_t$ . При этом уровень систематических погрешностей измерений остается практически неизменным.

В заключение вновь обратимся к операторному уравнению (4.63) и запишем его относительно последовательных и параллельных переменных

$$\left| \begin{array}{c} \bar{i}(0, \tau_m) \\ \bar{i}(0, \tau_m - H_t) \\ \bar{i}(l, \tau_m) \\ \bar{i}(l, \tau_m - H_t) \end{array} \right| = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{00} & Y_{0l} \\ \hline Y_{l0} & Y_{ll} \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{c} \bar{u}(0, \tau_m) \\ \bar{u}(0, \tau_m - H_t) \\ \bar{u}(l, \tau_m) \\ \bar{u}(l, \tau_m - H_t) \end{array} \right| + \begin{array}{|c|} \hline \bar{I}_{\Sigma 0} \\ \hline \bar{I}_{\Sigma l} \\ \hline \end{array} \quad (4.68)$$

где введены обозначения для

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{00} & Y_{0l} \\ \hline Y_{l0} & Y_{ll} \\ \hline \end{array}, \quad \bar{I}_{\Sigma} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{I}_{\Sigma 0} & \bar{I}_{\Sigma l} \\ \hline \end{array}^T, \quad \bar{i} = \begin{array}{|c|c|} \hline M & E \\ \hline \end{array}^T, \quad \bar{u} = \begin{array}{|c|c|} \hline p & T \\ \hline \end{array}^T.$$

Соотношение (4.68), подобное соотношению (4.56), значительно упрощает процедуру формирования соотношений в узлах газотранспортной сети произвольной топологической структуры. Подробно эти вопросы обсуждаются ниже.

## 4.7. Законы сохранения в энергетических цепях

В электрических, гидравлических, тепловых, механических и других, однородных с точки зрения физических явлений, цепях выделяемые элементы характеризуются конечной проводимостью, отличной от нуля. Кроме того, для элементов с сосредоточенными параметрами матрица системы уравнений, составленная по методу узловых потенциалов, оказывается положительно определенной и симметричной. Поэтому такая система уравнений всегда имеет единственное решение, а учет симметричности ее матрицы позволяет применять эффективные методы ее решения.

Разнообразие физических явлений, обуславливает принципиально иную ситуацию, когда в различных элементах цепи наблюдаются явления, которые могут быть однородными и неоднородными. Например, в газотранспортных системах (рис. 1.3) выделяют группу элементов, когда наблюдаются теплогидравлические процессы. Это газоперекачивающие агрегаты, трубопроводы, редукторы и другие. Вместе с ними существуют элементы, в которых наблюдаются только тепловые процессы (аппараты воздушного охлаждения газа) и только гидравлические процессы (пылеуловители). Аналогичную ситуацию можно наблюдать в цепи импульсного плазменного ускорителя эрозионного типа (рис. 1.5). Здесь в плазмосодержащем элементе наблюдаются явления магнитной гидродинамики, а в остальных элементах цепи (индуктивности, емкости, сопротивлении) – электромагнитные явления. Если выделенные элементы в таких энергетических цепях характеризовать матрицами проводимости,

210

связывающими последовательные и параллельные переменные на границах, то возникает ситуация, когда определитель матричной проводимости стремится к нулю (случай с емкостью, сопротивлением и индуктивностью, где отсутствуют гидравлические и тепловые взаимодействия, характерные для плазменного ускорителя) или к бесконечности (случай отсутствия гидравлических взаимодействий в аппарате воздушного охлаждения газотранспортной сети). В результате оказывается недопустимым непосредственное использование метода узловых параллельных переменных для составления системы балансовых уравнений по последовательным переменным в узлах цепи. Поэтому необходимо предварительно объединять элементы цепи в некоторые макроэлементы, в которых выделенные физические явления оказываются неразрывно связанными, а определитель соответствующей матричной проводимости приобретает конечное значение отличное от нуля.

Покажем, каким образом осуществляется объединение элементов в макроэлементы на примере компрессорной станции (КС).

Основными технологическими элементами КС являются газоперекачивающие агрегаты (ГПА), аппараты воздушного охлаждения (АВО), дроссельные краны (Др) и пылеуловители (ПУ) (рис. 4.9). В соответствии с технологическими требованиями однотипные ГПА соединяются между собой последовательно по  $q_C$  штук, образуя группу агрегатов (величина  $q_C$  определяет количество ступеней сжатия газа, причем обычно  $q_C \leq 3$ ). Однотипные  $q_G$  группы объединяются в блок ГПА. К выходу блока ГПА подключается блок АВО, состоящий из  $q_A$  параллельно работающих аппаратов. Блоки ГПА и АВО образуют цех КС. На входах и выходах цехов КС устанавливаются ПУ, очищающие газ от твердых и жидких примесей. Др предназначен для плавного регулирования падения давления на входе цеха.

Если теплогидравлические явления, происходящие в технологических элементах КС, разделить на тепловые и гидравлические, то получим тепловую и гидравлическую цепи, представленные соответственно на рис. 4.10 и рис. 4.11. Сопоставляя цепи на рис. 4.9 – 4.11, можно видеть, что только ГПА являются такими элементами, в которых наблюдаются теплогидравлические процессы. В остальных элементах происходят однородные явления. Поэтому исходная схема, приведенная на рис. 4.9, должна быть заменена схемой из параллельного соединения цехов, а каждый цех должен рассматриваться как макроэлемент теплогидравлической цепи. Очевидно, состоящая из таких макроэлементов цепь не будет изменять топологию при раздельном рассмотрении в ней тепловых и гидравлических явлений.

Обратимся теперь к математическим моделям ГПА и АВО и покажем, как на их основе можно получить операторное уравнение макроэлемента, состоящего из  $q_{Ц}$  параллельно работающих цехов.

Математические модели ГПА и АВО имеют вид [206, 270].

$$W_{Г\text{ВЫХ}} = \Phi_{Г}(W_{Г\text{ВХ}}, n), \quad (4.69)$$

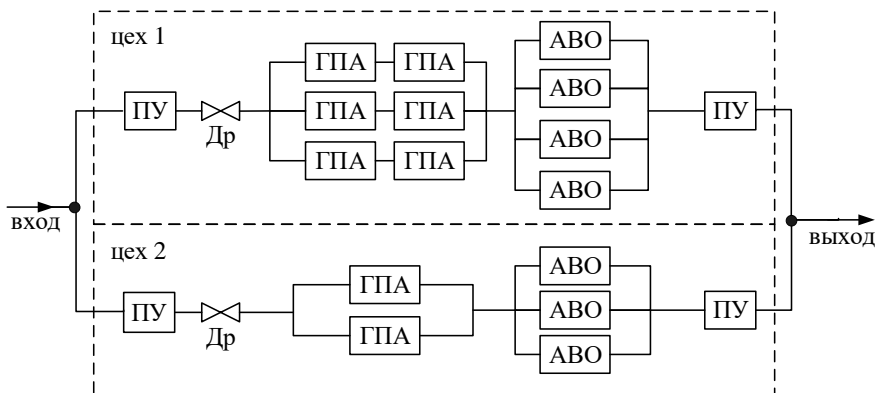


Рис. 4.9.

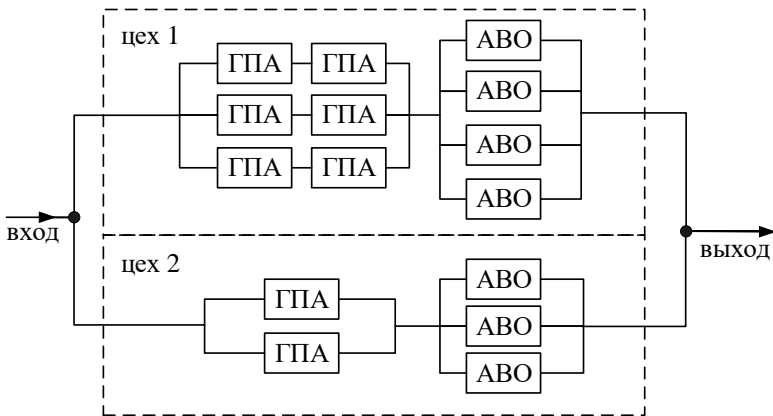


Рис. 4.10.

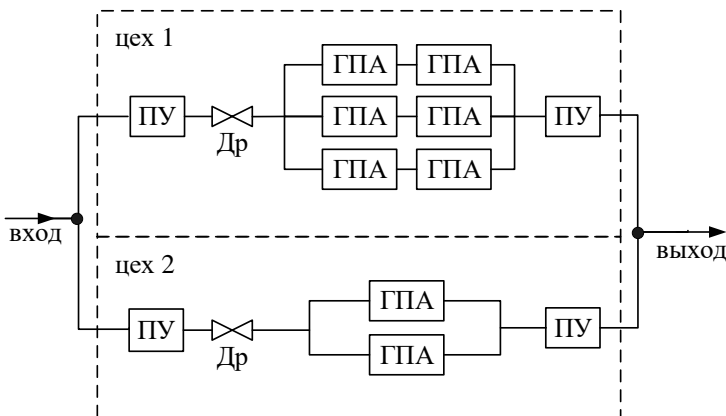


Рис. 4.11.

$$W_{АВЫХ} = \Phi_A(W_{АВХ}), \quad (4.70)$$

где  $n$  – обороты нагнетателя,  $\Phi_r$  и  $\Phi_A$  – нелинейные вектор-функции от параметров газового потока – массового расхода  $M$ , давления  $p$ , температуры  $T$  газа, – образующих вектор  $W = |M \ p \ T|^T$ . В математическую модель ГПА включаются ограничения на объемную

производительность, приведенные обороты, максимальную мощность привода, а также ограничение на температуру газа в выходном патрубке нагнетателя. Эти ограничения задаются неравенством [206]

$$\varphi_{\Gamma \min} \leq \varphi_{\Gamma}(W_{\Gamma BX}, n) \leq \varphi_{\Gamma \max}, \quad (4.71)$$

где  $\varphi_{\Gamma \min}$  и  $\varphi_{\Gamma \max}$  – векторы,  $\varphi_{\Gamma}$  – нелинейная вектор-функция.

Учитывая особенности схем соединения элементов КС, для входных и выходных параметров газового потока параллельно работающих  $q_{\Gamma}$  цехов, т.е. для  $W_{BX} = |M_{BX} \ P_{BX} \ T_{BX}|^T$  и  $W_{BЫX} = |M_{BЫX} \ P_{BЫX} \ T_{BЫX}|^T$ , соответственно, запишем

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\Gamma BX}^{m,1} = P_{BX}, \quad T_{\Gamma BX}^{m,1} = T_{BX}, \\ \left. \begin{array}{l} W_{\Gamma BЫX}^{m,q} = \Phi_{\Gamma}^m(W_{\Gamma BX}^{m,q}, n^{m,q}) \\ \varphi_{\Gamma \min}^m \leq \varphi_{\Gamma}^m(W_{\Gamma BX}^{m,q}, n^{m,q}) \leq \varphi_{\Gamma \max}^m \end{array} \right\}_{q=1, q_c^m} \\ \left. \begin{array}{l} q_A^m M_{ABX}^m = q_{\Gamma}^m M_{\Gamma BЫX}^{m, q_c^m}, \\ P_{ABX}^m = P_{\Gamma BЫX}^{m, q_c^m}, \quad T_{ABX}^{m, q_c^m} = T_{\Gamma BЫX}^{m, q_c^m}, \\ W_{ABЫX}^m = \Phi_A^m(W_{ABX}^m), \quad P_{BЫX}^m = P_{ABЫX}^m \end{array} \right\}_{m=1, q_{ц}} \end{array} \right. \quad (4.72)$$

$$M_{BЫX} = \sum_{m=1}^{q_{ц}} q_A^m M_{ABЫX}^m,$$

$$T_{BЫX} = \frac{\sum_{m=1}^{q_{ц}} T_{ABЫX}^m M_{ABЫX}^m q_A^m}{\sum_{m=1}^{q_{ц}} M_{ABЫX}^m q_A^m}.$$

Здесь верхние индексы  $m$  и  $q$  указывают на принадлежность параметров и функций определенному элементу КС, расположенному в цехе  $m$  на  $q$ -й ступени сжатия газа.



Для получения операторного уравнения макроэлемента из параллельно работающих цехов осуществим линеаризацию нелинейных функций  $\Phi_\Gamma$  и  $\Phi_A$ , входящих в выражения (4.72). Выбрав начальное приближение по параметрам газового потока  $W = W^0$ , безотносительно к индексам  $m$  и  $q$  запишем

$$W_{\Gamma B \text{YX}}^s = \left( \frac{\partial \Phi_\Gamma}{\partial W_{\Gamma B \text{X}}} \right)^{s-1} \left( W_{\Gamma B \text{X}}^s - W_{\Gamma B \text{X}}^{s-1} \right) + \left( n^s - n^{s-1} \right) \left( \frac{\partial \Phi_\Gamma}{\partial n} \right)^{s-1} + \Phi_\Gamma^{s-1}, \quad (4.73)$$

$$W_{A B \text{YX}}^s = \left( \frac{\partial \Phi_A}{\partial W_{A B \text{X}}} \right)^{s-1} \left( W_{A B \text{X}}^s - W_{A B \text{X}}^{s-1} \right) + \Phi_A^{s-1}, \quad (4.74)$$

$$\varphi_{\Gamma \min} \leq \varphi_\Gamma \left( W_{\Gamma B \text{X}}^{s-1}, n^s \right) \leq \varphi_{\Gamma \max}, \quad (4.75)$$

где  $s$  – номер итерации.

Неравенство (4.75) преобразуется к виду

$$n_{\min}^s \leq n^s \leq n_{\max}^s. \quad (4.76)$$

Если для какого-либо  $m$  и  $q$  оказывается, что  $n^{s-1} < n_{\min}^s$  или  $n^{s-1} > n_{\max}^s$ , то в выражении (4.76) полагаем  $n^{s-1} = n_{\min}^s$  или  $n^{s-1} = n_{\max}^s$  соответственно.

При управлении КС, цеха которой оснащены ГПА с газотурбинным приводом, необходимо изменением оборотов  $n$  обеспечить заданную величину выходного давления или заданную величину объемов перекачки газа. Задачи управления оборотами  $n$  здесь не рассматриваются. Они подробно освещены в работе [267].

На основании равенств (4.72) – (4.74) установим связь между параметрами газового потока на входе и выходе группы ГПА. Безотносительно к номеру цеха  $m$  имеем

$$W_{\Gamma B \text{YX}}^{q_C, s} - W_{\Gamma B \text{YX}}^{q_C, s-1} = A_\Gamma(q_C) \left( W_{\Gamma B \text{X}}^{1, s} - W_{\Gamma B \text{X}}^{1, s-1} \right) + B_\Gamma, \quad (4.77)$$

где

$$A_{\Gamma}(q) = \left( \frac{\partial \Phi_{\Gamma}}{\partial W_{\Gamma BX}} \right)^{q_C, s-1} \left( \frac{\partial \Phi_{\Gamma}}{\partial W_{\Gamma BX}} \right)^{q_C-1, s-1} \times \dots \times \left( \frac{\partial \Phi_{\Gamma}}{\partial W_{\Gamma BX}} \right)^{q_C-q+1, s-1},$$

$$B_{\Gamma} = \sum_{q=1}^{q_C} A_{\Gamma}(q_C - q) \left[ (\Phi_{\Gamma} - W_{\Gamma B \text{BYX}})^{q, s-1} + (n^{q, s} - n^{q, s-1}) \left( \frac{\partial \Phi_{\Gamma}}{\partial n} \right)^{q, s-1} \right]$$

При  $q = 0$  матрица  $A_{\Gamma}(q)$  – единичная.

