Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Національна академія наук України
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ІВАНЮК ВІТАЛІЙ АНАТОЛІЙОВИЧ

УДК 519.876.5:004.942

ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ОБ'ЄКТАХ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВІ ОДНОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

Спеціальність 01.05.02 — математичне моделювання та
обчислювальні методи

Галузь знань – інформаційні технології

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

В.А. Іванюк

Науковий консультант: Федорчук Володимир Анатолійович,
доктор технічних наук, професор

Київ – 2020

АНОТАЦІЯ

Іванюк В.А. Методи та засоби математичного моделювання динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка МОН України. – Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, Київ, 2020.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню науково-технічної проблеми створення методів математичного та комп'ютерного моделювання динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами в розв'язуванні задач керування, контролю та вимірювання на основі одновимірних інтегральних моделей.

Для зниження складності алгоритмічної та програмної реалізації моделей і забезпечення вимог щодо завадостійкості та швидкодії в системах керування, контролю і вимірювання розроблено методи та засоби побудови і застосування спрощених динамічних моделей у вигляді інтегральних операторів Вольтерри та інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду, в тому числі поліноміальних.

Досліджено найбільш типові підходи до перетворень диференціальних моделей із частинними похідними, які є базовими для об'єктів із розподіленими параметрами, з метою їх спрощення та зведення до інтегральної форми, зокрема методи розщеплення, потенціалів, функції Гріна, інтегральних перетворень, дробових похідних. На основі застосування даних методів побудовано інтегральні моделі для ряду вимірювальних перетворювачів, зокрема температури.

На основі проведеного аналізу моделей динамічних об’єктів із розподіленими параметрами та методів їх еквівалентних перетворень удосконалено базовий набір структурних елементів, які подаються у вигляді передатних функцій та інтегральних операторів, до якого долучено ірраціональні ланки (напівінтегральну, напівінерційну, напівколивальну, напівзапізнення), що дозволяє за допомогою структурно-алгоритмічного підходу, аналогічно до об’єктів із зосередженими параметрами, здійснювати синтез моделей об’єктів із розподіленими параметрами.

Для побудови спрощених моделей розроблено та досліджено ряд методів апроксимаційних перетворень динамічних моделей, а саме: метод представлення ядер поліноміальних інтегральних моделей Вольтерри у виродженому вигляді на основі апроксимації багатовимірних функцій функціональними представленнями у формі степеневих або експоненціальних апроксимаційних наближень шляхом застосування методу найменших квадратів; метод апроксимації моделей у вигляді диференціальних рівнянь із частинними похідними на основі застосування диференціально-різницевої апроксимації, перетворення Лапласа, структурно-алгоритмічного методу, методу ланцюгових дробів, що дозволяє будувати «економні» моделі зі збереженням їх адекватності на рівні диференціально-різницевої моделі; метод ланцюгово-дробової апроксимації складних передатних функцій ірраціонального та трансцендентного типу, сформульовано рекомендації щодо застосування структурної декомпозиції первинних моделей.

Через складність і різноманіття процесів, що протікають у складних керованих системах, методи побудови математичних моделей досліджуваних динамічних процесів за допомогою законів природи досліджуваних динамічних процесів часто виявляються малоефективними. Тому найбільш прийнятними є експериментальні методи ідентифікації. В дисертаційній роботі досліджено методи ідентифікації параметричних динамічних моделей у формі передатних функцій на основі застосування детермінованого (застосування перетворення Лапласа та апроксимаційного представлення перехідної характеристики) та стохастичного (застосування моментів Пуассона) підходів, що дозволило отримувати апроксимаційні моделі об'єктів із розподіленими параметрами у формі дробово-раціональних передатних функцій, та метод побудови моделі лінійної динамічної системи у формі непараметричного оператора Вінера-Гопфа в сфері його застосування до об'єктів із розподіленими параметрами шляхом формування рекомендацій щодо вибору типу вхідних сигналів та необхідної мінімальної кількості експериментів.

Для побудови моделей нелінійних динамічних систем розроблено метод ідентифікації моделей у формі інтегро-степеневих рядів Вольтерри, який базується на серії детермінованих вхідних сигналів. Ключові проблеми, які виникають при ідентифікації – а саме, числове диференціювання експериментальних залежностей та необхідність проведення значної кількості експериментів, розв'язуються таким чином: диференціювання здійснюється на основі аналітичного диференціювання апроксимацій поліномами та експоненціальними функціями результатів експериментів, що дозволяє підвищити стійкість до шумових завад; суттєве скорочення кількості необхідних експериментів у порівнянні з традиційним підходом досягається шляхом адаптації процесу проведення серії активних експериментів та заміни ряду результатів інтерполяційними даними зі збереженням необхідного рівня адекватності моделей нелінійних динамічних систем.

Проблеми числової реалізації інтегральних моделей, пов'язані з накопиченням кількості обчислень, розв'язуються шляхом застосування методу розділених ядер та векторно-матричного підходу. Числова реалізація поліноміальних інтегральних операторів Вольтерри із застосуванням апроксимації багатовимірних ядер функціями у вигляді суми добутків незалежних змінних дозволяє скоротити на порядок кількість необхідних обчислювальних процедур. Для ефективної числової реалізації поліноміальних інтегральних операторів Вольтерри на основі методу квадратур розроблено векторно-матричний метод. Він дозволяє створити універсальний спосіб для програмної реалізації поліноміальних інтегральних операторів довільного порядку та створює можливості застосування паралельних алгоритмів в обчисленні інтегральних операторів. Для числової реалізації інтегральних операторів Вольтерри із сингулярними ядрами запропоновано зводити інтегральні моделі до моделей із ядрами без особливостей на основі методу внутрішньої регуляризації.

Для розв'язування задач керування, контролю та вимірювання, які зводяться до розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду, розроблено метод регуляризації шляхом введення диференціального регуляризаційного оператора. Отримані інтегро-диференціальні рівняння розв'язуються на основі застосування різницевих і квадратурних методів. У випадку застосування структурного підходу набув подальшого розвитку метод побудови обернених операторів, в межах якого запропоновано способи побудови обернених операторів для відновлення сигналів шляхом введення регуляризаційних параметрів, причому параметр регуляризації підбирається із врахуванням забезпечення стійкості оператора та максимальної адекватності моделі.

Для розв'язування обернених задач, які виникають у моделюванні нелінійних динамічних об'єктів, на основі моделей поданих у формі інтегро-степеневих рядів Вольтерри розроблено метод розв'язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду шляхом використання квадратурних алгоритмів та ітераційних методів розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Для підвищення завадостійкості процесу відновлення сигналів на вході динамічних об'єктів запропоновано регуляризаційний метод розв'язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри на основі введення диференціального регуляризаційного оператора. Для числової реалізації отриманих поліноміальних інтегро-диференціальних рівнянь запропоновано застосовувати їх апроксимаційні наближення, отримані на основі методу квадратур (кубатур) та різницевих формул.

На основі розроблених методів та алгоритмів створено комплекс програмних засобів Objects with distributed parameters, програмні модулі якого дозволяють будувати інтегральні моделі об'єктів із розподіленими параметрами із використанням еквівалентних, апроксимаційних перетворень та методів експериментальної ідентифікації, а також розв'язувати прямі та обернені задачі динаміки на основі числової реалізації інтегральних операторів та рівнянь Вольтерри, в тому числі поліноміальних. Програмний комплекс значно розширює можливості середовища Matlab при створенні комп'ютеризованих систем керування, контролю та вимірювання.

Із використанням розроблених методів і засобів розв'язано ряд модельних та прикладних задач, зокрема розроблені методи ідентифікації нелінійних об'єктів з розподіленими параметрами, а також методи розв'язування обернених задач (відновлення сигналів на вході) використано для покращення швидкості реагування системи моніторингу температурних режимів чипів комутаторів доступу комп'ютерної мережі.

Ключові слова: моделювання об'єктів із розподіленими параметрами, комп'ютеризовані засоби керування, контролю та вимірювання, оператор Вольтерри, рівняння Вольтерри першого роду, поліноміальний інтегральний оператор.

ANNOTATION

Ivaniuk V.A. Methods and tools for mathematical modeling of dynamic processes in objects with distributed parameters based on the one-dimensional integral models. – Qualification work as manuscript.

Thesis for a Doctor of Technical Science in Specialty 01.05.02 «Mathematical Modeling and Computational Methods». – Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University. – Pukhov Institute for Modelling in Energy Engineering NAS of Ukraine. – Kyiv, 2020.

The thesis research is devoted to the solution of scientific and technical problem of developing methods of mathematical and computer simulation of dynamic processes in objects with distributed parameters when solving operating, control and measurement problems on the basis of one-dimensional integral models.

To reduce the complexity of algorithmic and software implementation of models and to ensure the requirements for noise immunity and high speed response in operating, control and measurement systems, methods and means for constructing and applying simplified dynamic models in the form of Volterra integral operators and Volterra integral equations of the first kind, including polynomials, have been developed.

The most typical approaches to partial differential derivative model transformations, which are basic for distributed parameter objects, have been researched in order to simplify and reduce them to the integral form, including splitting methods, potentials, Green's function, integral transformations, fractional derivatives. Based on the application of these methods, integral models for a number of measuring transducers, in particular temperature, have been developed.

On the basis of the carried out analysis of models of dynamic objects with distributed parameters and methods of their equivalent transformations, the basic set of structural elements, which are presented in the form of transfer functions and integral operators, to which irrational links (semi-integral, semi-inertial, semi-oscillation, declining) have been added, that allows to synthesize models of objects with distributed parameters on the basis of structural-algorithmic approach, similarly to objects with concentrated parameters.

To simplify one-dimensional integral models, including polynomials, the methods of approximating multidimensional functions have been improved by reducing them to models with separated kernels based on the application of the least-squares method.

For the construction of simplified models, a number of methods of approximate transformations of dynamic models have been developed and researched, namely: the method of representation of nuclei of Volterra polynomial integral models in degenerate form on the basis of approximation of multidimensional functions by functional representations in the form of stepwise or exponential approximations by applying the least squares method; method of approximation of models in the form of differential equations with partial derivatives on the basis of application of difference-differential approximation, Laplace transform, structural-algorithmic method, method of chain fractions, that allows to construct "economical" models while keeping their adequacy at the level of difference-differential model; method of chain-fractional approximation of complex transfer functions of irrational and transcendental type, recommendations for application of structural decomposition of primary models have been formulated.

Due to the complexity and variety of processes occurring in complex controlled systems, methods of constructing mathematical models of the researched dynamic processes with the help of the laws of nature of the researched dynamic processes are often ineffective. Therefore, experimental methods of identification are most appropriate. In the thesis the methods of identification of parametric dynamic models in the form of transfer functions have been researched on the basis of the use of deterministic (application of Laplace transform and approximate representation of transient characteristic) and stochastic (application of Poisson moments) approaches, which allowed to obtain approximation models of objects with distributed parameters in the form of fractional-rational transfer functions, and a method of constructing a model of a linear dynamic system in the form of a nonparametric Wiener-Hopf operator in the field of its application to objects with distributed parameters by forming recommendations for the choice of type of input signals and the minimum number of experiments required.

To construct models of nonlinear dynamical systems, a method for identifying models in the form of Volterra integer-power series have been developed, it is based on a series of deterministic input signals. The key problems that arise in identification – namely, the numerical differentiation of experimental dependencies and the need to conduct a large number of experiments are solved in following way: differentiation is performed on the basis of analytic differentiation of approximations by polynomials and exponential functions of the results of experiments, that allows to increase the stability to noise interference; a significant reduction in the number of required experiments in comparison with the traditional approach is achieved by adapting the process of conducting a series of active experiments and replacing a number of results with interpolation data while keeping the required level of adequacy of models of nonlinear dynamic systems.

The problems of numerical implementation of integral models, related to the accumulation of calculations, are solved by the use of the split-core method and the vector-matrix approach. The numerical implementation of Volterra polynomial integral operators using multidimensional kernel approximation by functions in the form of the sum of productions of independent variables reduces the number of necessary computational procedures by an order of magnitude. A vector-matrix method was developed for the effective numerical implementation of polynomial Volterra integral operators based on the quadrature method. It allows developing a universal method for software implementation of arbitrary-order polynomial integral operators and creates the possibility of applying parallel algorithms in calculation of integral operators. For the numerical implementation of Volterra integral singular kernel operators, it is suggested to reduce integral models to models with kernels without singularities based on the method of internal regularization.

To solve the operation, control, and measurement problems that come down to solvation of Volterra integral equations of the first kind, a regularization method has been developed by introducing a differential regularization operator. The obtained integro-differential equations are solved on the basis of applying difference and quadrature methods. In the case of applying structural approach, the method of constructing inverted operators has been further developed, within which methods of constructing inverted operators for restoring signals by introducing regularization parameters have been suggested, and the regularization parameter is selected taking into account the stability of the operator and the maximum adequacy of the model.

To solve the inverse problems that arise in the modeling of nonlinear dynamic objects, a method of solving Volterra polynomial integral equations of the first kind by using quadrature algorithms and iterative methods of solving is developed on the basis of models presented in the form of integer-degree Volterra series of nonlinear algebraic equations. In order to increase the noise immunity of the signal recovery process at the input of dynamic objects, a regularization method for solving the Volterra polynomial integral equations based on the input of a differential regularization operator is suggested. For the numerical realization of the obtained polynomial integro-differential equations, it is suggested to use their approximations obtained on the basis of the method of quadratures (cubature) and difference formulas.

Based on the developed methods and algorithms, a complex of Objects with distributed parameters software has been created, the software modules of which allow to build integral models of objects with distributed parameters using equivalent, approximate transformations and methods of experimental identification, as well as to solve direct and inverse dynamics problems on the basis of the numerical implementation of integral operators and Volterra equations, including polynomials. The software suite greatly extends the capabilities of the Matlab environment in creating computerized control, monitoring and measurement systems.

Using the developed methods and tools, a few model and applied problems were solved. In particular, the developed methods for identifying nonlinear objects with distributed parameters, as well as methods for solving inverse problems (input signal recovery), were used to improve the response speed of the monitoring system of temperature conditions of chips of access switches of a computer network.

Keywords: modeling of objects with distributed parameters, computerized means of operating, control and measurement, Volterra operator, Volterra equation of the first kind, polynomial integral operator.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Верлань А. Ф., Федорчук В. А., Іванюк В. А. Комп'ютерне моделювання в задачах динаміки електромеханічних систем : монографія. Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. Кам'янець-Подільський, 2010. 204 с. ISBN: 978-966-643-057-4

2. Божок А. М, Понеділок В. В., Іванюк В. А. Апаратно-орієнтований регуляризаційний метод диференціювання сигналів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2017. Вип. 16. С. 14–21. *(BASE, PKP Index, NSD)*

3. Верлань А. А., Іванюк В. А. Спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами на основі методу розщеплення. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2017. Т. 7, № 4. С. 285–290. *(Україніка Наукова, Російський індекс наукового цитування, Index Copernicus, Google Академія, EBSCO).*

4. Верлань А. Ф., Федорчук В. А., Іванюк В. А. Інтегральні моделі нестаціонарних задач теплопровідності на основі методу теплових потенціалів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2019. Вип. 19. С. 24–30. *(BASE, PKP Index, NSD)*

5. Иванюк В. А., Костьян Н. Л. Способ построения динамической модели линейного объекта по реакции на входное воздействие произвольной формы. *Электронное моделирование*. Київ, 2014. Т. 36. С. 113–119. *(Index Copernicus International, CrossRef, Ulrich's Periodicals Directory, Google Scholar, Cambridge Scientific Abstracts (CSA), Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, e-LIBRARY, ВІНІТІ РАН)*

6. Иванюк В. А., Костьян Н. Л., Махович А. И. Способы формирования передаточных функций приемника теплового потока. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2013. Вип. 8. С. 61–69. *(BASE, PKP Index, NSD)*

7. Іванюк В. А. Ланцюгово-дробовий метод розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри ІІ роду. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2012. Вип. 6. С. 88–97. *(BASE, PKP Index, NSD)*

8. Іванюк В. А. Моделювання процесу занурення буксируваних підводних об’єктів шляхом ланцюгово-дробової апроксимації передатних функцій. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2009. Вип. 2. С. 98–107. *(BASE, PKP Index, NSD)*

9. Іванюк В. А., Дячук О. А., Понеділок В. В. Метод обернених операторів відновлення сигналів на вході лінійних динамічних систем, що задані передатними функціями. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець- Подільський, 2017. Вип. 15. С. 62–67. *(BASE, PKP Index, NSD)*

10. Іванюк В. А., Корнєєв О. М. Розв’язування інтегральних рівнянь типу згортки за допомогою інтегральних перетворень. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2010. Вип. 4. С. 91–97. *(BASE, PKP Index, NSD)*

11. Іванюк В. А., Костьян Н. Л. Інтегральний метод розв’язування диференціальних рівнянь при моделюванні об’єктів із розподіленими параметрами. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2018. Вип. 18. С. 78–85.

12. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Аналітичне подання рядів Вольтерри на основі експериментальних даних. *Математичне та*

комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2014. Вип. 11. С. 43-50. *(BASE, PKP Index, NSD)*

13. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Побудова ядер інтегрального ряду Вольтерри методом апроксимації фігурою обертання. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2015. Вип. 12. С. 36–42. *(BASE, PKP Index, NSD)*

14. Іванюк В. А., Понеділок В. В., Грищук В. А. Комп'ютерна реалізація детермінованого способу ідентифікації інтегральних моделей нелінійних динамічних об'єктів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2014. Вип. 10. С. 59–67. *(BASE, PKP Index, NSD)*

15. Іванюк В. А., Ситник О. О., Стертен Ю. Дослідження еквівалентних форм представлення динамічних моделей вимірювальних перетворювачів методом обчислювальних експериментів. *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: технічні науки*. Черкаси, 2018. № 1. С. 27–34. *(Index Copernicus International, Citefactor, Google Академія, Academic Recource Index, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat)*

16. Іванюк В. А., Тихоход В. О., Протасов С. О. Інтегральні моделі ірраціональних та трансцендентних ланок. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2011. Вип. 5. С. 101–109. *(BASE, PKP Index, NSD)*

17. Іванюк В. А., Федорчук В. А. Адаптивний метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем інтегральними рядами Вольтерри. *Електронне моделювання*, 2019. Т. 41, № 3. С. 33–42. *(Index Copernicus International, CrossRef, Ulrich's Periodicals Directory, Google Scholar, Cambridge Scientific Abstracts (CSA), Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, e-LIBRARY, ВІНІТІ РАН)*

18. Ivaniuk V., Fedorchuk V. Application of correlation method for identification of models of the linear dynamic systems with distributed. *Danish Scientific Journal*. 2019. № 28 (3). P. 45–53.

19. Ivaniuk V., Ponedilok V. Method of restoration of input signals of nonlinear dynamic object with destributed parameters. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2018. Вип. 18. С. 65–73. *(BASE, PKP Index, NSD)*

20. Ivanyuk V., Ponedilok V., Sterten Jo. Solving inverse problems of dynamics of non linear objects based on the Volterra series. *Computational problems of electrical engineering*, Vol. 6, No. 1. Lviv, 2016. P. 9–16.

21. Ivanyuk V. A. Method of inverse operator for the recover input signal. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2018. Вип. 17. С. 63–70. *(BASE, PKP Index, NSD)*

22. Ivanyuk V. A., Fedorchuk V. A. Vector-matrix method of numerical implementation of the polynomial integral Volterra operators. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2019. Вип. 20. С. 40–50. *(BASE, PKP Index, NSD)*

23. Ivanyuk V. A., Halmuhamedova F. A. Recovering dynamic distortions on output of channel transmitted continuous signals. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2012. Вип. 7. С. 55–60. *(BASE, PKP Index, NSD)*

Праці апробаційного характеру:

24. Верлань А. Ф., Федорчук В. А., Іванюк В. А. Реалізація ланцюгово-дробових наближень передатних функцій структурним методом. *Моделювання в електротехніці, електроніці і світлотехніці* : матеріали міжнародної науково-технічної конференції MEEC'10. Київ. 2010. С. 45–46.

25. Іванюк В. А. Метод відновлення сигналів на вході нелінійних динамічних об'єктів з розподіленими параметрами. *Моделювання-2018.* Київ, 2018. С. 154–157.

26. Іванюк В. А., Грищук В. А. Побудова апроксимаційних інтегральних моделей нелінійних динамічних об'єктів. *Сучасні проблеми*

математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : тези доповідей V міжнародної наукової конференції. Кам'янець-Подільський, 2012. С. 34–35.

27. Іванюк В. А., Корнєєв О. М. Використання ланцюгових дробів при розв'язанні інтегральних рівнянь типу згортки операційним методом. *Интегральные уравнения – 2009 – Integral equations – 2009* : сб. тезисов конф. Київ, 2009. С. 83–85.

28. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Алгоритм розв'язування обернених задач динаміки нелінійних об'єктів на основі рядів Вольтерри. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей. Кам'янець-Подільський, 2016. С. 81–83.

29. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Алгоритми моделювання нелінійних систем керування на основі інтегральних рівнянь. *Зб. тез науково-технічної конференції молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова*. Київ, 2016. С. 28.

30. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Ідентифікація нелінійних динамічних систем у вигляді інтегральних рядів Вольтерри на основі детермінованих моделей. *Моделювання* : тези XXXIII науково-технічної конференції. Київ, 2014. С. 14–15.

31. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Побудова ядер інтегрально ряду Вольтерри на основі методу апроксимації фігурою обертання. *Матеріали Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів».* Рівне, 2015. С.79.

32. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Чисельна реалізація інтегральних рядів Вольтерри. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей. Кам'янець-Подільський, 2014. С. 64–65.

33. Іванюк В. А., Стертен Ю. Дослідження обчислювальних особливостей форм динамічних моделей вимірювальних перетворювачів. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей. Кам'янець-Подільський, 2018. С. 30–31.

34. Іванюк В. А., Федорчук В. А. Адаптивний метод ідентифікації моделей у вигляді інтегральних рядів Вольтерри. *Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання 2019*. Івано-Франківськ, 2019. С. 103–106.

35. Понеділок В. В., Іванюк В. А. Чисельне диференціювання таблично заданих функцій. *Праці V Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів», присвяченої пам'яті професора Ю.П. Кунченка* : тези доповідей. Черкаси, 2015. С. 196.

36. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Понеділок В. В. Ідентифікація моделей нелінійних елементів інфокомунікаційних систем у формі функціональних рядів Вольтерри. *HICT`2019. Міжнародна науково-практична конференція «Наукоємні технології в інфокомунікаціях»*. Харків, 2019. С. 132–133.

37. Ivanyuk V., Ponedilok V. The identification of nonlinear dynamical systems as integrated Volterra series based on deterministic signals. *Proceedings of the 5 th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-2015*. Sofia, Bulgaria : University of national and world economy, 2016. P. 230–238. *(ProQuest, EBSCOhost, Google Scholar).*

38. Ivanyuk V., Ponedilok V., Sterten Jo. Regularization methods for differentiating noise signals. *Proceedings of 14^{th} International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*, Lviv-Slavske, Ukraine, February 20–24, 2018. Lviv, 2018. P. 295–300. *(Scopus, Web Of Science, Google Академія).*

Праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

39. Іванюк В. А. Математичні пакети прикладних програм : навчальний посібник. Кам'янець-Подільський, 2015. 160 с.

40. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Верлань Д. А. Інтегральні рівняння в задачах математичного моделювання : навчальний посібник. Кам'янець-Подільський, 2014. 144 с.

41. Іванюк В. А. Розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду на основі методу ланцюгових дробів. *Наукові праці Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів : вип. 11, у 3 т. Кам’янець-Подільський, 2012. Т. 2. С. 30–31.

42. Іванюк В. А. Непараметрична ідентифікація передатних функцій теплових потоків. *Збірник наукових праць молодих вчених Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка*. Кам’янець-Подільський, 2016. Вип. 7. С. 131–132.

43. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Апроксимація функцій багатьох змінних методом найменших квадратів. *Наукові праці Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів : вип. 13, у 3 т. Кам’янець-Подільський, 2014. Т. 2. С. 48–49.

44. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Побудова моделей нелінійних динамічних систем заданих структурними схемами у випадку послідовних з’єднань на основі ряду Вольтерри. *Наукові праці Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів : вип. 15, у 3 т. Кам’янець-Подільський, 2016. Т. 2. С. 39–40.

45. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Регуляризаційні динамічні оператори диференціювання зашумлених сигналів. *Наукові праці Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : вип. 16, у 3 т. Кам’янець-Подільський, 2018. Т. 2. С. 52-53.

46. Іванюк В. А., Понеділок В. В., Іванюк Т. М. Способи відновлення сигналів на вході лінійних динамічних систем заданих моделями у вигляді передатних функцій методом обернених операторів. *Наукові праці Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : зб. за підсумками звітної наукової, конференції викладачів, докторантів і аспірантів : вип. 16, у 3 т. Кам’янець-Подільський, 2017. Т. 2. С. 38–40.

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Інтенсивний розвиток комп'ютеризованих засобів обробки інформації в сучасних керованих технічних системах характеризується постійно зростаючими вимогами до їх техніко-експлуатаційних характеристик. Функціонування відповідних технічних об'єктів забезпечується системами керування та контролю, що мають системи вимірювання, які повинні задовольняти сучасні вимоги щодо швидкодії, точності, надійності, завадостійкості тощо. Ці системи складають комп'ютерну (керуючу і контролюючу) частину керованої технічної системи, складність якої повинна бути обмеженою згідно з вимогами до надійності. Крім того, такі системи виконуються, як правило, у вмонтованому вигляді, що свідчить про наявність суттєвих обмежень на ресурси в разі такого виконання – розмір, вагу та ін. Вказані обмеження породжують відповідні вимоги до комп'ютерної частини, задоволення яких забезпечується обмеженнями щодо швидкодії і точності програмних засобів. У свою чергу, сучасне програмне забезпечення систем керування, контролю та вимірювання будується на основі (або з урахуванням) математичних моделей об'єктів керування, тобто суттєво залежить від складності цих моделей.

Значна частина об'єктів керування, як свідчить практика, відноситься до класу об'єктів із розподіленими параметрами. Основним класичним апаратом, який застосовується для математичного опису динаміки об'єктів із розподіленими параметрами, є апарат диференціальних рівнянь із частинними похідними. Застосування даних моделей, з урахуванням поставлених вище вимог та обмежених часових і апаратних ресурсів, у комп'ютеризованих системах керування, контролю та вимірювання є утрудненим, оскільки їх реалізація пов'язана зі складними обчислювальними процедурами і потребує великих обчислювальних ресурсів для забезпечення необхідної швидкодії.

Вирішення зазначеної проблеми може бути реалізоване через використання спрощених моделей. Такий підхід можливий, оскільки вихідні дані поставлених задач отримуються із певними похибками, в рамках яких моделі об’єктів керування можна будувати у спрощеному вигляді на основі еквівалентних та апроксимаційних перетворень базових моделей або на основі методів ідентифікації. Перспективним є використання інтегральних одновимірних моделей, які мають ряд позитивних властивостей: висока універсальність (структура моделі залишається незмінною, а властивості об’єкта задаються ядрами інтегрального оператора), згладжування експериментальних даних (можливість використання в реальних системах зі значним рівнем високочастотних спектрів шумів), можливість ефективної побудови макромоделей тощо. У випадку моделювання лінійних систем розподілені елементи зазвичай описуються інтегральними операторами Вольтерри. У моделюванні нелінійних систем можуть застосовуватись як моделі у вигляді інтегральних операторів з ядром Урисона або Гаммерштейна, так і моделі у формі інтегро-степеневого ряду Вольтерри. Використання останніх дає змогу описати нелінійну динамічну систему в квазілінійному вигляді, що значно спрощує їх використання у вбудованих комп’ютеризованих системах. Таке подання дозволяє ефективно розв’язувати як задачі аналізу, так і задачі відновлення сигналів. У випадку розв’язування задач аналізу формою опису буде поліноміальний інтегральний оператор Вольтерри, а у випадку розв’язування задач відновлення сигналів – поліноміальне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду, яке є класичним поданням у розв’язуванні такого класу задач.

Отже, у зв’язку з інтенсивним розвитком комп’ютеризованих керованих систем і суттєвим розширенням сфери їх застосування актуальною є науково-технічна проблема створення методів і засобів математичного та комп’ютерного моделювання динамічних процесів в об’єктах з розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей, що дозволяє враховувати ресурсні обмеження в побудові систем керування, контролю та вимірювання, які забезпечують процеси функціонування керованих технічних об’єктів.

Розробка методів моделювання об’єктів із розподіленими параметрами на основі інтегральних моделей пов’язана з необхідністю вирішення ряду наукових задач, зокрема: вдосконалення методів і засобів побудови інтегральних моделей на основі еквівалентних та/або апроксимаційних перетворень диференціальних рівнянь із частинними похідними; розробка методів ідентифікації моделей із врахуванням нелінійних залежностей та розподіленості параметрів; вдосконалення та розробка методів розв’язування задач аналізу на основі числової реалізації поліноміальних інтегральних моделей, у тому числі із сингулярними ядрами; розробка методів відновлення сигналів на вході нелінійних динамічних систем на основі розв’язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду; вдосконалення пакетів прикладних програм моделювання (які орієнтовані на реалізацію переважно диференціальних моделей) для реалізації інтегральних моделей об’єктів із розподіленими параметрами.