С помощью уравнения (4.77) легко установить связь между параметрами газового потока на входе и выходе блока ГПА в целом. Для этого достаточно разделить на  $q_{\Gamma}$  элементы первого столбца матрицы  $A_{\Gamma}(q_C)$ , а затем умножить на  $q_{\Gamma}$  первую строку равенства (4.77).

Воспользуемся соотношениями (4.73) – (4.74), (4.77) и установим связь между параметрами газового потока на входе и выходе цеха

$$W_{\text{Ц B \text{BYX}}}^S - W_{\text{Ц B \text{BYX}}}^{S-1} = A_{\text{Ц}} \left( W_{\text{Ц BX}}^S - W_{\text{Ц BX}}^{S-1} \right) + B_{\text{Ц}}, \quad (4.78)$$

где

$$A_{\text{Ц}} = \left( \frac{\partial \Phi_A}{\partial W_{ABX}} \right)^{s-1} A_{\Gamma}^*(q_C), \quad B_{\text{Ц}} = \left( \frac{\partial \Phi_A}{\partial W_{ABX}} \right)^{s-1} B_{\Gamma} + \Phi_A^{s-1} - W_{AB \text{BYX}}^{s-1}.$$

Матрица  $A_{\Gamma}^*(q_C)$  отличается от матрицы  $A_{\Gamma}(q_C)$  тем, что ее 2-й и 3-й элементы 1-го столбца в  $q_{\Gamma}$  раз меньше соответствующих элементов матрицы  $A_{\Gamma}(q_C)$ .

Решая уравнение (4.78) относительно неизвестных  $M_{\text{Ц B \text{BYX}}}^S = M_{\text{Ц BX}}^S$  и  $T_{\text{Ц B \text{BYX}}}^S$ , а также учитывая тождество

$$E^S = (MT)^S = (MT)^{s-1} + (M^S - M^{s-1})T^{s-1} + (T^S - T^{s-1})M^{s-1}, \quad (4.79)$$

можно установить, что

$$\begin{array}{|c|c|} \hline M_{Ц\ BX}^m \\ E_{Ц\ BX}^m \\ \hline M_{Ц\ БЫХ}^m \\ E_{Ц\ БЫХ}^m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{00}^m & Y_{0l}^m \\ \hline Y_{l0}^m & Y_{ll}^m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline P_{BX} \\ T_{BX} \\ \hline P_{БЫХ} \\ T_{БЫХ} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bar{I}_0^m \\ \hline \bar{I}_l^m \\ \hline \end{array}, \quad (4.80)$$

где номер итерации  $s$  опущен.

Из полученных уравнений цехов КС легко образовать искомое уравнение макроэлемента:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline M_{BX} \\ E_{BX} \\ \hline M_{БЫХ} \\ E_{БЫХ} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \sum_{m=1}^{q_{Ц}} Y_{00}^m & \sum_{m=1}^{q_{Ц}} Y_{0l}^m \\ \hline \sum_{m=1}^{q_{Ц}} Y_{l0}^m & \sum_{m=1}^{q_{Ц}} Y_{ll}^m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline P_{BX} \\ T_{BX} \\ \hline P_{БЫХ} \\ T_{БЫХ} \\ \hline \end{array} + \sum_{m=1}^{q_{Ц}} \begin{array}{|c|} \hline \bar{I}_0^m \\ \hline \bar{I}_l^m \\ \hline \end{array} \quad (4.81)$$

или

$$\begin{array}{|c|} \hline \bar{i}_{BX} \\ \hline \bar{i}_{БЫХ} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{00} & Y_{0l} \\ \hline Y_{l0} & Y_{ll} \\ \hline \end{array}^{q_{Ц}} \begin{array}{|c|} \hline \bar{u}_{BX} \\ \hline \bar{u}_{БЫХ} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bar{I}_0 \\ \hline \bar{I}_l \\ \hline \end{array}^{q_{Ц}}. \quad (4.82)$$

Уравнение (4.82) в области изображений для  $k_m = 2$  принимает искомую операторную форму

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bar{i}_{BX}(\tau_m) \\ \bar{i}_{BX}(\tau_m - H_t) \\ \hline \bar{i}_{БЫХ}(\tau_m) \\ \bar{i}_{БЫХ}(\tau_m - H_t) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{00} & Y_{0l} \\ \hline Y_{l0} & Y_{ll} \\ \hline \end{array}^{q_{Ц}} \begin{array}{|c|} \hline \bar{u}_{BX}(\tau_m) \\ \bar{u}_{BX}(\tau_m - H_t) \\ \hline \bar{u}_{БЫХ}(\tau_m) \\ \bar{u}_{БЫХ}(\tau_m - H_t) \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bar{I}_0 \\ \hline \bar{I}_l \\ \hline \end{array}^{q_{Ц}}. \quad (4.83)$$

Сопоставляя уравнения (4.68) и (4.83), можем видеть, что нелинейные системы уравнений в частных производных вида (4.59) и алгебраических уравнений вида (4.72) преобразованы в единую форму, что позволяет объединить их в балансовую систему уравнений в соответствии с топологической структурой энергетической цепи. Такое объединение операторных уравнений (4.68) и (4.82) аналогично объединению уравнений

элементов электрической цепи с распределенными параметрами, рассмотренных в разделе 4.5.

Таким образом, законы сохранения в узлах энергетической цепи реализуются в системе линейных алгебраических уравнений вида

$$Y\vec{U} = \vec{I}, \quad (4.84)$$

где  $Y$  – блочная структурно-симметричная матрица, образованная из матричных проводимостей элементов цепи, т.е. из матриц  $Y_{00}$ ,  $Y_{0l}$ ,  $Y_{l0}$ ,  $Y_{ll}$ , входящих в операторные уравнения (4.68) и (4.83);  $\vec{U}$  – блочный вектор изображений параллельных узловых переменных, которые являются искомыми во всех узлах цепи, за исключением граничных узлов  $j \in G_U$ , где они могут быть заданы векторами  $\vec{U}_{ГРj}$  ( $G_U$  – множество номеров для таких узлов);  $\vec{I}$  – блочный вектор изображений последовательных переменных, образованный из векторов  $\vec{I}_0$  и  $\vec{I}_l$ , входящих в операторные уравнения элементов цепи, а также из изображений  $\vec{I}_{ГРj}$  функций  $I_{ГРj}(t)$ , характеризующих последовательные переменные в  $j$ -м граничном узле ( $j \in G_I$ ,  $G_I$  – множество номеров для таких узлов).

В качестве примера на рис. 4.12 приведен фрагмент двухниточного магистрального газопровода. Здесь в узле 1 задан вектор  $U_{ГР1}(t)$ , характеризующий термодинамический потенциал источника газа, а в узлах 9 и 12 заданы векторы  $I_{ГР9}(t)$  и  $I_{ГР12}(t)$ , характеризующие потоки масс газа у его потребителей. Структурные особенности матрицы  $Y$  отражены на рис. 4.13, где ненулевые блочные элементы отмечены символом  $\times$ . Для эффективного решения системы уравнений вида (4.84) в работе [272] предложен метод блочной  $LU$ -факторизации, который реализует основные формулы обычного метода  $LU$ -факторизации и при этом учитывает блочность элементов матрицы  $Y$ .

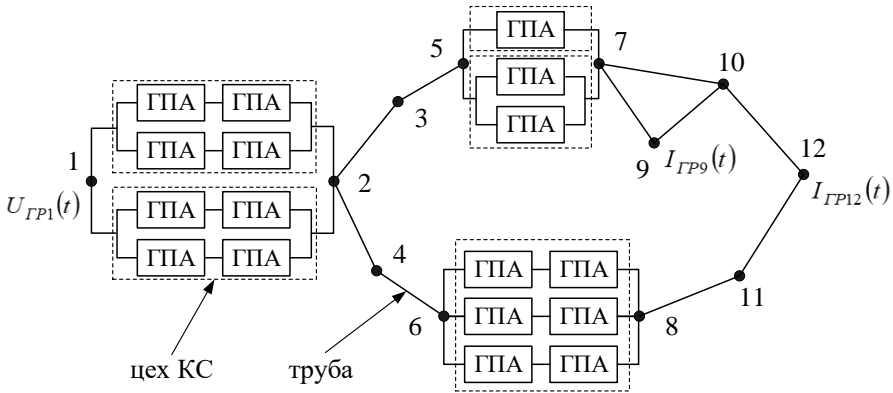


Рис. 4.12. Пример энергетической цепи - фрагмент двухниточного магистрального газопровода.

×	×										
×	×	×	×								
	×	×		×							
	×		×		×						
		×		×		×					
			×		×		×				
				×		×		×	×		
					×		×			×	
						×		×	×		×
							×			×	×
									×	×	×

Рис. 4.13. Топология матрицы проводимостей энергетической цепи, представленной на рис. 4.12

## **4.8. Моделирование режимов работы магистрального газопровода**

Численные операторные методы на основе преобразований Ньютона обеспечивают высокую аппроксимационную точность при алгебраизации уравнений нестационарного течения газа в трубах и позволяют путем представления уравнений разнородных элементов газотранспортной сети в единой операторной форме объединить их в систему балансовых уравнений. В процессе преобразования дискретных уравнений газовой динамики к операторному виду исключаются «внутренние» неизвестные и снижается на порядок размерность решаемой системы балансовых уравнений. В результате достигается необходимое быстродействие программных средств, ориентированных на решение задач контроля и управления режимом транспорта газа. Решение таких задач осуществляется в текущем времени, а сами задачи оказываются значительно сложнее задачи решения большой размерности системы нелинейных алгебраических уравнений и уравнений в частных производных, объединенных балансовыми соотношениями на границах, при известных начальных условиях.

Сложность задачи контроля режимами газотранспортной системы (ГТС) обусловлена недостаточностью исходных данных для ее точного решения. Действительно, трудно представить себе такую ситуацию, когда в некоторый момент времени, т.е. в начальный момент, можно было бы измерить параметры газового потока во всех точках газопровода протяженностью несколько тысяч километров. Кроме того, измерения граничных параметров сопровождаются погрешностями. Поэтому, в задаче

контроля режима ГТС требуется не только оценить параметры газового потока во всех «внутренних» точках пространства, но и произвести оценку граничных параметров.

В задаче управления требуется в ускоренном масштабе времени найти граничные условия, при которых достигается рациональный режим функционирования ГТС. Этот режим определяется тремя составляющими: максимальными давлениями в трубопроводах, максимальным удовлетворением потребителей в плановых объемах поставок газа и максимальным запасом газа в трубах. Рациональный режим функционирования ГТС необходимо найти при определенных технологических ограничениях на параметры газового потока и при различных внешних воздействиях – аварийных отключениях и подключении различного оборудования, например, труб, линейных участков, компрессорных станций, отдельных ГПА.

Рассмотрим математическую постановку задачи контроля режима ГТС. Для этого введем обозначения измеренных давлений и температур газа на входах и выходах КС, соответственно,  $P_{*v}(\tau)$ ,  $P_{*j}(\tau)$  и  $T_{*v}(\tau)$ ,  $T_{*j}(\tau)$ , где  $\tau$  – момент измерения,  $v \in G_{BX}^{KC}$ ,  $j \in G_{ВЫХ}^{KC}$ . Здесь  $G_{BX}^{KC}$  и  $G_{ВЫХ}^{KC}$  – множества номеров узлов входа и выхода КС на расчетной схеме ГТС. Обозначим измеренные значения массового расхода временной последовательностью  $M_{*\mu}(\tau)$ , давления –  $P_{*\mu}(\tau)$ , температуры –  $T_{*\mu}(\tau)$ , которые известны в граничном узле с номером  $\mu \in G^{ГР}$ . Здесь  $G^{ГР}$  – множество номеров граничных узлов на расчетной схеме.

В задаче контроля требуется, чтобы

$$\sum_{\tau=\tau_{m-1}}^{\tau_m} \left\{ \sum_{v \in G_{BX}^{KC} \cup G_{BIX}^{KC} \cup G^{GP}} \left[ a_P \left( \frac{P_v(\tau) - P_{*v}(\tau)}{P_H} \right)^2 + a_T \left( \frac{T_v(\tau) - T_{*v}(\tau)}{T_H} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \sum_{v \in G^{GP}} \left[ a_E \left( \frac{M_v(\tau)T_v(\tau) - M_{*v}(\tau)T_{*v}(\tau)}{M_H T_H} \right)^2 + \left( \frac{M_v(\tau) - M_{*v}(\tau)}{M_H} \right)^2 \right] \right\} \rightarrow \\ \xrightarrow{\{M_v(\tau) | v \in G^{GP}\}, \{P_v(\tau), T_v(\tau) | v \in G_{BX}^{KC} \cup G_{BIX}^{KC} \cup G^{GP}\}} \min \quad (4.85)$$

при условиях взаимосвязи моделируемых значений граничных условий  $P_v(\tau)$ ,  $T_v(\tau)$ ,  $M_v(\tau)$  в соответствующих уравнениях газовой динамики (1.46) или (4.59), уравнениях адиабатического сжатия газа (1.36) или (4.69), уравнениях теплообмена (4.70), объединенных балансовыми соотношениями (1.65) – (1.66). В выражении (4.85) коэффициенты  $a_P$ ,  $a_T$ ,  $a_E$  и параметры  $P_H$ ,  $T_H$ ,  $M_H$ ,  $E_H$  определены также, как в выражении (4.67).

Сложность математической постановки задачи контроля режима ГТС усугубляется еще и тем, что начальные условия для уравнений в частных производных априори неизвестны. Кроме того, граничные функции сопряжены с измеренными значениями в дискретные моменты времени  $\tau$ , что свидетельствует о некорректности задачи.

Ее решение в значительной степени упрощается при использовании системы балансовых уравнений ГТС в операторном виде (4.84). В этом случае вопрос о некорректности задачи не возникает.

Действительно, преобразование системы уравнений (4.84) в систему уравнений вида

$$(K^{ME}Y)^T (K^{ME}Y\vec{U} - K^{ME}\vec{I}) = 0 \quad (4.86)$$

или

$$A\vec{U} = B \quad (4.87)$$



и последующее преобразование блочных диагональных элементов

$diag\{A_{\mu\mu} | \mu = \overline{1, \mu_0}\}$  матрицы

$$A = (K^{ME}Y)^T (K^{ME}Y) \quad (4.88)$$

в блочные элементы

$$diag\{A_{\mu\mu} + K_{\mu\mu}^{PT} | \mu = \overline{1, \mu_0}\}, \quad (4.89)$$

а блочных элементов  $\{B_{\mu} | \mu = \overline{1, \mu_0}\}$  вектора

$$B = (K^{ME}Y)^T K^{ME}\bar{I} \quad (4.90)$$

в блочные элементы

$$\left\{ B_{\mu} + \begin{bmatrix} \frac{a_P}{P_H^2} P_{*\mu} & \frac{a_T}{T_H^2} T_{*\mu} \end{bmatrix}^T \middle| \mu = \overline{1, \mu_0} \right\}, \quad (4.91)$$

обеспечивает переход от задачи минимизации функционала (4.85) к задаче поитерационного формирования и решения систем линейных алгебраических уравнений вида  $\tilde{A}\tilde{U} = \tilde{B}$  на полуинтервалах  $(\tau_{m-1}, \tau_m]$ . Итерации выполняются с целью решения нелинейных систем алгебраизованных уравнений газовой динамики, уравнений ГПА, АВО и балансовых уравнений.