У розвиток методів і засобів математичного та комп’ютерного моделювання динамічних об’єктів із розподіленими параметрами вагомий внесок було зроблено завдяки роботам Апарцина А. С. [8, 9, 10, 12, 14, 13, 225, 226], Бутковського А. Г. [30], Верланя А. Ф. [38, 39, 43, 48, 41, 47, 50, 46, 40], Дейнеки В. С. [63], Жученка А. І. [79, 80, 82], Євдокимова В. Ф. [41], Кривоноса Ю. Г. [27, 185], Кубрака А. І. [79, 80], Павленка В. Д. [148, 151, 184], Палагіна В. В. [40, 181], Пилипенка Н. В. [154], Положаєнка С. А. [36, 157], Пупкова К. А. [159, 160], Рапопорта Э. Я. [163, 164], Сергієнка І. В. [174, 63], Сізікова В. С. [47, 177, 178], Ситника О. О. [46, 182, 180, 112, 181], Скопецького В. В. [27, 174, 183, 186, 185, 184], Солодуші С. В. [14, 188, 189, 190, 225, 226, 273, 274], Стояна В. А. [56, 56, 174, 183, 186, 185, 194, 193, 184], Billings S. A.[227, 228], Borys A. [229], Brunner H. [231, 232], Francis J Doyle[237, 236], Isermann R. [244], Liu Y. [259], Ogunnaike B. [235, 265, 264, 237, 236, 266], Pearson R. [235, 265, 237, 236, 266] та ін.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження проводилось у рамках науково-дослідних робіт у

Кам’янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка, що виконувались спільно з Інститутом проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України згідно з чинною угодою про спільну науково-освітню діяльність: «Математичне моделювання в задачах керування технологічними процесами» (№ держреєстрації 0113U004335), «Теоретичні основи та прикладні методи створення інтегрованих та розподілених засобів комп’ютерного моделювання для оптимального управління електромеханічними системами нафтогазодобувного, гірничого та транспортного обладнання» (шифр «Оптима», № держреєстрації 0107U000889), «Математичні методи і комп’ютерні засоби модельної підтримки розробок систем вимірювання і керування випробувальних стендів силових установок енергетичного і транспортного призначення» (шифр «Стан», № держреєстрації 0109U008340), «Створення методів і засобів математичного та комп’ютерного моделювання процесів інверсної обробки сигналів у вимірювальних каналах систем моніторингу енергетичних об’єктів» (шифр «Інверсія», № держреєстрації 0114U003949).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є створення методів і засобів математичного моделювання динамічних процесів в об’єктах із розподіленими параметрами шляхом отримання і застосування спрощених динамічних моделей у вигляді одновимірних інтегральних операторів і рівнянь, що забезпечує високі завадостійкість та швидкодію, а також зниження складності алгоритмічної та програмної реалізації моделей у системах керування, контролю і вимірювання.

Для досягнення поставленої мети в роботі вирішуються такі науково-технічні задачі:

– аналіз сучасного стану проблеми математичного та комп’ютерного моделювання динамічних об’єктів із розподіленими параметрами та обґрунтування актуальності науково-технічної задачі;

– аналіз та розробка методів побудови інтегральних моделей динамічних процесів в об’єктах із розподіленими параметрами на основі еквівалентних та/або апроксимаційних перетворень;

– розробка та дослідження методів ідентифікації моделей нелінійних динамічних об’єктів у формі одновимірних поліноміальних інтегральних моделей Вольтерри;

– розробка методів та алгоритмів числової реалізації одновимірних поліноміальних інтегральних операторів Вольтерри на основі застосування квадратурних методів і методу розділених ядер;

– створення методів розв’язування обернених задач динаміки лінійних та нелінійних динамічних систем шляхом застосування регуляризаційних підходів до розв’язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду;

– розробка структури і модулів програмної моделюючої системи та її апробація шляхом обчислювальних експериментів у розв’язуванні модельних і практичних задач.

Об’єктом дослідження є динамічні процеси в об’єктах із розподіленими параметрами.

Предметом дослідження є методи математичного та комп’ютерного моделювання динамічних процесів в об’єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей.

Методи дослідження. Для вирішення поставлених задач у дисертації використано: методи математичного моделювання динамічних систем для побудови та дослідження моделей; елементи теорії інтегральних рівнянь, методи еквівалентних перетворень для отримання одновимірних інтегральних моделей; методи обчислювальної математики для чисельної реалізації математичних моделей; методи розв’язування обернених задач динаміки для ідентифікації моделей та відновлення вхідних сигналів; методи програмної інженерії в розробці програмного комплексу; методи обчислювального експерименту для числового дослідження математичних моделей.

Наукова новизна отриманих результатів. У процесі вирішення визначених задач у роботі отримано такі наукові результати:

вперше запропоновано:

– адаптивний метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем у формі інтегро-степеневих рядів Вольтерри, що полягає в адаптації процесу проведення серії активних експериментів до необхідного рівня адекватності моделей та заміни ряду результатів інтерполяційними даними, що дозволяє суттєво зменшити кількість необхідних експериментів у порівнянні з традиційним підходом;

– метод числової реалізації поліноміальних операторів Вольтерри із застосуванням апроксимації багатовимірних ядер функціями у вигляді суми добутків незалежних змінних, що дозволяє зменшити на порядок кількість необхідних обчислювальних процедур;

– регуляризаційний метод розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду, в тому числі поліноміальних, на основі введення диференціального регуляризаційного оператора, що дозволяє підвищити ефективність процесу відновлення сигналів на вході динамічних об’єктів у разі наявності шумових завад;

удосконалено:

– базовий набір структурних елементів динамічних об’єктів із розподіленими параметрами, які подаються у вигляді передатних функцій та інтегральних операторів, до якого долучено ірраціональні ланки (напівінтегральну, напівінерційні, напівколивальну, напівзапізнення), що дозволяє на основі структурно-алгоритмічного підходу, аналогічно до об’єктів із зосередженими параметрами, здійснювати синтез моделей об’єктів із розподіленими параметрами;

– метод багаторазового диференціювання експериментально-отриманих залежностей на основі диференціювання апроксимацій результатів експериментів поліномами та експоненціальними функціями, що дає змогу отримувати стійкі до високочастотних завад результати і допускає використання тестових сигналів східчастого типу в ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем у формі інтегро-степеневих рядів Вольтерри;

– метод числової реалізації поліноміального оператора Вольтерри на основі методу квадратур шляхом застосування векторно-матричного підходу до апроксимації інтегральних операторів, який орієнтований на ефективну програмну реалізацію, що дозволяє створити універсальний спосіб програмної реалізації поліноміальних інтегральних операторів довільного порядку;

– методи розв’язування прямих та обернених задач динаміки об’єктів із розподіленими параметрами на основі застосування одновимірних інтегральних моделей шляхом введення регуляризаційного параметра в сингулярне ядро інтегральної моделі Вольтерри (в тому числі і поліноміальної), що дозволяє отримати інтегральну модель з ядрами без особливостей;

набули подальшого розвитку:

– методи апроксимації багатовимірних функцій на основі застосування методу найменших квадратів (метод апроксимації на основі степеневих функцій та метод експоненціальної апроксимації), що дозволяє здійснювати апроксимацію ядер інтегральних моделей ядрами, які розділяються;

– засоби комп’ютерного моделювання на основі розробленого комплексу програмних засобів побудови та дослідження інтегральних моделей динамічних об’єктів, що розширює можливості серійних пакетів комп’ютерного моделювання сумісних із MATLAB/Simulink.

Практичне значення отриманих результатів визначається тим, що створені методи та засоби математичного моделювання процесів динаміки в об’єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей використовуються в розробці математичного та програмного забезпечення комп’ютеризованих систем керування, контролю та вимірювання, які забезпечують процеси функціонування керованих технічних об’єктів.

Розроблений у середовищі MATLAB пакет прикладних програм на основі створених методів може ефективно використовуватись як у лабораторних дослідженнях, так і в реальних системах керування, контролю та вимірювання. Істотне прикладне значення має розроблений набір таких видів вимірювальних перетворювачів, які набули широкого практичного застосування. Результати роботи можуть знайти застосування в наукових дослідженнях, а також в освітньому процесі закладів вищої освіти.

Створені методи та засоби математичного та комп'ютерного моделювання використано в розв'язуванні ряду практичних задач, зокрема, в задачі відновлення сигналу на вході вимірювального перетворювача температури для оперативного контролю температурного режиму електронних компонент. Результати дисертаційного дослідження прийнято до впровадження: в ТзОВ «Мережа Ланет» для моніторингу температурних режимів роботи об'єктів інформаційно-обчислювальних систем, зокрема комутаційного та магістрального обладнання комп'ютерних мереж; ТзОВ «Лагідком» – у проєктуванні вимірювальних комплексів контролю температурних режимів чипів комутаторів доступу та агрегації, що дозволило підвищити ефективність процесів контролю та керування інформаційно-телекомунікаційними системами; ТзОВ «Імпульс» ТРК «Імпульс ТБ» – у проєктуванні апаратно-програмних засобів автоматизованої підтримки комутаційного та магістрального обладнання інформаційно-комп'ютерних мереж. Також результати дисертаційної роботи використовуються у Кам'янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка для вдосконалення теоретико-методологічного забезпечення освітнього процесу та під час виконання науково-дослідних робіт.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи, що винесені на захист, автор отримав самостійно. Роботи [247], [88], [91], [90], [89], [93], [92] написано самостійно. В опублікованих роботах у співавторстві особисто дисертанту належать: [50] – розділ 3, підрозділи 1.3-1.6, 2.1-2.2, 5.6; [22] – структурний регуляризаційний метод диференціювання сигналів; [34] –

досліджено метод зведення багатовимірної задачі теплопровідності до сукупності одновимірних задач; [49] – побудовано інтегральні моделі нестаціонарних задач теплопровідності та запропоновано алгоритм їх числової реалізації; [99] – досліджено метод ідентифікації динамічних систем в інтегральній формі на основі пасивних експериментів; [85] – розроблено методи побудови моделей об’єктів із розподіленими параметрами на основі ланцюгово-дробової апроксимації ірраціональних передатних функцій та диференціально-різницевих моделей; [96, 97] – розроблено метод розв’язування інтегральних рівнянь на основі ланцюгово-дробової апроксимації; [98] – розроблено метод реалізації ірраціональних передатних функцій у моделюванні об’єктів із розподіленими параметрами; [102, 103] – удосконалено метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем у формі поліноміального оператора Вольтерри на основі застосування метода найменших квадратів у диференціюванні результатів експериментів; [107, 106] – удосконалено метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем у формі поліноміального оператора Вольтерри на основі застосування диференціювання результатів експериментів фігурою обертання; [110, 94, 104] – розроблено модель ідентифікації нелінійних динамічних систем у формі поліноміального оператора Вольтерри; [95, 111] – розроблено метод обернених операторів відновлення сигналів на вході динамічних систем; [112, 113] – запропоновано підхід вибору оптимальної моделі динамічних об’єктів; [114] – розширено базовий набір моделей ланок динамічних об’єктів із розподіленими параметрами, який орієнтований на структурно-алгоритмічну реалізацію; [116, 115, 158] – розроблено адаптивний метод ідентифікації моделей у формі поліноміальних інтегральних операторів Вольтерри; [248, 109] – розроблено метод зведення реалізації поліноміальних інтегральних операторів до поелементного множення; [245] – досліджено метод ідентифікації моделей об’єктів із розподіленими параметрами на основі рівняння Вінера-Гопфа; [246] – розроблено регуляризаційний метод розв’язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду;

[252, 100, 101] – розроблено метод відновлення сигналів на вході нелінійних динамічних об’єктів на основі розв’язування поліноміального рівняння Вольтерри першого роду другого степеня; [249] – досліджено структурний метод відновлення вхідних сигналів на вході динамічних систем; [51] – розроблено метод реалізації інтегральних моделей на основі ланцюгово-дробової апроксимації; [158] – проведено аналіз методів чисельного диференціювання експериментальних залежностей; [250] – розроблено метод ідентифікації нелінійних динамічних об’єктів на основі детермінованих ступінчатих вхідних сигналів у формі поліноміальних операторів Вольтерри; [251, 108] – удосконалено метод диференціювання сигналів на основі регуляризаційного підходу; [209] – підготовлено розділи 1-2; [105] – досліджено метод побудови поліноміальних інтегральних операторів на основі еквівалентних перетворень.

Апробація матеріалів дисертації. Основні положення дисертації було оприлюднено й обговорено на таких конференціях: Міжнародна конференція «Інтегральні рівняння-2009» (Київ, 2009), ІІІ міжнародна науково-практична конференція «Моделювання в електротехніці, електроніці і світлотехніці» (Київ, 2010), V міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (Кам’янець-Подільський, 2012), VI Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (Кам’янець-Подільський, 2014), Міжнародний науковий семінар «Інтегральні рівняння в математичному та комп'ютерному моделюванні» (Київ, 2014), V Міжнародна конференція «Моделювання в електротехніці, електроніці та світлотехніці» (Київ, 2014), ХХХІІІ науково-технічна конференція «Моделювання» (Київ, 2014), Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (Рівне, 2015), V Міжнародна науково-практична конференція «Обробка сигналів і негаусівських процесів», присвячена пам’яті професора Ю.П. Кунченка (Черкаси, 2015), 5th International Conference on Application of Information and Communication Technology and

Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE – 2015) (Sofia, Bulgaria, 2015), Науково-технічна конференція молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова (Київ, 2016), Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (Кам'янець-Подільський, 2016), 7th International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE-2017) (Sofia, Bulgaria, 2017), Міжнародна наукова конференція «Питання оптимізації обчислень» (ПОО-XLIV), присвячена 60-річчю від дня заснування Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України (Кам'янець-Подільський, 2017), 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET-2018) (Lviv-Slavske, Ukraine, 2018), 8-ма Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», присвячена 100-річчю Національної академії наук України та 100-річчю Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (Кам'янець-Подільський, 2018), Шоста міжнародна наукова конференція «Моделювання-2018», яку приурочено до 100-річчя від дня утворення Національної академії наук України та річниці з дня народження академіка НАН України Пухова Георгія Євгеновича (Київ, 2018), Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання» (Івано-Франківськ – Яремче, 2019), III Міжнародна науково-практична конференція HICT`2019 «Наукоємні технології в інфокомунікаціях» (Харків – Кам'янець-Подільський, 2019), Міжнародний науковий симпозіум «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLVI)», присвячений 50-річчю від дня проведення І симпозіуму та літньої математичної школи з питань точності та ефективності обчислювальних алгоритмів (Київ, 2019).

Публікації. За результатами виконаних теоретичних і експериментальних досліджень опубліковано 46 наукових робіт, з них 1 монографія, 21 стаття в наукових фахових виданнях України, що входять до переліку, затвердженого МОН України, 6 статей у виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз, 15 публікацій у працях і матеріалах наукових конференцій, 2 публікації в закордонних виданнях, 1 публікація у збірнику наукових праць, який включено в міжнародні наукометричні бази Scopus та Web of Science, 7 публікацій підготовлено одноосібно, англійською мовою – 8 публікацій.

Детальний список публікацій здобувача за темою дисертації наведено у додатку Г.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел та 4 додатків. Загальний обсяг роботи становить 419 сторінок, із них основного тексту дисертації − 281 сторінка, 132 рисунки, 36 таблиць, список використаних джерел включає 281 найменування та займає 28 сторінок, обсяг додатків складає 61 сторінка.

РОЗДІЛ 1.
ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ОБ’ЄКТАХ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. Особливості динамічних процесів в об’єктах із розподіленими параметрами

Всі реальні системи певною мірою містять елементи з розподіленими параметрами. При цьому, в залежності від поставленої задачі, для однієї і тієї ж системи можуть бути розроблені різні типи моделей, які відображають в більшій чи меншій мірі її основні характеристики. Очевидно, що ефективність моделей у розв’язуванні задач керування, контролю чи вимірювання буде залежати від рівня їх адекватності, тобто наскільки враховані важливі характеристики об’єктів, зокрема розподіленість параметрів [48, 50, 71, 140, 141, 163, 164].

Існує широкий клас керованих процесів, що описуються просторово-часовими характеристиками фізичних полів різної природи (електромагнітні та температурні поля, поля концентрацій, переміщень, деформацій, напружень, швидкостей, тисків, потенціалів та ін.), які відносяться до систем із розподіленими параметрами, для яких нехтування просторовою залежністю функції стану призводить до втрати важливих властивостей об’єкта [164].

Технічні системи відносяться до об’єктів із розподіленими параметрами, якщо в їх структурі є хоча б один елемент із розподіленими параметрами. В залежності від сфери використання їх умовно можна розділити на класи, зокрема: клас електронних та електричних систем – системи, в структурі яких використовуються лінії затримки сигналу, системи з довгими лініями електропередачі [140, 141, 204, 243]; клас електромеханічних систем – електропривідні системи з тросами, довгими штангами, конвеєрами, валами [48, 50, 140, 141, 213]; клас систем автоматичного керування технологічними процесами – системи з плавильними печами, з термоустановками для випалювання, сушки чи випарювання та з іншими об’єктами [140]. Також варто виокремити клас вимірювальних перетворювачів, які є невід’ємною складовою будь-якої технічної системи. До таких об’єктів із розподіленими параметрами відносяться вимірювальні перетворювачі температури, тиску та ін. [57, 195]. Поданий поділ не є вичерпним, але він показує, що існує широкий спектр сучасних технічних систем в яких необхідно враховувати ефект розподіленості параметрів для опису їх складових.

Прикладом можуть виступати технічні системи, які в своїй структурі містять довгий однорідний вал, рівняння крутильних коливань якого має вигляд [50, 121, 165]

$$I\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2}=GJ_p\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2},$$

або

$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

де I – момент інерції одиниці довжини валу; $\varphi(x,t)$ – кут закручення валу в перерізі x; G – модуль зсуву; J_p – полярний момент інерції поперечного перерізу; $a=\sqrt{GJ_p/I}$ – швидкість переміщення хвилі пружної деформації, l – довжина валу, t – час. Початкові умови вважаються нульовими:

$$\varphi(x,0)=0;\ \frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}=0,\ 0\le x\le l,\ t=0.$$

Якщо до лівого кінця валу ($x=0$) прикладений зовнішній крутильний момент $M(0,t)$, а правий кінець валу вільний, тоді граничні умови мають вигляд

$$-GJ_p \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = M(0,t);\ \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0. \qquad (1.2)$$

Модель керування будується у вигляді «вхід-вихід» із врахуванням вхідного сигналу $M(0,t)$ і вихідного – $\varphi(l,t)$.

Приклади технічних систем.

На сьогодні розроблено багато способів керування об’єктами з розподіленими параметрами, але кожен з них базується на тому, що математична модель об’єкта відома [48, 50, 63, 64, 79, 84, 121, 123, 125, 126, 128, 132, 140, 141, 143, 154, 163, 164, 165, 166, 172, 185, 186, 189, 194, 195, 197, 214, 215, 223, 237, 258, 259, 264].

Розглянемо приклади типових технічних об’єктів, які потребують використання моделей розподілених ланок і підкреслюють необхідність побудови та використання спрощених одновимірних моделей для розв’язування задач керування, контролю та діагностування.

Довгі кінематичні передачі в маніпуляторах і роботах. Типовим технічним об’єктом, в якому необхідно враховувати розподіленість параметрів його складових є комплекс для виготовлення склопластикових конструкцій типу оболонок. Основний вузол комплексу для намотування містить намотувальний станок, що призначений для обертання оправки, і маніпулятор для армування, який здійснює укладання склолінії армування на поверхню оправки, яка обертається.

Процес намотки полягає у послідовному накладанні витків стрічки на поверхню оправки, створюючи водночас певний вигляд малюнка намотки. Це може забезпечуватись за умови достатньо точного відтворення складних програмних рухів маніпулятора, тому до його приводів висуваються високі вимоги щодо точності. Із всіх приводів маніпулятора найбільш важливим є привід повздовжнього переміщення платформи, так як саме він для більшості видів оболонок визначає точність відтворення рисунку намотки [48, 50].

Загалом кінематичні передачі не є абсолютно жорсткими, мають цілком визначену протяжність і володіють властивостями, які характерні для суцільного середовища. Тому подання кінематичної частини механізмів як зосередженої в точці жорсткої маси виправдано лише у випадку відносно невисокої швидкодії приводу і невеликих розмірів самого механізму [121].

Найбільш загальним і універсальним підходом є розгляд об’єкта керування як системи із розподіленими параметрами [165]. Крайова задача для одномірного об’єкта має наступний вигляд:

$$L_t u(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t);\ \ 0 \le x \le l; \rho(x) > 0; E > 0, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x); u(0,t) = u(l,t);\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x); \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x};$$

де L_t — диференціальний оператор; $u(x, t)$ — зміщення точки з координатою x розподіленого об’єкта в момент часу t; E = const — лінійний модуль пружності матеріалу; $f(x, t)$ — розподілений зовнішній вплив; $u_0(x)$, $u_1(x)$ — зміщення і швидкість перерізу x розподіленого об’єкта в момент часу t = 0; l — довжина кільця; $\rho(x)$ — лінійна густина матеріалу об’єкта в точці x [165].

На основі (1.3) будується модель типу «вхід-вихід», де вхідним сигналом є сила прикладена до однієї із розподілених мас, яка знаходиться в точці x = 0, а вихідним – швидкість в іншій точці $x=l$, що дозволяє здійснювати керування процесом роботи маніпулятора.

Привід підйомних установок. У ряді промислових підйомно-транспортних установках, які оснащені системами автоматичного регулювання, використовуються гнучкі пружні канати великої довжини, вплив яких на динаміку системи значно перевершує вплив інших пружних зв’язків. Тому в проєктуванні системи керування приводом таких установок слід брати до уваги пружні деформації канатів і пов’язані з ними механічні коливання. Збільшення довжини підйомних канатів негативно позначається на точності підйомного приводу в заданій точці — найважливішому критерії якості роботи установки. За великої висоти підйому слід контролювати рухи підйомного приводу не за кутом його повороту, а безпосередньо за переміщенням самого тросу [121].

Проєктуючи системи автоматичного керування об'єктами, що містять гнучкі пружні канати великої довжини, виникає необхідність представляти останні у вигляді динамічних ланок, включених певним чином у структурну схему замкнутої системи.

Для визначення динамічних характеристик довгого пружного вертикально розташованого каната можна скористатися теорією коливальних систем з розподіленими параметрами, розглядаючи власні повздовжні коливання каната за умови, що сила тертя, яка викликає згасання коливань, пропорційна швидкості зсуву нескінченно малого елемента. Рівняння вільних повздовжніх коливань каната з урахуванням згасання коливань має вигляд

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h\frac{\partial u}{\partial t} - Es\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

де m — маса канату; h — коефіцієнт згасання; u — абсолютне видовження канату в заданому перерізі x (відлік ведеться від верхньої точки, що приймається за початок координат). За нульових початкових умов граничні умови для останнього рівняння мають вигляд

$$Es\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = T_H\left(t\right),\quad u\left(x,t\right)\big|_{x=0} = 0.$$

Дані рівняння динаміки є основою для проєктування систем керування натягом каната [48, 50].

<u>Системи буксирування</u>. Одним із підходів дослідження світового океану є використання буксированих підводних об'єктів (БПО). Керування глибиною занурення БПО здійснюється за допомогою гнучкого механічного зв'язку – троса або кабель-троса, який є ланкою з розподіленими параметрами. Для

дослідження гнучкого зв’язку враховуються його властивості пружності, інерційності та демпфування, які розподілені по його довжині та залежать від властивостей матеріалу. Під час використання системи стабілізації глибини занурення необхідно враховувати внутрішнє тертя троса і тертя його у воду, а також зусилля в точці кріплення тросу. Тому для забезпечення керування глибиною занурення БПО, крім систем автоматичного керування, які компенсують вплив качки судна, є необхідність використання математичної моделі троса як системи з розподіленими параметрами, яка дозволить врахувати внутрішнє тертя в ньому і тертя його з водою [50, 91, 128].

Описуючи поведінку ланки трос-БПО прийнято такі умови: змінні складові сил у тросі не переважають постійних складових, які обумовлені силами ваги у воді троса і БПО; деформації в тросі пропорційні силам, що виникають у ньому, і описуються законом Гука; сила опору руху БПО, закріпленого на кінці троса, приймається пропорційною швидкості його переміщення; трос розташований у воді вертикально і його форма представляє пряму лінію; нехтуються розподілені за довжиною троса обертальні моменти; поперечні коливання троса не враховуються. Сили, які діють в системі трос-БПО, мають наступні складові: вага у воді, сили пружності, сили інерції, сили тертя у воді та сили внутрішнього тертя. Так як ці складові розподілені по довжині троса, то сили, прикладені до верхнього і нижнього його кінців, не рівні між собою.

Повні сили і деформації складаються зі статичних і динамічних складових. До перших відноситься вага води, а також постійні складові сил пружності і тертя, обумовлені середньою швидкістю переміщення елементів у воді, яка визначається рівномірним рухом судна-носія і роботою лебідок в сталому режимі. Обмежуючись визначенням тільки динамічних складових, можна не враховувати вагу троса у воді. Ці складові з’являються під впливом збурень, прикладених до системи судно-БПО. В даних умовах коливання розподіляються вздовж троса зі швидкістю звука, відбиваючись від кінців троса.

Одна складова повздовжньої сили T викликає пружну деформацію у відповідності із законом Гука, а інша, згідно гіпотезі Фогта – сила внутрішнього тертя, яку вважають пропорційною швидкості деформації і площі поперечного перерізу троса. Повздовжня сила вимірюється по довжині троса через розподіленість повздовж нього сил інерції і сил внутрішнього опору, що обумовлено тертям у воду.

З урахуванням всіх припущень повздовжні коливання поперечного перерізу троса описуються такими диференціальними рівняннями:

$$T = E_T \cdot F \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \lambda \cdot F \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z \cdot \partial t}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = m \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta \cdot \frac{\partial x}{\partial t}, \tag{1.5}$$

де z – координата, вздовж якої відраховується довжина троса в ненапруженому стані, E_t – модуль пружності троса, F – площа поперечного перерізу троса, x – зміщення поперечного перерізу троса у напрямку повздовжньої осі троса Oz, початок якої співпадає з його верхнім кінцем, λ – множник, який визначає силу внутрішнього тертя, m – маса одиниці довжини троса, β – коефіцієнт опору одиниці довжини троса, що враховує його тертя у воді [91, 128].

Враховуючи, що $\lambda = E_T F \tau_T$, де τ_T – стала часу внутрішнього тертя [128], з (1.4) отримано:

$$T = E_T \cdot F \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z} + \tau_T \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z \cdot \partial t} \right). \tag{1.6}$$

На основі даних рівнянь визначаються моделі, в яких вхідні сигнали задаються на верхньому кінці троса, а вихідні – на нижньому кінці троса, що дозволяє здійснювати керування різними режимами роботи системи трос-БПО.

Бурові установки. Основним процесом під час буріння є робота долота по заглибленню стовбура свердловини. Показовою рисою систем автоматичного регулювання подачі долота є наявність колони бурильних труб, через які здійснюється замір параметрів забою (осьового навантаження, швидкості переміщення долота), а також передача з поверхні на забій регулюючої дії. Вплив бурильної колони проявляється в істотному спотворенні і запізненні інформації, яка отримується із забою, і керуючої дії, яка передається у зворотному напрямку. Тому організація процесу управління подачі долота пов’язана зі значними труднощами, які зростають разом зі збільшенням глибини свердловини. Підвищення продуктивності бурових установок може бути досягнуто разом із покращенням динамічних характеристик бурильної колони труб при передачі механічних зусиль від устя свердловини до забою [48, 50, 203].

На нижньому кінці колони прикладена осьова реакція забою і реакція долота, а по довжині розподілені сили ваги, в’язкого тертя, інерції. Поступальний рух колон під час процесу буріння відбувається за рахунок вироблення забою долотом. Колону бурильних труб, із врахуванням ряду допущень, вважають пружним однорідним стержнем із розподіленою масою, пружністю та еквівалентним в’язким тертям. Зміщення перерізів елементів колони описується диференціальним рівнянням із частинними похідними гіперболічного типу [48, 50]

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h\frac{\partial u}{\partial t} = Es\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

або при введені позначень $a = h/(2m)$, $c = \sqrt{Es/m}$ рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.7}$$

де m — маса одиниці довжини колони; u — зміщення перерізу колони відносно положення рівноваги; E — модуль пружності; s — площа перерізу колони; x

— координата перерізу колони; a — коефіцієнт затухання; h — коефіцієнт демпфування на одиницю довжини колони; c — швидкість розповсюдження зміщення вздовж колони.

Швидкість переміщення перерізу колони бурильних труб v і приріст сили P визначаються виразами $v = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $P = -Es\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$.

Використовуючи наземний регулятор подачі долота керуючим впливом для колони бурильних труб є швидкість зміщення верхнього кінця колони $v_0(t)$. Гранична умова для цього кінця колони має вигляд

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=0} = v_0(t). \tag{1.8}$$

Граничні умови для нижнього кінця колони бурильних труб мають вигляд

$$P(l,t) = -Es\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = zv_l(t), \tag{1.9}$$

де l — довжина колони; v_l — швидкість переміщення нижнього кінця колони бурильних труб; z — параметр, що визначає взаємодію долота з породою. Так, для абсолютно твердого забою $z = \infty$ [48].

Рівняння (1.7) – (1.9) визначають динамічні характеристики бурильних труб як об’єкта з розподіленими параметрами і є основою для побудови регуляторів.

Довгі лінії електропередач. Розглянемо математичну модель довгої лінії електропередачі (ЛЕП), яка подається як послідовний ланцюг чотириполюсників з параметрами R_j, L_j, G_j, C_j, де R_j — питомий активний опір j-ої ділянки фази, а L_j, G_j, C_j — відповідно питома індуктивність, питома активна провідність і питома ємність заданої ділянки.

Позначивши $u(x,t)$, $i(x,t)$, відповідно, напругу і струм, та приймаючи умову, що параметри R_j, L_j, G_j, C_j є величинами сталими і однаковими для всіх ділянок схеми фази ЛЕП можна записати наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_j \cdot i(x,t) + L_j \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G_j \cdot u(x,t) + C_j \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Диференціальні рівняння (1.10) з частинними похідними задають математичну модель довгої лінії електропередачі. Для отримання їх однозначного розв’язку необхідно задати початкові ($i(x,0)$, $u(x,0)$) та граничні ($i(0,0)$, $u(0,0)$ або $i(l,t_k)$, $u(l,t_k)$) умови.

Замість системи двох диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку (1.10) відносно функцій $u(x,t)$ та $i(x,t)$, як модель довгої ЛЕП, можна використовувати і одне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно лише однієї функції $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (RC + GL)\frac{\partial u}{\partial t} - GRu = 0$$

або однієї функції $i(x,t)$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} - GRi = 0,$$

які легко отримати із рівняння (1.10) шляхом додаткового диференціювання і підстановки одного рівняння в інше [140, 141].

Подані рівняння є основою для формування моделей типу «вхід-вихід» для динамічної регуляризації струму та напруги в різних точках ЛЕП.

Вимірювальні перетворювачі та їх динамічні властивості.

Широке використання в усіх сферах науки та техніки вимірювальних перетворювачів (у приладах, системах керування, контролю і діагностики) зумовлює необхідність вдосконалення відомих і створення нових вимірювальних перетворювачів різноманітних фізичних величин (тиску, переміщення, прискорення, сили, індуктивності, сили струму, напруги, ємності, температури та ін.). В той же час, інтенсивний розвиток і розширення сфери застосування автоматизованих вимірювальних систем значною мірою визначається вдосконаленням методів та засобів інтерпретації результатів вимірювання [23, 38, 44, 57, 195, 216, 239, 258]. Одним із напрямків підвищення ефективності їх роботи є розробка або вибір ефективних математичних та комп’ютерних моделей, від форм опису яких залежать характеристики їх числової реалізації, зокрема можливість роботи в системах реального часу за обмежених обчислювальних ресурсів.

Залежність зміни вихідних координат вимірювального перетворювача $\left(f_1(t), f_2(t),...\right)$ від зміни вхідних координат $\left(y_1(t), y_2(t),\ldots\right)$ може бути описана математичною моделлю, яка містить рівняння статики і динаміки. Перші описують стан координат, що встановилися вимірювальним перетворювачем, коли всі похідні функції $f_1(t), f_2(t),..., y_1(t), y_2(t),...$ дорівнюють нулю. Рівняннями статики є алгебраїчні залежності, а рівняння динаміки, які однозначно характеризують зміну вхідних координат у часі $y_1(t), y_2(t),...,$ являють собою диференціальні або інтегральні співвідношення.

Вибір методів та засобів для моделювання динаміки вимірювальних перетворювачів необхідно здійснювати із врахуванням їх приналежності до певного класу – із зосередженими чи розподіленими параметрами (рис. 1.1).

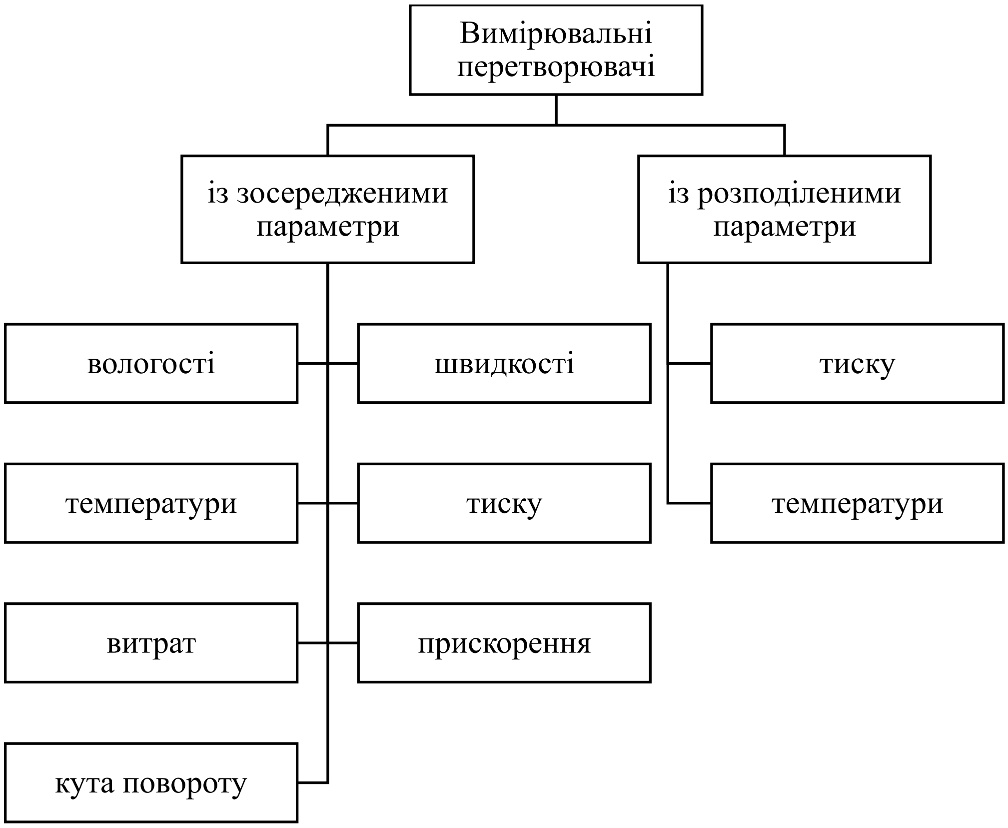


Рис. 1.1. Класифікація вимірювальних перетворювачів

Під вимірювальними перетворювачами із зосередженими параметрами розуміються такі вимірювальні перетворювачі, входи яких можна представити як точки і традиційно вони описуються звичайними диференціальними рівняннями. Детальний розгляд вимірювальних перетворювачів із зосередженими параметрами подано в додатку А, зокрема вимірювальних перетворювачів другого та першого порядку (температури, вологості газу, швидкості потоку, прискорення) [38, 216].

Вимірювальні перетворювачі з розподіленими параметрами відрізняються від вимірювальних перетворювачів із зосередженими параметрами тим, що входи в них неперервно розподілені вздовж деякої лінії чи поверхні. Динамічні властивості таких вимірювальних перетворювачів, зазвичай, описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними [57, 195]. Варто відмітити, що в залежності від особливостей поставленої задачі вимірювання, наприклад вимірювання температури чи тиску, вимірювальні перетворювачі можуть розглядатися як об'єкти із зосередженими чи розподіленими параметрами.

Публікації останніх років свідчать про те, що інтерес до вимірювальних перетворювачів з розподіленими параметрами різко зріс [35, 46, 57, 112, 181, 195]. Це пов'язано з відкриттями, які надали можливість технічного застосування деяких фізичних та хімічних явищ. Крім того, зростаючі вимоги до точності динамічних вимірювань зробили необхідним більш точний опис у часі та просторі поводження вимірювальних перетворювачів, що також привело до розгляду їх як вимірювальних перетворювачів з розподіленими параметрами [46, 57, 195].

Таким чином, вимірювальні перетворювачі з розподіленими параметрами є сьогодні об'єктом детального вивчення в теорії та практиці динамічних вимірювань.

Нижче розглянемо деякі типи вимірювальних перетворювачів із розподіленими параметрами, які знайшли широке застосування на практиці.

Вимірювальні перетворювачі тиску. В якості вимірювальних перетворювачів тиску розглянемо мембранні вимірювальні перетворювачі із врахуванням як часової, так і просторової координати. В залежності від форми мембрани математична постановка задачі реалізовується в прямокутній (для мембран прямокутної форми) та в полярній (для мембран круглої форми) системах координат [195, 196].

Математична модель вимірювального перетворювача тиску в прямокутній системі має вигляд

$$P(t)+\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial y^2}\right)=k_1\frac{\partial W(x,y,t)}{\partial t}+\rho_s\frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial t^2},$$

$$W(x,y,t)\big|_r=0,\ t\geq 0,\ W(x,y,t)\big|_t=W_0,\ \ W_t'(x,y,t)\big|_{t=0}=W_0',$$

де λ_0 – величина, яка характеризує матеріал з якого виготовлена мембрана, а також її пружність і натяг; індексом «r» відмічена границя мембрани;

$W(x,y,t)$ – миттєве значення відхилення точки мембрани з координатами x, y від нульового положення; W_0, W_0' – сталі величини; k – коефіцієнт демпфування; ρ_s – маса одиниці поверхні мембрани.

Розглядаючи вимірювальний перетворювач з круглими мембранами припускаємо, що для всіх точок, рівновіддалених від центру мембрани, відхилення має одне і теж значення незалежно від полярності кута.

Якщо в залежності від конкретних умов можна нехтувати коефіцієнтом деформації, то математичні моделі вимірювального перетворювача тиску дещо спрощуються, а саме, зникають перші члени в правих частинах. У практиці вимірювання змінних тисків вихідною величиною мембранних вимірювальних перетворювачів вважають або середньоповерхневе відхилення, або відхилення центру мембрани.

Якщо у вимірювального перетворювача тиску використовується кругла мембрана, то її математична модель має вигляд

$$\begin{gathered}\frac{1}{\lambda_0}\left[\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W(r,t)}{\partial r}\right]+P(t)=k_1\frac{\partial W(r,t)}{\partial t}+\rho_s\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial t^2},\\ W(r,t)\big|_{t=0}=W_0,\ W_t'(r,t)\big|_{t=0}=W_0', W(r,t)\big|_{r=R}=0,\end{gathered} \tag{1.11}$$

де r – відстань від центру мембрани до заданої точки, R – радіус мембрани.

Вимірювальні перетворювачі температури. У складній проблемі температурних вимірювань суттєві труднощі виникають під час вимірювання та регулювання нестаціонарних температур швидкоплинних процесів. Із багатьох фактів, від яких залежить точність вимірювання нестаціонарних температур, особливого значення набуває теплова та механічна інерція вимірювального пристрою. Механічна інерція вимірювального пристрою в основному визначається його передатними та реєстраційними ланками. Теплова інерція притаманна чутливому елементу приладу – теплоприймачу, і проявляється в тому, що теплоприймач не встигає миттєво реагувати на температуру середовища в якому він знаходиться.

Для розв’язування багатьох інженерних задач допустимо представити об’єкт як суцільне середовище, не розглядаючи мікроструктуру речовини і природу носіїв енергії. Дослідження закономірностей передачі теплової енергії в такому середовищі значно спрощується, якщо ввести поняття температури, визначивши її як параметр стану тіла, який характеризує міру його нагрівання. В загальному випадку температура тіла є функцією координат *X*, *Y*, *Z* та часу τ і визначає процес перенесення тепла [79, 85, 114, 154, 190].

Термоприймачі, які застосовуються у вимірюванні температури, часто вдається фізично уподібнити одному з трьох тіл: необмеженій пластині, кулі, необмеженому циліндрі. Під необмеженою пластиною мається на увазі пластина, ширина і довжина якої нескінченно великі порівняно з товщиною, під необмеженим циліндром розуміється циліндр, довжина якого значно більша його діаметра. Математичні моделі подані нижче побудовані на основі аналізу ряду літературних джерел, в переважній більшості моделі мають вигляд диференціальних рівнянь з частинними похідними [5, 19, 27, 79, 81, 85, 114, 120, 123, 125, 154, 163, 164, 169, 171, 185, 190, 211, 212, 223].

Рівняння, яке характеризує динамічні властивості термоприймачів має такий вигляд

$$\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right],$$

$$\lambda \left.\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial n}\right|_s + \alpha_k\left[U(x,y,z,t|_s - \theta(t)\right] = 0,\; U(x,y,z,t)|_{t=0} = U_0,$$

де a – коефіцієнт температуропровідності матеріалу термоприймача; λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу термоприймача; α_k – коефіцієнт конвективного теплообміну між теплоприймачем і середовищем, температура якого підлягає вимірюванню; $U(x,y,z,t)$ – показники термоприймача; *x*, *y*, *z* –

просторові координати, індекс s позначає поверхню термоприймача, а похідна з крайових умов береться по нормах з поверхні термометричного тіла.

Динаміка термоприймачів, моделлю для яких є необмежена пластина, описується наступним рівнянням і крайовими та початковою умовами:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2},\ t>0,\ -R<x<+R, \tag{1.12}$$

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=-R} + h\left[\theta(t) - U(x,t)\big|_{x=-R}\right] = 0,$$

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=R} + h\left[U(x,t)\big|_{x=R} - \theta(t)\right] = 0,$$

$$U(x,t)\big|_{t=0} = U_0,$$

де $h = \frac{\alpha_k}{\lambda}$ – відносний коефіцієнт конвективного теплообміну; R – половина товщини пластини, початок координат знаходиться в середині пластини.

У випадку змішаних крайових умов для одношарової нескінченної пластини та відсутності внутрішніх джерел тепла рівняння з частинними похідними має вигляд [50, 85, 114]

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}. \tag{1.13}$$

Граничними умовами задається розподіл густини теплового потоку на поверхні тіла як функція координати і часу

$$-\lambda\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=\delta} = q; \left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \tag{1.14}$$

початкова умова має вигляд:

$$T\left(x,t\right)\Big|_{t=0}=0. \qquad (1.15)$$

Якщо термоприймач має форму кулі та умови теплообміну симетричні, то динаміка термоприймача описується такою моделлю:

$$\frac{\partial U\left(r,t\right)}{\partial t}=a\left[\frac{\partial^2 U\left(r,t\right)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U\left(r,t\right)}{\partial r}\right],\ \tau>0,\ 0<r<R, \qquad (1.16)$$

$$\left.\frac{\partial U\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R}-h\left[U\left(r,t\right)\Big|_{r=R}-\theta\left(t\right)\right]=0,\ \left.\frac{\partial U\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R}=0,\ U\left(\varepsilon,t\right)\Big|_{t=0}=U_0,$$

де r – відстань від розглядуваної точки термоприймача до центру, розміщеного в початку координат; R – радіус термоприймача.

Для циліндричних теплоприймачів має місце рівняння

$$\frac{\partial U\left(r,t\right)}{\partial t}=a\left[\frac{\partial^2 U\left(r,t\right)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U\left(r,t\right)}{\partial r}\right],\ \tau>0,\ 0<r<R, \qquad (1.17)$$

$$\left.\frac{\partial U\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\ \left.\frac{\partial U\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R}+h\left[U\left(r,t\right)\Big|_{r=R}-\theta\left(t\right)\right]=0,\ U\left(r,t\right)\Big|_{t=0}=U_0.$$

Розглядаючи рівняння для термоприймачів різних форм, зазначимо, що всі вони можуть бути об’єднані в одне узагальнене рівняння. Тому, ввівши узагальнену просторову координату $\varepsilon\in\left[0,R\right]$ для вказаних трьох форм, отримано

$$\frac{\partial U\left(\varepsilon,t\right)}{\partial t}=a\left[\frac{\partial^2 U\left(\varepsilon,t\right)}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\nu}{\varepsilon}\frac{\partial U\left(\varepsilon,t\right)}{\partial \varepsilon}\right],\ \tau>0,\ 0<\varepsilon<R, \qquad (1.18)$$

$$\left.\frac{\partial U\left(\varepsilon,t\right)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0,\ \left.\frac{\partial U\left(\varepsilon,t\right)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=R}+h\left[U\left(\varepsilon,t\right)\Big|_{\varepsilon=R}-\theta\left(t\right)\right]=0,\ U\left(\varepsilon,t\right)\Big|_{t=0}=U_0.$$

Одним із найбільш часто використовуваних термоприймачів є термоприймачі стержневого типу. Для них маємо

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + m_k\left[\theta(t) - U(x,t)\right],$$

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ U(x,t)\big|_{x=l_0} = U_{cm}(t),\ U(x,t)\big|_{t=0} = U_0,$$

де $m_k = \frac{\alpha_k P_c}{c\gamma_0\tau_0}$; P_c – периметр поперечного перерізу термоприймача; c – питома теплоємність матеріалу термоприймача; γ_0 – щільність матеріалу; l_0, τ_0 – довжина та поперечний переріз термоприймача відповідно; U_{cm} – температура стінки, в якій закріплений термоприймач.

Таким чином, основним класичним апаратом, який застосовується для математичного опису об’єктів з розподіленими параметрами є апарат диференціальних рівнянь з частинними похідними. Наведені приклади наочно демонструють особливості задач керування, контролю та вимірювання, які породжуються просторовими залежностями керуючих впливів і керованих або вимірюваних величин об’єктів із розподіленими параметрами.

1.2. Основні підходи до математичного опису динамічних систем, що містять об’єкти з розподіленими параметрами

Математичні моделі динамічних об’єктів.

Велике розмаїття конкретних видів об’єктів із розподіленими параметрами розглянутих задач показали, що найбільш характерні представники утворюють досить широкий клас типових об’єктів і їх практично поширених модифікацій, що дає змогу однаково їх описувати в рамках певного класу математичних моделей. Математичний опис динамічних систем, як це показано вище, традиційно базується на диференціальних рівняннях, а також їх системах. Це пов’язано, насамперед, із тим, що зв’язок між фізичними величинами, які характеризують певний об'єкт чи явище, зазвичай, виражається через відомі фізичні закони, які, в свою чергу, опираються на використання апарату диференціального числення [85, 129, 169, 185, 233].

Отже, згідно з фізичними теоріями складних розподілених об'єктів (полів і середовищ) основним математичним апаратом є моделі у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними, які у самому загальному випадку є функціональними рівняннями виду

$$\Phi\left(t, x, y, z, ..., u, u_t, u_x, u_y, u_z, ..., u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, ...\right) = 0, \tag{1.19}$$

що містять одну або більше частинних похідних (у тому числі вище першого порядку) від шуканої функції декількох змінних $u = \left(t, x, y, z, ...\right)$ пов'язаних деякою функціональною залежністю Ф. Описові можливості цього типу винятково великі, а самі моделі найчастіше є наслідком фізичних законів, які подано у диференціальній формі. Під час реалізації моделей цього типу виникають значні труднощі, особливо у розв'язуванні нелінійних задач. Цим пояснюється застосування значної кількості прийомів спрощення або перетворення їх до інших типів моделей як на фізичному, так і математичному рівнях. Зокрема, такими прийомами є спрощення постановок задач (зниження розмірності), використання фізичних законів в інтегральній формі, лінеаризації тощо. Граничні умови, що накладаються на шукані функції та їх похідні, у сукупності з рівнянням (1.19), утворюють велику різноманітність постановок задач, для розв'язування яких застосувати певний загальний, універсальний підхід неможливо [48].

Одним із найбільш поширених різновидів моделі (1.19) виступає лінійне рівняння другого порядку, що моделює поведінку функції стану $Q(x,t)$ просторово одновимірного об'єкта з розподіленими параметрами. Воно описує широке коло найрізноманітніших фізичних явищ і може розглядатися в якості базової моделі об'єкта із розподіленими параметрами досить загального вигляду. Після приведення до канонічної форми запису, що не містить змішаних похідних [1, 168, 169, 171], це рівняння можна подати у вигляді

$$A(x,t)\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}+B(x,t)\frac{\partial Q}{\partial t}=C(x,t)\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 x}+D(x,t)\frac{\partial Q}{\partial x}+ \\ +E(x,t)Q+f\left(x,t,u(x,t)\right), x_0<x<x_1, t>0, \tag{1.20}$$

з типовими початковими і граничними умовами, які в одновимірному випадку мають вигляд:

$$Q(x,0)=Q_0^{(0)}(x);\ \frac{\partial Q(x,0)}{\partial t}=Q_0^{(1)}(x),\ x_0\le x\le x_1, \tag{1.21}$$

$$\alpha(x_0,t)Q(x_0,t)+\beta(x_0,t)\frac{\partial Q(x_0,t)}{\partial x}=g_0\left(t,u_0(t)\right), t>0, \tag{1.22}$$

$$\alpha(x_1,t)Q(x_1,t)+\beta(x_1,t)\frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x}=g_1\left(t,u_1(t)\right), t>0, \tag{1.23}$$

де A, B, C, D, E – параметри, які визначаються відносно конкретної задачі. Як випливає з (1.20)–(1.23), поведінка керованого виходу об’єкта, в якості якого розглядається просторово-розподілена функція $Q(x,t)$, яка описує стан об’єкта із розподіленими параметрами, однозначно визначається фіксованим початковим станом $Q_0(x)=\left(Q_0^{(0)}(x),Q_0^{(1)}(x)\right)$ та вхідними впливами f, g_0, g_1. Також, в ролі вхідних впливів можуть розглядатися (наприклад, у вигляді адитивних складових) відповідні керування $u(x,t)$, $u_0(t)$, $u_1(t)$ [164].

Керуючі впливи $u(x,t)$ формально включаються в рівняння об’єкта (1.20) у складі функції f, зокрема, для $f\left(x,t,u(x,t)\right)=u(x,t)$, і реалізовані, зазвичай, за рахунок внутрішніх джерел енергії або речовини, можна назвати внутрішніми керуваннями, а керуючі впливи $u_0(t)$, $u_1(t)$ в складі функцій g_0,

g_1, які фігурують в крайових умовах (1.22), (1.23) і характеризують цілеспрямований вплив на $Q(x,t)$, який здійснюється з боку навколишнього середовища на границі просторової області – крайовим керуванням або керування за крайовими умовами. Крайові керування $u_0(t)$, $u_1(t)$ для одновимірного об'єкта (1.20)–(1.23) сконцентровані в точках x_0 і x_1 на краях відрізка $[x_0, x_1]$ змінюються лише в часі t [164].

Для аналізу характеристик вхід-вихідних співвідношень об'єктів із розподіленими параметрами достатньою інформацією про зовнішній вплив є його приналежність відповідному функціональному простору, тобто визначення як елемента деякого досить широкого класу функцій. В якості такого класу може, зокрема, розглядатися клас узагальнених функцій, до якого насамперед відносяться дельта-функція, яка широко використовується в подальшому аналізі.

Основне співвідношення, яке зв'язує вихід об'єкта у заданому початковому стані з вхідними впливами, визначається спільним розв'язком (що розуміється в узагальненому сенсі) [168, 169, 171] крайової задачі (1.20)–(1.23), який, як відомо, може бути поданий у такій інтегральній формі [28, 164]:

$$Q(x,t) = \int_{x_0}^{x_1} N_0(x,\xi,t) Q_0^{(0)}(\xi)\, d\xi + \int_{x_0}^{x_1} N_1(x,\xi,t) Q_0^{(1)}(\xi)\, d\xi +$$
$$+\int_0^t \int_{x_0}^{x_1} G(x,\xi,t,\tau) f\left(\xi,\tau,u(\xi,\tau)\right) d\xi d\tau + \int_0^t K_0(x,t,\tau) g_0\left(\tau,u_0(\tau)\right) d\tau + \tag{1.24}$$
$$+\int_0^t K_1(x,t,\tau) g_1\left(\tau,u_1(\tau)\right) d\tau, \quad x \in \left(x_{0,}x_1\right),\ t > 0,$$

де ξ та τ змінні інтегрування, відповідно, за просторовою координатою і часом. Тут перші два інтеграли за просторовою змінною визначають складову загального розв'язку, що описує вплив на $Q(x,t)$ початкових розподілів $Q_0^{(0)}(x)$ та $Q_0^{(1)}(x)$ в (1.24); останні два інтеграли за часом враховують зосереджені вхідні впливи g_0 і g_1 в (1.22) і (1.23) за крайовими умовами, а подвійний інтеграл за просторово-часовою областю зміни просторового (ξ) і часового (τ) аргументів відображає вплив на реакцію об'єкта розподіленого вхідного впливу f.

Вихід об'єкта $Q(x,t)$ зв'язується із зовнішніми впливами f, g_0, g_1 та початковим станом $Q_0(x)$, згідно (1.24), відповідними ядрами лінійних інтегральних операторів (функціями впливу) N_0, N_1, G, K_0, K_1, що відображають внутрішні властивості об'єкта у відношенні до відповідних входів. Як випливає із загальної теорії лінійних рівнянь із частинними похідними, всі ці ядра можуть бути виражені у скінченному вигляді (за допомогою лише операцій диференціювання) тільки через одну з них – функцію $G(x,\xi,t,\tau)$ (під знаком подвійного інтеграла в (1.24)), яка є функцією Гріна розглянутої системи з розподіленими параметрами та відповідно до (1.24) з вичерпною повнотою описує властивості об'єкта із розподіленими параметрами, які не залежать від характеру вхідних впливів, і є його основною фундаментальною характеристикою [28, 29, 30, 137, 164].

Опис об'єкта з розподіленими параметрами у формі (1.20)–(1.23) має безліч можливих варіантів її постановок для різних початкових станів $Q_0(x)$ і впливів $g(x,t)$ за крайовими умовами в (1.22) і (1.23). При їх врахуванні загальні розв'язки мають складний вигляд. Можна підібрати таку функцію $w(x,t)$ замість $f(x,t)$, яка компенсує ефект впливу на вихідну величину ненульових початкових і неоднорідних крайових умов

$$\begin{cases} L\left[Q(x,t)\right] = w(x,t), \ x \in D, \ t > 0, \\ N\left[Q(x,t)\right] = 0, \ x \in \bar{D}, \ t = 0, \\ \Gamma\left[Q(x,t)\right] = 0, \ x \in \partial\bar{D}, \ \mathrm{t} > 0, \end{cases} \tag{1.25}$$

з нульовими початковими і однорідними крайовими умовами.

Система рівнянь (1.25) виявляється еквівалентною вихідній моделі (1.20)–(1.23), але при цьому, збираючи в праву частину рівняння всі вхідні впливи, істотно спрощує опис об’єкта, подаючи його в максимально простій і в той же час однаковій формі з єдиним впливом в правій частині операційного рівняння об’єкта для будь-яких варіантів конкретного задання цих входів. Система (1.25) називається стандартною формою задання (1.20)-(1.23), а функція $w(x,t)$ – стандартизуюча функція цієї задачі [164].

Операторні моделі. Передатні функції та інтегральні оператори і рівняння. Типові розподілені об’єкти керування або контролю можна розглядати як розподілений блок, під яким розуміється пристрій довільної природи із виділеними в його структурі вхідним впливом $x(\zeta,t)$ і вихідним сигналом $y(\xi,t)$. Таке представлення розподіленого об’єкта є достатньо корисним у структурно-алгоритмічному моделюванні систем із розподіленими параметрами, аналогічне до підходу у моделюванні систем із зосередженими параметрами, та значно спрощує класичні представлення моделей у формі диференціальних рівнянь із частинними похідними.

У розв’язуванні задач керування для об’єктів із зосередженими параметрами широкого поширення набули передатні функції [50]. У дослідженні об’єктів із розподіленими параметрами зв’язок між передатною і ваговою функціями $v(\zeta,\xi,t)$ задається співвідношенням

$$W(\zeta,\xi,p)=\int_0^\infty e^{-pt}v(\zeta,\xi,t)\,dt,$$

причому для повної характеристики передатної функції її передатних властивостей необхідно вже не передатна матриця зі скінченним числом рядків і стовпців, а двоточкова функція

$$W(\zeta,\xi;p)=\frac{Y(\xi,p)}{X(\zeta,p)},\zeta\in P,\xi\in Q, \tag{1.26}$$

де P — множина точок вхідного впливу; Q — множина точок, в яких спостерігається вихідний сигнал; $Y\left(\xi, p\right)$ і $X\left(\zeta, p\right)$ — функції зображень за Лапласом вихідного та вхідного сигналів [41, 50].

Таке представлення моделей об’єктів із розподіленими параметрами виявляється дуже корисним для структурного моделювання розподілених систем, аналогічно подібному підходу до задач аналізу та синтезу систем із зосередженими параметрами, який знайшов широке застосування для розв’язування самих різноманітних проблем автоматичного керування.

Опис співвідношення між вхідним та вихідним сигналами в лінійних об’єктах із розподіленими параметрами також можна представити інтегральною моделлю, яка буде відповідати (1.26), у вигляді

$$y(\xi,t)=\int_0^t K\left(\xi,\zeta,t,s\right)x\left(\zeta,s\right)ds, \tag{1.27}$$

де $x\left(\zeta,t\right)$ – вхідний вплив в точці ζ, $y\left(\xi,t\right)$ – вихідний сигнал в точці ξ, $K\left(\xi,\zeta,t,s\right)$ – ядро інтегрального оператора, що є ваговою (імпульсною перехідною) функцією об’єкта. Модель (1.27) є одновимірним представленням (1.24), тобто містить тільки один вхід та один вихід. Таке представлення можливе, за умови нульових значень інших складових, наприклад, початкової умови, яка вважається нульовою і у випадку використання передатних функцій. Важливим для практики є випадок, коли об’єкт є ще і стаціонарним, тоді модель (1.27) буде визначатися різницевим ядром

$$y(\xi,t)=\int_0^t K\left(\xi,\zeta,t-s\right)x\left(\zeta,s\right)ds. \tag{1.28}$$

Опис динамічних процесів у нелінійних об’єктах із розподіленими параметрами в інтегральній формі може здійснюватися нелінійними інтегральними операторами типу Гаммерштейна або Урисона, але із-за труднощів побудови таких моделей доцільним є використання спрощених моделей у вигляді поліноміальних операторів Вольтерри [21, 54, 110, 236, 271, 280]:

$$y(\xi,t)=\sum_{m=1}^{n}\underbrace{\int_0^t\ldots\int_0^t}_{m}K_m(\xi,\zeta,s_1,\ldots,s_m)\prod_{i=1}^{m}x(\zeta,t-s_i)ds_i,t\in[0,T], \qquad (1.29)$$

де $K_m(\xi,\zeta,s_1,\ldots,s_m)$ – багатовимірні ядра, $x(\zeta,t)$, $y(\xi,t)$ – відповідно вхідний і вихідний сигнали прикладені у точках ζ і ξ розподіленого об'єкта, n – деяке натуральне число, T – час перехідного процесу.