В приведенных выше соотношениях (4.86), (4.88), (4.89), (4.90) диагональные матрицы  $K^{ME}$  и  $K^{PT}$  определяются элементами

$$diag\{K_{\mu\mu}^{ME} | \mu = \overline{1, \mu_0}\} = diag\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{M_H} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{a_E}}{E_H} \end{bmatrix} \middle| \mu = \overline{1, \mu_0} \right\}, \quad (4.92)$$

$$diag\{K_{\mu\mu}^{PT} | \mu = \overline{1, \mu_0}\} = diag\left\{ \begin{bmatrix} \frac{a_P}{P_H^2} P_{*\mu} & 0 \\ 0 & \frac{a_T}{T_H^2} T_{*\mu} \end{bmatrix} \middle| \mu = \overline{1, \mu_0} \right\}, \quad (4.93)$$

а  $\mu_0$  – общее число узлов на расчетной схеме ГТС.

В минимизируемом функционале (4.85) параметр  $H_t = \tau_m - \tau_{m-1}$  определяет ширину временного «окна», в пределах которого осуществляется решение задачи контроля. Очевидно, что временное «окно» перемещается вдоль координаты  $t$ . Выбор ширины «окна» равной  $H_t \geq H_{ПП}$  – время переходного процесса в трубах линейного участка ГТС, позволяет ослабить влияние неизвестного начального условия  $W(x,0)$ , т.е. в задании функции  $W(x,0)$  допускается некоторый произвол, который устраняется путем дополнительных гипотез. Например, это может быть гипотеза о стационарности режима в момент времени  $t=0$ . С течением времени ошибки, вызванные этими гипотезами, оказываются пренебрежимо малыми.

Такой подход был положен в основу разработки комплекса программ моделирования ГТС. Для иллюстрации его возможностей на рис. 4.14 приведена расчетная схема действующей ГТС с указанием множеств граничных узлов и узлов входа-выхода КС. Исходные данные по трубопроводам приведены в таблице 4.1. Для всех трубопроводов полагаем  $T_n = 4,0^\circ\text{C}$  и  $dh/dx = 0,0$ .

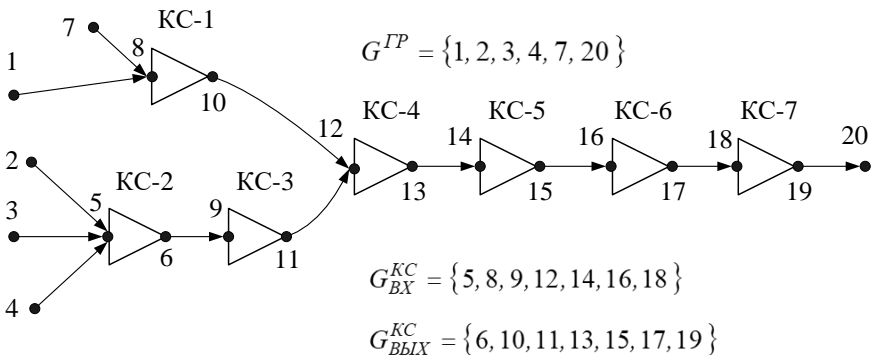


Рис. 4.14. Расчетная схема газотранспортной системы.

Таблица 4.1.

## Значения параметров труб газотранспортной системы

Номер узла входа	Номер узла выхода	Длина трубы (м)	Диаметр трубы (м)	Коэффициент гидравлического сопротивления	Коэффициент теплопередачи (ккал/ч–м <sup>2</sup> – °С)
1	8	182866	3,703	0,031241	4,193
2	5	7899	1,398	0,014104	1,598
3	5	7899	1,398	0,014104	1,598
4	5	7899	1,398	0,014104	1,598
7	8	113000	1,979	0,016708	2,262
6	9	107500	2,418	0,019079	2,768
10	12	123299	3,428	0,024561	3,918
11	12	84000	2,418	0,019079	2,768
13	14	99000	4,019	0,028297	4,524
15	16	85000	3,958	0,028383	4,528
17	18	88000	3,978	0,028354	4,528
19	20	93000	3,978	0,028354	4,528

Измеренные данные и их оценочные значения, полученные в процессе решения задачи контроля, приведены в таблице 4.2.

В результате решения задачи контроля удалось установить узлы, в которых измеренные значения давлений и температур противоречат условиям течения газа в трубах от входа к выходу:  $P_{BX} > P_{ВЫХ}$ ,  $T_{BX} > T_{ВЫХ}$ . Такие измеренные данные отмечены в таблице 4.2 символом \*.

Математическая постановка задачи управления режимом ГТС отличается от изложенной выше математической постановки задачи контроля тем, что минимизируемый функционал вида (4.85) заменяется функционалом вида

$$\frac{1}{H_t} \sum_{\tau=\tau_{m-1}}^{\tau_m} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{v \in G_{BBIX}^{KC}} a_v^{KC} P_v(\tau) - \sum_{v \in G_{BX}^{JY} \cup G_{BBIX}^{JY}} a_v^{JY} P_v(\tau) - \\ & - \sum_{v \in G^{GP}} a_v^{GP} [M_v(\tau) - M_v^{ПЛАИ}(\tau)]^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \max, \quad (4.94)$$

$$\{P_v(\tau) | v \in G_{BBIX}^{KC}\}, \{M_v(\tau) | v \in G^{GP}\}$$

где  $G_{BX}^{JY}$  и  $G_{BBIX}^{JY}$  – множества номеров узлов входа и выхода линейных участков (трубопроводных участков между КС);  $a_v^{KC}$ ,  $a_v^{JY}$ ,  $a_v^{GP}$  – весовые коэффициенты, уравнивающие три основные составляющие функционала – давления на выходах КС, давления в линейных участках, отклонения от плановых заданий массовых расходов в граничных узлах ГТС.

Учитывая ограничения  $P_{vmin} \leq P_v(\tau) \leq P_{vmax}$ , где значения  $P_{vmin}$  и  $P_{vmax}$  заданы, функционал вида (4.94) можно представить в квадратичной форме

$$\frac{1}{H_t} \sum_{\tau=\tau_{m-1}}^{\tau_m} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{v \in G_{BBIX}^{KC}} a_v^{KC} [P_v(\tau) - P_{vmax}]^2 - \sum_{v \in G_{BX}^{JY} \cup G_{BBIX}^{JY}} a_v^{JY} [P_v(\tau) - P_{vmax}]^2 - \\ & - \sum_{v \in G^{GP}} a_v^{GP} [M_v(\tau) - M_v^{ПЛАИ}(\tau)]^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \max, \quad (4.95)$$

$$\{P_v(\tau) | v \in G_{BBIX}^{KC}\}, \{M_v(\tau) | v \in G^{GP}\}$$

Тогда алгоритмы решения задач контроля и управления становятся однотипными. Отличие состоит лишь в необходимости строгого выполнения равенств  $P_v(\tau) = P_{vmax}$  или  $P_v(\tau) = P_{vmin}$  в тех узлах  $v$ , в которых при минимизации функционала (4.95) оказываются  $P_v(\tau) > P_{vmax}$  или  $P_v(\tau) < P_{vmin}$ . Такие узлы исключаются из рассмотрения, а минимизация осуществляется с учетом оставшихся узловых параметров.

Таким образом, численные операторные методы существенно упрощают решения задач моделирования ГТС. Программные средства,

созданные на их основе, имеют высокое быстродействие и удовлетворяют жестким требованиям диспетчерских служб оперативного управления технологическим процессом транспорта газа.

Таблица 4.2.

*Измеренные значения параметров газового потока в системе*

Номер узла	Узловое давление, атм		Узловая температура, °С		Расход (потребление) газа, млн.м <sup>3</sup> /сут	
	измеренное	расчетное	измеренная	расчетная	измеренный	расчетный
1	68,77	68,98	7,0	5,93	432,48	432,583
2	62,58	67,15	11,0	13,84	92,591	87,697
3	61,04	68,54	7,0	9,73	106,488	98,618
4	62,00	67,29	8,0	10,90	96,119	90,464
5	62,86	48,69	7,0	6,99		
6	74,58	72,83	12,0	11,03		
7	55,27	56,81	14,0	13,67	74,890	73,845
8	52,86	52,79	1,0	1,0		
9	52,77	56,39	5,0	5,0		
10	69,67	72,08	16,0	16,41		
11	71,17	68,57	5,0	5,83		
12	54,08	56,38	10,75	10,74		
13	71,27	71,48	18,08	14,56		
14	55,49	56,76	15,0	14,99		
15	73,08	72,35	17,50	12,20		
16	58,27	59,69	13,08	13,08		
17	72,49	72,32	27,09	21,33		
18	58,36	59,43	15,25	15,25		
19	74,36	73,11	21,86	20,63		
20	58,67	59,99	17,0	14,26	670,0	671,921

## 4.9. Расчет стационарных процессов в тепловых цепях

До сих пор мы рассматривали энергетические цепи с распределенными параметрами, элементы которых описываются одномерными по пространству уравнениями в частных производных. Алгебраизация таких уравнений осуществляется путем их покоординатного преобразования в область изображений. Распространим этот подход на энергетические цепи, элементы которых описываются многомерными уравнениями. Однако здесь для преобразования уравнений по пространственным координатам используются многомерные преобразования Ньютона.

Покажем особенности применения этих преобразований на примере решения задачи стационарного режима теплового взаимодействия потоков в пластинчатом теплообменнике. Схема теплообменника приведена на рис. 1.6, б.

Уравнения (1.57), описывающие процессы взаимодействия в пределах одной пластины, запишем в линейном приближении стационарного режима

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial x} = a_1(T_2 - T_1), & \frac{\partial T_2}{\partial x} = q_1, & \frac{\partial T_2}{\partial y} = q_2, \\ \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = a_2(T_2 - T_1) + a_3(T_2 - T_3), \\ \frac{\partial T_3}{\partial y} = a_4(T_2 - T_3), \end{cases} \quad (4.96)$$

где  $T_1 = T_1(x, y)$  – температура холодного потока,  $T_2 = T_2(x, y)$  – температура пластины,  $T_3 = T_3(x, y)$  – температура горячего потока. Коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\alpha_1}{v_1 C p_1 \rho_1} \frac{\text{Пр}_1}{\Pi_1}, & a_2 &= \frac{\alpha_1}{\lambda_2} \frac{\text{Пр}_1}{\Pi_2}, \\ a_4 &= \frac{\alpha_3}{v_3 C p_3 \rho_3} \frac{\text{Пр}_3}{\Pi_3}, & a_3 &= \frac{\alpha_3}{\lambda_2} \frac{\text{Пр}_3}{\Pi_2}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Здесь  $\rho_2$ ,  $Cp$ ,  $\lambda_2$ ,  $\Pi_2$  – удельный вес, теплоемкость, теплопроводность, площадь пластины соответственно;  $v_1$ ,  $Cp_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\Pi_1$ ,  $\text{Пр}_1$  – скорость, теплоемкость, плотность вещества, коэффициент теплоотдачи, площадь поперечного сечения, периметр холодного потока;  $v_3$ ,  $Cp_3$ ,  $\rho_3$ ,  $\alpha_3$ ,  $\Pi_3$ ,  $\text{Пр}_3$  – то же для горячего потока.

Для системы уравнений (4.96) заданы граничные условия вида

$$\left\{ \begin{aligned} q_1^v(0, y) = q_1^v(l_x, y) = q_2^v(x, 0) = q_2^v(x, l_y) = 0 \Big|_{v=1,3} \\ T_1^1(0, y) = u_{XB}(y), \quad T_3^1(x, 0) = u_{GB}(x), \\ T_1^2(0, y) = T_1^1(l_x, y), \quad T_3^2(x, 0) = T_3^1(l_x - x, l_y), \\ T_1^3(0, y) = T_1^2(l_x, y), \quad T_3^3(x, 0) = T_3^2(l_x - x, l_y), \end{aligned} \right. \quad (4.98)$$

где верхние индексы указывают на принадлежность параметров соответствующей пластине. Функции  $u_{XB}(y)$  и  $u_{GB}(x)$  задают профили температурных полей холодного и горячего потоков на входе теплообменника. Определим температурные профили  $u_{XBY}(y)$  и  $u_{GBY}(x)$  на его выходе для случая, когда

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1^v = 350 + 2100\sqrt{v_1}, \quad v_1^v = 0,25, \quad q_1 = 1020, \quad Cp_1^v = 4190, \\ \lambda_2^v = 209, \quad \Pi_1^v = 0,018, \quad \Pi_2^v = 0,018, \quad \text{Пр}_1^v = 0,38, \quad \text{Пр}_3^v = 0,22, \\ \Pi_3^v = 0,001, \quad \alpha_3^v = 5,6 + 4v_3, \quad Cp_3^v = 1008, \quad q_3^v = 1,29, \quad v_3^v = 10 \end{aligned} \right\}_{v=1,3}. \quad (4.99)$$

Значения параметров приведены в системе единиц СИ. Кроме того, пусть

$$u_{XB}(y) = 5,0 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad u_{GB}(x) = 160 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (4.100)$$

Все пластины прямоугольные и имеют размеры  $l_x = 0,1\text{ м}$ ,  $l_y = 0,18\text{ м}$ .

Для решения поставленной задачи получим операторное уравнений  $\nu$ -й пластины, связывающее профили температур  $T_1$  и  $T_3$  на ее входе и выходе. Разделим двумерную прямоугольную область пластины на симплексные области так, как это показано на рис. 4.15, где  $(m)$  – номер симплекса

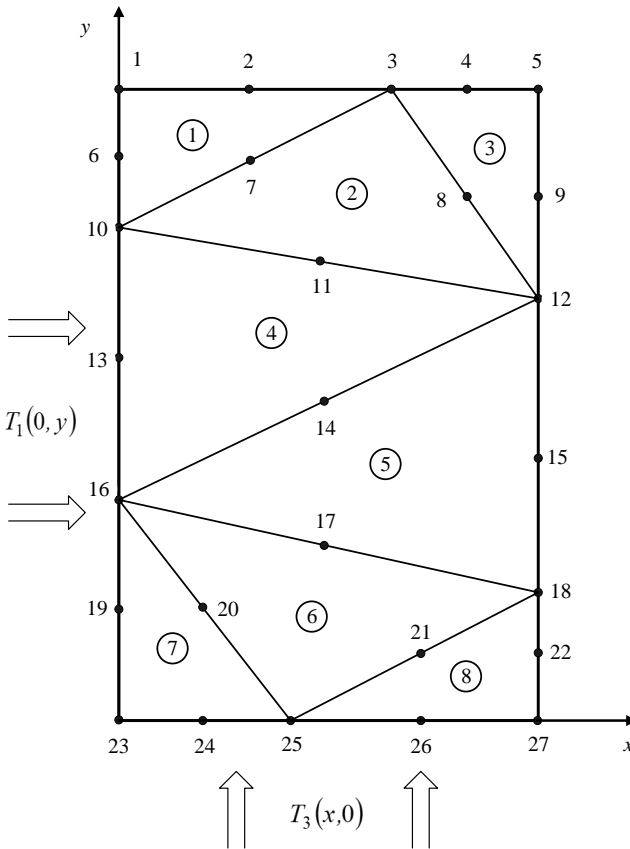


Рис. 4.15. Представление прямоугольной пластины набором из 8-ми симплексных областей.



Для алгебраизации системы уравнений в частных производных вида (4.96) воспользуемся двумерными преобразованиями Ньютона второго порядка. Тогда симплексы будут определяться не только своими вершинами  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , но и коэффициентами внутренних узлов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Таким образом, каждый симплекс имеет шесть узлов. Номера узлов симплексов и их координаты приведены в таблицах 4.3 и 4.4, соответственно.