Властивості диференціальних та інтегральних моделей сполучаються в інтегро-диференціальних рівняннях, які можна подати у вигляді

$$\int K(x,y,u,u_{x_1},u_{x_2},u_{x_1x_2},\ldots)dy=F(x,u,u_{x_1},u_{x_2},u_{x_1x_2},\ldots), \qquad (1.30)$$

де порядки старших похідних від шуканої функції, що знаходяться під інтегралом і поза ним, можуть не збігатися. Природно, що рівняння (1.30) для відшукання розв'язку вимагає, щоб були задані крайові умови. Залучення інтегро-диференціальних рівнянь як моделей, що еквівалентні іншим можливим типам моделей, часто є корисним через можливість одержання нових методів наближеного розв'язування задачі.

Інтегральні моделі (1.28) і (1.29) є базовими у розв'язуванні прямих задач моделювання (задач аналізу) лінійних та нелінійних динамічних об'єктів відповідно. У випадку розв'язування обернених задач (відновлення сигналів, пошук керуючих впливів) отримуються моделі у формі інтегральних рівнянь Вольтерри [47]. На основі інтегрального оператора (1.28) отримується інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^t K(\xi,\zeta,t-s)x(\zeta,s)ds=y(\xi,t), \qquad (1.31)$$

де $y(\xi,t)$ – заданий вихідний сигнал в точці ξ, $x(\zeta,t)$ – шуканий вхідний вплив в точці ζ. У розв’язуванні обернених задач моделювання динамічних процесів у нелінійних об’єктах із розподіленими параметрами отримується поліноміальне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду, зокрема поліноміальне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду другого степеня:

$$\int_0^t K_1(\xi,\zeta,s)x(\zeta,t-s)ds + \\ +\int_0^t\int_0^t K_2(\xi,\zeta,s_1,s_2)x(\zeta,t-s_1)x(\zeta,t-s_2)ds_1ds_2 = y(\xi,t), \tag{1.32}$$

де $y(\xi,t)$ – вихідний сигнал на виході нелінійного динамічного об’єкта, $x(\zeta,t)$ – шуканий вхідний сигнал.

Висока універсальність, властивість згладжування експериментальних даних, ефективна побудова макромоделей визначають переваги інтегральних моделей. Але, в той же час, використання інтегральних моделей у моделюванні об’єктів із розподіленими параметрами породжує ряд задач, які пов’язані із проблемами побудови даних моделей на основі еквівалентних, апроксимаційних чи експериментальних методів, а також з проблемами розв’язування як прямих, так і обернених задач [47].

Розглянуті моделі об’єктів із розподіленими параметрами схематично можна представити у вигляді схеми – рис. 1.2. Дана схема не претендує на повноту, тобто в ній не відображені всі можливі моделі, а лише найбільш поширені. Вона включає диференціальні рівняння із частинними похідними (1.19), типовими прикладами яких є рівняння другого порядку (1.20) (теплопровідності, хвильове, телеграфне тощо). На схемі велика увага приділена інтегральним моделям, які є менш поширеними та дослідженими в галузі моделювання динамічних об’єктів із розподіленими параметрами. Класичними моделями є моделі у вигляді інтегральних рівнянь – інтегральні рівняння Вольтерри другого роду (класичні для моделювання задач керування) та інтегральні рівняння Вольтерри першого роду (1.31) і поліноміальні інтегральні рівняння Вольтерри першого роду (1.32) (класичні для задач відновлення сигналів). Ефективними моделями для дослідження динамічних об’єктів є операторні моделі, серед яких виділяються моделі у формі передатних функцій (1.26), які на відміну від об’єктів із зосередженими параметрами описуються трансцендентними або ірраціональними передатними функціями, але також є ефективними у моделюванні лінійних об’єктів, та інтегральних операторів, де для випадку лінійних об’єктів застосовуються оператори Вольтерри (1.28), а у випадку нелінійних об’єктів – поліноміальні інтегральні оператори Вольтерри (1.29), які є частинною сумою інтегро-степеневого ряду Вольтерри. Переваги диференціальних та інтегральних рівнянь можна отримати у використанні інтегро-диференціальних моделей (1.30).

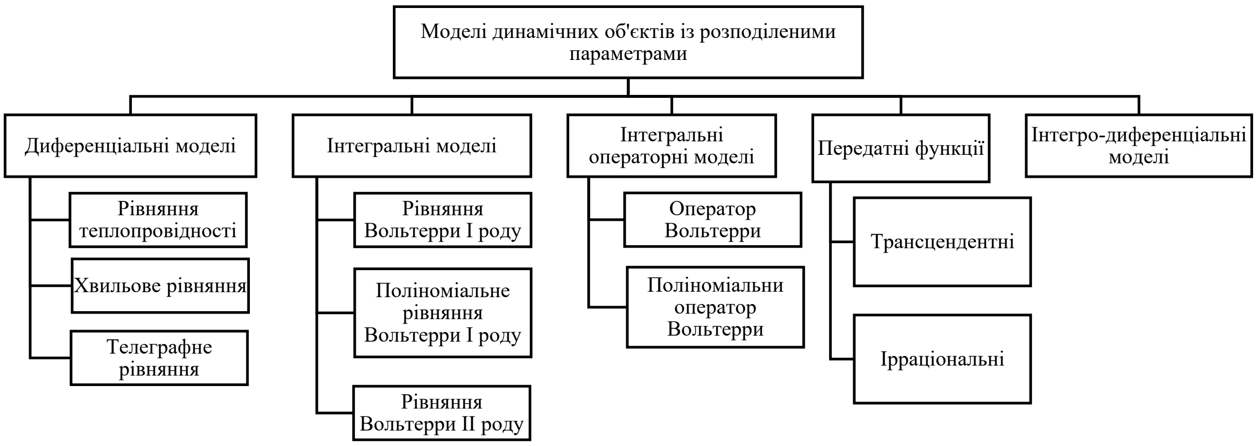


Рис. 1.2. Класифікація форм математичних моделей процесів в об’єктах із розподіленими параметрами

Застосування диференціальних моделей у моделюванні динамічних об’єктів із розподіленими параметрами призводить до диференціальних рівнянь із частинними похідними, для застосування яких необхідно використовувати якісно нові методи в порівнянні з об’єктами із зосередженими параметрами, які описуються звичайними диференціальними рівняннями. У використанні передатних функцій застосування існуючих методів можливе лише після їх зведення до дробово-раціонального вигляду шляхом апроксимації. В свою чергу використання інтегральних моделей, як рівнянь так і операторів, для моделювання об’єктів із розподіленими параметрами, нічим не відрізняється від моделювання об’єктів із зосередженими параметрами, а лише залежить від вигляду ядра. Причому застосування теорії інтегро-степеневих рядів Вольтерри дозволяє зводити задачі моделювання нелінійних динамічних систем до квазілінійного вигляду.

Оптимізація процесу моделювання.

Ускладнення задач аналізу та синтезу динаміки систем і розширення класу досліджуваних динамічних об’єктів вимагають вдосконалення процесу їх математичного та комп’ютерного моделювання, розробки нових методів і засобів комп’ютерної реалізації математичних моделей фізичних об’єктів і процесів. Постають задачі вирішення таких проблем, як підвищення адекватності математичних моделей, збільшення точності їх числової реалізації, розширення множини алгоритмів моделювання.

Останнім часом сам процес моделювання стає об’єктом дослідження. Іншими словами, здійснюються спроби побудувати теорію моделювання для того, щоб визначити критерії за якими необхідно будувати оптимальну стратегію моделювання, здійснювати оцінку ефективності взаємодії трьох складових частин процесу моделювання: «модель – алгоритм – програма» [170].

Основна мета будь-якого моделювання полягає в перевірці ідей, гіпотез, отриманні експериментальної інформації, які дозвять прогнозувати поведінку досліджуваного об’єкту при тих або інших умовах. Розвиток обчислювальної техніки та відповідного програмного забезпечення призвели до можливості побудови віртуальних моделей, які максимально наближені до реальних об’єктів. У свою чергу, розвиток ідеології процесу моделювання сприяє створенню, як нової архітектури обчислювальних систем, так і нових парадигм у програмуванні. Спроби оптимізувати шлях до отримання бажаних результатів привели до осмислення самої концепції моделювання.

Важливим елементом комп’ютерного моделювання є вибір оптимальних математичних моделей. Визначення оптимальної моделі в загальному випадку є достатньо складною задачею, що не має на даний час практично достатньо чітких шляхів її розв’язання [205].

Для роз’яснення деяких основних положень обговорюваного підходу розглянемо графічну схему (рис. 1.3).

Як відомо для різних математичних моделей існує велика кількість методів їх числової реалізації. Однак, їх кількість та якість залежать від форми математичної моделі та умов у яких перебуває об’єкт. Тому важливим є забезпечення можливості вибору щонайкращого числового методу для розв’язування оптимальної математичної моделі, що є також достатньо складною задачею.

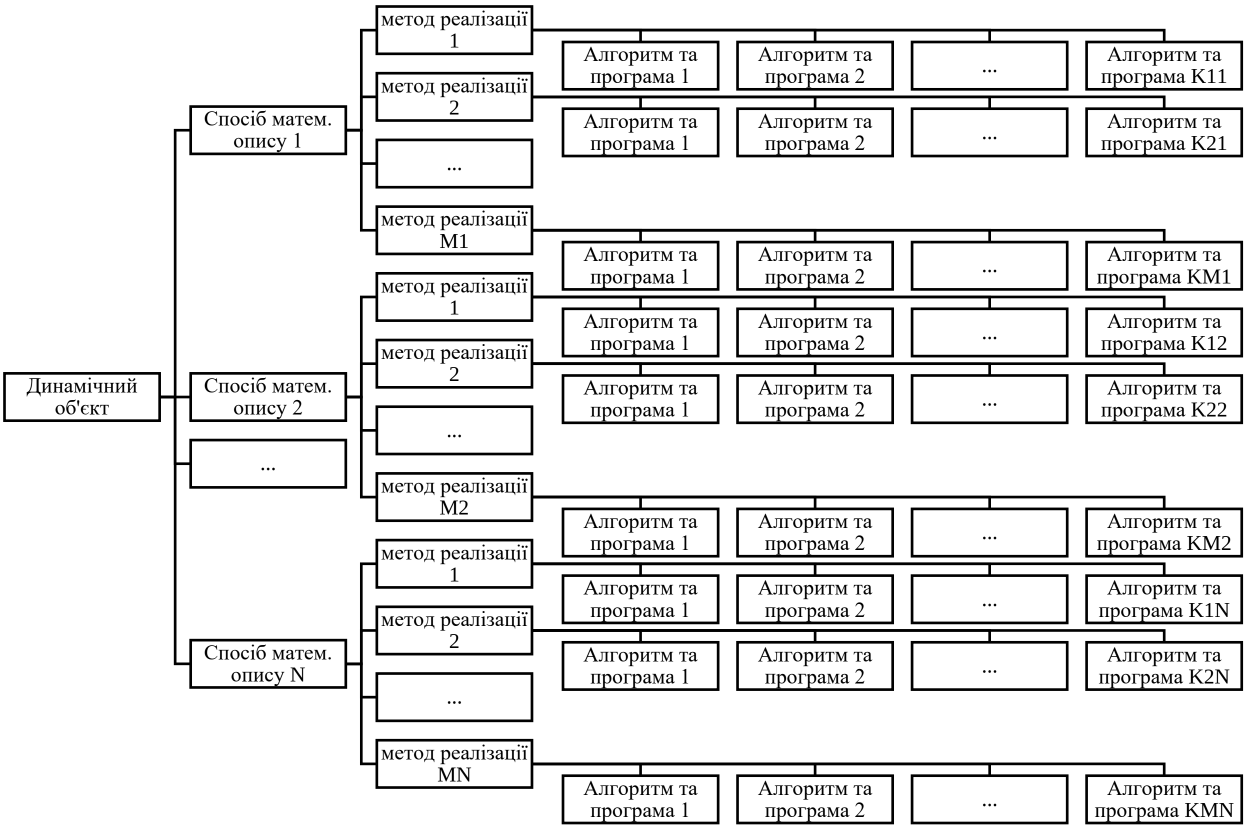


Рис. 1.3. Схема вибору оптимального шляху отримання комп’ютерної моделі

Під оптимальною математичною моделлю динамічної системи можна розуміти модель, для якої існують числові методи її реалізації, які забезпечують найменший час знаходження наближених розв’язків за умови, що похибка цього наближення не перевищує заданого значення.

Реалізація математичної моделі здійснюється у вигляді алгоритмів і програм (пакетів прикладних програм). На сьогодні, використання засобів комп’ютерного моделювання дозволяє автоматизувати процес кодування комп’ютерних програм, знижуючи тим самим і час виконання, і число помилок [122, 139, 173].

Не дивлячись на величезні успіхи в області математичного та комп’ютерного моделювання, потреба у створенні нових підходів до самого процесу моделювання постійно зростає. Річ у тому, що сучасні методи та засоби не дають можливості гнучко здійснювати перехід від однієї моделі системи до іншої під час обчислювального процесу, що знижує ефективність процесу дослідження.

1.3. Аналіз методів еквівалентних та апроксимаційних перетворень моделей об’єктів із розподіленими параметрами

Для перетворення математичних моделей процесів у динамічних об’єктах з метою подальшого вибору найкращої в сенсі застосування її для розв’язування задач керування, контролю та вимірювання пропонується використання методів, що дозволяють виконувати взаємні переходи між різними формами моделей. Основна увага буде приділятись отриманню моделей у формі «вхід-вихід».

Аналіз методів перетворення моделей динамічних об’єктів із розподіленими параметрами.

Представлення моделей об’єктів із розподіленими параметрами у формі «вхід-вихід», зазвичай, пов’язане з еквівалентними перетвореннями диференціальних рівнянь із частинними похідними [19, 37, 184, 201, 205, 279].

Розглянемо суть найбільш поширених підходів до побудови еквівалентних моделей об’єктів із розподіленими параметрами (рис. 1.4).

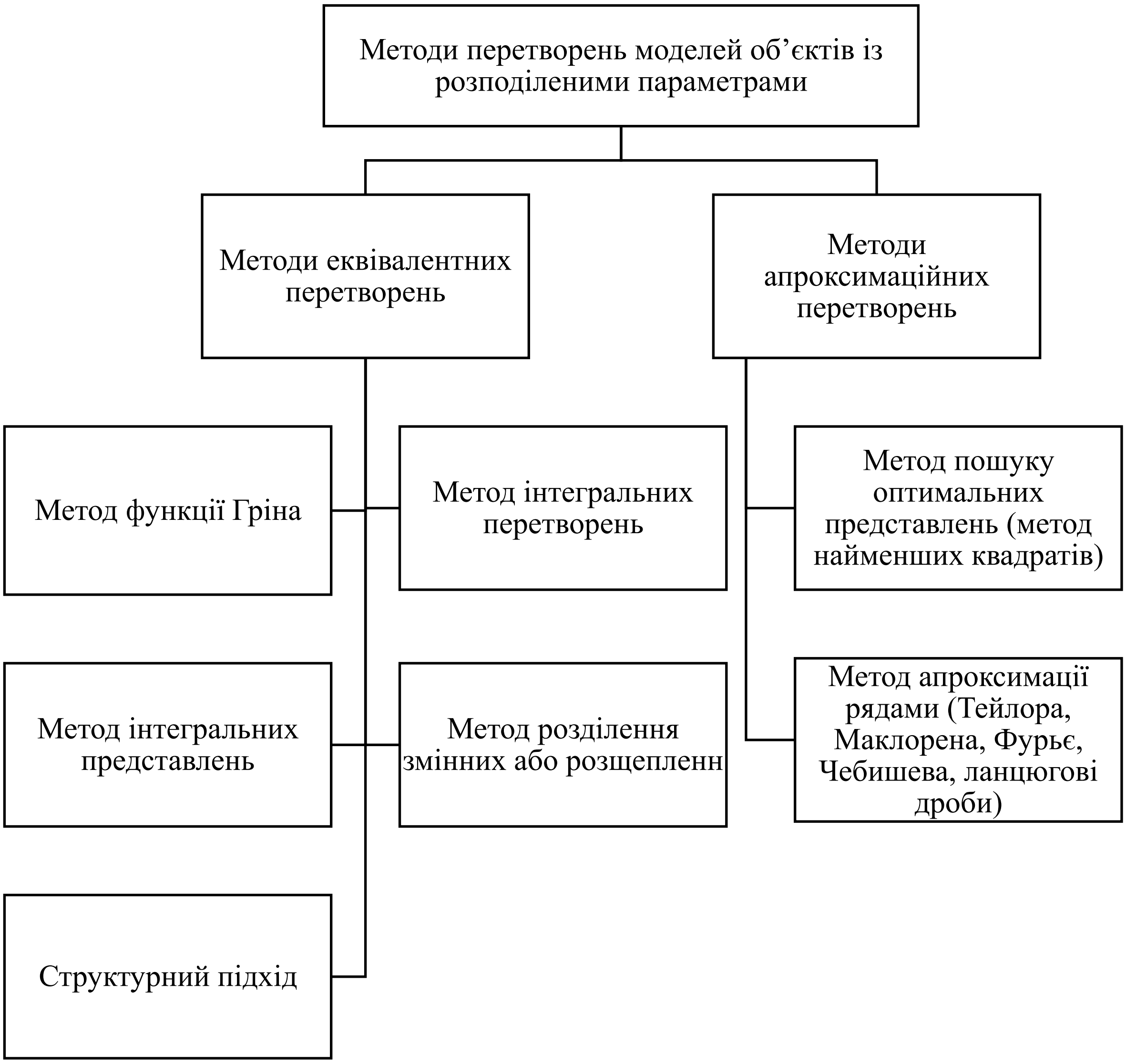


Рис. 1.4. Класифікація підходів до перетворення моделей об’єктів із розподіленими параметрами

Метод розділення змінних або розщеплення. У розв’язуванні рівнянь із частинними похідними досить поширеними є прийоми спрощення вихідних залежностей. В тому числі методи апріорного подання форми шуканого розв’язку, такі як методи Фур’є, Гальоркіна [18, 127] та ін. Сюди варто віднести також метод розділення змінних або розщеплення, тобто метод аналітичного подання шуканої функції багатьох змінних у вигляді добутку функцій одного аргументу [34, 233, 253]. Відомі також методи кускового наближення функцій та ряд інших методів [1, 32, 83, 157, 171, 259, 260].

Метод функції Гріна. В аналізі динаміки систем особливе місце займає імпульсна функція $\delta(t)$ або функція Дірака. Кожному об'єкту можна поставити деякий оператор $A(t)$, який показує, яким чином із характеристики процесу $X(t)$ на вході цього об'єкта отримується характеристика процесу $Y(t)$ на виході даного об'єкта. Ця залежність представляється зазвичай у вигляді

$$Y(t) = A_t X(t).$$

Якщо врахувати, що для $X(t)$ справедливе представлення

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) X(\tau) d\tau,$$

то

$$Y(t) = A_t \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) X(\tau) d\tau. \qquad (1.33)$$

Вважаючи оператор A_t лінійним і припускаючи можливість перестановки послідовності дій інтегрування і перетворення (1.33), отримуємо

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) A_t \delta(t-\tau) d\tau,$$

або

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau) X(\tau) d\tau,$$

де

$$g(t,\tau) = A_1\delta(t-\tau). \qquad (1.34)$$

Як бачимо з (1.34), функція $g(t,\tau)$ представляє собою реакцію об’єкта на характеристику $X(t)$ вхідного процесу, який має вигляд імпульсної $\delta(t)$ функції.

Функція $g(t,\tau)$ отримала назву одиничної імпульсної перехідної функції або вагової функції або функції Гріна. В широкому сенсі функція Гріна — це оператор, який за розв’язком задачі, що відповідає одним крайовим умовам, дозволяє будувати розв’язки для інших крайових умов. В більш вузькому сенсі в якості функції Гріна часто використовують функції точкового джерела.

Труднощі застосування даного підходу з’являються у побудові еквівалентних інтегральних моделей на основі багатовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними [120, 163, 164, 233, 253, 276].

<u>Метод інтегральних перетворень</u>. Застосування методу інтегральних перетворень, зокрема перетворення Лапласа, дає змогу досліджувати динаміку об’єктів із розподіленими параметрами на основі апарату передатних функцій, які є традиційним способом подання моделей в задачах механіки, систем управління, електродинаміки та ін. Застосування системного підходу та структурного методу у дослідженні технічних систем також найчастіше пов’язане із застосуванням передатних функцій. Програмні засоби комп’ютерного моделювання, які містяться в розповсюджених пакетах програм орієнтовані, перш за все, на операції з передатними функціями. Для збереження послідовності у розв’язуванні задач моделювання, синтезу, проєктування, а також для використання і розвитку середовищ програмування доцільно, у тих випадках, коли це можливо, приводити традиційні моделі до передатних функцій. Розглянемо особливості визначення передатних функцій

складних динамічних об'єктів із зосередженими та розподіленими параметрами [1, 18, 38, 41, 50, 66, 127, 154, 171].

Відомо, що якщо поведінка деякої системи із зосередженими параметрами, яка має один вхід і один вихід, описується лінійним диференціальним рівнянням

$$L_t y(t) = f(t),$$

де L_t — диференціальний оператор по змінній t: $L_t = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k}$, $y(t)$ — реакція на вхідний сигнал для нульових початкових умовах; $f(t)$ — вхідний сигнал, то передатна функція системи має вигляд

$$W(p) = \frac{Y(p)}{F(p)},$$

де $Y(p) = \tilde{L}\{y(t)\}$, $\tilde{L}$ — оператор перетворення Лапласа.

Якщо система із зосередженими параметрами має m входів і n виходів, то передатна функція перетворюється в передатну матрицю, яка зв'язує реакцію на кожному виході з впливом на кожному вході:

$$W(p) = W_{ik}, i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m.$$

Якщо ж система містить розподілені параметри і описується диференціальними рівняннями з частинними похідними, то для повної характеристики її передатних властивостей необхідна вже не передатна матриця зі скінченним числом рядків і стовпців, а двоточкова функція

$$R(x_1, x_2; p) = \frac{Y(x_2, p)}{F(x_1, p)}, x_1 \in P, x_2 \in Q,$$

де P — множина точок вхідного впливу; Q — множина точок, в яких спостерігається вихідний сигнал; $Y\left(x_2, p\right)$ і $F\left(x_1, p\right)$ — перетворення Лапласа по часу від вихідного сигналу та вхідного впливу [41, 50].

В залежності від типу структури для об’єктів із розподіленими параметрами можна відзначити наступні методи знаходження їх передатних функцій: прямий, інтегральний, метод функціональних перетворень, матричний [50, 66, 121, 165].

Метод інтегральних представлень. В теоретичних дослідженнях велику роль відіграють інтегральні представлення розв’язків через їх значення в околі границі заданої області і через функції, які задані в початковий момент часу. Деякі узагальнення цих інтегральних представлень розв’язків приводять до теорії потенціалів. Потенціальні представлення розв’язків початково-крайових задач математичної фізики можна інтерпретувати як лінійну комбінацію дій джерел впливів, які розподілені на границі області. Інтенсивність джерел можна визначити з інтегральних рівнянь, які будуються на основі заданих крайових умов конкретної задачі. Метод граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалів ефективний для практичних розрахунків, але потребує великої теоретичної підготовки [1, 19, 49, 68, 270].

Даний підхід можна застосовувати у розв’язуванні задач теплопровідності, гідродинаміки тощо використовуючи теплові потенціали першого та другого роду, гідродинамічні потенціали, Ньютонівські потенціали [19, 49].

Структурний підхід до побудови моделей складних розподілених об’єктів. Основою структурного аналізу автоматизованих систем є використання структурно-динамічних схем. Структурна схема зазвичай складається на основі аналізу функціональної схеми за наступним алгоритмом: записується рівняння зв’язку об’єкта керування і елементів керуючого пристрою; здійснюється перехід від отриманих рівнянь зв’язку до рівнянь зв’язку у формі інтегрального оператора; розв’язується кожне рівняння відносно зображення вихідної величини і будуються за ними структурно-динамічні схеми; з'єднуються побудовані схеми між собою відповідно до проходження сигналів і отримується шукана структурно-динамічна схема [28, 29, 30, 48, 50, 119, 138, 163, 164, 182, 202, 203].

Такий підхід дозволяє будувати макромоделі досліджуваних систем, причому у випадку лінійних моделей базовими моделями є передатні функції або оператори Вольтерри, а у випадку нелінійних об'єктів – багатовимірні передатні функції або поліноміальні оператори Вольтерри.

Вказаний підхід може служити основою для структурного спрощення моделей об'єктів із розподіленими параметрами. Проте слід зазначити, що для використання цього підходу, як правило, ставиться за мету отримання спрощеної моделі для подальшого її самостійного застосування в якості основи функціонування комп'ютеризованих систем технічного призначення, таких як системи керування, вимірювання, контролю, діагностики тощо.

Методи апроксимації моделей в задачах математичного та комп'ютерного моделювання об'єктів з розподіленими параметрами.

Застосування апроксимаційних методів перетворення моделей є важливим елементом у моделюванні динамічних об'єктів із розподіленими параметрами. Основні підходи апроксимації базуються на застосуванні оптимізаційного підходу, в основі якого покладено принцип методу найменших квадратів, та методу апроксимації рядами, де базовими є застосування рядів Тейлора, Маклорена, Фурьє, Чебишева, ланцюгових дробів [96].

Проблемі апроксимації присвячено багато публікацій [16, 17, 47, 50, 52, 53, 60, 61, 67, 81, 82, 85, 86, 87, 103, 106, 107, 134, 206, 207, 208, 217], розглянемо детальніше розроблені методи апроксимації для розв'язання двох задач: апроксимація інтегральних моделей шляхом зведення їх до моделей із виродженими ядрами і спрощення трансцендентних та ірраціональних передатних функцій.

Методи апроксимації ядер інтегральних рівнянь. Традиційний підхід до апроксимації функцій двох змінних ґрунтується на аналітичних методах, найбільш відомі розглянемо далі [47].

Якщо функцію двох змінних $K(x,s)$ можна розвинути в ряд Тейлора по одній із змінних, то в якості необхідного представлення можна застосувати скінченний ряд у вигляді

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i!}\left(x-x_0\right)K_{x^i}^{(i)}\left(x_0,s\right),\ \left(x,s\in\left[a,b\right]\right)$$

або

$$K(x,s)=\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}\left(s-s_0\right)K_{s^i}^{(i)}\left(x,s_0\right), \tag{1.35}$$

де x_0 та s_0 – одна з точок відрізку $[a,b]$. Слід відмітити, що у важливому для нелінійних інтегральних рівнянь випадку можливе аналогічне до (1.35) подання

$$K\left(x,s,y(s)\right)\approx\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i}K_{x^i}^{(i)}\left(x,s,y(s)\right)\left(x-s_0\right)^i.$$

Використовуючи подвійний ряд Тейлора функцію двох змінних можна представити у вигляді

$$K(x,s)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}\left(x-x_0\right)^i\left(s-s_0\right)^j, \tag{1.36}$$

де

$$a_{ij}=\frac{1}{i!\,j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial s^j}K(x,s)\Bigg|_{x_0,s_0}\ ;\ \left(x,s\in[a,b]\right). \tag{1.37}$$

Для представлення функції двох змінних за допомогою інтерполяційного поліному Ньютона для функції однієї змінної, розіб’ємо відрізок $\left[a,b\right]$ на n частин. Тоді $h=\frac{b-a}{n}, x_i=a+ih, i=(0,1,2,...,n),$ а ядро запишемо у вигляді:

$$K(x,s)=K(x_0,s)+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!h^j}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{j-1})\Delta^j K(x_0,s),$$

де Δ^j – розділені різниці відповідного порядку. Якщо вважати $s_i=a+ih, i=(0,1,2,...,m),$ то отримаємо

$$K(x,s)=K(x,s_o)+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!h^j}(s-s_0)(s-s_1)...(s-s_{j-1})\Delta^j K(x,s_0).$$

Представляючи функцію двох змінних за допомогою інтерполяційного поліному Ньютона для функції двох змінних і використовуючи (1.36), (1.37), отримаємо подання у вигляді:

$$K(x,s)=K(x_0,s_0)+\sum_{i+j=1}^{i+j=m}\frac{\Delta_{x^i s^i}^{i+j}K(x_0,s_0)}{j!h^j}(x-x_0)...(x-x_{j-1})(s-s_0)...(s-s_{j-1}).$$

Застосування розглянутих методів апроксимації функції двох змінних пов’язано з суттєвими труднощами у числовій реалізації, оскільки значною мірою залежать від властивостей функції, яка апроксимується.

Для апроксимації функцій багатьох змінних (більше двох) такі методи не завжди можуть бути застосовані. Також, варто відмітити, що не до кінця є розв’язаними задачі побудови аналітичних представлень таблично-заданих функцій.

Спрощення передатних функцій. Основним підходом до моделювання динамічних об’єктів, які описуються складними передатними функціями є застосування методів апроксимації з метою спрощення математичних моделей із забезпеченням вимог до точності результатів дослідження.

В сучасній математиці наближене представлення функцій, зазвичай, шукається у вигляді многочленів від незалежної змінної. Між тим, дробово-раціональні наближення можуть успішно замінити задану функцію в тих областях зміни аргументу, де розвинення цієї функції в степеневий ряд не забезпечує збіжності до вихідної функції і де, відповідно, наближення у вигляді многочленів недопустиме.