В пределах симплексной области изображение двумерной функции  $f(x, y)$  определяется вектором

$$\vec{f}^S = \left[ f(x_1, y_1) \mid f(x_a, y_a) \mid f(x_2, y_2) \mid f(x_c, y_c) \mid f(x_b, y_b) \mid f(x_3, y_3) \right]^T,$$

где  $(x_a, y_a)$ ,  $(x_b, y_b)$ ,  $(x_c, y_c)$  – координаты внутренних узлов симплекса  $S$ ,  $S$  – его номер.

Таблица 4.3.

Номера узлов симплексных областей

Номер симплекса	Координаты узлов симплекса (обозначения)					
	$(x_1, y_1)$	$(x_a, y_a)$	$(x_2, y_2)$	$(x_c, y_c)$	$(x_b, y_b)$	$(x_3, y_3)$
	номера узлов в расчетной области					
	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
1	1	2	3	6	7	10
2	10	11	12	7	8	3
3	3	4	5	8	9	12
4	10	11	12	13	14	16
5	16	17	18	14	15	12
6	16	17	18	20	21	25
7	23	24	25	19	20	16
8	25	26	27	21	22	18

Таблица 4.4.

## Координаты узлов симплексных областей

Номер узла	Координаты узла (м)		Номер узла	Координаты узла (м)	
	x	y		x	y
1	0,0	0,18	14	0,05	0,09
2	0,032	0,18	15	0,1	0,08
3	0,064	0,18	16	0,0	0,06
4	0,082	0,18	17	0,05	0,05
5	0,1	0,18	18	0,1	0,04
6	0,0	0,162	19	0,0	0,03
7	0,032	0,162	20	0,016	0,03
8	0,082	0,15	21	0,066	0,02
9	0,1	0,15	22	0,1	0,02
10	0,0	0,144	23	0,0	0,0
11	0,05	0,132	24	0,016	0,0
12	0,1	0,12	25	0,032	0,0
13	0,0	0,102	26	0,066	0,0
			27	0,1	0,0

Обращаясь к соотношениям (3.124), (3.128), (3.144), построим операторы дифференцирования  $D_x^S$  и  $D_y^S$ , действующие на изображения  $\bar{f}^S$  и преобразующие их в изображения  $\bar{f}_x^S$  и  $\bar{f}_y^S$ , соответственно ( $f_x = \partial f / \partial x$ ,  $f_y = \partial f / \partial y$ ):

$$\begin{matrix} D_x^S \\ D_y^S \end{matrix} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_1 - x_3)} \begin{matrix} y_1 - y_3 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & x_1 - x_2 \end{matrix} \begin{matrix} D_{I1} \\ D_{I2} \end{matrix}, \quad (4.101)$$

$$D_{l1} = D_{l1}(2,2) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_{l2} = E_*(2,2) D_{l1} E_*(2,2),$$

$$E_*(2,2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Операторы дифференцирования  $D_x$  и  $D_y$ , действующие в прямоугольной области  $(0, l_x) \times (0, l_y)$  пространства  $(0, x, y)$ , образуются из операторов  $D_x^S$  и  $D_y^S$  путем их объединения в соответствии с условием непрерывности функций и производных в граничных узлах симплексов. Поэтому вычисляются средние арифметические значения производных в этих узлах.

Очевидно матрицы  $D_x$  и  $D_y$  размерности  $(27 \times 27)$  действует на вектор  $\vec{f} = \{f(x_\mu, y_\mu) | \mu = \overline{1, 27}\}$  и преобразуют его в векторы  $\vec{f}_x = \{f_x(x_\mu, y_\mu) | \mu = \overline{1, 27}\}$  и  $\vec{f}_y = \{f_y(x_\mu, y_\mu) | \mu = \overline{1, 27}\}$ , где  $(x_\mu, y_\mu)$  – координаты узла  $\mu$  в области  $(0, l_x) \times (0, l_y)$ . Обратимся теперь к уравнению (4.96).

Используя матричные операторы  $D_x$  и  $D_y$ , преобразуем его в область изображений

$$\begin{vmatrix} D_x + a_1 E & -a_1 E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_x & -E & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 & -E & 0 \\ a_2 E & (-a_2 - a_3) E & D_x & D_y & a_3 E \\ 0 & -a_4 E & 0 & 0 & D_y + a_4 E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{T}_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.102)$$

где  $E$  – единичная матрица размерности  $(27 \times 27)$ .

Привлечкая граничные условия (4.98), дополним систему алгебраических уравнений (4.102) уравнениями вида

$$\begin{aligned} \bar{q}_{10} &= \bar{q}_{1x} = \bar{q}_{20} = \bar{q}_{2y} = 0, \\ \bar{T}_{10} &= \bar{u}_{X BX}, \\ \bar{T}_{1x} &= \bar{u}_{X BLY}, \\ \bar{T}_{30} &= \bar{u}_{\Gamma BX}, \\ \bar{T}_{3y} &= \bar{u}_{\Gamma BLY}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Здесь векторы составлены из значений соответствующих параметров в граничных узлах пластины.

Граничные условия (4.103) можно учесть в системе уравнений (4.102). Для этого необходимо удалить в ней уравнения с номерами 1, 6, 10, 13, 16, 19, 23, 28, 32, 33, 36, 37, 39, 40, 42, 43, 45, 46, 49, 50, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 77, 78, 79, 80, 81, 131, 132, 133, 134, 135, а в матрице системы удалить столбцы с номерами 55, 59, 60, 63, 64, 66, 67, 69, 70, 72, 73, 76, 77, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 104, 105, 107, 108. Затем столбцы с номерами 1, 6, 10, 13, 16, 19, 23, вместе с соответствующими элементами вектора  $\bar{T}_1$  и столбцы с номерами 131, 132, 133, 134, 135 с соответствующими элементами вектора  $\bar{T}_3$  выносятся в правую часть системы уравнений (4.102). В результате таких преобразований получаем систему уравнений вида

$$A_1 \begin{vmatrix} \bar{T}_1^* \\ \bar{T}_2 \\ \bar{q}_1^* \\ \bar{q}_2^* \\ \bar{T}_3^* \end{vmatrix}^T = A_2 \bar{u}_{X BX} + A_3 \bar{u}_{\Gamma BX}, \quad (4.104)$$

где матрицы  $A_1, A_2, A_3$  имеют размерности соответственно  $(99 \times 99), (99 \times 7), (99 \times 5)$ . Векторы  $\bar{T}_1^*, \bar{q}_1^*, \bar{q}_2^*, \bar{T}_3^*$  отличаются от векторов  $\bar{T}_1, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{T}_3$  тем, что они не содержат элементов, входящих в векторы граничных условий  $\bar{q}_{10}, \bar{q}_{1x}, \bar{q}_{20}, \bar{q}_{2y}, \bar{T}_{10}, \bar{T}_{30}$ .

Решая систему уравнений (4.104), находим искомое операторное уравнение пластины, как элемента теплообменника:

$$\left[ \begin{array}{c|c} u_{X\text{ ВВЛХ}} & \\ \hline u_{Г\text{ ВВЛХ}} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} K_1 & K_2 \\ \hline K_3 & K_4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} u_{X\text{ ВХ}} & \\ \hline u_{Г\text{ ВХ}} & \end{array} \right], \quad (4.105)$$

где матрицы  $K_1, K_2, K_3, K_4$  определяются матрицами  $A_1, A_2, A_3$  и имеют размерности  $(7 \times 7), (7 \times 5), (5 \times 7), (5 \times 5)$ .

Учитывая связь между профилями температур на границах пластин вида (4.98), с помощью соотношения (4.105) легко определить функции  $T_1^1(l_x, y), T_3^1(x, l_y), T_1^2(l_x, y), T_3^2(x, l_y), T_3^3(x, l_y), T_1^3(l_x, y)$ .

Изложенный выше способ решения стационарной задачи в теплообменнике, изображенном на рис. 1.6, б, был имплементирован в программном приложении. Результаты решения задачи с исходными данными вида (4.99) – (4.100) отражены на рис. 4.16.

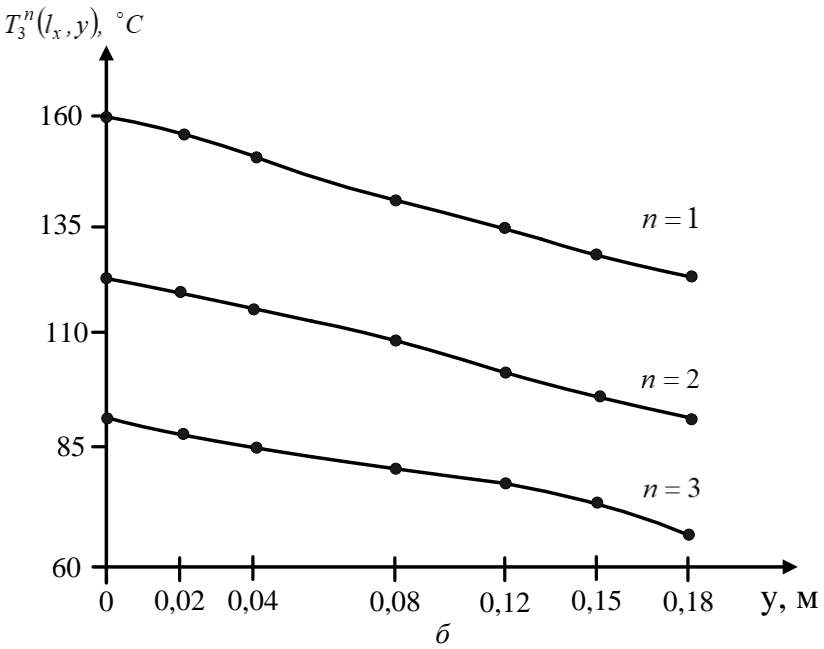
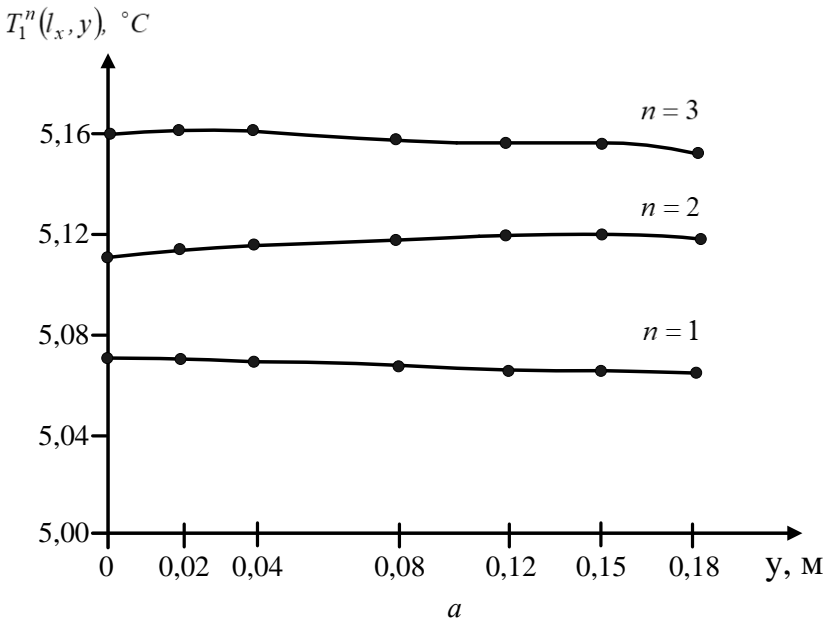


Рис. 4.16. Результаты решения стационарной задачи теплообмена.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии представлен подход к исследованию энергетических цепей, в которых реализуются процессы различной физической природы, неразрывно связанные между собой во времени и пространстве. Представленный подход базируется на энергетических аналогиях между физическими явлениями и на численных операторных методах, использующих преобразования Ньютона для алгебраизации дифференциальных уравнений элементов цепи.

Энергетические аналогии позволяет ввести в рассмотрение векторы обобщенных последовательных и параллельных переменных, относительно которых записываются уравнения элементов с сосредоточенными параметрами, а также формулируются законы сохранения в узлах цепи.

Преобразования Ньютона обеспечивают алгебраизацию линейных и нелинейных уравнений в обыкновенных и частных производных. При этом преобразуемые функции аппроксимируются кусочно-полиномиальными функциями, а инфинитезимальные операторы – соответствующими матричными операторами. После алгебраизации уравнения элементов энергетической цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами разрешаются относительно изображений обобщенных последовательных переменных. В результате возникает численная операторная форма уравнений элементов, в которой определяющими неизвестными являются изображения обобщенных параллельных переменных в узлах энергетической цепи. С помощью операторных уравнений элементов в соответствии с методом узловых параллельных переменных формируется система уравнений цепи в целом.

Такой подход к исследованию энергетических цепей является универсальным. Он использован при разработке пакетов программ

моделирования газотранспортных систем и теплообменных устройств. Высокая эффективность этих пакетов позволяет применять их при расчетах в темпе текущего и ускоренного времени, т.е. для решения задач оперативного диспетчерского управления сложными энергетическими объектами.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамович Г.Н., Крашенников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И.Л.* Турбулентное смешение газовых струй. М.: Наука, 1974, 272 с.
2. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969, 824 с.
3. *Абрашина И.Н., Подольцева А.Д., Чемерис В.Т.* Расчет кондукционного ускорения макротел при использовании емкостного накопителя энергии// Техническая электродинамика, 1986, № 2, с. 28–31.
4. *Абрахамс Дж., Каверли Дж.* Анализ электрических цепей методом графов. М.: Мир, 1967, 176 с.
5. *Агапкин В.М.* Трубопроводный транспорт мазута. М.: Недра, 1986, 140 с.
6. *Алалыкин Т.Б., Годунов С.К., Плинер Н.А.* Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1970, 112 с.
7. *Александров Н.Н.* О системном подходе в преподавании электротехнических дисциплин// Электричество, 1988, № 7, с. 72–73.
8. *Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т.1. М.: Мир, 1990, 384 с.; Т.2. М.: Мир, 1990, 392 с.
9. *Андерсон П., Фуад А.* Управление энергосистемами и устойчивость. М.: Энергия, 1980, 568 с.
10. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976, 312 с.
11. *Аркадьев Е.Д., Каплунов С.М., Шитова Л.И., Владимирова И.М.* Определение собственных частот и форм колебаний жидкого теплоносителя в замкнутом контуре// Теплоэнергетика, 1990, № 2, с. 63–66.
12. *Атабеков Г.И.* Линейные электрические цепи. М.: Энергия, 1978, 592 с.
13. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986, 744 с.
14. *Базуткин В.В., Дмоховская Л.Ф.* Расчеты переходных процессов и перенапряжений. М.: Энергоатомиздат, 1983, 328 с.

15. *Байбаков С.А., Зингер Н.М.* Прогнозирование эксплуатационных режимов работы систем теплоснабжения методом математического моделирования// Теплоэнергетика, 1989, № 6, с. 49–54.
16. *Бахарева И.Ф.* Нелинейная неравновесная термодинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976, 144 с.
17. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987, 600 с.
18. *Безуглый В.Ю., Беляев Н.М.* Численные методы теории конвективного теплообмена. Киев, Донецк: Выща шк., 1984, 176 с.
19. *Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимация Паде. М.: Мир, 1986, 502 с.
20. *Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клер Ч., мл.* Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989, 312 с.
21. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982, 392 с.
22. *Беляев Н.М.* Термодинамика. Киев: Выща шк., 1987, 344 с.
23. *Бердников В.В.* Матрично-топологический метод анализа некоторых нелинейных гидравлических цепей. В кн.: Механика машин. Вып. 43. М.: Наука, 1974, с. 24–30.
24. *Бердников В.В.* Топологические методы анализа машин с механическими и гидравлическими устройствами. В кн.: Пневматика и гидравлика. М.: Машиностроение, 1973, с. 7–16.
25. *Бердников В.В.* Прикладная теория гидравлических цепей. М.: Машиностроение, 1977, 192 с.
26. *Береговенко Г.Я.* Применение ступенчатых изображений к решению дифференциальных уравнений. Киев, 1981, 68 с. (Препринт/ АН УССР. Ин-т электродинамики; 250).
27. *Береговенко Г.Я., Пухов Г.Е.* Ступенчатые изображения и их применение. Киев: Наук. думка, 1983, 216 с.

28. *Береговенко Г.Я.* Использование операторных методов на основе ступенчатых изображений для расчета переходных режимов в электрических цепях с постоянными, переменными и нелинейными параметрами//Теоретическая электротехника, 1979, № 27, с. 43–52.
29. *Береговенко Г.Я., Саух С.Е.* Параметрическая схема преобразования ступенчатых изображений и многошаговые методы численного решения дифференциальных уравнений// Электрон. моделирование, 1987, № 5, с. 7–11.
30. *Береговенко Г.Я., Саух С.Е.* Численные схемы преобразования ступенчатых изображений функций двух переменных и их применение для решения уравнений нестационарного течения газа в трубах// Электрон. моделирование, 1986, № 3, с. 55–61.
31. *Береговенко Г.Я., Пухов Г.Е., Саух С.Е.* Численные операторные методы решения дифференциальных уравнений и анализа динамических систем. Киев: Наук. думка, 1993, 264 с.
32. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит., 1959, 464 с.
33. *Березина И.В., Ретинский В.С.* Оперативное управление системами газоснабжения. М.: Недра, 1985, 192 с.
34. *Берж К.* Теория графов и ее применение. М.: Изд-во иностр. лит., 1962, 320 с.
35. *Бержерон Л.* От гидравлического удара в трубах до разряда в электрической сети. М.: Машгиз, 1962, 348 с.
36. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники, М.: Высш. шк., 1973, 752 с.
37. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. М.: Высш. шк., 1986, 264 с.
38. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982, 336 с.

39. *Блажкевич Б.І.* Топологічні методи аналізу електричних кіл. Київ: Наук. думка, 1971, 316 с.
40. *Блейх Ф., Милан Е.* Уравнения в конечных разностях статики сооружений. Харьков: Гос. науч.-тех. изд-во Украины, 1936, 384 с.
41. *Болотовский Б.Н.* Читайте Хевисайда!//Максвелл и развитие физики XIX-XX веков. М.: Наука, 1985, с. 96–133.
42. *Бондаренко В.М.* Вопросы анализа нелинейных цепей. Киев: Наук. думка, 1967, 1600 с.
43. *Бор де К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985, 304 с.
44. *Борковский Б.А., Галузинский Г.П., Катков А.Ф., Романцов В.П.* Алгоритмические гибридные системы. Киев: Наук. думка, 1972, 116 с.
45. *Боуз А., Клементс К.А.* Оперативное моделирование электрических сетей энергосистем// ТИИЭР, 1987, № 12, с. 63–83.
46. *Бродянский В.М.* Эксергетический метод термодинамического анализа. М.: Энергия, 1973, 296 с.
47. *Брянских В.Е., Гельфер Л.Х., Годлевский В.С. и др.* Диалоговый программный комплекс моделирования нестационарных режимов газотранспортных систем. Киев, 1989, 48 с. (Препр./ АН УССР Ин-т проблем моделирования в энергетике; № 89–6).
48. *Брянских В.Е., Кулик М.Н., Пухов Г.Е.* Моделирование нестационарных режимов магистральных газопроводов методами повышенной точности // Электрон. моделирование, 1984, №3, с. 61–65.
49. *Брянских В.Е., Кулик М.Н., Услонцев А.М.* Моделирование динамических режимов транспорта газа при управлении Единой системой газоснабжения// Обзор. Информация. Серия: Транспорт и хранение газа. Вып. II. М.: ВНИИЭ газпром, 1987, 36 с.
50. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем. М.: Недра, 1978, 400 с.

51. *Бушуев В.В.* Динамические свойства электроэнергетических систем. М.: Энергоатомиздат, 1987, 120 с.
52. *Валеев К.Г.* Расщепление спектра матриц. Киев: Выща шк., 1986, 272 с.
53. *Ван-дер-Поль Б., Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. М.: Изд-во иностр. лит., 1952, 506 с.
54. *Васильев О.Ф., Воеводин А.Ф.* Газотермодинамический расчет магистральных и промысловых газопроводов и их систем с помощью ЭВМ// Численные методы механики сплошной среды, 1976, № 3, с. 30–44.
55. *Васильев О.Ф., Гладышев М.Т.* О расчете прерывных волн в открытых руслах// Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1966, № 6, с. 184–190.
56. *Вейник В.А.* Техническая термодинамика и основы теплопередачи. М.: Металлургия, 1965, 376 с.
57. *Вейц В.Л.* Динамика машинных агрегатов. Л.: Машиностроение, 1969, 368 с.
58. *Веников В.А.* Пути применения теории подобия физического моделирования к исследованию электрических систем. Дис. ... д-ра техн. наук. М.: МЭИ, 1952. Т.1, 331 с.; Т.2, с. 334–552; Т.3, 194 с.
59. *Веников В.А., Суханов В.А.* Кибернетические модели энергетических систем. М.: Энергоатомиздат, 1982, 328 с.
60. *Веников В.А.* Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики). М.: Высш. шк., 1976, 480 с.
61. *Вишне夫斯基 К.П.* Переходные процессы в напорных системах водоподачи. М.: Агропромиздат, 1986, 136 с.
62. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976, 280 с.

63. *Воеводин А.Ф.* Численные методы расчета неустановившихся режимов гидравлических систем. Авт. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986, 36 с.
64. *Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.* Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск: Наука, 1981, 208 с.
65. *Вукович Л.К., Никульшин В.Р.* Эксерго-топологическое моделирование сложных систем теплообменников// Промышленная теплотехника, 1980, № 2, с. 52–60.
66. *Вульман Ф.А., Корягин А.В., Кривошей М.З.* Математическое моделирование тепловых схем паротурбинных установок на ЭВМ. М.: Машиностроение, 1985, 112 с.
67. *Вышков Ю.Д., Жемагазин Б.А.* Метод термодинамических функций в электромеханике// Электричество, 1987, № 6, с. 58–60.
68. *Галин Н.М., Кириллов Л.П.* Тепломассообмен (в ядерной энергетике). М.: Энергоатомиздат, 1987, 376 с.
69. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988, 552 с.
70. *Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж.Л.* Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961, 552 с.
71. *Гармаш В.Б., Шериков В.В.* Моделирование нестационарного движения газа по сложной сети газопроводов// Автоматизация, телемеханизация и связь в газовой промышленности. М.: ВНИИЭгазпром, 1980, вып. 2, с.18–25.
72. *Гершигорин А.Е.* Стабилизация режимов работы трубопроводов. Киев, 1988, 28 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; № 117).
73. *Гершигорин А.Е.* Организация вычислительных процессов в сети ЭВМ при оптимальном управлении режимами работы газопроводов. Авт. дис. ...

- канд. техн. наук. Киев: АН УССР, Ин-т проблем моделирования в энергетике, 1989, 12 с.
74. *Глебов И.А., Казовский Е.А., Остоумов Э.Е., Рубисов Г.В.* Скручивающие моменты на валу турбогенератора при отключении коротких замыканий// *Электричество*, 1978, № 2, с. 22–26.
75. *Гликман Б.Ф.* Математические модели пневмогидравлических систем. М.: Наука, 1986, 368 с.
76. *Гликман Б.Ф., Гурьев В.А.* Нестационарное неизотермическое течение сжимаемого газа в канале с путевым отбором// *Инж.-физ. журн.*, 1988, №4, с. 543–550.
77. *Гликман Б.Ф., Лосенков А.С.* Нестационарные процессы в сложных трактах с волнами энтропии// *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт*, 1988, №6, с. 127–136.
78. *Годлевский В.С., Заварин А.Н., Шевердина З.Н.* Способы повышения эффективности расчета газотранспортных систем с компрессорами// *Тез. Докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. «Моделирование-85. Теория, средства, применение»*, 31 марта - 4 апреля 1985 г. Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1985, ч. 4, с. 4–6.
79. *Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В.* Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971, 664 с.
80. *Горев А.А.* Переходные процессы синхронной машины. Л.: Наука, 1985, 502 с.
81. *Горев А.А.* Расчет длинных линий передачи электрической энергии// *Сб. Гидроэнергопроекта (Ленинград. отд.) Электротехн. вып.*, 1938, № 5, с. 3–15.
82. *Грачев В.В., Щербakov С.Г., Яковлев Е.И.* Динамики трубопроводных систем. М.: Наука, 1987, 438 с.
83. *Григоровский Е.П., Койда Н.У.* Автоматизация расчета многоконтурных сетевых систем. Киев: Вища шк., 1977, 192 с.

84. *Гриздуб Ю.Н.* Применение теории пассивных четырехполюсников к расчету распространения колебательного давления в разветвленных системах авиадвигателей// Автоматика и телемеханика, 1950, №12, с. 107–120.
85. *Гриценко А.И., Меренков А.П., Руденко Ю.Н.* О научно-методологическом и алгоритмическом обеспечении системных исследований Единой системы газоснабжения// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1985, №3, с. 115–121.
86. *Громов Б.Н.* Исследование неустановившихся гидравлических режимов тепловых сетей и разработка методики их расчета. Авт. дис. ... канд. техн. наук. М.: ВТИ, 1973, 25 с.
87. *Громов Б.Н., Сидлер В.Г.* Расчет нестационарных гидравлических режимов тепловых водяных сетей на ЭЦВМ // Теплоэнергетика, 1973, №3, с.65–69.
88. *Гупта К., Гарддж Р., Чадха Р.* Машинное проектирование СВЧ устройств. М.: Радио и связь, 1987, 432 с.
89. *Гусейнов Ф.Г., Рахманов Н.Р.* Оценка параметров и характеристик энергосистем. М.: Энергоатомиздат, 1988, 152 с.
90. *Гутенмахер Л.И.* Электрические модели. Киев: Техника, 1975, 176 с.
91. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988, 334 с.
92. *Демирчян К.С., Бутырин П.А.* Моделирование и машинный расчет электрических цепей. М.: Высш. шк., 1988, 336 с.
93. *Демирчян К.С., Ракитский Ю.В., Кизимович Ю.П., Цукерман И.А.* Расчет трехмерных электромагнитных полей методом скалярного магнитного потенциала: численные методы и программное обеспечение// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1988, №4, с. 158–165.
94. *Демирчян К.С., Чечурин В.Л.* Машинные расчеты электромагнитных полей. М.: Высш. шк., 1986, 240 с.



95. *Денисов Е.Е.* Решение задачи теплообмена методом температурных сетей//Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1982, № 4, с.70–78.
96. *Дзюбенко Б.В., Ашмантас Л.А., Богдановичюс А.Б., Сегаль М.Д.* Нестационарный теплообмен при уменьшении тепловой нагрузки в теплообменнике с витыми трубами// ИФЖ! 1988, № 4, с. 533–539.
97. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984, 334 с.
98. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974, 544 с.
99. *Дитман А.О., Селезнев К.И., Шерстюков В.А.* Аналоговые методы исследования течений в проточной части турбомашин. Л.: Энергоатомиздат, 1989, 168 с.
100. *Дружинский И.А.* Механические цепи. Л.: Машиностроение, 1977, 238 с.
101. *Дубинский А.В., Константинова И.М., Фридман В.Е.* Агрегированная модель группы газоперекачивающих агрегатов//Электрон. моделирование, 1985, № 3, с. 74–77.
102. *Дубовенко К.В.* Расчет характеристик сильноточного разряда в контуре с индуктивно-емкостным накопителем энергии//Техн. электроника, 1988, № 6, с. 51–56.
103. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983, 200 с.
104. *Дэнис Дж., мл., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988, 440 с.
105. *Ефимов А.В.* Математический анализ: Ч.1 М.: Высш. шк., 1980, 280 с.
106. *Евдокимов А.Г., Дубровский В.В., Тевяшев А.Д.* Потокораспределение в инженерных сетях. М.: Стройиздат, 1979, 200 с.
107. *Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д.* Оперативное управление потокораспределением в инженерных сетях. Харьков: Выща шк., 1980, 144 с.

108. *Жидкова М.А.* Переходные процессы в магистральных газопроводах. Киев: Наук. думка, 1979, 256 с.
109. *Жидкова М.А.* Трубопроводный транспорт газа. Киев: Наук. думка, 1973, 142 с.
110. *Зельдович Я.Б., Яглом И.М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников. М.: Наука, 1982, 512 с.
111. *Землянян А.Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1976, 400 с.
112. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975, 542 с.
113. *Зингер И.М.* Гидравлические и тепловые режимы теплофикационных систем. М.: Энергоатомиздат, 1986, 320 с.
114. *Зифферман Э.О., Кузнецов Н.Д., Хлоптунов В.И., Якимченко М.В.* Комплекс программ для расчета потокораспределения оперативным персоналом// Электрические станции, 1982, № 1, с. 43–45.
115. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984, 192 с.
116. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. М.: Изд-во МГУ, 1985, 662 с.
117. *Ильин В.П., Кузнецов Ю.И.* Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985, 208 с.
118. *Ильинский Н.Ф., Цаценкин В.К.* Приложение теории графов к задачам электромеханики. М.: Энергия, 1968, 200 с.
119. *Алимов Ю.И., Гамм А.З., Ополева Г.Н. и др.* Информационное обеспечение диспетчерского управления в электроэнергетике. Новосибирск: Наука, 1985, 224 с.
120. *Иосифьян А.Г.* Эволюция физических основ электротехники и электродинамики// Электричество, 1987, № 12, с. 18–29.

121. *Искандеров Д.Ш.* Эквивалентирование многониточного магистрального газопровода при расчете переходных процессов// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1989, № 3, с. 135–138.
122. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978, 512 с.
123. *Калихман С.А., Таврин В.Ю.* Режимы метания твердых тел малой электропроводимости в рельсотронных ускорителях// Техн. электродинамика, 1985, № 6, с. 16–20.
124. *Канторович М.И.* Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. М.: Сов. радио, 1975, 320 с.
125. *Караев Р.И.* Переходные процессы в линиях большой протяженности. - М.: Энергия, 1978, 192 с.
126. *Карасев Н.И., Фольгарт В.И., Дирксен В.Л., Ровенская Е.И.* Моделирование установившихся гидравлических режимов больших теплоснабжающих систем с дроссельным управлением// Электрон. моделирование, 1990, № 1, с. 72–76.
127. *Карпов В.Я., Карягин Д.А., Самарский А.А.* Принципы разработки пакетов прикладных программ для задач математической физики// Журнал выч. матем. физики, 1978, № 2, с. 458–467.
128. *Карсон Д.Р.* Электрические нестационарные явления и операционное исчисление. Харьков, Киев: ГНТИ Украины, 1934, 232 с.
129. *Кафаров В.В., Мешалкин В.П., Гурьева Л.В.* Оптимизация теплообменных процессов и систем. М.: Энергоатомиздат, 1988, 192 с.
130. *Кениг Г.Е., Блекуэлл В.А.* Теория электромеханических систем. М., Л.: Энергия, 1965, 424 с.
131. *Керопян К.К., Карандаков Г.В., Музыченко Ю.К.* Электрическое моделирование и численные методы в теории упругости. М.: Стройиздат, 1973, 384 с.
132. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978, 318 с.