Крім того, за допомогою дробово-раціональних наближень зручно знаходити нулі і полюси передатної функції. В той же час, використання дробово-раціональних наближень не потребує обрахування високих степенів аргументів. Таким чином, застосування дробово-раціональних наближень значно спрощує розрахункові процедури [67, 187].

Одним з найбільш ефективних методів дробово-раціонального наближення є метод апроксимації за допомогою ланцюгових дробів, оскільки вони володіють важливою властивістю – сходяться швидше, ніж інші послідовні ряди і містять більше важливих характеристик об’єктів в декількох перших членах [15, 50, 67, 187]. Причому побудовані ланцюгові дроби можуть бути реалізовані у вигляді структурних схем [51]. Тому розробка та вдосконалення методів апроксимації передатних функцій ірраціонального та трансцендентного типу на основі теорії ланцюгових дробів є актуальною задачею.

1.4. Підходи до ідентифікації динамічних систем та їх особливості

Підходам до розв’язання задач ідентифікації керованих об’єктів присвячено широкий спектр публікацій [9, 23, 24, 25, 58, 70, 80, 85, 99, 102, 106, 107, 110, 118, 140, 141, 148, 151, 159, 161, 162, 166, 172, 175, 176, 188, 194, 218, 224, 227, 228, 235, 237, 244, 250, 255, 265, 281]. При цьому методи й засоби розв’язування таких задач настільки різні, що виникає необхідність порівняння й аналізу основних принципів та існуючих методів побудови математичних моделей динамічних процесів. У загальному випадку можна виділити два підходи до побудови моделей (рис. 1.5): застосування законів природи; експериментальна ідентифікація, при якій основну інформацію про процес одержують шляхом безпосередніх вимірів.

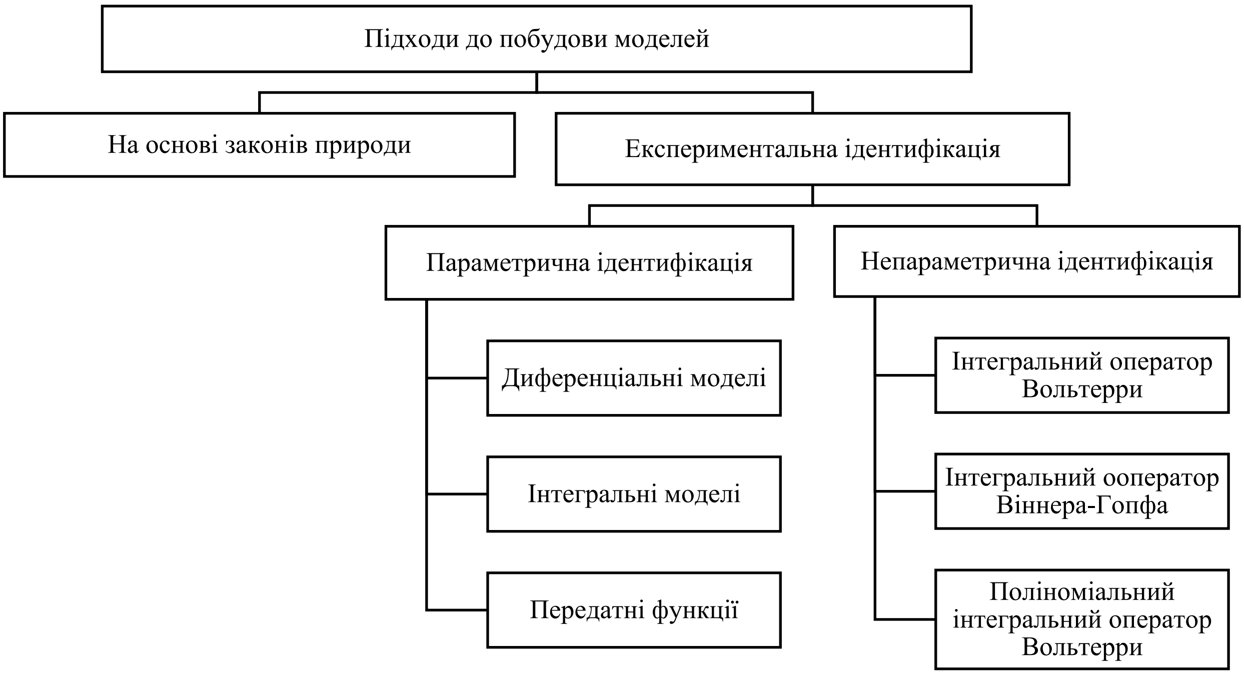


Рис. 1.5. Класифікація підходів до побудови моделей динамічних об’єктів

Через складність і різноманіття процесів, що протікають у складних керованих системах, а також у зв’язку з великим числом складових їхніх елементів, методи побудови математичних моделей на основі законів природи досліджуваних технологічних процесів часто виявляються малоефективними. Це, перш за все, пояснюється складністю або недостатньою вивченістю явищ, що відбуваються в досліджуваних процесах. Тому найбільш прийнятні в промислових умовах експериментальні методи ідентифікації. Будемо вважати, що ідентифікація – це визначення такої моделі із заданого класу моделей (на основі аналізу входу й виходу), яка є еквівалентною досліджуваному процесу на визначеній множині властивостей [166].

За способом нагромадження експериментальних даних методи ідентифікації діляться на активні й пасивні. Активний експеримент полягає у введенні в об'єкт штучних збурень різного виду, як детермінованих, так і стохастичних. Розроблена методика складання активних планів експерименту для детермінованих зондувальних сигналів [76], що дозволяє швидко розкривати потрібні ефекти, будувати моделі процесу, адекватні результатам отриманим в ході експериментів [142].

У багатьох випадках для активної ідентифікації об'єктів, не підданих впливу завад, успішно застосовуються періодичні, зокрема, синусоїдальні сигнали, за допомогою яких вдається порівняно просто визначити частотні характеристики об'єкта, що ідентифікується.

Існують різні типи випробувальних сигналів [77]. Оптимальний їхній вибір проводиться виходячи з характеру задачі й властивостей об'єкта. Основні види випробувальних сигналів: ступінчатий, імпульсний, згладжений імпульсний, синусоїдальний, шум (активний, пасивний).

Вибір оптимального стимулюючого впливу, який максимізує прийнятий критерій оцінки, є надзвичайно важливою складовою частиною загальної задачі синтезу системи ідентифікації. Під оптимальним випробувальним сигналом розуміється сигнал, який дозволяє в заданих умовах роботи одержати характеристики технологічного процесу з необхідною точністю за мінімальний час. Однак в умовах виробництва активний експеримент має ряд істотних обмежень, обумовлених вимогою пробного впливу, що в деяких випадках може привести до зупинки технологічного процесу або до відходу від нормальних умов функціонування.

Застосування випадкових тестових сигналів дозволяє здійснювати ідентифікацію при невеликій амплітуді штучних збурень. Для визначення характеристик технологічних процесів особливо широко використовують псевдовипадкові двійкові послідовності [155], що пояснюється зручністю їх реалізації й обробки на комп'ютері.

Математичний опис досліджуваного об'єкта можна одержати в різній формі. При цьому характеристики моделі повинні якнайбільше відповідати характеристикам об'єкта. Але використання в реальних системах занадто складних математичних моделей позбавляє їхньої гнучкості й універсальності, утрудняє їхнє застосування, вимагає використання швидкодіючих обчислювальних машин з великою ємністю блоку пам’яті. У зв’язку з цим вибір моделі того або іншого класу обумовлюється не тільки апріорними відомостями про структуру досліджуваного об’єкта, режимів його функціонування, але також необхідним ступенем відповідності моделі реальному об’єкту й складності формалізації отриманого розв’язку.

Найбільш повно розроблені методи ідентифікації лінійних об’єктів [24, 25, 69, 70, 80, 140, 141, 162, 166, 172, 194, 224, 244,]. У якості математичного опису використовується непараметричне (інтегральне рівняння з невідомою імпульсною перехідною функцією або його дискретний аналог) або параметричне (диференціальне або різницеве рівняння, передатна функція) представлення досліджуваного процесу [2, 69].

Методи ідентифікації нелінійних об’єктів не є настільки універсальними [110, 115, 116, 131, 148, 151, 159, 162, 175, 218, 227, 228, 235, 237, 250, 263, 266], як у випадку лінійних об’єктів. В даному випадку найбільш прийнятне непараметричне представлення — опис нелінійного технологічного процесу за допомогою функціонального ряду Вольтерри [150, 159]. Однак необхідність обмеження числа членів подібного ряду скінченним числом у підсумку зближує дану модель із параметричними. Є велика кількість параметричних описів нелінійних об’єктів, що пояснюється специфікою постановки конкретних задач. В основному параметричні моделі являють собою інтегральні, диференціальні або різницеві нелінійні рівняння, що містять невідомий вектор параметрів.

Методи й алгоритми визначення коефіцієнтів диференціальних рівнянь різноманітні. Основною перевагою таких моделей є те, що коефіцієнти диференціального рівняння й запізнення визначаються в явному вигляді. Недоліки й труднощі в реалізації таких моделей наступні: складна структура моделі, важкі умови забезпечення стійкості системи ідентифікації, низька швидкодія. Крім того, описувати об’єкти за допомогою диференціальних рівнянь не завжди ефективно, тому що найчастіше невідомий порядок цих рівнянь. Якщо ж задати свідомо великий порядок, обчислювальні труднощі знаходження невідомих параметрів суттєво зростуть.

Цього недоліку позбавлений опис об'єктів функціональними рядами. Так, зв'язок між виходом об'єкта $y(t)$ і його входом $x(t)$ може бути поданий у вигляді функціонального ряду Вольтерри [23, 55, 159, 176]:

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^t\ldots\int_0^t k_n(t\;,\tau_1,\ldots,\tau_n)\prod_{i=1}^{n}x(\tau_i)d\tau_i\,, \tag{1.38}$$

де $k_{1n}\left(t,\tau_1,\ldots,\tau_n\right)$ — неперервні й симетричні ядра нелінійного об'єкта. Обмежуючись скінченним числом членів ряду (1.38), одержуємо неперервний функціональний многочлен, який для достатньо високого степеня може апроксимувати вихід об'єкта $y(t)$ з необхідним ступенем точності. У цьому випадку система n-го порядку визначається своїм ядром n-го порядку. Перший член функціонального ряду Вольтерри (1.38) характеризує лінійну частину об'єкта, другий – розглядається як нелінійна підсистема із загальним входом $x(t)$ і виходом $y_2\left(t\right)$ і т.д.

Для розв'язування практичних задач математичного опису технологічних процесів обмежуються скінченним числом ряду (1.38). Так, класичний Вінерівський підхід до ідентифікації лінійного об'єкта полягає в описі його згорткою, отриманої з (1.38):

$$y(t)=\int_0^t \omega(t,\tau)x(\tau)d\tau\,. \tag{1.39}$$

Імпульсна перехідна функція $\omega(t,\tau)$ є загальною характеристикою довільного лінійного об'єкта, тому вираз (1.39) є найбільш повним представленням оператора лінійного об'єкта у вигляді інтегрального оператора. Ідентифікація технологічних процесів, описуваних (1.39), зводиться до задачі визначення $\omega(t,\tau)$, що відноситься до числа некоректно поставлених задач, розв’язування яких пов’язане з обчислювальними труднощами. Дійсно, задача ідентифікації відноситься до класу обернених задач [198] і є некоректно поставленою по Адамару в тому розумінні, що відсутня неперервна залежність її розв’язку від експериментальної інформації. Отже, розбіжність дійсної й отриманої характеристик може бути як завгодно велика, якщо для розв’язку задачі ідентифікації динамічних процесів використовували звичайні обчислювальні процедури.

Задача ідентифікації нелінійних об’єктів, поданих функціональними рядами, зводиться до визначення ядер інтегральних операторів $k_n\left(t,\tau_1,...,\tau_n\right)$, які несуть у собі всю інформацію про об’єкт.

Під час ідентифікації рядів Вольтерри виділяються дві ключові проблеми [115, 116]: диференціювання експериментально отриманих залежностей, які містять шумові складові, особливо ця проблема проявляється у диференціюванні вище першого порядку; необхідність проведення значної кількості експериментів для побудови ядер Вольтерри, причому кількість експериментів зростає в показниковій залежності відносно розмірності ядра. Зазначені проблеми, в багатьох випадках, унеможливлюють використання апарату рядів Вольтерри у дослідженні процесів у нелінійних динамічних об’єктах.

1.5. Аналіз методів числової реалізації моделей динамічних об’єктів із розподіленими параметрами (пряма задача)

Методи реалізації диференціальних моделей.

У розв’язуванні прикладних задач із розподіленими параметрами, які, як вказано вище, описуються диференціальними рівняннями із частинними похідними, виникають труднощі ефективного застосування стандартних методів, які можна розділити на чисельні, аналітичні та наближені аналітичні (рис. 1.6).

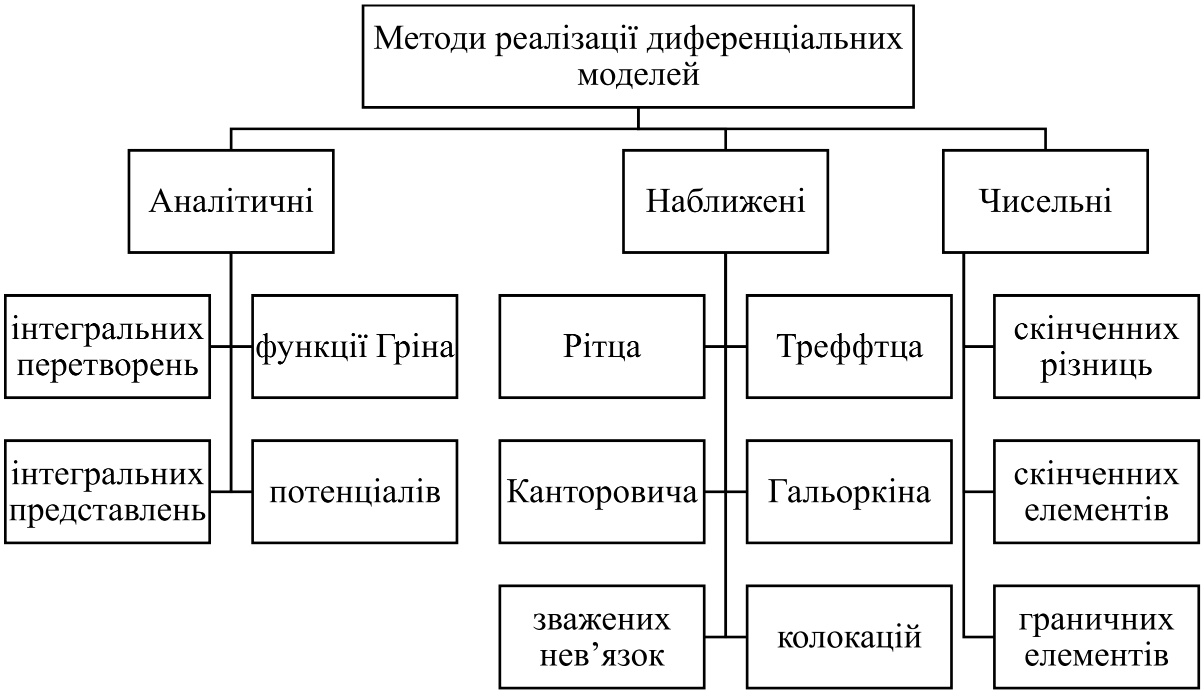


Рис. 1.6. Класифікація методів реалізації диференціальних моделей

Сучасні числові методи (скінченних різниць, скінченних елементів, граничних елементів та ін.) не завжди можуть ефективно використовуватись в силу складності і великих часових затрат, які збільшуються для зменшення кроку сітки [154, 167, 168, 169, 192, 257]. Точні аналітичні методи (метод інтегральних перетворень, метод функції Гріна, метод інтегральних представлень, теплових потенціалів та ін. [1, 19, 120, 154, 171, 185, 233]) потребують від дослідника високої математичної підготовки та можуть бути застосовані до обмеженого числа крайових задач. Одним із основних недоліків наближених методів (методи Рітца, Треффтца, Канторовича, Гальоркіна, зважених нев'язок, колокацій та ін. [1]) є те, що при малих значеннях кроку дискретизації часової координати отримуються великі системи лінійних алгебраїчних рівнянь, матриці коефіцієнтів яких, зазвичай, погано обумовлені [120]. Тому вдосконалення методів моделювання процесів у динамічних об'єктах із розподіленими параметрами шляхом комбінування аналітичних, наближених та обчислювальних методів, які можна реалізувати в сучасних засобах комп'ютерного моделювання є актуальною задачею.

Характеристики та особливості числової реалізації інтегральних моделей.

На рис. 1.7 наведено схему традиційних методів реалізації інтегральних моделей, звідки видно, що всі методи можна умовно розділити на такі чотири групи [1, 13, 31, 36, 47, 55, 88, 96, 97, 109, 124, 135, 136, 146, 147, 175, 179, 209, 256, 268]: аналітичні методи (метод резольвенти та метод інтегральних перетворень), наближені (колокацій, Гальоркіна, ітераційні методи), чисельні методи (квадратур, вироджених ядер), еквівалентних перетворень (перетворення до диференціальних моделей, перетворення до інших видів інтегральних моделей).

В основу алгоритмів реалізації інтегральних моделей покладено ряд числових методів, що відрізняються своїм застосуванням і характеристиками. Розглянемо основні характеристики методів реалізації інтегральних моделей, які представлено на рис. 1.7.

Аналітичні методи. Методу резольвенти присвячено ряд публікацій [47, 88, 209]. Для розв’язування інтегральних рівнянь за допомогою резольвенти формальний розв’язок рівняння

$$y(x) - \int_0^x K(x-s)\,y(s)\,ds = f(x), \tag{1.40}$$

шукається у вигляді степеневого ряду відносно λ:

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \ldots + \lambda^n y_n(x) + \ldots\ , \tag{1.41}$$

що відповідає способу послідовного наближення. Першим наближенням функції $y(x)$ буде функція $f(x)$, n-м наближенням функції $y(x)$ буде сума n перших членів ряду (1.41), отриманого за допомогою цього процесу.

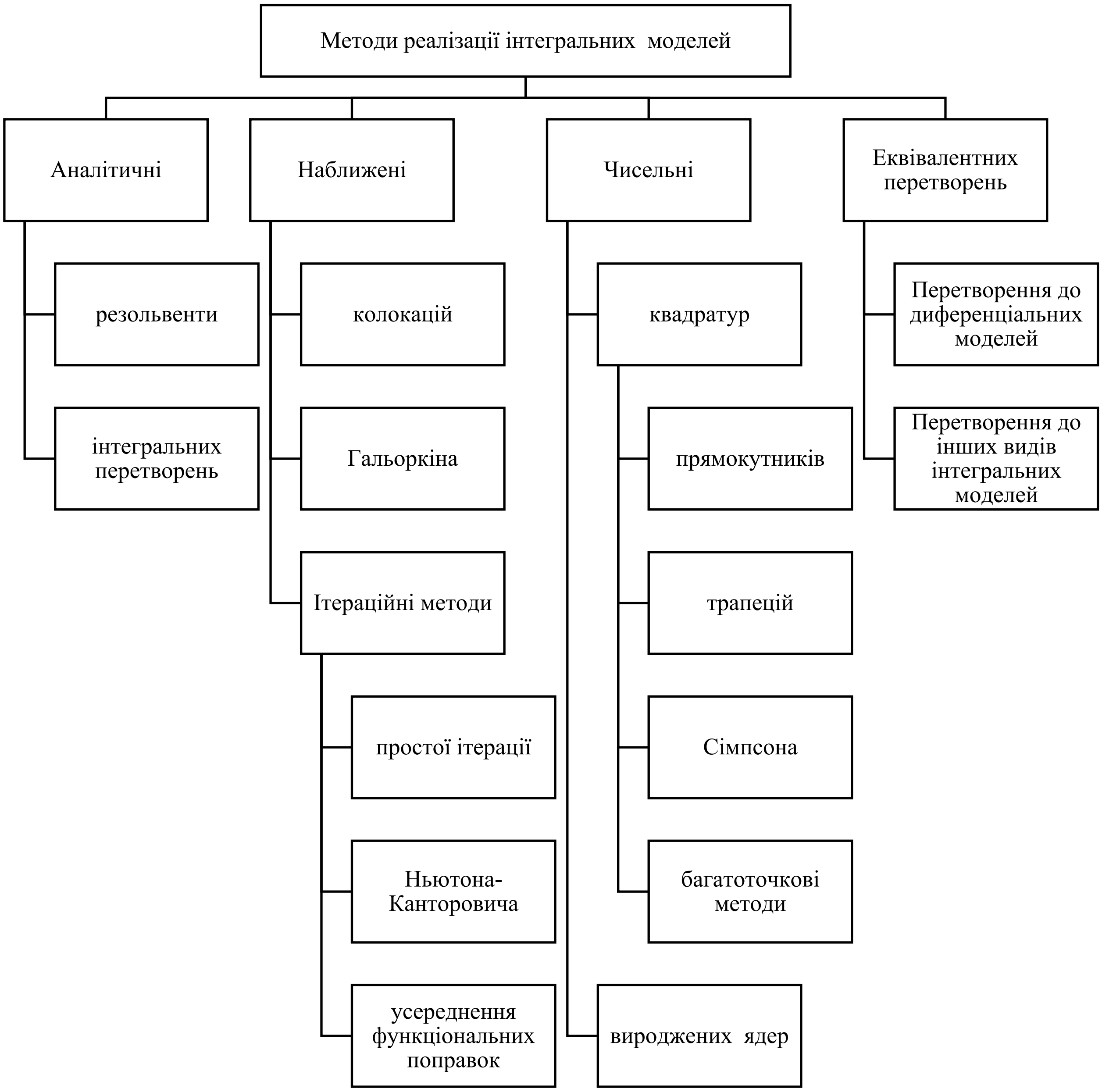


Рис. 1.7. Класифікація методів реалізації інтегральних моделей

Формула (1.41), яка представляє розв'язок рівняння (1.40), може бути формально записана у вигляді:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x F(x,s;\lambda) f(s) ds, \tag{1.42}$$

якщо покласти

$$F(x,s;\lambda) = K(x,s) + \lambda K(x,s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \ldots . \tag{1.43}$$

Функція $F(x,s;\lambda)$ є функцією відносно параметра λ і залежить тільки від ядра $K(x,s)$. Ця функція називається виродженим ядром або резольвентою для ядра $K(x,s)$. Формула (1.42) дійсно дає розв'язок рівняння (1.40) в явному вигляді для будь-якої функції $f(x)$ і, таким чином, розв'язок рівняння Вольтерри зводиться до знаходження резольвенти.

Операційний метод реалізації інтегральних моделей [47, 97, 96] може застосовуватись до різних початкових інтегральних моделей – інтегральних рівнянь Вольтерри другого або першого роду, оператора Вольтерри. Так, у розв'язуванні інтегрального рівняння Вольтерри другого роду типу згортки (1.40), яке містить різницеве ядро $K(x-s)$, у зв'язку з чим інтегральний оператор

$$\int_0^x K(x-s)y(s)ds = K(x)*y(x)$$

є оператором згортки функцій $K(x)$ і $y(x)$, який широко використовується в операційному численні Лапласа. Ця особливість дає змогу використовувати при розв'язуванні (1.40) операційний метод (метод перетворення Лапласа), який полягає в отриманні алгебраїчних співвідношень для операторних зображень елементів вихідного рівняння, знаходження з них зображень шуканої функції і визначення на її основі оригіналу.

Якщо ввести позначення

$$Y(p) \to y(x),\ \Phi(p) \to f(x),\ K(p) \to K(x),$$

то рівняння (1.40) перетворюється в операторне рівняння

$$Y(p) - K(p)Y(p) = \Phi(p),$$

розв'язок якого має вигляд

$$Y(p)=\frac{\Phi(p)}{1-K(p)}. \quad (1.44)$$

З виразу (1.44) безпосередньо не випливає можливість застосування оберненого перетворення Лапласа, але з еквівалентного виразу

$$Y(p)=\Phi(p)+\frac{K(p)}{1-K(p)}\Phi(p),$$

де

$$R_L(p)=\frac{K(p)}{1-K(p)},$$

який завжди має оригінал $R(x)$, випливає, що розв'язок переводиться в простір оригіналів, тобто виконується співвідношення

$$y(x)=f(x)+R(x)*f(x),$$

або

$$y(x)=f(x)+\int_0^x R(x-s)f(x)ds. \quad (1.45)$$

Звідси видно, що $R(x-s)$ представляє собою резольвенту вихідного рівняння, аналітичний розв'язок якого має вигляд (1.45).

Складність застосування даних методів у моделюванні об'єктів з розподіленими параметрами полягає в тому, що застосування еквівалентних перетворень потребує значних інтелектуальних затрат, а використання наявних таблиць для перетворень не покривають всі випадки, які зустрічаються на практиці.

Метод квадратур. Одним із ефективних методів числової реалізації інтегральних моделей є метод квадратурних формул, який полягає [47, 136, 209] в заміні інтеграла апроксимуючою системою алгебраїчних представлень щодо дискретних значень шуканої функції. В моделях Вольтерри фіксується верхня межа інтегрування і застосовуються формули для наближеного обчислення певного інтеграла, що мають в загальному випадку вигляд

$$\int_b^a f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R[f], \tag{1.46}$$

де x_i — фіксовані абсциси (вузли) відрізку $[a, b]$, причому $x_1=a$, $x_n=b$, A_i — числові коефіцієнти або вагові множники, зазвичай $A_i \geq 0$ і $\sum_{i=1}^{n} A_i = b-a$, $R[f]$ — залишковий член (похибка апроксимації).

Існує велика кількість квадратурних формул виду (1.46). До них відносяться формули Ньютона-Котеса (в тому числі прямокутників, трапецій, Сімпсона), Гауса, Чебишева та ін. Вибір квадратурної формули для числової реалізації інтегральних рівнянь повинен бути узгоджений як з властивостями ядра, так і з характером шуканого розв’язку (підінтегральної функції). Це породжує безліч підходів і способів застосування методу квадратур.

Формули Ньютона-Котеса обчислення певного інтеграла отримують шляхом заміни підінтегрального виразу інтерполяційним многочленом Лагранжа [47, 209]

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Наведемо найпростіші формули Ньютона-Котеса [209] закритого типу для обчислення визначеного інтегралу вважаючи крок h постійним:

– формула прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right);$$

– формула трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)-\frac{1}{12}h^3 f''(\xi);$$

– формула Сімпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{90}h^5 f''(\xi).$$

Для числової реалізації інтегральних рівнянь на ЕОМ досить широко застосовуються формули прямокутників і трапецій, які є формулами замкнутого виду, що пояснюється простотою розрахункових виразів.

Щодо апроксимації багатовимірних інтегральних моделей застосовуються кубатурні формули [248], але загального підходу та визначених рекомендацій їх застосування в залежності від форми інтегральної моделі немає.

Загальна властивість алгоритмів методу квадратур для розв'язування рівнянь Вольтерри з довільним ядром полягає у пропорційній залежності кількості обчислень на кроці від його номера: всі операції попереднього кроку повторюються з новими даними на наступному кроці і додається ще один член суми. Якщо ж ядро в інтегральному рівнянні вироджене, або можлива наближена заміна довільного ядра виродженим, то можна побудувати алгоритм, для якого кількість операцій не залежить від номера вузла дискретизації [47, 209]. Застосування методу квадратур ускладнене для числової реалізації сингулярних інтегральних моделей та потребує застосування специфічних методів [240].

Наближені методи. В якості методів наближеного аналітичного розв'язку можуть застосовуватись різні методи, зокрема, ті що дозволяють отримувати розв'язки з використанням степеневих рядів або сплайнів. Таким методом є метод колокацій. Також особливої уваги варто приділити ітераційним методам, область застосування яких у випадку нелінійних рівнянь достатньо широка [47].

Метод колокацій [47] полягає в отриманні розв’язків на відрізках, довжина яких вибирається, і застосовується на кожному з них апроксимаційний вираз з невеликим числом координатних функцій. Значною перевагою алгоритмів на основі методу колокацій є велика гнучкість у виборі параметрів заміни функцій кусково-гладкими поліномами.

Для розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду і їх систем можливе застосування ітераційних методів. Існує багато різновидів ітераційних методів, що розрізняються областю і швидкістю збіжності, класом вирішуваних завдань і т.д. Ітераційний метод як інструмент отримання наближених чисельних рішень може бути як самостійним, так і допоміжним, уточнюючим результати, отримані попередньо будь-яким іншим методом, наприклад, методом квадратур або колокацій.

Широке застосування для розв’язування нелінійних інтегральних рівнянь отримали метод простої ітерації та метод Ньютона-Канторовича [47, 209]. Метод простої ітерації стосовно лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду завжди збігається при слабких обмеженнях на ядро і праву частину. У розв’язуванні нелінійних рівнянь область збіжності методу простих ітерацій звужується, а якщо процес збігається, то в багатьох випадках швидкість збіжності може виявитися дуже низькою. Одним з ефективних методів подолання зазначених труднощів є застосування методу Ньютона-Канторовича. Він дозволяє значно прискорити збіжність у порівнянні з методом простої ітерації [47].

Проведений аналіз методів числової реалізації моделей із розподіленими параметрами показав, що наявні методи реалізації диференціальних моделей мають ряд особливостей та обмежень, це стосується і інтегральних моделей. Найбільш складними та недостатньо дослідженими є питання числової реалізації багатовимірних інтегральних моделей, які є базовими для опису нелінійних динамічних об’єктів в інтегральній формі. Також, не до кінця є розв'язаними задачі числової реалізації інтегральних моделей із сингулярними ядрами, які зазвичай зустрічаються для опису динамічних об'єктів із розподіленими параметрами.

1.6. Проблеми розв'язування обернених задач динаміки

Розв'язування задач керування, контролю та вимірювання супроводжується вирішенням таких підзадач, як відновлення вхідних сигналів та пошук (керуючих) вхідних впливів за бажаним відгуком. Вони відносяться до класу обернених задач. Підходам до розв'язування обернених задач присвячено багато публікацій [5, 8, 10, 11, 12, 13, 27, 31, 35, 39, 43, 46, 47, 48, 50, 55, 68, 83, 90, 95, 96, 120, 125, 136, 144, 152, 154, 167, 168, 169, 177, 178, 179, 180, 181, 185, 190, 209, 231, 232, 247, 268, 274], в яких застосовуються, зазвичай, прямі або регуляризаційні методи (рис. 1.8).

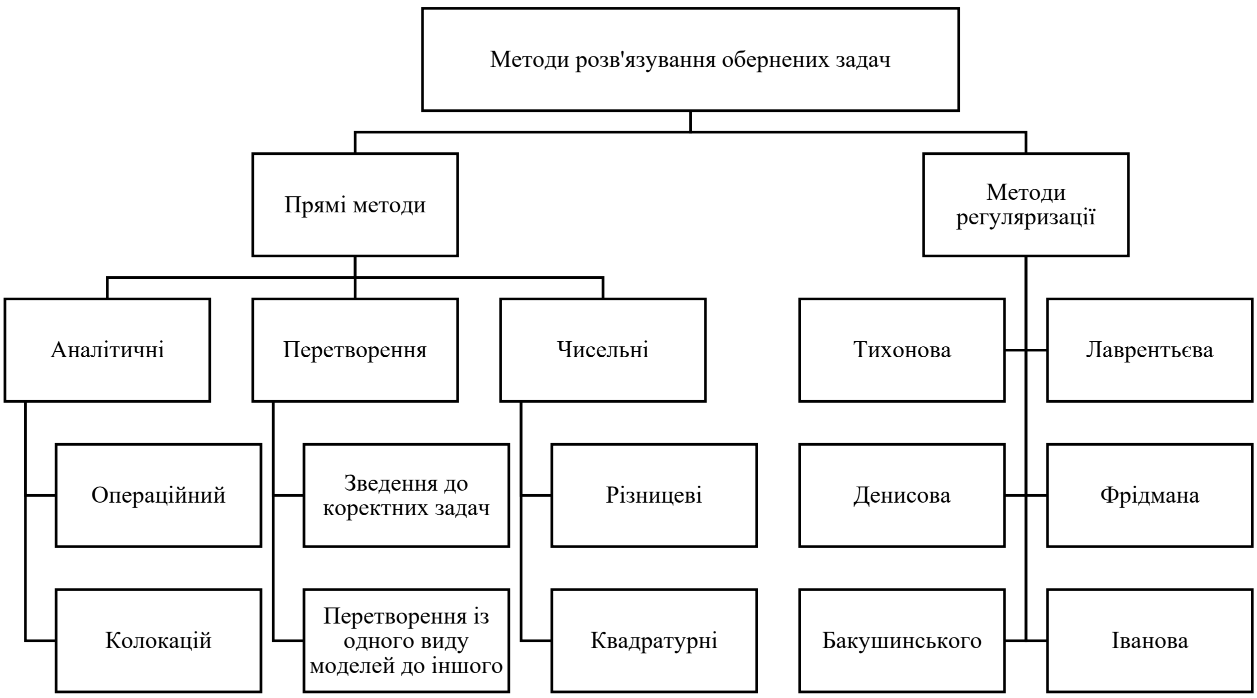


Рис. 1.8. Класифікація методів розв'язування обернених задач

Прямі методи.

Прямі методи можна поділити на аналітичні, методи перетворень, числові. Аналітичні методи дозволяють знаходити розв'язок в явному вигляді.

Серед методів, які дозволяють отримати розв'язки із задач поставлених в інтегральній формі, варто відмітити два підходи – використання операційного методу та методу колокацій [31, 47, 96, 136, 185, 209, 268].

У застосуванні методів еквівалентних перетворень ефективним є зведення інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду до інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду. Також ефективними є перетворення від диференціальних до інтегральних моделей [47, 136, 209].

У числовій реалізації задачі відновлення в залежності від форми базової моделі можуть застосовуватись різницеві методи (різницеві, скінченних елементів, балансу тощо) у випадку диференціальних моделей [154, 167, 168, 169] або квадратурні методи (прямокутників, трапецій, Сімпсона тощо) у випадку інтегральних моделей [8, 10, 11, 12, 13, 35, 47, 50, 90, 177, 178, 209, 232].

Розглянемо особливості деяких відомих методів розв'язування задачі відновлення у випадку, коли модель об'єкта із розподіленими параметрами має інтегральну форму.

Застосування перетворення Лапласа для розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду. Розглянемо рівняння Вольтерри першого роду з ядром, залежним лише від різниці своїх двох аргументів [47, 209]:

$$\int_0^t K(t-s)y(s)ds = f(t). \qquad (1.47)$$

Застосувавши до функцій $y(x)$, $f(x)$ і $K(x)$ одностороннє перетворення Лапласа отримано зображення

$$\Phi(p)=L(y);\ F(p)=L(f);\ L(p)=L(K). \qquad (1.48)$$

Застосувавши до обох частин (1.47) одностороннє перетворення Лапласа і користуючись формулою згортки отримано

$$F(p)=L(p)\Phi(p),$$

звідки

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{L(p)}. \tag{1.49}$$

Здійснивши обернене перетворення отримано

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\Phi(p)e^{pt}dp. \tag{1.50}$$

Отже, визначаючи функції $F(p)$ і $L(p)$ за формулами (1.48) і $\Phi(p)$ за формулою (1.49), за формулою (1.50) отримується розв'язок рівняння (1.47) в явному вигляді.

Застосування даного підходу у відновленні сигналів на вході динамічних об'єктів із розподіленими параметрами ускладнене тим, що наявні таблиці прямого та оберненого перетворень Лапласа не покривають всю множину можливих випадків.

Зведення рівняння Вольтерри першого роду до рівняння Вольтерри другого роду. Розглянемо інтегральне рівняння першого роду (1.47), якщо ядро і права частина мають неперервні похідні $K_t'(t,s)$ і $f'(t)$, то після диференціювання обох частин отримаємо [47, 209]

$$K(t,t)y(t)+\int_0^t K_t'(t,s)y(s)ds=f'(t). \tag{1.51}$$

Даний вираз являє собою інтегральне рівняння Вольтерри другого роду, яке має такий же розв'язок, що і (1.40). Таким чином, якщо виконана умова $K(0,0)\neq 0$, то, отримавши рівняння вигляду (1.51), можна застосувати для його реалізації методи розв'язування інтегральних рівнянь другого роду.

Якщо $K(0, 0) = 0$, то рівняння (1.51) знову буде рівнянням першого роду, з яким можна виконати аналогічні дії так само, як з рівнянням (1.47), якщо тільки ядро допускає другу неперервну похідну $K''(t, s)$, а права частина має другу неперервну похідну $f''(t)$. Виконання цих умов диференціювання (1.51) дозволить отримати рівняння другого роду

$$K_t'(t,t)y(t)+\int_0^t K_t''(t,s)y(s)ds = f''(t),$$

якщо $K_t'(0,0)\neq 0$. Якщо ж $K_t'(0,0)=0$, то можна знову застосувати диференціювання і т. д. У загальному випадку *p*-кратне диференціювання дозволяє отримати рівняння

$$K^{(p-1)}(t,t)y(t)+\int_0^t \frac{\partial^p K(t,s)}{\partial t^p}y(s)ds = f^{(p)}(t),$$

яке є рівнянням другого роду для $K^{(p-1)}(0,0)\neq 0$.

Даний підхід не завжди є задовільним, оскільки від однієї некоректної задачі, переходимо до іншої – диференціювання.

<u>Метод квадратур для розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду</u>. Методика заміни інтеграла сумою у рівняннях Вольтерри першого роду і отримання апроксимуючої системи є такою ж, як розглянуто вище. Але особливість рівняння першого роду полягає у відсутності шуканої функції поза знаком інтеграла, це призводить до деяких відмінностей.

Якщо відрізок $[a;b]$ розділений на $n-1$ частин, вибрані вузли дискретизації $t=t_i$, $i=\overline{1,n}$, причому $t_1=a$ і $t_2=b$, то лінійне рівняння (1.47) перетворюється у вираз

$$\int_a^{t_i} K(t_i,s)y(s)ds = f(t_i),$$

з якого за допомогою квадратурної формули отримується система

$$\sum_{j=1}^{i} A_j K(t_i,t_j)y(t_j) = f\left(t_i\right),\ i=\overline{1,n}, \qquad (1.52)$$

де A_j — коефіцієнти квадратурної формули.

Особливість системи (1.52) полягає у неможливості безпосереднього визначення значення y_1, яке, після того як буде знайдене, дозволяє знайти наступні значення $y_2, y_3, ..., y_n$ рекурентно. Дійсно, для $x = x_1 = a$ інтеграл у рівнянні (1.47) рівний нулю і $f(a) = f_1 = 0$ [47, 209].

Ще однією проблемою відновлення сигналів на вході об'єкта із розподіленими параметрами є те, що необхідно розв'язувати сингулярне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду. У відновленні сигналів на вході нелінійної динамічної системи необхідно розв'язувати поліноміальні інтегральні рівняння Вольтерри першого роду, для чого немає загальноприйнятих методів, за винятком декількох публікацій, зокрема [8, 10, 11, 12, 13, 190, 273, 274].

Принципи регуляризації некоректних задач.

У розв'язуванні обернених задач найбільш дієвими є спеціальні методи регуляризації. До них відносять: метод регуляризації Тихонова, метод ітеративної регуляризації Фрідмана, метод регуляризації Лаврентьєва, метод регуляризації Бакушинського, метод квазірозв'язку Іванова, проекційні методи Рітца і Гальоркіна, регулярні модифікації методу власних функцій, метод фільтрації Калмана, метод фільтрації Вінера та ін. [31, 47, 90, 177, 178].

Успішне відновлення шуканої функції пов'язане в першу чергу з ефективною регуляризацією рівняння. Оскільки ефективність методів регуляризації визначається тим, наскільки необхідна для їх реалізації апріорна інформація відповідає кількості і виду інформації, доступної досліднику, оцінка придатності того або іншого методу регуляризації залежить від умов конкретної задачі. Крім того цінність того або іншого методу регуляризації визначається перш за все тим, наскільки просто і повно він дозволяє використовувати доступну досліднику апріорну інформацію. У виборі методу також враховуються: складність його застосування; вимоги до точності розв'язку; можливість і трудомісткість отримання додаткової регуляризуючої інформації; складність чисельної реалізації методу; складність автоматизації обчислень тощо.

Методи регуляризації надають широкі можливості для управління стійкістю розв'язку шляхом вибору значень спеціальних регуляризуючих параметрів. Труднощі реалізації регуляризуючих методів обумовлені необхідністю вибору для регуляризуючих параметрів таких значень, які забезпечують найкращі характеристики розв'язку за критеріями, що враховують точність, обсяг обчислень та ін.

Проведений аналіз свідчить, що успішне розв'язання оберненої задачі істотно залежить від вдалого вибору методу знаходження параметра регуляризації, який достатньо просто і ефективно реалізується на практиці без істотних обмежень на умову задачі. Таким представляється метод модельних експериментів. Суть цього методу, який далі застосовується в роботі, полягає в тому, що значення параметра регуляризації α вибирається, ґрунтуючись на розв'язанні спеціальної модельної задачі [47].

1.7. Огляд програмних засобів математичного моделювання об'єктів із розподіленими параметрами

Огляд програмних засобів математичного спрямування.

На сьогодні розроблено великий арсенал програмних засобів, які надають користувачеві широкий набір функцій для розв'язування різноманітних математичних задач. Серед найбільш популярних програм комп'ютерної математики слід відзначити такі, як Matlab [7, 42, 72, 73, 74, 75, 89, 130, 133, 156, 210, 220, 234, 241, 254, 261, 267], Mathematica [241], Mathcad [133, 241], Maple [234, 241], Maxima [221], Scilab [4], Octave [3]. Існує також ряд програмних засобів, які не забезпечують повний набір функцій, необхідних для розв'язування широкого спектру математичних задач, проте успішно справляються з більш вузьким колом специфічних задач [78, 277, 278].

У роботі [275] проведено порівняльний аналіз найбільш поширених серійних пакетів комп'ютерної математики: GAUSS from Aptech Systems Inc.; Maple from Waterloo Maple Software; Mathematica from Wolfram Research Inc.; Matlab from The Mathworks Inc.; MuPAD from the University of Paderborn; O-Matrix from Harmonic Software; Ox from Jurgen Doornik; S-Plus from Insightful Inc.; Scilab from Dr. Scilab.

В таблиці 1.1 подано результати дослідження, яке ґрунтувалося на даних оцінки функціональності кожної програми. Досліджувались такі функціональні секції: математична продуктивність, графічна продуктивність, можливості програмного середовища, інтерфейс імпорту/експорту даних, підтримка різних операційних систем, швидкість обчислень. В кінці подається інтегральна оцінка отриманих результатів. Всі значення наведені у відсотках від максимально можливого значення [89, 275].

Таблиця 1.1

Результати порівняльного тестування [275]

Тест	GAUSS	Maple	Mathemati	Matlab	MuPAD	O-Matrix	Ox	Scilab	S-Plus
%									
Мат. функціональність (38)	75.86	45.89	75.87	69.15	51.04	34.03	56.22	39.74	43.80
Граф. функціональність (10)	77.43	48.21	68.63	87.18	42.96	28.68	45.06	48.74	82.13
Функціональність програмного середовища (9)	65.56	41.67	62.78	68.33	60.83	38.61	66.39	50.00	55.00
Імпорт/експорт даних (5)	67.43	38.14	54.40	57.48	39.69	22.86	49.86	30.57	81.43
Підтримка платформ (2)	85.71	100.00	100.00	100.00	42.86	14.29	85.71	100.00	42.86
Швидкість (36)	47.90	18.12	31.32	65.89	22.56	69.80	62.22	22.56	38.56
Загалом (100)	64.80	36.44	57.34	69.74	40.13	45.83	58.45	36.12	48.61

Із результатів тестування можна зробити висновок, що математичний пакет Matlab є найбільш потужними та універсальним пакетом на сьогоднішній день, має кращу функціональність серед продуктів, які тестувалися. Він є безперечним лідером візуалізації даних, знаходиться в числі лідерів тестування швидкості обчислень і математичної функціональності, що відіграє вирішальну роль у створенні високопродуктивних додатків.

Засоби моделювання динамічних систем із розподіленими параметрами.

Моделювання об'єктів із розподіленими параметрами здійснюється шляхом застосування різних інформаційних технологій, серед яких можна виділити (рис. 1.9): засоби символьних обчислень, засоби числових обчислень, засоби аналізу скінченних елементів, засоби імітаційного моделювання, інтегральні середовища розробки.

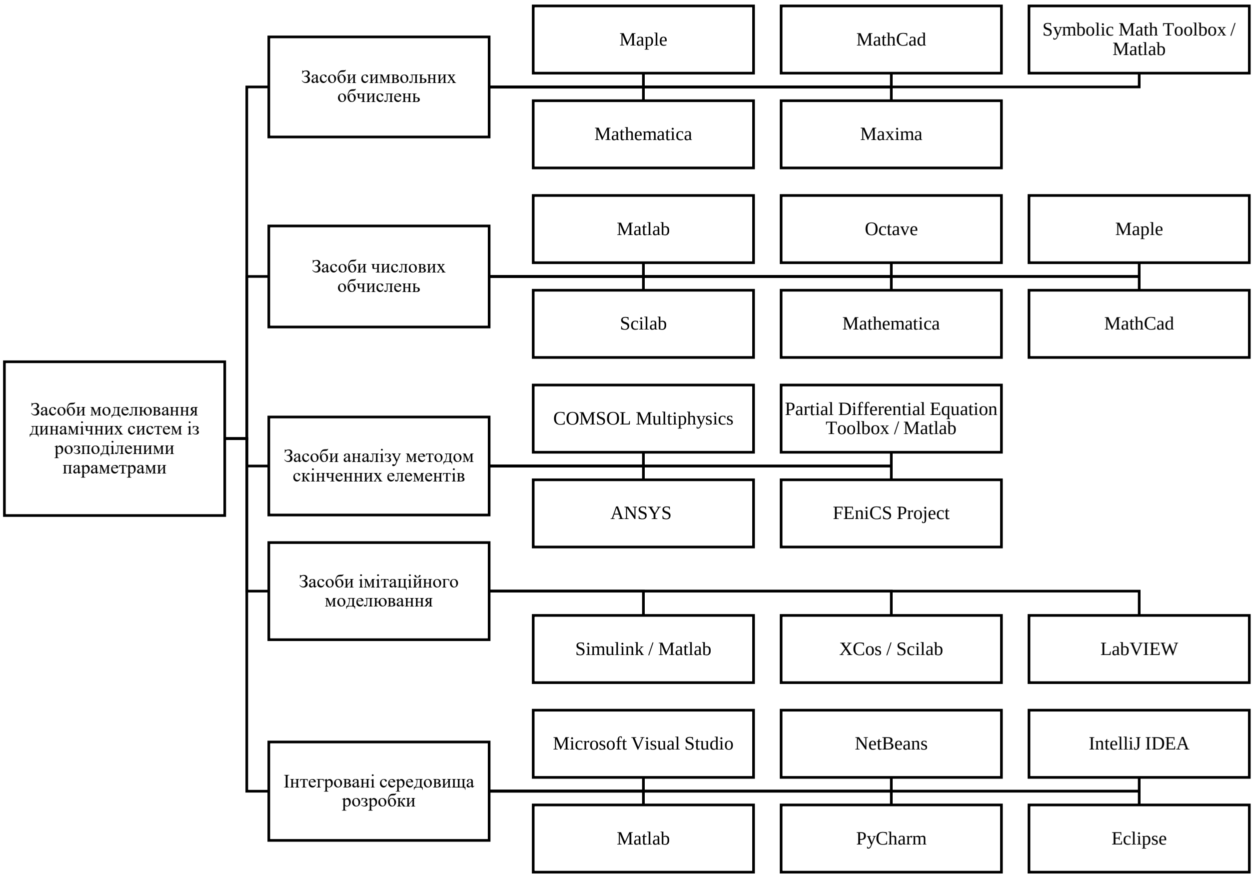


Рис. 1.9. Класифікація інформаційних технологій моделювання об'єктів із розподіленими параметрами

Засоби символьних обчислень дозволяють застосовувати точні та наближені математичні методи у моделюванні об'єктів із розподіленими параметрами. Також інструменти, які присутні в даних засобах, можуть ефективно використовуватись для еквівалентних та апроксимаційних перетворень. Найбільш повними із такої точки зору є програмні комплекси Maple [234, 241], Mathematica [241], MathCad [133, 241]. Безкоштовний аналог даних засобів є Maxima [221]. Також варто відмітити, що в межах середовища Matlab, доступна бібліотека Symbolic Math Toolbox, яка містить засоби символьних обчислень [234].

Найкращим засобом числових обчислень, згідно представленого вище дослідження, є Matlab, в основі роботи якого покладено матрицю.

Відповідно до базової математичної моделі об'єктів із розподіленими параметрами, яка має вигляд диференціальних рівнянь із частинними похідними, є широкий набір засобів, які дозволяють здійснювати їх аналіз на основі методу скінченних елементів. Найбільш розповсюдженими є такі засоби: COMSOL Multiphysics [277] та ANSYS [278]. В той же час, в межах середовища Matlab є бібліотека Partial Differential Equation Toolbox, яка дозволяє розв'язувати задачі, які описуються диференціальними рівняннями із частинними похідними [234].

Використання сучасних інформаційних технологій у розв'язуванні задач проєктування, аналізу тощо зазвичай зводиться до застосування засобів імітаційного моделювання. Найбільш повним засобом на сьогодні є середовище Simulink, яке є складовим програмного комплексу Matlab [73, 74, 219, 220].

У виборі інтегрального середовища розробки поставлених різноманітних задач варто враховувати наповненість готовими програмними засобами, які реалізують базові алгоритми, а також наявності автоматизованих засобів складання та налагодження програм. Одним із найкращих на даний час інтегрованих середовищ розробки програм є середовище Visual Studio. Спільне використання середовища Visual Studio та Matlab дозволяє врахувати сучасні вимоги до розробки програмних засобів та наповненість бібліотек інженерними та математичними функціями. Це можна легко здійснювати на основі бібліотеки MATLAB for Visual Studio Code [254, 267].

Особливості середовища Matlab.

Система *Matlab* призначена для виконання інженерних та наукових розрахунків із можливістю високоякісної візуалізації отриманих результатів. Ця система застосовується в математиці, для проведення обчислювальних експериментів, імітаційному моделюванні тощо.

В пакеті реалізована велика кількість числових методів, операторів графічного представлення результатів, засобів створення діалогів. Особливістю мови програмного середовища Matlab, у порівнянні із звичайними мовами програмування, є матричне представлення даних і великі можливості проведення матричних операцій. Використовуючи пакет Matlab можна будувати складні математичні моделі. Також є можливість застосовування технології візуального моделювання.

Гнучка мова Matlab дає можливість інженерам і вченим легко реалізовувати свої ідеї. Потужні чисельні методи і графічні можливості дозволяють перевіряти нові гіпотези, а інтегроване середовище дає можливість швидко отримувати практичні результати [89].

Matlab широко застосовується в обробці сигналів і зображень, проєктуванні систем управління, фінансових розрахунках, медичних дослідженнях тощо. Його відкрита архітектура робить можливим використання суміжних продуктів для дослідження даних і створення власних інструментів, які використовують функціональні можливості Matlab.

Ядро пакета містить програмні модулі, які реалізують всі основні обчислювальні алгоритми. Крім того, у склад цього пакета входять проблемно-орієнтовані програмні комплекси (Toolbox), призначені для розв’язування різних задач в конкретних прикладних областях. Наприклад, Control System Toolbox – пакет програм для моделювання, аналізу та побудови систем автоматичного керування, System Identification Toolbox – пакет програм для ідентифікації об’єктів керування [6, 42, 72, 73, 74, 133, 234, 241, 242].

Для проєктування систем керування, цифрової обробки сигналів, комунікаційних систем широко використовується вбудований додаток Simulink, який дозволяє моделювати різні динамічні системи, оцінювати їх роботу, модифікувати проєкт за допомогою графічних блок-діаграм. Simulink – це інтерактивне середовище для моделювання і аналізу широкого класу динамічних систем.

Завдяки тісній інтеграції з Matlab, Simulink має безпосередній доступ до широкого діапазону засобів проєктування та аналізу. Традиційний підхід у проєктуванні динамічних систем полягає у створенні прототипу, над яким проводиться всебічне тестування з метою внесення у його конструкцію відповідних змін. Цей підхід потребує великих часових та фінансових затрат. Ефективною і загальноприйнятою альтернативою є імітаційне моделювання. Simulink – потужний інструмент, який забезпечує швидку побудову і тестування віртуальних прототипів, а також дає доступ до будь-якого рівня деталізації проєкту з мінімальними зусиллями. Використовуючи Simulink для інтерактивного корегування проєкту ще до побудови прототипу, інженер може розробляти проєкт швидко та ефективно [73, 74, 219, 220].

Крім вказаних переваг, варто відмітити недоліки, які присутні в прикладних програмних засобах математичного моделювання у моделюванні об’єктів із розподіленими параметрами. Наявні програмні засоби не містять в повній мірі засоби еквівалентних та апроксимаційних перетворень, які дозволяють отримувати моделі об’єктів із розподіленими параметрами у різних формах: диференціальні рівняння із частинними похідними, інтегральні рівняння, інтегральні оператори, передатні функції, інтегро-диференціальні рівняння.

Засоби ідентифікації динамічних систем перш за все орієнтовані на параметричну ідентифікацію. Щодо непараметричних підходів, наявні засоби орієнтовані на вінерівські моделі, які покривають динамічні об’єкти із незначними нелінійностями. Для ідентифікації нелінійних динамічних систем немає засобів побудованих на основі теорії інтегро-степеневих рядів

Вольтерри. Також варто відмітити, що наявні засоби орієнтовані, перш за все, на ідентифікацію об’єктів із зосередженими параметрами.

Для числової реалізації розповсюдженими та достатньо дослідженими є засоби які реалізують диференціальні моделі. Для чисельної реалізації інтегральних моделей практично немає засобів, які входять в офіційні пакети серійних програмних засобів.

У використанні систем імітаційного моделювання важливими є набори інструментів, які реалізують типові динамічні ланки. Такими є для об’єктів із зосередженими параметрами інерційна, інтегральна, коливальна ланки. Для об’єктів із розподіленими параметрами таких наборів немає взагалі, або вони обмеженні ланкою запізнення.

Висновки до розділу 1

1. На основі проведеного аналізу сучасних динамічних систем із різних сфер їх застосування (електричні, електромеханічні, механічні, технологічні (задачі теплопровідності, дифузії), вимірювальні системи) встановлено, що значна частина об’єктів керування містить елементи з розподіленими параметрами. Спільною особливістю даних систем є те, що вони зазвичай описуються диференціальними рівняннями із частинними похідними.

2. Для опису процесів в об’єктах із розподіленими параметрами, крім класичних моделей у формі диференціальних рівнянь із частинними похідними, ефективним, особливо із точки зору керування досліджуваним процесом, є застосування моделей у формі «вхід-вихід»: передатні функції, інтегральні оператори. Це дозволяє більш гнучкіше застосовувати методи математичного моделювання у розв’язуванні задач керування, контролю та вимірювання в яких присутні об’єкти з розподіленими параметрами.

3. Найбільш типовими підходами до перетворень диференціальних моделей із частинними похідними із метою отримання спрощених моделей в інтегральній формі є методи функції Гріна, інтегральних перетворень, інтегральних представлень. Застосування даних методів, через різноманітність постановки задач, а також крайових та початкових умов, має особливості у

розв'язуванні різних задач. У випадку застосування зазначених методів отримані інтегральні моделі з ядрами, які містять сингулярність або нескінченні суми, або передатні функції ірраціонального типу. Для наступного їх використання необхідно застосовувати методи апроксимації або регуляризації.

4. Для побудови моделей сучасних систем, у зв'язку з їх складністю, найбільш прийнятним підходом є експериментальна ідентифікація. Наявні методи орієнтовані перш за все на параметричну ідентифікацію, яка має ряд недоліків, які найбільше проявляються в ідентифікації систем типу «чорний ящик» та посилюються в ідентифікації нелінійних моделей з розподіленими параметрами. Для побудови моделей на основі ідентифікації в інтегральній формі ключовою проблемою є необхідність диференціювання експериментально отриманих залежностей, які містять шумові складові, а також, необхідність проведення значної кількості експериментів для побудови моделей нелінійних динамічних систем у формі інтегро-степеневого ряду Вольтерри.

5. Для числової реалізації моделей (розв'язанні прямої задачі) об'єктів із розподіленими параметрами, які визначені у формі диференціальних рівнянь із частинними похідними, є можливість застосування аналітичних, наближених або чисельних методів, але кожен із цих підходів має ряд недоліків, які пов'язані із складністю застосування математичного апарату та необхідністю використання значних часових та обчислювальних ресурсів робочих станцій. Ці проблеми, в багатьох випадках, не дозволяють застосовувати моделі в диференціальній формі у розв'язуванні задач керування, контролю та вимірювання із забезпеченням всіх поставлених вимог. Застосування моделей у формі передатних функцій ускладнене тим, що вони містять ірраціональні та/або трансцендентні залежності. Наявні методи реалізації інтегральних моделей перш за все базуються на використанні методу квадратур. В даному напрямку недостатньо дослідженні питання побудови кубатурних формул для числової реалізації інтегро-степеневих рядів Вольтерри, в неповній мірі досліджене питання реалізації сингулярних інтегральних моделей, які часто зустрічаються у моделюванні об'єктів із

розподіленими параметрами, а також проблеми пов’язані із накопиченням кількості обчислень у використанні операторів Вольтерри з довільним ядром.

6. Основна проблема в розв’язуванні обернених задач динаміки (відновлення сигналів, пошук керуючих впливів, контроль за параметрами систем) полягає в тому, що такі задачі є некоректними. Найбільш ефективним підходом є використання методів регуляризації до інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду, у випадку лінійних систем, та поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду, у випадку нелінійних систем. Складність розв’язування таких задач посилюється, якщо розглядаються інтегральні моделі об’єктів із розподіленими параметрами, які, зазвичай, містять сингулярні ядра.

7. Проведений аналіз програмних засобів моделювання динамічних об’єктів із розподіленими параметрами показав, що серійні пакети прикладних програм містять недостатньо засобів для ефективного моделювання об’єктів із розподіленими параметрами, які орієнтовані в першу чергу на числову реалізацію диференціальних моделей і достатньо ефективні в розв’язуванні задач проєктування, але не дозволяють в повній мірі розв’язувати задачі керування, контролю та вимірювання, практично відсутні інструменти для побудови інтегральних моделей на основі апроксимаційних та/або еквівалентних перетворень та їх числової реалізації.