133. *Кизимович Ю.П., Цукерман И.А.* Математическое моделирование квазистационарного электромагнитного поля// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1987, № 2, с. 56–67.
134. *Ким В.Е., Головач Е.А., Сенькин В.И.* Математическое моделирование энергоблока с реактором на быстрых нейтронах// Энергомашиностроение, 1984, № 5, с. 31–34.
135. *Кирпичев М.В., Михеев М.А.* Моделирование тепловых устройств. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1936, 320 с.
136. *Клайн С. Дж.* Подобие и приближенные методы. М.: Мир, 1968, 304 с.
137. *Коздоба Л.А.* Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. М.: Энергия, 1972, 296 с.
138. *Копылов И.П.* Развитие математических моделей электрических машин// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1988, № 5, с. 38–44.
139. *Копылов И.П.* Электрические машины. М.: Энергоатомиздат, 1986, 360с.
140. *Коробочкин Б.Л., Комитовски М.Д.* О передаточных функциях трубопроводов гидросистем в сосредоточенных и распределенных параметрах// Машиноведение, 1968, № 4, с. 37–45.
141. *Коровкин Н.В., Селина Е.Е.* Моделирование волновых процессов в системах с распределенными параметрами на основе метода синтетических схем// Тез. Докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. «Моделирование-85. Теория, средства, применение», 31 марта–4 апреля 1985 г. Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1985, Ч.2, с. 70–72.
142. *Коротеев И.Е., Чиженко А.И.* Применение метода интегральных вычетов к расчету электромагнитных процессов в искажающих длинных линиях с промежуточными отборами энергии // Техн. электродинамика, - 1982, № 5, с. 51–56.

143. *Костенко М.В., Кадомская К.П., Левинштейн М.Л., Ефремов И.А.* Перенапряжения и защита от них в воздушных и кабельных электропередачах высокого напряжения. Л.: Наука, 1988, 302 с.
144. *Костеров Н.В.* Моделирование и динамика атомных электростанций при возмущениях в энергосистеме. Киев: Выща шк., 1986, 168 с.
145. *Кравец И.А., Сучик В.Е.* Повышение эффективности моделирования вентильных цепей при высокочастотных возмущениях и длительных переходных процессах// Техническая электродинамика, 1989, № 6, с.71–76.
146. *Крапивка В.И., Новацкая Е.М.* Математическая модель режима работы аппаратов воздушного охлаждения магистральных газопроводов// Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. «Моделирование-85. Теория, средства, применение», 31 марта–4 апреля 1985 г. Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1985, Ч.4, с. 66–67.
147. *Кривицкий Е.В., Хайнацкий С.А.* О механизме электрического взрыва проводников// Техн. электродинамика, 1982, № 4, с. 22–28.
148. *Кривошеин Б.Л., Радченко В.П.* К вопросу о линеаризации нестационарного неизотермического течения реального газа в трубопроводах// Инж.-физ. журнал, 1971, № 1, с. 100–107.
149. *Кривошеин Б.Л., Фурман А.В.* Оценка энергозатрат на перекачку нефти или газа при нестационарно-периодических режимах эксплуатации трубопровода // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1989, № 5, с. 158–162.
150. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям – диакоптика. М.: Наука, 1972, 542 с.
151. *Конторович М.И.* Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. М.: Сов. радио, 1975, 320 с.
152. *Круг Н.К.* Расчет неоднородной линии// Тр. МЭИ, 1959 г., вып. 18, с. 16–22.

153. *Крылов В.И., Скобля Н.С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974, 224 с.
154. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: Высш. шк., 1981, 584 с.
155. *Кузьмин М.Н.* Электрическое моделирование нестационарных процессов теплообмена. М.: Энергия, 1974, 416 с.
156. *Кулик М.Н.* Методы системного анализа в энергетических исследованиях. Киев: Наук. думка, 1987, 200 с.
157. *Курман А.В., Каганер В.М.* Принципы экстремальности и метод расчета на ЭЦВМ сложных вентиляционных и гидравлических сетей//В кн.: Тез. докл. V Всесоюз. совещ. пользователей ЭВМ типа «Урал». Секция Ш. Математическое программирование. Тарту: Тарт. ун-т, 1966, с. 47–53.
158. *Кутателадзе С.С.* Анализ подобия и физические модели. Новосибирск: Наука, 1986, 296 с.
159. *Кутателадзе С.С., Ляховский Д.Н., Пермяков В.А.* Моделирование теплоэнергетического оборудования. М.: Энергия, 1966, 350 с.
160. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987, 688 с.
161. *Левинштейн М.Л.* Операционное исчисление в задачах электротехники. Л.: Энергия, 1972, 358 с.
162. *Ленк А.* Электромеханические системы: Системы с сосредоточенными параметрами. М.: Мир, 1978, 284 с.
163. *Ленк А.* Электромеханические системы: Системы с распределенными параметрами. М.: Энергоатомиздат, 1982, 472 с.
164. *Лианко Ди.* Применение ЭВМ, работающих в реальном масштабе времени для управления энергетическими системами// ТИИЭР, 1974, №7, с. 23–35.

165. *Лизак Н.Н., Бушуев В.В., Колотилов Ю.А.* Динамические свойства протяженных энергообъединений// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1988, № 6, с. 3–16.
166. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987, 840 с.
167. *Ломоносов В.Ю.* Периодические процессы в нелинейных цепях// Электричество, 1952, № 7, с. 55–58.
168. *Лурье М.В., Гольдберг В.И.* Расчет гидродинамических процессов движения в системах контейнерного пневмотранспорта //Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1971, № 4, с. 99–104.
169. *Марков А.А., Руденко Ю.Н.* Прогнозные оценки альтернативных сценариев развития энергетики СССР// Вестник Академии наук СССР, 1991, № 1, с. 43–48.
170. *Максимович Н.Г.* Методы топологического анализа электрических цепей. Львов: Изд-во Львов. гос. ун-та, 1970, 258 с.
171. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981, 416 с.
172. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980, 534 с.
173. *Матевосян П.А., Хачатурян В.Г.* Оптимизация параметров сложных газотранспортных систем с помощью средств вычислительной техники// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1988, № 1, с. 151–155.
174. *Жермен-Лунар П., Жорж П.Л., Пистр Ф., Безье П.* Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 2. М.: Мир, 1989, 264 с.
175. *Константинова И.М., Дубинский А.В., Дубровский В.В. и др.* Математическое моделирование технологических объектов магистрального транспорта газа. М.: Недра, 1988, 192 с.
176. *Матханов П.Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. М.: Высш. шк., 1981, 334 с.

177. *Матханов П.Н.* Основы синтеза линейных электрических цепей. М.: Высш. шк., 1976, 208 с.
178. *Мацевитый Ю.М.* Электрическое моделирование нелинейных задач технической теплофизики. Киев: Наук. думка, 1977, 254 с.
179. *Влах И., Сингхал К.* Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988, 560 с.
180. *Мелентьев Л.А.* Очерки истории отечественной энергетики (развитие научно-технической мысли). М.: Наука, 1987, 280 с.
181. *Мелентьев Л.А.* Системные исследования в энергетике. М.: Наука, 1979, 414 с.
182. *Меренков А.П., Морев А.А., Хасилев В.Я.* Гидравлические цепи с регулируемыми параметрами и их применение для описания и расчета многоточных нефтепроводов//В кн.: Системы энергетики - тенденции развития и методы управления. Иркутск: СО АН СССР, 1980, **1**, с. 193–204.
183. *Меренков А.П.* О развитии математического моделирования в системных энергетических исследованиях// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1985, № 6, с. 58–64.
184. *Меренков А.П., Сидлер В.Г., Такайшвили М.К.* Обобщение электротехнических методов на гидравлические цепи// Электрон. моделирование, 1982, № 2, с. 3–11.
185. *Меренков А.П., Хасилев В.Я.* Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985, 278 с.
186. *Хасилев В.Я., Меренков А.П., Каганович Б.М. и др.* Методы и алгоритмы расчета тепловых сетей. М.: Энергия, 1978, 176 с.
187. *Меренков А.П., Хасилев В.Я., Сидлер Л.Е.* Методы и программы расчета гидравлических цепей с сосредоточенными параметрами. В кн.: Тр. IV Всесоюз. семинара по комплексам программ мат. физики/ Под ред. Н.Н.Яненко. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976, с. 40–52.



188. *Беляев Л.С., Вороний Н.И., Кононов Ю.Д. и др.* Методы исследования и управления системами энергетики. Новосибирск: Наука, 1987, 374 с.
189. *Мешалкин В.П., Кафаров В.В., Каплинский В.Я.* Метод анализа больших гидравлических цепей// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1984, №1, с. 115–122.
190. *Мига́й В.К.* Моделирование теплообменного энергетического оборудования. Л.: Энергоатомиздат, 1987, 264 с.
191. *Михлин С.Г.* Некоторые вопросы теории погрешностей. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988, 334 с.
192. *Моисеев Н.Н.* Информатика: новые пути познания законов природы и общества// Вестн. АН СССР, 1985, № 2, с. 128–135.
193. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. М.: Мир, 1984, 224 с.
194. *Гамм А.З., Голуб И.И.* Наблюдаемость электроэнергетических систем. М.: Наука, 1990, 200 с.
195. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. М.; Л.: Госиздат. технико-теорет. литературы, 1949, 688 с.
196. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982, 296 с.
197. *Васильев О.Ф., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А.* Неизотермическое течение газа в трубах. Новосибирск: Наука, 1978, 128с.
198. *Нейман Л.Р., Демирчян К.С.* Теоретические основы электротехники: В 2-х т. Т.1. Л.: Энергоиздат, 1981, 536 с., Т.2. Л.: Энергоиздат, 1981, 416 с.
199. *Атабеков Г.И., Купалян С.Д., Тимофеев А.Б., Хухриков С.С.* Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле. М.: Энергия, 1979, 432 с.
200. *Нетушил А.В., Страхов С.В.* Основы электротехники. Цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами. М., Л.: Госэнергоиздат, 1955, 216 с.

201. *Нестерчук А.В.* О решении обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью операторов численного интегрирования// Укр. мат. журнал, 1965, № 4, с. 112–119.
202. *Никитин Ю.П.* Приближенный анализ волновых процессов в электрических цепях с неравномерно распределенными параметрами// Авт. дис. ... канд. техн. наук. Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1981, 24 с.
203. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М.: Наука, 1983, 304 с.
204. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989, 544 с.
205. *Никутьшин В.Р., Козлова М.В.* Метод расчета на ЭВМ потерь энергии и термодинамического совершенства элементов теплоэнергетических систем// Теплоэнергетика, 1990, № 2, с. 43–46.
206. *Нормы технологического проектирования. Магистральные газопроводы.* ВСН 51-2-79. М.: Мингазпром, 1980, 100 с.
207. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
208. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989, 688 с.
209. *Ольсон Г.* Динамические аналогии. М.: Госиздат. ин. лит., 1947, 224 с.
210. *Оре О.* Теория Графов. М.: Наука, 1968, 352 с.
211. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986, 288 с.
212. *Зевекс Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В.* Основы теории цепей. М.: Энергоатомиздат, 1989, 528 с.
213. *Павлов В.С.* Исследование нестационарных тепловых режимов в системах теплоснабжения. М.: МЭИ, 1978, 20 с.

214. *Карасев Н.И., Фельгарт В.И., Алехин А.Ф. и др.* Пакет прикладных программ для решения задач расчета параметров стационарного гидравлического режима систем централизованного теплоснабжения и водоснабжения промышленных центров// *Управляющие системы и машины*, 1982, № 1, с. 113–116.
215. *Паллен К.А.* Топологические и матричные методы. М., Л.: Энергия, 1966, 96 с.
216. *Панкин В.В.* Расчет установившихся режимов в нелинейных цепях с кусочно-линейными элементами на основе усовершенствованного метода точек и качественных энергетических соотношений// *Авт. дис. ... канд. техн. наук.* Л.: ЛЭТИ, 1989, 16 с.
217. *Панкратов В.С., Берман Р.Я.* Разработка и эксплуатация АСУ газотранспортными системами. Л.: Недра, 1982, 256 с.
218. *Парфус А.В.* Применение дифференциальных преобразований к исследованию электрических и тепловых процессов в многопроводных линиях электропередачи// *Авт. дис. ... канд. техн. наук.* Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике, 1990, 12 с.
219. *Патаканкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
220. *Перхач В.С., Лысяк Г.Н., Кинаш Б.М.* математическая модель многопроводной линии электропередачи в фазных координатах// *Теоретическая электротехника.* Вып. 27. Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1979, с. 143–151.
221. *Перхач В.С.* Математическое моделирование процессов электроэнергетических систем с вентильными устройствами в электрических и магнитных координатах с использованием дифференциальных параметров// *Техн. электродинамика*, 1984, № 1, с. 92–100.

222. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.* Численные методы газовой динамики. М.: Высш. шк., 1987, 232 с.
223. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988, 410 с.
224. *Поливанов К.М.* Применение анализа размерностей к электротехническим задачам// Электричество, 1935, № 4, с. 62–67.
225. *Полисар Г.Л., Хасилев В.Я.* Задачи потокораспределения в сложных тепловых сетях и их решение на электронных моделях// ДАН СССР, 1950, № 2, с. 243–246.
226. *Поляков А.А., Канаво В.А.* Тепломассообменные аппараты в инженерном оборудовании зданий и сооружений. М.: Стройиздат, 1989, 200 с.
227. *Попырин Л.С.* Математическое моделирование и оптимизация атомных электростанций. М.: Наука, 1984, 348 с.
228. *Попырин Л.С.* Проблема надежности систем теплоснабжения// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1988, № 3, с. 4–14.
229. *Применение* вычислительных методов в энергетике: Обзор докладов VIII Международной конференции / Под. ред. В.А. Веникова, Ю.Ф. Архинцева. М.: Энергоатомиздат, 1987, 176 с.
230. *Применение* теории графов связей в технике/ Под ред. Д. Кэрнапа, Р. Розенберга. М.: Мир, 1974, 96 с.
231. *Беркович М.А., Дорошенко Г.А., Курбаногалиев У.К. и др.* Применение ЭВМ для автоматизации технологических процессов в энергетике/ Под ред. В.А.Семенова. М.: Энергоатомиздат, 1983, 304 с.
232. *Аранзон Н.З., Козлов В.А., Козобков А.А. и др.* Применение электрического моделирования для расчета компрессорных станций. М.: Недра, 1969, 178 с.
233. *Проценко Н.М., Гершигорин А.Е.* Диалоговый программный комплекс для анализа нестационарных режимов транспорта газа// Тез. докл. VI Всесоюз. науч.-техн. конф. «Опыт создания специализированного

- программного обеспечения АСУТП», Черновцы, 1–3 ноября 1988 г. М.: ИНФОРМПРИБОР, 1988, с. 101.
234. *Проценко Н.М.* Организация вычислительного процесса при моделировании режимов работы газотранспортных систем/ Авт. дис. ... канд. техн. наук. Киев: 1988, 20 с.
235. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 800 с.
236. *Пухов Г.Е., Борковский Б.А.* К расчету электрической цепи, содержащей выпрямитель// Тр. Таганрог. радиотехн. ин-та, 1954. вып.1, с 78–82.
237. *Пухов Г.Е.* Введение в теорию метода точек// Тр. Таганрог. радиотехн. ин-та, 1954, вып. 1, с. 47–77.
238. *Пухов Г.Е., Войтенков И.Н.* Методы дифференциального оценивания состояний и идентификация моделей энергообъектов// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1989, № 5, с. 39–53.
239. *Пухов Г.Е.* Дифференциальный анализ электрических цепей. Киев: Наук. думка, 1982, 496 с.
240. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. Киев: Наук. думка, 1980, 420 с.
241. *Пухов Г.Е.* Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. Киев: Наук. думка, 1967, 658 с.
242. *Пухов Г.Е., Королев Ю.В.* Функционально-алгоритмическое моделирование в энергетике// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1988, № 2, с. 3–9.
243. *Пухов Г.Е.* Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике. Киев: Наук. думка, 1978, 260 с.
244. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. Киев: Наук. думка, 1988, 216 с.