РОЗДІЛ 2.
МЕТОДИ ПОБУДОВИ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВІ ЕКВІВАЛЕНТНИХ ТА АПРОКСИМАЦІЙНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Для розв'язування задач керування, контролю та вимірювання на основі одновимірних інтегральних моделей не до кінця розв'язаними залишаються задачі побудови ефективних моделей (із забезпеченням вимог щодо швидкодії та точності) досліджуваних процесів в яких враховуються розподіленість параметрів та нелінійні залежності. Для розв'язання таких задач постає необхідність вдосконалення методів та засобів побудови інтегральних моделей на основі еквівалентних та/або апроксимаційних перетворень диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Розглянемо особливості таких методів у побудові спрощених моделей динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами в інтегральній формі. Серед них виділимо методи розщеплення, функції Гріна, інтегральних представлень, інтегральних перетворень та метод побудови макромоделей на основі структурного підходу, а також методи спрощення інтегральних моделей шляхом зведення їх до моделей із ядрами, що розділяються.

2.1. Спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами на основі методу розщеплення

Розглянемо метод еквівалентних перетворень базових моделей з метою забезпечення специфічних часових і ресурсних вимог шляхом зведення багатовимірних задач до комбінації одновимірних [34].

Еквівалентні перетворення базових моделей.

Розглянемо рівняння теплопровідності [233]:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}=\frac{1}{\chi}\frac{\partial v}{\partial t}, \quad t>0, \tag{2.1}$$

для прямокутного паралелепіпеда:

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \quad a_3 < x_3 < b_3, \tag{2.2}$$

де $v = v(x_1, x_2, x_3, t)$ – шукана функція температури, x_1, x_2, x_3, t – незалежні змінні, які визначають просторові координати та час, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ – сталі, χ – коефіцієнт температуропровідності.

Для деяких важливих типів початкових і граничних умов його розв'язком є добуток розв'язків трьох задач з однією змінною [233]; таким чином, якщо останні відомі, можна відразу ж записати і розв'язок поставленої задачі.

Припустимо, що функції $v_r = v_r(x_r, t)$, де $r = 1, 2, 3$, є розв'язками одновимірних рівнянь теплопровідності

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_r^2} = \frac{1}{\chi}\frac{\partial v_r}{\partial t}, \ a_r < x_r < b_r, \ t > 0, \tag{2.3}$$

з граничними умовами

$$\alpha_r \frac{\partial v_r}{\partial x_r} - \beta_r v_r = 0, \ x_r = a_r, \ t > 0,$$

$$\alpha_r' \frac{\partial v_r}{\partial x_r} + \beta_r' v_r = 0, \ x_r = b_r, \ t > 0,$$

де $\alpha_r, \beta_r, \alpha_r', \beta_r'$ – сталі, кожна з яких може бути рівною нулю (таким чином, включені випадки нульової початкової температури і відсутність теплового потоку на поверхні). Нехай початкові умови задаються функціями $V_r(x_r)$:

$$v_r(x_r, t) = V_r(x_r), \ t = 0, \ a_r < x_r < b_r, \ r = 1, 2, 3.$$

Тоді розв'язком рівняння (2.1) в області (2.2) для початкової умови

$$v = V_1(x_1)V_2(x_2)V_3(x_3),\ t = 0, \qquad (2.4)$$

і для граничних умов

$$\alpha_r \frac{\partial v}{\partial x_r} - \beta_r v = 0, \quad x_r = \alpha_r, \quad t > 0, \quad r = 1,2,3, \qquad (2.5)$$

$$\alpha_r' \frac{\partial v}{\partial x_r} + \beta_r v = 0, \quad x_r = b_r, \quad t > 0, \quad r = 1,2,3, \qquad (2.6)$$

є

$$v = v_1(x_1,t)v_2(x_2,t)v_3(x_3,t). \qquad (2.7)$$

Підставляючи вираз (2.7) в рівняння (2.1) і використовуючи (2.3) отримаємо

$$v_2 v_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + v_1 v_3 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + v_1 v_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\chi}\left(v_2 v_3 \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 v_3 \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 v_2 \frac{\partial v_3}{\partial t} \right).$$

Очевидно, що задовольняються початкова та граничні умови (2.4), (2.5) і (2.6).

Розглянемо також диференціальне рівняння з частинними похідними, задане в циліндричній системі координат [34, 233]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad (2.8)$$

де $v = v(r,z,t)$ – шукана функція температури, $r,\ z,\ t$ – незалежні змінні, які визначають просторові координати та час.

Припустимо, що його необхідно розв’язати в області

$$a < r < b, \quad z_1 < z < z_2, \qquad (2.9)$$

де a, b, z_1, z_2 – сталі.

Нехай функція $v_1 = v_1(r,t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_1}{\partial r}\right) = \frac{1}{\chi}\frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad t > 0, \ a < r < b, \tag{2.10}$$

для граничних та початкової умов

$$\alpha_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} - \beta_1 v_1 = 0, \ r = a, \ t > 0,$$

$$\alpha_1' \frac{\partial v_1}{\partial r} + \beta_1' v_1 = 0, \ r = b, \ t > 0,$$

$$v_1 = V_1(r) \text{ при } t = 0,$$

де $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1', \beta_1'$ – сталі, кожна з яких може бути рівною нулю, $V_1(r)$ – задана функція.

Нехай також функція $v_2 = v_2(z,t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi}\frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad t > 0, \quad z_1 < z_2 < z_3,$$

для граничних та початкової умов:

$$\alpha_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} - \beta_2 v_2 = 0, \ z = z_1, \ t > 0,$$

$$\alpha_2' \frac{\partial v_2}{\partial z} + \beta_2' v_2 = 0, \ z = z_2, \ t > 0,$$

$$v_2 = V_2(z) \text{ для } t = 0,$$

де $\alpha_2, \beta_2, \alpha_2', \beta_2'$ – сталі, кожна з яких може бути рівною нулю, $V_2(z)$ – задана функція.

Тоді розв'язком рівняння (2.8) в області (2.9) є

$$v = v_1(r,t)v_2(z,t), \tag{2.11}$$

для граничних умов

$$\alpha_1 \frac{\partial v}{\partial r} - \beta_1 v = 0,\ \ r = a,\ \ z_1 < z < z_2,\ \ t > 0\,,$$

$$\alpha_1' \frac{\partial v}{\partial r} + \beta_1' v = 0,\ \ \ r = b,\ \ z_1 < z < z_2,\ \ t > 0\,,$$

$$\alpha_2 \frac{\partial v}{\partial z} - \beta_2 v = 0,\ \ \ z = z_1,\ \ a < r < b,\ \ t > 0\,,$$

$$\alpha_2' \frac{\partial v}{\partial z} + \beta_2' v = 0,\ \ \ z = z_2,\ \ a < r < b,\ \ t > 0$$

і для початкової умови

$$v = V_1(r)V_2(z) \text{ для } t = 0\,.$$

Такий же прийом може бути використаний і для інших областей, наприклад для випадків необмеженого прямого двогранного кута, напівобмеженого циліндра та ін.

Оцінка моделей. Розв’язуючи вказані задачі за допомогою обчислювальних методів, що побудовані на основі різницевих схем, отримуються системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розмірність яких залежить від розбиття за просторовими та часовою змінними. Складність чисельної реалізації можна оцінити на основі кількості операцій, які необхідні для розв’язання систем алгебраїчних рівнянь [34, 168, 169].

Так, у випадку двовимірної моделі (2.10), вважатимемо, що кількість точок розбиття за просторовою змінною r буде рівною M_1, за змінною z – M_2, за часовою змінною t – N. Застосовуючи різницеві методи отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь розмірності M_1M_2N для моделі (2.10) та $M_1N + M_2N = (M_1 + M_2)N$ рівнянь для моделі (2.11). Без зменшення загальності для спрощення наступної оцінки, припустимо, що розбиття за просторовими змінними однакове: $M = M_1 = M_2$. Тобто, маємо системи алгебраїчних рівнянь розмірності M^2N та $2MN$ відповідно для двовимірної моделі та двох одновимірних.

Для розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь часто застосовуються такі методи, як метод Гауса, LU-розклад, метод Холецького, метод ітерацій [16, 117] тощо. Кількість операцій, необхідних для використання кожного з методів у розв’язуванні n-вимірної системи лінійних рівнянь рівна: $\frac{2}{3}n^3$ – метод Гауса, $\frac{2}{3}n^3$ – LU-розклад, $\frac{1}{3}n^3$ – метод Холецького, $2n^2L$ – метод ітерацій, де L – кількість ітерацій. Оцінка складності розв’язування двовимірної задачі (2.8) та сукупності одновимірних задач (2.10) подана в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Оцінка складності розв’язування двовимірної задачі

Тип задачі	Метод Гауса	LU-розклад	Метод Холецького	Метод ітерації
	Кількість операцій			
Двовимірна задача	$\frac{2}{3}M^6N^3$	$\frac{2}{3}M^6N^3$	$\frac{1}{3}M^6N^3$	$2M^4N^2L$
Дві одно-вимірні задачі	$\frac{2}{3}2^3M^3N^3$	$\frac{2}{3}2^3M^3N^3$	$\frac{1}{3}2^3M^3N^3$	$4M^2N^2L$
	Відносний показник складності δ_T			
	$\frac{1}{2^3}M^3$	$\frac{1}{2^3}M^3$	$\frac{1}{2^3}M^3$	$\frac{1}{2}M^2$

Аналогічні оцінки зроблені і для випадку тривимірної моделі (2.1). Вважатимемо, що кількість точок розбиття за просторовими змінними x_1, x_2, x_3 буде рівною M, за часовою змінною t – N. В результаті застосування різницевих схем отримаємо системи алгебраїчних рівнянь розмірності M^3N та $3MN$ відповідно для тривимірної моделі та трьох одновимірних. Оцінка складності розв’язування тривимірної задачі (2.1) та сукупності одновимірних задач (2.3) представлена в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Оцінка складності розв’язування тривимірної задачі

Тип задачі	Метод Гауса	LU-розклад	Метод Холецького	Метод ітерації
	Кількість операцій			
Тривимірна задача	$\frac{2}{3}M^9N^3$	$\frac{2}{3}M^9N^3$	$\frac{1}{3}M^9N^3$	$2M^6N^2L$
Три одно-вимірні задачі	$\frac{2}{3}3^3M^3N^3$	$\frac{2}{3}3^3M^3N^3$	$\frac{1}{3}3^3M^3N^3$	$6M^2N^2L$
	Відносний показник складності δ_T			
	$\frac{1}{3^3}M^6$	$\frac{1}{3^3}M^6$	$\frac{1}{3^3}M^6$	$\frac{1}{3}M^4$

Для оцінки складності використовується відносний показник складності δ_T, який визначається через відношення кількості операцій, що необхідні для розв’язання базової моделі та спрощених моделей.

Для числової реалізації двовимірної та тривимірної моделей також витрачається час для знаходження загального розв’язку на основі розв’язків одновимірних задач. Кількість операцій при цьому дорівнює, відповідно, M^2N та M^3N, але вона не впливає на порядок відносного показника складності.

На основі порівняння відносного показника складності, можна зробити висновок, що спрощення вихідних двовимірних та тривимірних задач дозволяє скоротити кількість обчислювальних операцій під час знаходження числових розв'язків застосовуючи прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь в $\sim M^3$ разів та в $\sim M^6$ разів відповідно; у випадку застосування методу ітерацій кількість операцій скорочується в $\sim M^2$ разів та в $\sim M^4$ разів відповідно.

У розв'язуванні одновимірних рівнянь ефективними є застосування еквівалентних моделей в інтегральній формі. Це дозволить враховувати переваги інтегральних моделей щодо стійкості до похибок у вхідних даних. Нижче розглядаються методи еквівалентних перетворень диференціальних рівнянь з частинними похідними до інтегральних моделей.

2.2. Використання методу потенціалів для побудови інтегральних моделей

Теплові потенціали.

Методику отримання математичних моделей у формі інтегральних операторів на основі методу теплових потенціалів проілюструємо на конкретних прикладах [1, 49, 233].

<u>Одновимірний випадок</u>. Розглянемо одновимірне рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{2.12}$$

і покладемо, що для проміжку $0 \le x \le l$ поставлена крайова задача з умовами

$$u\big|_{x=0} = \omega_1(t),\ u\big|_{x=l} = \omega_2(t) \tag{2.13}$$

і початковою умовою

$$u\big|_{t=0} = f(x)\ (0 \le x \le l).$$

Застосувавши метод заміни вихідної функції отримано однорідні початкові умови [164]. Таким чином, в подальшому будемо шукати розв'язок (2.12) з граничними умовами (2.13) і однорідною початковою умовою

$$u\big|_{t=0} = 0 \ (0 \le x \le l). \tag{2.14}$$

Застосувавши тепловий потенціал [34] отримуємо розв'язок

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}(x-\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau,$$

який діє від моменту $t=0$ в точці $x=\xi$ з інтенсивністю $\varphi(\tau)$.

Розв'язок шукаємо у вигляді суми двох потенціалів, які задані у точці $x=0$ і в точці $x=l$ (шукану інтенсивність у першій точці позначимо через $\varphi(\tau)$, у другій – через $\psi(\tau)$):

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}x d\tau + \int_0^t \frac{\psi(\tau)e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}(x-l)d\tau. \tag{2.15}$$

Крайові умови (2.13), в силу (2.15), матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \varphi(t) - l\displaystyle\int_0^t \frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau = \omega_1(t), \\ -\psi(t) + l\displaystyle\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau = \omega_2(t). \end{cases} \tag{2.16}$$

Розглянемо випадок, коли крайові умови мають вигляд

$$u\big|_{x=0} = \omega_1(t), \ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \omega_2(t) \tag{2.17}$$

і початкові умови, як і вище, мають вигляд (2.14). В такому випадку розв'язок записується у вигляді

$$u(x,t)=\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} x e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau + \int_0^t \frac{a\psi(\tau)}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau. \qquad (2.18)$$

Використавши умови (2.17) та розв'язок (2.18), матимемо

$$\begin{cases} \varphi(t)+\int_0^t \frac{a}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\psi(\tau)e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau=\omega_1(t), \\ \psi(t)+\int_0^t \frac{e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\varphi(t)d\tau - l^2\int_0^t \frac{e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}}{4a^3(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}\varphi(\tau)d\tau=\omega_2(t). \end{cases} \qquad (2.19)$$

В результаті отримуємо систему інтегральних рівнянь відносно $\varphi(t)$ і $\psi(t)$.

Двовимірний випадок. Ідея потенціалу можна застосовувати і до багатовимірних задач теплопровідності [1, 19]. Розглянемо двовимірний випадок [49], тобто рівняння

$$u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right). \qquad (2.20)$$

Аналог потенціалу простого шару визначається формулою:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_l \frac{a(\sigma,\tau)}{(t-\tau)}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\sigma,$$

де σ – довжина дуги контуру l і $a(\sigma,\tau)$ – функція змінної контуру σ і часового параметра τ, $r^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2$, r – відстань від точки (x,y) до змінної σ контуру l. Формула теплового потенціалу подвійного шару має вигляд

$$v(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_l \frac{b(\sigma,\tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(r,n)\,d\sigma, \qquad (2.21)$$

де n – напрям зовнішньої нормалі в точці інтегрування.

Шукана функція $v(x,y,t)$ задовольняє рівняння (2.20), яке має на контурі l задані крайові умови:

$$v\big|_l=\omega(s,t),$$

де s – координата точки контуру, що визначається довжиною дуги s, яка відраховується від деякої точки. Початкові умови вважаються рівними нулю. Здійснюючи пошук розв'язку у вигляді подвійного шару (2.21) отримано інтегральні рівняння для функції $b(\sigma,\tau)$:

$$-b(s,t)+\int_0^t d\tau\int_l \frac{b(\sigma,\tau)}{4\pi a^2(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(r,n)\,d\sigma=\omega(s,t).$$

У даному рівнянні інтегрування за σ здійснюється на фіксованому проміжку $(0,L)$, де L – довжина контуру l, і за τ, де верхня границя є змінною. Іншими словами, отримане інтегральне рівняння має характер рівнянь Фредгольма по відношенню до змінної σ і характер рівнянь Вольтерри по відношенню до змінної τ.

Задача теплопровідності з рухомою границею. Розглянемо на прикладі застосування методу теплових потенціалів до задач із рухомою границею [49]. Задача формулюється наступним чином: знайти розв'язок рівнянь

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\quad 0<x<a\sqrt{t},\quad t>0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},\quad a\sqrt{t}<x<\infty,\quad t>0,$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u_1(0,t)=\varphi(t), \quad 0<t<\infty, \\ u_1\left(a\sqrt{t},t\right)=u_2\left(a\sqrt{t},t\right)=\psi(t), \quad 0<t<\infty, \\ u_2(\infty,t)=0, \quad 0<t<\infty, \\ u_2(x,0)=0, \quad 0<x<\infty \end{cases}$$

та умовою узгодження

$$\varphi(0)=\psi(0).$$

Розв’язок шукаєється у вигляді теплових потенціалів подвійного шару:

$$u_1(x,t)=\int_0^t \frac{xe^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}}\mu_1(\tau)}{2a_1\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau+\int_0^t \frac{\left(x-a\sqrt{\tau}\right)e^{-\frac{\left(x-a\sqrt{\tau}\right)^2}{4a_2^2(t-\tau)}}\mu_2(\tau)}{2a_1\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau,$$

$$u_2(x,t)=\int_0^t \frac{x-a\sqrt{\tau}}{2a_2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left(x-a\sqrt{\tau}\right)^2}{4a_2^2(t-\tau)}}\nu(\tau)d\tau.$$

Для виконання граничних умов отримуємо систему інтегральних рівнянь відносно $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$ та рівняння відносно $v(t)$:

$$\begin{cases} \varphi(t)=-\dfrac{k_1}{\pi}\displaystyle\int_0^t \frac{\tau^{1/2}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{k_1^2\tau}{t-\tau}}\mu_2(\tau)d\tau+\mu_1(t), \\ \psi(t)=\displaystyle\int_0^t \frac{k_1\zeta\mu_2(\tau)e^{-\frac{k_1^2\zeta^2}{t-\tau}}}{\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau+\int_0^t \frac{k_1\sqrt{t}e^{-\frac{k_1^2 t}{t-\tau}}\mu_1(\tau)}{\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau-\mu_2(t), \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\psi(t)=\nu(t)+\frac{k_2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\zeta}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{k_2^2\zeta^2}{t-\tau}}\nu(\tau)d\tau, \tag{2.23}$$

де $k_1 = \alpha/2a_l$, $l = 1,2$, $\zeta = \left(\sqrt{t} - \sqrt{\tau}\right)$.

<u>Друга крайова задача</u>. Потрібно знайти розв'язок рівнянь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < a\sqrt{t}, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad a\sqrt{t} < x < \infty, \quad t > 0$$

для умов

$$\frac{\partial u_1\left(a\sqrt{t}, t\right)}{\partial x} = -\frac{\partial u_2\left(a\sqrt{t}, t\right)}{\partial x} = \psi(t), \quad t > 0,$$

$$u_2(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty, \ \frac{\partial u_2(\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \ \varphi(0) = \psi(0).$$

Якщо тепер шукати розв'язок у вигляді потенціалів простого шару

$$u_1(x,t) = -\int_0^t \frac{a_1 e^{-\frac{x^3}{4a_1^2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi}(t-\tau)} \mu_1(\tau)\, d\tau - \int_0^t \frac{a_1 e^{-\frac{\left(x - a\sqrt{\tau}\right)^2}{4a_1^2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{1/2}} \mu_2(\tau)\, d\tau, \tag{2.24}$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t \frac{a_2 e^{-\frac{\left(x - a\sqrt{\tau}\right)^2}{4a_2^2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{1/2}} \nu(\tau)\, d\tau \tag{2.25}$$

в результаті знову приходимо до рівнянь (2.22) і (2.23).

Таким чином, розв'язок другої крайової задачі для обмеженої та напівнескінченної областей визначаються, відповідно, формулами (2.24) і (2.25), де щільності $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ і $\nu(t)$ – ті ж, що і в першій крайовій задачі.

Хвильові потенціали.

У розв'язуванні крайових задач для рівнянь параболічного типу в основі всієї побудови лежав фундаментальний розв'язок відповідного диференціального рівняння. Застосуємо цю ідею до рівняння гіперболічного типу.

Розглянемо одновимірне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c^2 u \tag{2.26}$$

на проміжку $0 \le x \le l$ з однорідними початковими умовами

$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0 \tag{2.27}$$

та крайовими умовами

$$u|_{x=0}=\omega_1(t),\ u|_{x=l}=\omega_2(t). \tag{2.28}$$

Відмітимо, що початкові умови можуть бути завжди зведені до однорідних. Функція Бесселя уявного аргументу $l_0\left(c\sqrt{t^2-x^2}\right)$ є фундаментальним розв’язком рівняння (2.26). Застосуємо потенціали «простого шару» [1]:

$$\int_0^{t-x}\varphi(\tau)l_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)d\tau,$$

$$\int_0^{t-(l-x)}\psi(\tau)l_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-(l-x)^2}\right)d\tau,$$

де $\varphi(\tau)$ та $\psi(\tau)$ – деякі диференційовані функції, тоді розв’язок задачі (2.26) –(2.28) шукаємо у вигляді суми диференціалів фундаментальних потенціалів «простого шару» по x

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{t-x}\varphi(\tau)I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-x^2}\right)d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{t-(l-x)}\psi(\tau)I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-(l-x)^2}\right)d\tau,$$

причому вважається, що $\varphi(\tau)=\psi(\tau)=0$. Рівняння (2.26) та початкові умови (2.27) виконуються за будь-якого вибору $\varphi(\tau)$ та $\psi(\tau)$. Крайові умови (2.28) приводять до наступної системи рівнянь для $\varphi(\tau)$ та $\psi(\tau)$:

$$\begin{cases}-\varphi(t)+\psi(t-l)+\int_0^{t-l}\psi(\tau)\dfrac{clI_0'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}d\tau=\omega_1(t),\\ -\varphi(t-l)+\psi(t)-\int_0^{t-l}\varphi(\tau)\dfrac{clI_0'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}d\tau=\omega_2(t).\end{cases}\qquad(2.29)$$

Функції $\omega_1(\tau)$ та $\omega_2(\tau)$ вважаються неперервно диференційованими. Позначивши

$$\psi(t)-\varphi(t)=\varphi_1(t),\ \psi(t)+\varphi(t)=\psi_1(t),$$

та додаючи і віднімаючи почлено рівняння (2.29) отримано роздільні рівняння для $\varphi_1(t)$ та $\psi_1(t)$:

$$\varphi_1(t)+\varphi_1(t-l)+cl\int_0^{t-l}\varphi_1(\tau)\frac{I_0'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}d\tau=\omega_1(t)+\omega_2(t),$$

$$-\psi_1(t)+\psi_1(t-l)+cl\int_0^{t-l}\psi_1(\tau)\frac{I_0'\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}d\tau=\omega_1(t)-\omega_2(t),$$

причому $\varphi_1(\tau)=\psi_1(\tau)=0$ для $\tau<0$.

На відміну від системи інтегральних рівнянь для рівнянь теплопровідності в даному випадку отримується система інтегральних рівнянь з функціональною залежністю.

Відмітимо, що для $c = 0$ фундаментальними розв'язками хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

є функції

$$W_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - r),\ W_2(x,t) = \frac{\theta(at - r)}{2\pi\sqrt{a^2t^2 - r^2}}, W_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a}\delta\left(a^2t^2 - r^2\right).$$

Тут $r \equiv |x|$, $\theta(z)$ – ступінчата функція, яка дорівнює нулю для $z < 0$ і одиниці – в протилежному випадку. У тривимірному просторі хвильовий потенціал виражається у вигляді узагальненої δ-функції. Хвильовий потенціал визначається як згортка фундаментального розв'язку та щільності потенціалу ρ, яка також є рівною нулю для $t < 0$. Тому виникає інтеграл по часу на проміжку $[0,t]$. В залежності від розмірності хвильові потенціали мають вигляд [1, 19]

$$V_1(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \rho(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

$$V_2(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \int_{K(a(t-\tau))} \frac{\rho(\xi,\tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}},$$

$$V_3(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{K(at)} \frac{\rho\left(\xi, t - \dfrac{|x-\xi|}{a}\right)}{|x-\xi|} d\xi.$$

Тут $K(z)$ – круг із центром в точці x радіусу z. Тривимірний хвильовий потенціал V_3 визначається із запізненням, оскільки його значення в точці x у момент часу $t>0$ визначається значеннями джерела $\rho(\xi,\tau)$, взятими в початкові моменти часу $\tau = t - \frac{|x-\xi|}{a}$, причому час запізнення $\frac{|x-\xi|}{a}$ – це час, який необхідний для приходу опору з точки ξ в точку x.

Розглянутий підхід можна застосовувати і до інших об'єктів із розподіленими параметрами, наприклад, застосувавши гідродинамічні потенціали [1, 19] можна отримати аналогічні системи інтегральних рівнянь із сингулярними ядрами.

Отриманні функціональні співвідношення, зокрема для одновимірної задачі теплопровідності (2.15)-(2.16) або (2.18)-(2.19), можуть застосовуватись для розв'язування прямих і обернених задач. При відомих крайових умовах пряма задача розв'язується шляхом розв'язування системи інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду (2.16) або (2.19) із наступною підстановкою в інтегральний оператор (2.15) і (2.18) відповідно. У випадку, якщо відомо розв'язок $u(x,t)$ рівняння (2.12) та шукається значення $\omega_1(t)$ або $\omega_2(t)$ із крайових умов (2.13) або (2.17) для відомого іншого значення, тобто постає обернена задача, необхідно розв'язувати систему рівнянь відносно $\varphi(\tau)$ та $\Psi(\tau)$, яка містить рівняння Вольтерри першого роду (2.15) або (2.18) та одне рівняння Вольтерри другого роду з (2.16) або (2.19).

Отже, даний підхід дозволяє будувати алгоритми розв'язування прямих і обернених задач для об'єктів із розподіленими параметрами.

2.3. Застосування багатовимірної дельта-функції для побудови функції Гріна як моделі об'єкта з розподіленими параметрами

Одним із найбільш універсальних методів отримання інтегральних моделей є застосування δ-функції для побудови функції Гріна. Розглянемо можливість застосування даного методу до побудови інтегральних моделей багатовимірних об’єктів з розподіленими параметрами. Для одновимірних випадків цей підхід розглядався у першому розділі.

Багатовимірна δ-функція.

Для отримання інтегральних моделей об’єктів з розподіленими параметрами, як і у випадку об’єктів із зосередженими параметрами (підрозділ 1.3), особливе місце займає імпульсна перехідна функція (1.34). У зв’язку з цим визначимо, що собою являє імпульсна перехідна функція для багатовимірного об’єкта з розподіленими параметрами. Розглянемо чотиривимірну δ-функцію

$$\delta(t,x,y,z)=\delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

де x,y,z – просторові координати.

Припустимо, що операторне рівняння, яке характеризує поведінку об’єкта з розподіленими параметрами має вигляд

$$AX(x,y,z,t)=Y(x,y,z,t). \tag{2.30}$$

Тоді, аналогічно, як для об’єктів із зосередженими параметрами [30, 136, 164, 268], маємо

$$\begin{aligned} Y(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(x,y,z,t)A\big[\delta(x-x')\times\delta(y-y')\times \\ \times\delta(z-z')\times\delta(t-\tau)\big]dxdydzd\tau. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Підставляючи (2.31) в (2.30) і вважаючи можливим перестановку послідовності дій інтегрування отримаємо

$$\begin{aligned} AX(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(x,y,z,t)A\big[\delta(x-x')\times\delta(y-y')\times \\ \times\delta(z-z')\times\delta(t-\tau)\big]dxdydzd\tau, \end{aligned}$$

звідки

$$Y\left(x,y,z,t\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g\left(x,x',y,y',z,z',t,\tau\right)X\left(x',y',z',\tau\right)dxdydzd\tau,$$

де функція

$$g\left(x,x',y,y',z,z',t,\tau\right)=A\left[\delta\left(x-x'\right)\delta\left(y-y'\right)\delta\left(z-z'\right)\delta\left(t-\tau\right)\right]$$

є імпульсною перехідною функцією об’єкта з розподіленими параметрами.

Моделі вимірювальних перетворювачів. Із використанням методів еквівалентних перетворень отримано моделі вимірювальних перетворювачів в інтегральній формі. У додатку А представлено побудовані еквівалентні моделі динамічних моделей вимірювальних перетворювачів із зосередженими параметрами. Для вимірювальних перетворювачів з розподіленими параметрами на основі розглянутого підходу побудовано ряд моделей вимірювальних перетворювачів із розподіленими параметрами в інтегральній формі з використанням методу Бубнова-Гальоркіна [1], зокрема:

– для вимірювального перетворювача тиску, модель якого в диференціальній формі має вигляд (1.11), інтегральна модель буде мати вигляд

$$W\left(t\right)=\frac{2R}{a_0\rho_s}\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}\sin\alpha_0k_n\left(t-\tau\right)P\left(\tau\right)d\tau,$$

де $k_n=\mu/R$, μ – корені рівняння $I_n\left(\mu\right)=0$; $I_1\left(\mu\right)$ – функція Бесселя першого роду першого порядку;

– для вимірювального перетворювача температури, що визначається (1.18), інтегральна модель буде мати вигляд

$$U\left(t\right)=\frac{a}{R^2}\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-\mu_n^2\frac{a}{R^2}\left(t-\tau\right)}\theta\left(\tau\right)d\tau,$$

де $B_n=\dfrac{\sin\mu_n}{\mu_n}A_n$, $A_n=\dfrac{2\mu_n^2\sin\mu_n}{\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n}$, а μ_m – корені рівняння $ctg\mu=\dfrac{1}{hR}\mu$;

– для рівняння (1.12) еквівалентна інтегральна модель буде мати вигляд:

$$U(t)=\frac{a}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\int_0^t e^{-\mu_n^2\frac{a}{R^2}(t-\tau)}\theta(\tau)d\tau\,,$$

де $B_n=\dfrac{6B_i^2}{\mu_n^2+B_i^2+B_i}$, $B_i=hR$;

– для рівняння (1.16) маємо

$$U(t)=\frac{a}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\int_0^t e^{-\mu_n^2\frac{a}{R^2}(t-\tau)}\theta(\tau)d\tau\,,$$

де $B_n=\dfrac{4I_1^2(\mu_n)}{I_0^2(\mu_n)+I_1^2(\mu_n)}$, $I_0(\mu)$ і $I_1(\mu)$ – функції Бесселя першого і нульового порядку відповідно, μ_n – корені рівняння $\dfrac{I_0(\mu)}{I_1(\mu)}=\dfrac{\mu}{hR}$;

– для рівняння (1.17) маємо

$$U(t)=\frac{4mk}{\pi}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-\left[m_k+\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2\frac{a}{e_0^2}\right](t-\tau)}\theta(\tau)d\tau\,.$$

Таким чином, застосування методу δ-функції дозволяє отримати інтегральні моделі динамічних процесів в об’єктах із розподіленими параметрами, які можуть бути основою для побудови цифрових аналогів вимірювальних перетворювачів з розподіленими параметрами.