245. *Пухов Г.Е.* Электрическое моделирование стержневых и тонкостенных конструкций. Киев: Изд-во АН УССР, 1960, 152 с.
246. *Пиеничный Б.Н.* О численных методах гидравлического расчета сетей// I Всесоюз. конф. по оптимизации и моделированию транспортных сетей: Сб. докладов. Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1967, с. 77–90.
247. *Пиеничный Б.Н.* Расчет энергетических сетей на ЭВМ// Журн. вычисл. матем. и мат. физики, 1962, № 5, с. 942–947.
248. *Рабинович М.И.* Методика расчета на ЭВМ неустановившегося движения в сложных линеаризованных гидросистемах с распределенными параметрами// Механика машин. Вып. 49. М.: Наука, 1975, с. 22–30.
249. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноуцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 208 с.
250. *Реза Ф., Сили С.* Современный анализ электрических цепей. М., Л.: Энергия, 1964, 480 с.
251. *Рейнод М., Бек Дж. В.* Сравнительный анализ методов решения обратных задач теплопроводности// Труды американ. общ-ва инженеров-механиков. Теплопередача. М.: Мир, 1988, № 4, с. 33–43.
252. *Робишо Л., Буавер М., Робер Ж.* Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам. М., Л.: Энергия, 1964, 248 с.
253. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их применения к газовой динамике. М.: Наука, 1968, 592 с.
254. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980, 616 с.
255. *Рядно А.А.* Основы расчета сопряженных задач конвективного теплообмена в трубах// Авт. дис. ... докт. техн. наук. М.: НИЭМ, 1989, 48 с.
256. *Сабоннадьер Ж.-К., Кулон Ж.-Л.* Метод конечных элементов и САПР. М.: Мир, 1989, 190 с.

257. *Савин Н.В.* Четырехугольные конечные элементы с линейной аппроксимацией потенциальной функции// Техн. электродинамика, 1988, № 5, с. 8–14.
258. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1982, 272 с.
259. *Самарский А.А.* Вычислительный эксперимент в задачах технологии// Вестн. АН СССР, 1984, № 3, с 77–88.
260. *Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980, 352 с.
261. *Самарский А.А.* Проблемы использования вычислительной техники и развитие информатики// Вестн. АН СССР, 1985, № 3, с. 57–69.
262. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989, 432 с.
263. *Саух С.Е., Гершгорин А.Е.* Применение локальных интегродифференциальных преобразований для решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью// В кн.: Теория дифференциальных преобразований и ее приложения. Киев: Наук. думка, 1990, с. 79–86.
264. *Саух С.Е.* Локальные интегро-дифференциальные преобразования дифференциальных уравнений// Тез. докл. II Всесоюз. конф. «Новые подходы к решению дифференциальных уравнений». Москва, 1989, с. 145.
265. *Саух С.Е.* Локальные интегро-дифференциальные преобразования одномерных функций и уравнений. Киев, 1988, 53 с. (Препр./ АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; 142).
266. *Саух С.Е.* Многомерные локальные интегро-дифференциальные преобразования функций и дифференциальных уравнений. Киев, 1990, 53 с. (Препр./ АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; 90-34).

267. Саух С.Е., Гершгорин А.Е. Особенности моделирования на ЭВМ многоцеховых компрессорных станций// Докл. АН УССР. Сер. А, 1989, № 2, с. 78–81.
268. Саух С.Е. Обратные задачи моделирования энергетических сетей с распределенными параметрами// IV Международ. науч.-техн. конф. «Проблемы комплексной автоматизации», Киев, 1990, с. 103.
269. Саух С.Е. Опыт использования операторных методов на основе ступенчатых изображений для расчета нестационарных процессов в магистральных газопроводах// Тез. докл. VI Республ. конф. «Нелинейные задачи математической физики», Донецк, 1987, с. 133.
270. Саух С.Е. Особенности математического моделирование газотранспортных систем. Киев, 1987, 48 с. (Препр./ АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; 94).
271. Саух С.Е. Численные операторные методы на основе многомерных локальных интегро-дифференциальных преобразований// Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. «Математическое моделирование в энергетике». Киев, 1990, Ч.4, с. 80.
272. Саух С.Е., Проценко Н.М. Эффективный метод машинного моделирования магистральных газопроводов большой протяженности// Докл. АН УССР. Сер. А, 1986, № 1, с. 67–69.
273. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987, 432 с.
274. Селина Е.Е. Использование метода синтетических схем для анализа переходных процессов в цепях с распределенными параметрами// Авт. дис. ... канд. техн. наук. Л.: Ленинград. политехн. ин-т, 1986, 16 с.
275. Сеннова Е.В., Сидлер В.Г. Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. Новосибирск: Наука, 1987, 220 с.



276. *Сешу С., Рид М.Б.* Линейные графы и электрические цепи. М.: Высшая шк., 1971, 448 с.
277. *Сигорский В.П., Петренко А.И.* Алгоритмы анализа электронных схем. Киев: Техника, 1970, 394 с.
278. *Сили С.* Электромеханическое преобразование энергии. М.: Энергия, 1968, 376 с.
279. *Синев А.В.* Построение математической модели силовой гидравлической системы управления методами теории цепей/ В кн.: Колебания и устойчивость машин. М.: Наука, 1968, с. 42–60.
280. *Сильвестер П., Фарради Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М.: Мир, 1986, 230 с.
281. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1970, 558 с.
282. *Грачев В.В., Гусейн-заде М.А., Ксенз Б.И., Яковлев Е.И.* Сложные трубопроводные системы. М.: Недра, 1982, 256 с.
283. *Смолдырев А.Е., Сафонов Ю.К.* Трубопроводный транспорт концентрированных гидросмесей. М.: Машиностроение, 1989, 256 с.
284. *Смирнов А.Ф.* Устойчивость и колебания сооружений. М.: Гострансжелдориздат, 1958, 572 с.
285. *Соболев С.Л.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989, 254 с.
286. *Совалов С.А., Семенов В.А.* Противоаварийное управление в энергосистемах. М.: Энергоатомиздат, 1988, 416 с.
287. *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/* Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. М.: Мир, 1979, 312 с.
288. *Соколов Е.А.* Теплофикация и тепловые сети. М.: Энергия. 1975, 376 с.
289. *Соколовский М.А.* Развитие и применение методов дифференциального и точечного преобразования для анализа электромагнитных процессов в

- нелинейных цепях/ Авт. дис. ... канд. техн. наук. Киев: Ин-т пробл. моделирования в энергетике АН УССР, 1986, 18 с.
290. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/ Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979, 832 с.*
291. *Справочник по теплообменникам в 2-х т./ Пер. с англ., под ред. В.С. Петухова, В.К. Шикова. М.: Энергоатомиздат, 1987, 560 с.*
292. *Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983, 423 с.*
293. *Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Иностран. литература, 1959, 618 с.*
294. *Стренг Г. Линейная алгебра и ее применение. М.: Мир, 1980, 454 с.*
295. *Сулейманов В.А. Расчет нестационарных режимов работы газопроводов// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1987, № 1, с. 143–152.*
296. *Сухарев М.Г., Ставровский Е.Р. Оптимизация систем транспорта газа. М.: Наука, 1975, 278 с.*
297. *Сухарев М.Г., Локощенко А.М. Приближенный способ расчета нестационарных течений в системах газоснабжения// Изв. вузов. Нефть и газ, 1984, № 2, с. 63–69.*
298. *Тарко Л.М. Волновые процессы в трубопроводах гидромеханизмов. М.: Машгиз, 1963, 184 с.*
299. *Тевяшев А.Д. Оперативное управление потокораспределением в инженерных сетях в условиях неопределенности/ Авт. дис. ... докт. техн. наук. Харьков: ХТИ, 1984, 45 с.*
300. *Темпель Ф.Г. Моделирование газоснабжающих систем (Теоретические и прикладные аспекты). Л.: Недра, 1986, 184 с.*
301. *Тетьельбаум И.М., Тетьельбаум Я.И. Модели прямой аналогии. М.: Наука, 1979, 384 с.*

302. *Тетельбаум И.М., Шнейдер Ю.Р.* Практика аналогового моделирования динамических систем: Справочное пособие. М.: Энергоатомиздат, 1987, 384 с.
303. *Голстых В.К.* Идентифицируемость систем с распределенными параметрами// Автоматика и телемеханика, 1989, № 10, с. 49–56.
304. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений. М.: Мир, 1985, 264 с.
305. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: В 2-х т. Т.1. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1984, 360 с. Т.2. Интегральные операторы Фурье. М.: Мир, 1984, 400 с.
306. *Тюриков П.В.* Автоматическое управление на пневмотранспорте. Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1989, 152 с.
307. *Уайт Д., Вудсон Г.* Электромеханическое преобразование энергии. М.: Энергия, 1964, 528 с.
308. *Управление* энергосистемами: Обзор докладов Международной конференции по большим электрическим системам (СИГРЭ-86) / Под ред. Ю.Н.Руденко. М.: Энергоатомиздат, 1988, 104 с.
309. *Урусов И.Д., Камша М.М.* Проблема прочности при крутильных колебаниях в валопроводах турбогенераторов// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1980, № 1, с. 26–35.
310. *Филлипов Е.Ф.* Нелинейная электротехника. М.: Энергия, 1976, 494 с.
311. *Фильц Р.В.* Математические основы теории электромеханических преобразователей. Киев: Наук. думка, 1979, 206 с.
312. *Фильц Р.В.* Математическое моделирование переходных процессов обобщенного электромеханического преобразователя энергии на основе неявных методов численного интегрирования// Техн. электродинамика, 1986, № 5, с. 56–62.

313. *Фильчаков П.Ф, Панчишин В.И.* Интеграторы ЭГДА, моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. Киев: Изд-во АН УССР, 1961, 172 с.
314. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988, 352 с.
315. *Форсайт Дж. Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980, 280 с.
316. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990, 512 с.
317. *Харкевич А.А.* Линейные и нелинейные системы// Избр. труды. Т.2. М.: Наука, 1973, 566 с.
318. *Харкевич А.А.* Спектры и анализ. М.: ГИТТЛ, 1957, 236 с.
319. *Харкевич А.А.* Теория электроакустических аппаратов. М.: Связьиздат, 1940, 362 с.
320. *Хармут Х.Ф.* Передача сообщений ортогональными функциями. М.: Связь, 1975, 272 с.
321. *Хармут Х.Ф.* Применение методов теории информации в физике. М.: Мир, 1989, 344 с.
322. *Хармут Х.Ф.* Теория секвентного анализа. М.: Мир, 1980, 574 с.
323. *Харченко Е.В., Чабан В.И., Черник С.И.* К исследованию динамики электромеханических систем, содержащих звенья с распределенными параметрами// Техн. электродинамика, 1982, № 1, с. 66–71.
324. *Хасилев В.Я.* Элементы теории гидравлических цепей/ Авт. дис. ... д-ра техн. наук. Новосибирск, 1966, 28 с.
325. *Хачатурян С.А.* Волновые процессы в компрессорных установках. М.: Машиностроение, 1983, 224 с.
326. *Хейгеман Л., Янг Д.* Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986, 448 с.

327. *Ходакович И.Е., Кривошеин Б.Л., Бикчентай Р.Н.* Тепловые режимы магистральных газопроводов. М.: Недра, 1971, 216 с.
328. *Цифровая* логика – динамическая модель электрической части энергоблока автоматизированной системы обучения и тренажа оперативного персонала ТЭС// Техн. электродинамика, 1986, № 5, с. 76–81.
329. *Цукерник Л.В.* Эквивалентирование схемы больших энергосистем при расчетах на ЦВМ устойчивости и переходных процессов// Проблемы техн. электродинамики, 1974, вып. 47, с. 82–86.
330. *Цыпкин Я.З.* Оптимальные алгоритмы оценивания параметров в задачах идентификации// Автоматика и телемеханика, 1982, № 12, с. 9–23.
331. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975, 296 с.
332. *Чермак И., Петерка В., Заворка И.* Динамика регулируемых систем в теплоэнергетике и химии. М.: Мир, 1972, 624 с.
333. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988, 424 с.
334. *Чуа Л.О., Лин П.М.* Машинный анализ электронных схем (алгоритмы и вычислительные методы). М.: Энергия, 1980, 640 с.
335. *Шашков О.К.* Моделирование и расчет тепловых схем энергоблоков как теплогидравлических цепей в условиях неполной информации// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1988, № 6, с. 8–87.
336. *Шевяков А.А., Яковлева Р.В.* Инженерные методы расчета динамики теплообменных аппаратов. М.: Машиностроение, 1968, 320 с.
337. *Шорин В.П.* Применение направленных графов к расчету вынужденных колебаний давления в гидравлических системах летательных аппаратов и двигателей// Изв. вузов. Сер.: авиационная техника, 1966, № 4, с. 29–36.
338. *Штеттер Х.* Анализ методов дискретизации обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1978, 464 с.

339. Яковлев Е.И., Крылов Г.В., Иванов В.А. Системный анализ газотранспортных магистралей. Новосибирск: Наука, 1989, 386 с.
340. *Albani M. , Bernardi P.A.* A numerical method based on the discretization of Maxwell equations in integral form // IEEE Trans., 1974, vol. MTT-22, N 4, p. 446–449.
341. *Allemong J. J., Radu L., Sasson A. M.* A fast and reliable state estimation algorithm for AEP's new control center // IEEE Trans. Power App. Syst., 1982, vol. PAS – 101, p. 933–944.
342. *Bollinger K.E., KhaliI H. S.* A method for on-line identification of power system model parameters in the presense of noise // IEEE Trans, on Power Apparatus and Systems?, 1982, vol. PAS-101, N 9, p. 1731–1741.
343. *Corneliu A. M., Lehtonen A.* Mixed-Type Circuits with Distributed and Lumped Parameters //IEEE Trans, on Circuits and Systems, 1989, vol. 36, N 8, p. 1080–1086.
344. *Hayashi Y., Takimoto A., Nishiola Y.* Heat and mass transfer with a mist formation in free convection field between vertical plates// Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.,1985, B51, N 472, p. 4030–4038.
345. *Gahagan M. J., Hunt J. R. , Bose A.* Power system model development for the control center security analysis functions// IEEE Trans. Power Syst., 1986, vol. PWRS-1, N 8, p. 308–313.
346. *Flanigan O.* Transient flow: can it conserve compressor fuel?// Pipe-line Industry, 1984, vol. 57, N 4, p. 35–36.
347. *Jindal R. P.* Low-Pass Distributed RC Filter Using an MDS Transistor with Near Zero Phase Shift at High Frequencies// IEEE Trans, on Circuits and Systems, 1989, vol. 36, N8, p. 1119–1123.
348. *Kralik J., Stieglez F., Vostry Z., Zavorka J.* Modeling of the Dynamics of Flow in Gas Pipe-line // IEEE Trans. Syst. Men Cybern, 1984, SMC– 14, p. 586–596.

349. *Khatib-Rahbar M. , Cady K.B.* Dynamical model and numerical simulation of systemwide transients in loop-type LMFBRs// Nucl. Eng. Design, 1981, vol. 64, N 3, p. 259–281.
350. *Lacroix M, Camarero R., Tapucu A.* Multigrid scheme for thermohydraulic flow// Numerical Heat Trans., 1984, N 7, p. 375–393.
351. *Ormsbee L. E., Wood D. J.* Hydraulic design algorithms to pipe networks// J. Hydraul. Eng., 1986, vol. 112, N 12, p. 1195–1207.
352. *Oliver P.* A Family of Linear Multistep Methods for the Solution of Stiff and Non-Stiff ODEs// IMA Journal of Numerical Analysis, 1982, N 3, p. 289–301.
353. *Schutt J.E., Mitra R.* Nonlinear Transient Analysis of Coupled Transmission Lines// IEEE Trans, on Circuits and Systems, 1989, vol. 36, N7, p. 959–967.
354. *Seely S.* Dynamic systems analysis. NY: Reinhold Publishing Corp., 1964, 484 p.
355. *Trent H.M.* Isomorphisms between oriented linear graphs and lumped physical system// J. Acoust. Amer., 1955, vol.27, N 5, p. 500–527.
356. *Volp C.* Some aspects of the design and operation of water management systems. Delft: University of Technology, 1989, 173 p.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Матрицы  $\widehat{D}(k_m)$ ,  $\widehat{H}(k_m)$  и векторы  $\bar{N}_{\widehat{D}}(k_m)$ ,  $\bar{N}_{\widehat{H}}(k_m)$  для значений  $k_m = 1, 2, \dots, 10$  имеют вид:

$k_m = 1$

$$\begin{aligned}\widehat{D}(1) &= |1|, & \bar{N}_{\widehat{D}}(1) &= |1|, \\ \widehat{H}(1) &= |1|, & \bar{N}_{\widehat{H}}(1) &= |1|;\end{aligned}$$

$k_m = 2$

$$\begin{aligned}\widehat{D}(2) &= \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, & \bar{N}_{\widehat{D}}(2) &= \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \\ \widehat{H}(2) &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, & \bar{N}_{\widehat{H}}(2) &= \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix};\end{aligned}$$

$k_m = 3$

$$\begin{aligned}\widehat{D}(3) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 11 & -18 & 9 \\ 2 & 3 & -6 \\ -1 & 6 & -3 \end{vmatrix}, & \bar{N}_{\widehat{D}}(3) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}, \\ \widehat{H}(3) &= \frac{1}{36} \begin{vmatrix} 9 & 0 & 27 \\ 4 & -8 & 28 \\ 5 & -16 & 23 \end{vmatrix}, & \bar{N}_{\widehat{H}}(3) &= \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix};\end{aligned}$$

$k_m = 4$

$$\widehat{D}(4) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 25 & -48 & 36 & -16 \\ 3 & 10 & -18 & 6 \\ -1 & 8 & 0 & -8 \\ 1 & -6 & 18 & -10 \end{vmatrix}, \quad \bar{N}_{\widehat{D}}(4) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{vmatrix},$$



$$\widehat{H}(4) = \frac{1}{96} \begin{vmatrix} 0 & 64 & -32 & 64 \\ -9 & 45 & -27 & 63 \\ -8 & 32 & -40 & 64 \\ -9 & 37 & -59 & 55 \end{vmatrix}, \quad \bar{N}_{\bar{H}}(4) = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$k_m = 5$

$$\bar{N}_{\bar{D}}(5) = \frac{1}{12} |12 \quad -3 \quad 2 \quad -3 \quad 12|^T, \quad \bar{N}_{\bar{H}}(5) = |1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1|^T,$$

$$\widehat{D}(5) = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 137 & -300 & 300 & -200 & 75 \\ 12 & 65 & -120 & 60 & -20 \\ -3 & 30 & 20 & -60 & 15 \\ 2 & -15 & 60 & -20 & -30 \\ -3 & 20 & -60 & 120 & -65 \end{vmatrix},$$

$$\widehat{H}(5) = \frac{1}{3600} \begin{vmatrix} 475 & -250 & 3000 & -1750 & 2125 \\ 224 & -896 & 3264 & -1856 & 2144 \\ 243 & -1242 & 2808 & -1782 & 2133 \\ 232 & -1168 & 2352 & -2128 & 2152 \\ 251 & -1274 & 2616 & -2774 & 1901 \end{vmatrix};$$

$k_m = 6$

$$\bar{N}_{\bar{D}}(6) = \frac{1}{10} |-10 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 10|^T,$$

$$\bar{N}_{\bar{H}}(6) = |1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1|^T,$$

$$\widehat{D}(6) = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 147 & -360 & 450 & -400 & 225 & -72 \\ 10 & 77 & -150 & 100 & -50 & 15 \\ -2 & 24 & 35 & -80 & 30 & -8 \\ 1 & -9 & 45 & 0 & -45 & 9 \\ -1 & 8 & -30 & 80 & -35 & -24 \\ 2 & -15 & 50 & -100 & 150 & -77 \end{vmatrix},$$

$$\widehat{H}(6) = \frac{1}{8640} \begin{vmatrix} 0 & 4752 & -6048 & 11232 & -6048 & 4752 \\ -475 & 3325 & -5250 & 10750 & -5875 & 4725 \\ -448 & 2688 & -6272 & 11008 & -5952 & 4736 \\ -459 & 2781 & -7074 & 10206 & -5859 & 4725 \\ -448 & 2704 & -6816 & 9184 & -6496 & 4752 \\ -475 & 2877 & -7298 & 9982 & -7923 & 4277 \end{vmatrix};$$

$$\underline{k_m = 7}$$

$$\bar{N}_{\bar{d}}(7) = \frac{1}{60} | 60 \quad -10 \quad 4 \quad -3 \quad 4 \quad -10 \quad 60 |^T,$$

$$\bar{N}_{\bar{h}}(7) = | 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 |^T,$$

$$\bar{D}(7) = \frac{1}{60} \begin{vmatrix} 1089 & -2940 & 4410 & -4900 & 3675 & -1764 & 490 \\ 60 & 609 & -1260 & 1050 & -700 & 315 & -84 \\ -10 & 140 & 329 & -700 & 350 & -140 & 35 \\ 4 & -42 & 252 & 105 & -420 & 126 & -28 \\ -3 & 28 & -126 & 420 & -105 & -252 & 42 \\ 4 & -35 & 140 & -350 & 700 & -329 & -140 \\ -10 & 84 & -315 & 700 & -1050 & 1260 & -609 \end{vmatrix},$$

$$\widehat{H}(7) =$$

$$= \frac{1}{423360} \begin{vmatrix} 36799 & -41160 & 418803 & -570752 & 717213 & -353976 & 216433 \\ 17712 & -106272 & 465264 & -608256 & 737424 & -360288 & 217296 \\ 18575 & -131400 & 418275 & -592000 & 730125 & -358200 & 217025 \\ 18304 & -128640 & 387456 & -629504 & 736896 & -359808 & 217216 \\ 18495 & -130248 & 394227 & -667008 & 706077 & -357048 & 216945 \\ 18224 & -128160 & 386928 & -650752 & 659088 & -382176 & 217808 \\ 19087 & -134472 & 407139 & -688256 & 705549 & -447288 & 198721 \end{vmatrix};$$

$$\underline{k_m = 8}$$

$$\vec{N}_{\vec{d}}(8) = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} -105 & 15 & -5 & 3 & -3 & 5 & -15 & 105 \end{bmatrix}^T, \quad \vec{N}_{\vec{H}}(8) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\widehat{H}(8) = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 2283 & -6720 & 11760 & -15680 & 14700 & -9408 & 3920 & -960 \\ 105 & 1338 & -2940 & 2940 & -2450 & 1470 & -588 & 140 \\ -15 & 240 & 798 & -1680 & 1050 & -560 & 210 & -48 \\ 5 & -60 & 420 & 378 & -1050 & 420 & -140 & 30 \\ -3 & 32 & -168 & 672 & 0 & -672 & 168 & -32 \\ 3 & -30 & 140 & -420 & 1050 & -378 & -420 & 60 \\ -5 & 48 & -210 & 560 & -1050 & 1680 & -798 & -240 \\ 15 & -140 & 588 & -1470 & 2450 & -2940 & 2940 & -1338 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{H}(8) = \frac{1}{967680} \begin{bmatrix} 0 & 471040 & -976896 & 2248704 & -2518016 & 2248704 & -976896 & 471040 \\ -36799 & 331191 & -855099 & 2125571 & -2429469 & 2207205 & -965545 & 469665 \\ -35424 & 283392 & -956448 & 2170368 & -2456352 & 2218752 & -968544 & 470016 \\ -35775 & 287575 & -1014075 & 2088675 & -2436125 & 2211525 & -966825 & 469825 \\ -35584 & 285696 & -1004544 & 2020352 & -2504448 & 2221056 & -968704 & 470016 \\ -35775 & 287415 & -1011771 & 2040579 & -2586141 & 2163429 & -964521 & 469665 \\ -35424 & 284416 & -1000224 & 2013696 & -2541344 & 2062080 & -1012320 & 471040 \\ -36799 & 295767 & -1041723 & 2102243 & -2664477 & 2183877 & -1152169 & 434241 \end{bmatrix};$$

$$\underline{k_m = 9}$$

$$\vec{N}_{\vec{h}}(9) = \frac{1}{280} \begin{vmatrix} 280 & -35 & 10 & -5 & 4 & -5 & 10 & -35 & 280 \end{vmatrix}^T,$$

$$\vec{N}_{\vec{h}}(9) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^T$$

$$\vec{H}(9) = \frac{1}{280} \begin{vmatrix} 7129 & -22680 & 45360 & -70560 & 79380 & -63504 & 35280 & -12960 & 2835 \\ 280 & 4329 & -10080 & 11760 & -11760 & 8820 & -4704 & 1680 & -360 \\ -35 & 630 & 2754 & -5880 & 4410 & -2940 & 1470 & -504 & 105 \\ 10 & -135 & 1080 & 1554 & -3780 & 1890 & -840 & 270 & -54 \\ -5 & 60 & -360 & 1680 & 504 & -2520 & 840 & -240 & 45 \\ 4 & -45 & 240 & -840 & 2520 & -504 & -1680 & 360 & -60 \\ -5 & 54 & -270 & 840 & -1890 & 3780 & -1554 & -1080 & 135 \\ 10 & -105 & 504 & -1470 & 2940 & -4410 & 5880 & -2754 & -630 \\ -35 & 360 & -1680 & 4704 & -8820 & 11760 & -11760 & 10080 & -4329 \end{vmatrix} = ,$$

$$\hat{H}(9) = \frac{1}{32659200} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 2082753 & -3634794 & 37883214 & -80424738 & 133319520 & -129107358 & 94526514 & -37095894 & 15109983 \\ 1012736 & -8101888 & 42487808 & -86020096 & 138352640 & -132253696 & 95817728 & -37408768 & 15143936 \\ 1046689 & -9477482 & 39243022 & -84267554 & 137035360 & -131498654 & 95523442 & -37339862 & 15136639 \\ 1039392 & -9377856 & 37604736 & -86899392 & 137868480 & -131896512 & 95665536 & -37371456 & 15139872 \\ 1042625 & -9414250 & 37820750 & -88809250 & 135644000 & -131470750 & 95539250 & -37345750 & 15137375 \\ 1040128 & -9388544 & 37694464 & -88383488 & 133419520 & -133380608 & 95755264 & -37382144 & 15140608 \\ 1043361 & -9420138 & 37836558 & -88781346 & 134252640 & -136012446 & 94116978 & -37282518 & 15133311 \\ 1036064 & -9351232 & 37542272 & -88026304 & 132935360 & -134259904 & 90872192 & -38658112 & 15167264 \\ 1070017 & -9664106 & 38833486 & -91172642 & 137968480 & -139855262 & 95476786 & -43125206 & 14097247 \end{vmatrix};$$

$$\underline{k_m = 10}$$

$$\tilde{N}_{\tilde{d}}(10) = \frac{1}{252} \begin{vmatrix} -252 & 28 & -7 & 3 & -2 & 2 & -3 & 7 & -28 & 252 \end{vmatrix}^T,$$

$$\tilde{N}_{\tilde{h}}(10) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^T,$$

$$\tilde{D}(10) = \frac{1}{252} \begin{vmatrix} 7381 & -25200 & 56700 & -100800 & 132300 & -127008 & 88200 & -43200 & 14175 & -2800 \\ 252 & 4609 & -11340 & 15120 & -17640 & 15876 & -10584 & 5040 & -1620 & 315 \\ -28 & 560 & 3069 & -6720 & 5880 & -4704 & 2940 & -1344 & 420 & -80 \\ 7 & -105 & 945 & 1914 & -4410 & 2646 & -1470 & 630 & -189 & 35 \\ -3 & 40 & -270 & 1440 & 924 & -3024 & 1260 & -480 & 135 & -24 \\ 2 & -25 & 150 & -600 & 2100 & 0 & -2100 & 600 & -150 & 25 \\ -2 & 24 & -135 & 480 & -1260 & 3024 & -924 & -1440 & 270 & -40 \\ 3 & -35 & 189 & -630 & 1470 & -2646 & 4410 & -1914 & -945 & 105 \\ -7 & 80 & -420 & 1344 & -2940 & 4704 & -5880 & 6720 & -3069 & -560 \\ 28 & -315 & 1620 & -5040 & 10584 & -15876 & 17640 & -15120 & 11340 & -4609 \end{vmatrix},$$

$$\hat{H}(10) = \frac{1}{72576000} \times$$

0	32360000	-93520000	266720000	-440560000	542576000	-440560000	266720000	-93520000	32360000
-2082753	22910283	-82248696	250717680	-423276354	529065918	-433165968	264032136	-92936565	32302719
-2025472	20254720	-89120768	255115264	-427249664	531914752	-434647040	264552448	-93046784	32313344
-2036097	20418251	-92254456	249518192	-425083330	530618942	-434029456	264346376	-93004597	32309375
-2032128	20367936	-91912320	245908224	-429846912	531785088	-434491776	264487680	-93032064	32311872
-2034625	20396875	-92075000	246550000	-433981250	527650750	-433850000	264325000	-93003125	32309375
-2032128	20369408	-91933696	246087680	-432815104	522887168	-437459968	264667136	-93053440	32313344
-2036097	20411595	-92139768	246705264	-434110914	525053502	-443057040	261533448	-92889909	32302719
-2025472	20301376	-91619456	245224192	-431262080	521080192	-438659456	254661376	-95545472	32360000
-2082753	20884811	-94307320	252618224	-444772162	538363838	-454661776	265932680	-104995189	30277247

Наукове видання

Саух Сергій Євгенович

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ  
ЕНЕРГЕТИЧНИХ КІЛ

Монографія  
(російською мовою)

Відповідальний за випуск С. Є. Саух  
Комп'ютерна верстка С. Є. Саух

**9 789667 690540**

Підп. до друку 30.07.2020 р. Формат 60x84/16.  
Папір офсетний. Цифровий друк.  
Умов. друк. арк. 17,5.  
Наклад 300 прим. Зам. № 3007/20

Друкарня ООО «Три К»  
м. Київ, вул. Святошинська, 34  
т. (044) 592-4491, (044) 221-1883  
e-mail: [trik@trik.kiev.ua](mailto:trik@trik.kiev.ua)  
свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
Серія ДК № 3986 від 22.02.2011