2.4. Побудова одновимірних інтегральних моделей на основі методу інтегральних перетворень

Побудова моделей у формі передатних функцій.

Розглянемо застосування методу перетворення Лапласа до диференціальних рівнянь із частинними похідними, які описують об’єкти з розподіленими параметрами [50, 66, 121, 165]. При цьому частинні похідні за часом t прибираються і в рівнянні зображень, залишаються тільки частинні похідні за просторовою змінною x. Це означає, що рівняння в просторі зображень являє собою звичайне диференціальне рівняння, розв’язання якого є простішою задачею, ніж розв’язання рівняння з частинними похідними. Крайові умови для вихідного рівняння переходять у початкові умови для рівняння в просторі зображень. У розв’язуванні такого рівняння з врахуванням крайових умов визначаються передатні функції об’єкта з розподіленими параметрами [50, 66, 121, 165].

Модель крутильних коливань валу. Застосуємо прямий метод [50] для визначення передатної функції однорідного валу при крутильних коливаннях. Розглянемо модель крутильних коливань валу (1.1)-(1.2). Перетворення за Лапласом даних рівнянь дає наступні вирази:

$$\frac{\partial^2\varphi(\xi,p)}{\partial\xi^2} - p^2\varphi(\xi,p) = 0;$$

$$-\left.\frac{\partial\varphi(\xi,p)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = M^*(0,p); \quad \left.\frac{\partial\varphi(\xi,p)}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = 0.$$

Так як після переходу в простір зображень залишається тільки частинна похідна за просторовою змінною ξ, то можна замінити її звичайною похідною, після чого зображення набуде вигляду

$$a^2\frac{d^2\varphi(x,p)}{\partial x^2} - p^2\varphi(x,p) = 0. \tag{2.32}$$

В цьому рівнянні змінна p відіграє роль параметра, від якого залежить розв’язок $\varphi(x,p)$. Для розв’язання рівняння (2.32) розглядається характеристичне рівняння і підставляється в крайові умови [121]. В результаті отримується вираз для передатної функції

$$\frac{\varphi(x,p)}{M(0,p)} = \frac{1}{p}\frac{1}{e^{a^{-1}p} - e^{-a^{-1}p}}\left[e^{a^{-1}p(1-x)} + e^{-a^{-1}p(1-x)}\right].$$

Переходячи до гіперболічних функцій $\mathrm{ch}\, a^{-1}p = \frac{e^{a^{-1}p} + e^{-a^{-1}p}}{2}$ і $\mathrm{sh}\, a^{-1}p = \frac{e^{a^{-1}p} - e^{-a^{-1}p}}{2}$ отримано вирази для передатної функції від моменту, прикладеного до лівого кінця валу, до зміщення валу в перерізі x:

$$\frac{\varphi(x,p)}{M(0,p)} = \frac{a^{-1}}{p}\frac{\mathrm{ch}\, a^{-1}p(1-x)}{\mathrm{sh}\, a^{-1}p}. \tag{2.33}$$

В частковому випадку, для $x = l$ маємо

$$\frac{\varphi(l,p)}{M(0,p)} = \frac{a^{-1}}{p}\frac{1}{\mathrm{sh}\, a^{-1}p} = W_1(l,0;p). \tag{2.34}$$

Для $x = 0$ передатна функція має вигляд

$$\frac{\varphi(0,p)}{M(0,p)} = \frac{a^{-1}}{p}\frac{\mathrm{ch}\, a^{-1}p}{\mathrm{sh}\, a^{-1}p} = W_2(0,0;p). \tag{2.35}$$

На основі останніх двох виразів отримано передатну функцію від зміщення валу на його лівому кінці до зміщення валу на правому кінці

$$\frac{\varphi(l,p)}{\varphi(0,p)} = \frac{1}{\mathrm{ch}\, a^{-1}p} = W_3(l,0;p). \tag{2.36}$$

Аналогічно визначаються передатні функції однорідного валу при врахуванні сил внутрішнього тертя.

Модель теплопереносу в одномірній нескінченній пластині. Розглянемо випадок отримання передатних функцій за допомогою прямого методу у моделюванні теплопереносу в одновимірній нескінченній пластині [85] на основі моделі (1.13)–(1.15).

Так як після переходу в простір зображень залишається тільки частинна похідна за просторовою змінною x, то замінивши її звичайною похідною зображення матиме вигляд

$$a\frac{d^2T(x,p)}{\partial x^2}=pT(x,p).$$

Використавши крайові умови отримано вираз для передатної функції

$$\frac{T(x,p)}{q(\delta,p)}=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\frac{p}{a}}}\frac{e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x}+e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}}{e^{\sqrt{\frac{p}{a}}\delta}-e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\delta}}. \tag{2.37}$$

Системи буксирування. Застосувавши до рівнянь (1.5) і (1.6) перетворення Лапласа [18], отримано:

$$T=E_T\cdot F\cdot(1+\tau_T\cdot p)\frac{\partial x(z,p)}{\partial z}, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial T(z,p)}{\partial z}=m\cdot p^2\cdot x(z,p)+\beta\cdot p\cdot x(z,p). \tag{2.39}$$

Застосувавши до (2.38)-(2.39) перетворення Лапласа за змінною z, отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} T(s,p)=E_T\cdot F\cdot(1+\tau_T\cdot p)\big(s\cdot x(s,p)-x(0,p)\big), \\ s\cdot T(s,p)-T(0,p)=m\cdot p^2\cdot x(s,p)+\beta\cdot p\cdot x(s,p), \end{cases}, \tag{2.40}$$

де $T(0,p)$, $x(0,p)$ – зображення сили натягу і переміщення верхнього кінця троса, p і s – аргументи зображення функції часу та функції z в просторі Лапласа.

З (2.40) знайдено

$$T(s,p)=\frac{T(0,p)\cdot s+x(0,p)\cdot\left(m\cdot p^2+\beta\cdot p\right)}{s^2-\dfrac{m\cdot p^2+\beta\cdot p}{E_T\cdot F\cdot\left(1+\tau_T\cdot p\right)}},$$

$$x(s,p)=\frac{x(0,p)\cdot s+T(0,p)\cdot\left(E_T\cdot F\cdot\left(1+\tau_T\cdot p\right)\right)^{-1}}{s^2-\dfrac{m\cdot p^2+\beta\cdot p}{E_T\cdot F\cdot\left(1+\tau_T\cdot p\right)}}.$$

Переходячи від зображень за зміною s до оригіналів із змінною z [18], отримано

$$T(z,p)=T(0,p)\cdot \mathrm{ch}\left(\frac{z}{w}\cdot r(p)\right)+x(0,p)\cdot Z_w(p)\cdot \mathrm{sh}\left(\frac{z}{w}\cdot r(p)\right), \qquad (2.41)$$

$$x(z,p)=x(0,p)\cdot \mathrm{ch}\left(\frac{z}{w}\cdot r(p)\right)+T(0,p)\cdot Z_w^{-1}(p)\cdot \mathrm{sh}\left(\frac{z}{w}\cdot r(p)\right). \qquad (2.42)$$

де $w=\sqrt{\dfrac{E_T\cdot F}{m}}$ – швидкість розповсюдження коливань в тросі (швидкість звуку), $Z_w(p)=b_w\cdot\sqrt{\left(p^2+v_T\cdot p\right)\cdot\left(1+\tau_T\cdot p\right)}$ – хвильовий опір; $b_w=m\cdot w=\sqrt{E_T F\cdot m}$ – опір розповсюдження коливань в тросі, $r(p)=\sqrt{\dfrac{p^2+v_T\cdot p}{1+\tau_T\cdot p}}$ – коефіцієнт розповсюдження коливань в операторному вигляді; $v_T=\dfrac{\beta}{m}$ – відносний поздовжній опір довжини тросу.

Переміщення початку троса $x(0,p)$ відоме, воно визначається параметрами судна та морського хвилювання, а також роботою суднової лебідки. Друга початкова умова $T(0,p)$ отримується використовуючи рівняння руху БПО.

Крім маси БПО необхідно враховувати приєднані маси води, які залежать від геометричних характеристик БПО, головним чином, від площі максимального перерізу, перпендикулярного напрямку руху. Сила опору руху БПО у воді визначається квадратичною залежністю від швидкості вздовж води. При невеликих швидкостях переміщення БПО коефіцієнт опору зменшується пропорційно швидкості. Тому можна враховувати, що сила опору руху БПО у воді росте пропорційно швидкості переміщення. Лінійна залежність зображення за Лапласом сили $T(L,p)$ від зображення прискорення переміщення $p^2x(L,p)$ визначається формулою [128]:

$$T(L,p) = -\left(m_{BPO}\cdot p^2 + k_{BPO}\cdot p\right)\cdot x(L,p),$$

де k_{BPO} – коефіцієнт опору води руху БПО, m_{BPO} – сума маси БПО і приєднаних мас, які враховують інерційні гідродинамічні сили, що діють на БПО.

Підстановкою замість z повної довжини троса в ненавантаженому стані L знаходиться зображення сили $T(L,p)$ і переміщення $x(L,p)$ нижнього кінця троса.

Отриману систему рівнянь можна представити у вигляді направленого графа, з якого, використовуючи теорему про граничні значення функцій часу і їх зображень за Лапласом, знаходиться початкове значення сили $T(0,0)$=0 та використавши правило Мейсона визначаються передатні функції зміщення нижнього кінця троса з БПО і сили на верхньому кінці троса [128]:

$$W_x(L,p) = \frac{x(L,p)}{x(0,p)} = \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\tau_L\cdot r(p)\right) + \dfrac{m_{BPO}\cdot p^2 + k_{BPO}\cdot p}{Z_w(p)}\cdot \mathrm{sh}\left(\tau_L\cdot r(p)\right)}, \qquad (2.43)$$

$$W_T(0,p) = \frac{T(L,p)}{x(0,p)} = \frac{\mathrm{sh}\left(\tau_L\cdot r(p)\right) + \dfrac{m_{BPO}\cdot p^2 + k_{BPO}\cdot p}{Z_w(p)}\cdot \mathrm{ch}\left(\tau_L\cdot r(p)\right)}{\mathrm{ch}\left(\tau_L\cdot r(p)\right) + \dfrac{m_{BPO}\cdot p^2 + k_{BPO}\cdot p}{Z_w(p)}\cdot \mathrm{sh}\left(\tau_L\cdot r(p)\right)}, \qquad (2.44)$$

де $\tau_L = \dfrac{L}{w}$ – час проходження хвилі по тросу.

Передатні функції для будь-якого перерізу троса з координатою z отримуються шляхом визначення (2.43)-(2.44) з наступною підстановкою в (2.41)-(2.42) [91]:

$$W_x(z,p) = \frac{x(z,p)}{x(0,p)} = \frac{\mathrm{ch}\left(\dfrac{L-z}{w}\cdot r(p)\right) + \dfrac{m_{BPO}\cdot p^2 + k_{BPO}\cdot p}{Z_w(p)}\cdot \mathrm{sh}\left(\dfrac{L-z}{w}\cdot r(p)\right)}{\mathrm{ch}\left(\tau_L\cdot r(p)\right) + \dfrac{m_{BPO}\cdot p^2 + k_{BPO}\cdot p}{Z_w(p)}\cdot \mathrm{sh}\left(\tau_L\cdot r(p)\right)},$$

$$W_T(z,p) = \frac{T(z,p)}{x(0,p)} = \frac{\mathrm{sh}\left(\dfrac{L-z}{w}\cdot r(p)\right) + \dfrac{m_{BPO}\cdot p^2 + k_{BPO}\cdot p}{Z_w(p)}\cdot \mathrm{ch}\left(\dfrac{L-z}{w}\cdot r(p)\right)}{\mathrm{ch}\left(\tau_L\cdot r(p)\right) + \dfrac{m_{BPO}\cdot p^2 + k_{BPO}\cdot p}{Z_w(p)}\cdot \mathrm{sh}\left(\tau_L\cdot r(p)\right)}.$$

Інтегральні моделі об’єктів з розподіленими параметрами.

У моделюванні динамічних об’єктів, які містять ланки з розподіленими параметрами актуальними і не до кінця вирішеними є задачі формування базового набору елементарних ланок (подібно до об’єктів із зосередженими параметрами), за допомогою яких можна було б структурно формувати модель досліджуваного розподіленого об’єкта з можливістю її чисельної реалізації. Для розв’язування поставлених задач необхідно враховувати те, що отримані результати у вигляді методів та алгоритмів повинні підтримувати ідеологію структурно-алгоритмічного моделювання та забезпечувати ефективну комп’ютерну реалізацію моделі.

Досвід застосування структурно-алгоритмічного методу для створення сучасних спеціалізованих пакетів прикладних програм свідчить про те, що для синтезу моделей певного класу об’єктів достатньо мати базовий набір моделей і алгоритмів. При цьому досягається максимальна формалізація процедури організації обчислювального процесу [50].

Розглянуті методи формування передатних функцій дозволяють отримувати еквівалентні моделі об'єктів із розподіленими параметрами у вигляді передатних функцій. Приведені приклади показують, що динамічні об'єкти з розподіленими параметрами описуються складними передатними функціями, а саме: трансцендентними передатними функціями (зокрема: e^{-p}, $ch(p)$, $sh(p)$, $th(p)$, $cth(p)$) та ірраціональними передатними функціями (зокрема: $\frac{1}{\sqrt{p+1}}$, $\frac{1}{\sqrt{p}}$, $e^{-\sqrt{p}}$) та ін.

У якості базових для об'єктів із зосередженими параметрами можуть бути алгоритми, які реалізують типові динамічні ланки (інтегральну, інерційну, коливальну) [38, 50, 197]. У таблиці 2.3 наведено передатні функції цих ланок та їх аналоги в альтернативній формі – у вигляді інтегральних операторів Вольтерри. Передбачається, що кожному блоку ставиться у відповідність алгоритм, який реалізується відповідним програмним модулем [114].

Подані у таблиці ланки та їх характеристики описують об'єкти із зосередженими параметрами, але з їх допомогою неможливо описати широкий клас фізичних процесів, в яких присутня розподіленість параметрів.

Таблиця 2.3

Набір моделей типових елементів об'єктів із зосередженими параметрами

Назва ланки	Передатна функція	Оператор Вольтерри
Пропорційна	k	$\int_0^t k\delta(t-s)x(s)ds$
Інтегральна	$\frac{k}{p}$	$\int_0^t k1_0(t-s)x(s)ds$
Інерційна	$\frac{k}{1+pT}$	$\int_0^t ke^{-(t-s)/T}x(s)ds$
Коливальна	$\frac{k}{1+2\xi pT+(pT)^2}$	$\int_0^t \frac{kw_0^2}{w_1}e^{-\beta(t-s)}\sin w_1(t-s)x(s)ds$

Елементарні блоки об’єктів із розподіленими параметрами варто асоціювати з математичною або фізичною моделлю процесу, зокрема з такими задачами математичної фізики, як: процеси теплопередачі та дифузії, що описуються рівняннями параболічного типу (нагрів тіл, дифузія речовин та ін.), гіперболічного типу (хвильові та коливальні процеси в механічних, гідро-аеродинамічних системах, електричних колах) [30, 50, 121, 165, 197].

Вирази (2.33), (2.34), (2.35), (2.36), (2.37) містять трансцендентні та ірраціональні функції, які не можна виразити через функції приведені в таблиці 2.3. Тому, для об’єктів з розподіленими параметрами можна виділити наступні базові типові ірраціональні та трансцендентні ланки: напівінтегральна, напівінерційна 1-го та 2-го роду, напівколивальна, запізнення та затухання (або напівзапізнення). У таблиці 2.4 подані основні характеристики даних ланок, а саме їх передатні функції та відповідні їм оператори Вольтерри [114].

Таблиця 2.4

Набір типових ірраціональних та трансцендентних ланок та їх моделі

Назва ланки	Передатна функція	Оператор Вольтерри
Напів-інтегральна	$\frac{k}{\sqrt{p}}$	$\int_0^t \frac{k}{\sqrt{\pi(t-s)}} x(s)ds$
Напів-інерційна 1-го типу	$\frac{k}{1+\sqrt{pT}}$	$\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\pi(t-s)k}} - e^{\frac{(t-s)}{T}} erfc\sqrt{\frac{(t-s)}{T}}\right)x(s)ds$
Напів-інерційна 2-го типу	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-a(t-s)} x(s)ds$
Напів-коливальна	$\frac{1}{\sqrt{p^2+ap+b}}$	$\int_0^t e^{\left(-\frac{1}{2}a(t-s)\right)} J_0\left[\left(b-\frac{1}{4}a^2\right)^{\frac{1}{2}}(t-s)\right]x(s)ds$
Запізнення	$e^{-p\tau}$	$\int_0^t \delta(t-s)x(s)ds$
Затухання (напів-запізнення)	$e^{-\sqrt{pT_0}}$	$\int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4(t-s)}} x(s)ds$

Для моделювання об’єктів із розподіленими параметрами, у зв’язку із різноманітністю поставлених крайових задач, наведених вище ланок недостатньо. Доповнення таблиці 2.4 подано в таблиці 2.5, в якій наведено широкий набір еквівалентних моделей інтегральних операторів для ірраціональних та трансцендентних передатних функцій, але всі вони, в той же час, можуть бути зведені до типових ланок.

Отримані еквівалентні одновимірні моделі дають змогу розширити базовий набір моделей для дослідження об’єктів із розподіленими параметрами та дозволяють застосовувати структурно-алгоритмічний метод у створенні сучасних спеціалізованих пакетів прикладних програм та здійснювати синтез моделей об’єктів із розподіленими параметрами.

Таблиця 2.5

Розширений набір еквівалентних моделей об’єктів із розподіленими параметрами у формі передатних функцій та інтегральних операторів Вольтерри

№ з/п	Передатна функція	Оператор Вольтерри
1	2	3
1	$\frac{\sqrt{p+a}}{p+b}$	$\int_0^t \frac{e^{-a(t-s)}}{\sqrt{\pi(t-s)}} + (a-b)^{\frac{1}{2}} e^{-b(t-s)} erf\left[(a-b)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{1}{2}}\right] x(s)ds$
2	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\int_0^t 2\sqrt{\frac{(t-s)}{\pi}} x(s)ds$
3	$\frac{1}{(p+a)\sqrt{p+b}}$	$\int_0^t (b-a)^{-\frac{1}{2}} e^{-a(t-s)} erf\left[(b-a)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{1}{2}}\right] x(s)ds$
4	$\frac{1}{\sqrt{p}(p-a)}$	$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{a}} e^{a(t-s)} erf\left(\sqrt{a(t-s)}\right) x(s)ds$
5	$\frac{1}{\sqrt{p}+a}$	$\int_0^t \pi^{-\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{1}{2}} - ae^{a^2(t-s)} erfc\left(a\sqrt{(t-s)}\right) x(s)ds$

Продовження таблиці 2.5

1	2	3
6	$\frac{a}{p\left(\sqrt{p}+a\right)}$	$\int_0^t 1-e^{a^2(t-s)}erfc\left(a\sqrt{(t-s)}\right)x(s)ds$
7	$\frac{1}{p+a\sqrt{p}}$	$\int_0^t e^{a^2(t-s)}erfc\left(a\sqrt{(t-s)}\right)x(s)ds$
8	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$	$\int_0^t J_0\left(a(t-s)\right)x(s)ds$
9	$\frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}}$	$\int_0^t I_0\left(a(t-s)\right)x(s)ds$
10	$p^{-1}e^{-ap},\ a>0$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds, K(t-s)=\begin{cases}0\ if\ 0<t-s<a,\\ 1\ if\ a<t-s.\end{cases}$
11	$p^{-1}\left(1-e^{-ap}\right),$ $a>0$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds, K(t-s)=\begin{cases}1\ if\ 0<t-s<a,\\ 0\ if\ a<t-s.\end{cases}$
12	$p^{-1}\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right),$ $0\le a<b$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds, K(t-s)=\begin{cases}0\ if\ 0<t-s<a,\\ 1\ if\ a<t-s<b,\\ 0\ if\ b<t-s.\end{cases}$
13	$p^{-2}\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right),$ $0\le a<b$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds, K(t-s)=\begin{cases}0\ if\ 0<t-s<a,\\ t-s-a\ if\ a<t-s<b,\\ b-a\ if\ b<t-s.\end{cases}$
14	$p^{-1}\left(e^{-ap}-1\right)^{-1},$ $a>0$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds,$ $K(t-s)=n\ if\ na<t-s<(n+1)a;\ n=0,1,\ldots$
15	$p^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{a}{p}}$	$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-s)}}\cosh\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)x(s)ds$
16	$p^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{a}{p}}$	$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sinh\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)x(s)ds$

Продовження таблиці 2.5

1	2	3
17	$p^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{a}{p}}$	$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-s)}}\cos\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)x(s)ds$
18	$p^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{a}{p}}$	$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)x(s)ds$
19	$\frac{1}{p}\exp\left(-\sqrt{ap}\right),$ $a \ge 0$	$\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{(t-s)}}\right)x(s)ds$
20	$\frac{1}{\sqrt{p}}\exp\left(-\sqrt{ap}\right),$ $a \ge 0$	$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{a}{4(t-s)}\right)x(s)ds$
21	$\frac{1}{p\sqrt{p}}\exp\left(-\sqrt{ap}\right),$ $a \ge 0$	$\int_0^t \frac{2\sqrt{(t-s)}}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{a}{4(t-s)}\right)-\sqrt{a}erfc\left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{(t-s)}}\right)x(s)ds$
23	$\frac{1}{p\sinh(ap)}, a>0$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds,$ $K(t-s)=2n \; if \;\; a(2n-1)<t-s<a(2n+1);$ $n=0, 1, 2, \ldots$
24	$\frac{1}{p^2\sinh(ap)},$ $a>0$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds,$ $K(t-s)=2n((t-s)-an)$ $if \;\; a(2n-1)<t-s<a(2n+1); n=0, 1, 2, \ldots$
25	$\frac{\sinh\left(\frac{a}{p}\right)}{\sqrt{p}}$	$\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}$ $\times\left[\cosh\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)-\cos\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)\right]x(s)ds$

Продовження таблиці 2.5

1	2	3
26	$\dfrac{\sinh\left(\dfrac{a}{p}\right)}{p\sqrt{p}}$	$\int_0^t \dfrac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\times$ $\times\left[\sinh\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)-\sin\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)\right]x(s)ds$
27	$\dfrac{1}{p\cosh(ap)}$, $a>0$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds,$ $K(t-s)=\begin{cases}0 \textit{ if } a(4n-1)<t-s<a(4n+1),\\ 2 \textit{ if } a(4n-1)<t-s<a(4n+3),\end{cases}$ $n=0, 1, 2, \ldots$
28	$\dfrac{1}{p^2\cosh(ap)}$, $a>0$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds,$ $K(t-s)=(t-s)-(-1)^n\left((t-s)-2an\right)$ $\textit{if } (2n-1)<\dfrac{t-s}{a}<(2n+1);\ n=0, 1, 2, \ldots$
29	$\dfrac{\cosh\left(\dfrac{a}{p}\right)}{\sqrt{p}}$	$\int_0^t \dfrac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\times$ $\times\left[\cosh\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)+\cos\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)\right]x(s)ds$
30	$\dfrac{\cosh\left(\dfrac{a}{p}\right)}{p\sqrt{p}}$	$\int_0^t \dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}}\left[\sinh\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)+\sin\left(2\sqrt{a(t-s)}\right)\right]x(s)ds$
31	$\dfrac{1}{p}\tanh(ap),\ a>0$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds,$ $K(t-s)=(-1)^{n-1} \textit{ if } 2a(n-1)<t-s<2an;\ n=1, 2, \ldots$
32	$\dfrac{1}{p}\coth(ap),\ a>0$	$\int_0^t K(t-s)x(s)ds,$ $K(t-s)=(2n-1) \textit{ if } 2a(n-1)<t-s<2an;\ n=1, 2, \ldots$

Ланцюгово-дробовий метод апроксимації складних передатних функцій.

Для числової реалізації моделей ланок об’єктів з розподіленими параметрами пропонується два підходи. Перший полягає в апроксимації складних передатних функцій ірраціонального типу з метою зведення їх до дробово-раціонального вигляду, після чого застосовувати стандартні методи та засоби аналізу та синтезу. Другий полягає у використанні еквівалентних аналогів передатних функцій – операторів Вольтерри. Питання числової реалізації інтегральних операторів буде розглянуто нижче.

Розглянемо складну передатну функцію $W(p)$ (таблиця 2.4 або таблиця 2.5) [87]. Розвинувши її в степеневий ряд отримаємо:

$$L = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \dots . \tag{2.45}$$

Побудуємо зв’язаний з ним визначник Ганкеля, який означається наступним чином:

$$H_0^{(n)} = 1,\ H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \dots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix},\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Для заданого ряду (2.45) побудуємо правильний C-дріб

$$1 + \frac{a_1 p|}{|1} + \frac{a_2 p|}{|1} + \frac{a_3 p|}{|1} + \dots ,$$

який відповідає L (в точці $p = 0$). Коефіцієнти a_i шукаємо за формулами:

$$H_k^{(1)} \neq 0 \text{ і } H_k^{(2)} \neq 0,\ k = 1, 2, 3, \dots$$

і

$$a_1 = H_1^{(1)},\ a_{2m} = -\frac{H_{m-1}^{(1)} H_m^{(2)}}{H_m^{(1)} H_{m-1}^{(2)}},\ a_{2m+1} = -\frac{H_{m+1}^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}{H_m^{(1)} H_m^{(2)}},\ m = 1, 2, 3, \ldots$$

В результаті отримано коефіцієнти ланцюгового дробу, який є поданням ряду (2.45), а отже і початкової передатної функції. Крім розглянутого алгоритму побудови ланцюгових дробів можна розглядати такі алгоритми [50, 87, 86, 206, 208]: QR алгоритм, алгоритми побудови g-дробів, алгоритми побудови приєднаних ланцюгових дробів.

Побудувавши підхідний дріб отриманого ланцюгового дробу [50] формуємо дробово-раціональне представлення складної передатної функції:

$$\tilde{W}(p) = \frac{a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0}.$$

Для досягнення потрібної точності апроксимації та мінімальної складності апроксимуючого виразу максимальний степінь дробово-раціональної передатної функції $\tilde{W}(p)$ підбирається таким, щоб виконувалась одна з двох умов, в залежності від поставленої задачі, а саме інтегральна похибка амплітудно-частотної або фазо-частотної характеристики не перевищувала заданого значення:

$$\max_n \left(\int_0^{\omega_m} \left| A(\omega) - \tilde{A}_n(\omega) \right| d\omega \right) \le \varepsilon_A,\ \max_n \left(\int_0^{\omega_m} \left| \psi(\omega) - \tilde{\psi}_n(\omega) \right| d\omega \right) \le \varepsilon_\psi,$$

де ω_m – максимальна частота, $\varepsilon_A, \varepsilon_\psi$ – задані похибки амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик.

Для застосування розглянутого алгоритму необхідно, щоб функція $W(p)$ була аналітичною, тобто, щоб її можна було розвинути в степеневий ряд в околі точки 0.

У випадку сингулярності функції $W(p)$ пропонується виконувати заміну змінних, тобто виконати заміну $p = s + 1$, в результаті отримаємо функцію $W(s)$, для якої застосуємо описаний вище алгоритм. В отриманому наближенні $\tilde{W}(s)$ виконуємо обернену заміну $s = p - 1$. Функція $\tilde{W}(p)$ буде наближенням $W(p)$.

Для ефективної апроксимації передатної функції $W(p)$ на основі розглянутого вище методу необхідно здійснити її декомпозицію, тобто звести її до суми добутків базових передатних функцій, які подані в таблиці 2.3 або в таблиці 2.4. Для ряду передатних функцій, які подані в таблиці 2.5 виконана декомпозиція, яка подана в таблиці 2.6.

Запропонований метод подамо у більш стислому вигляді:

- виконати декомпозицію передатної функції, якщо це можливо, до кожного структурного елемента застосувати метод ланцюгово-дробової апроксимації:
  - виконати заміну змінної p виразом $p + a$ (якщо точка 0 є особливою точкою $W(p)$);
  - розвинути функцію $W(p)$ в степеневий ряд, в результаті отримуємо $W(p) = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \ldots$;
  - взяти $2n$ членів степеневого ряду;
  - перетворити скінченний степеневий ряд в ланцюговий дріб;
  - за коефіцієнтами ланцюгового дробу побудувати його підхідний дріб, що буде дробово-раціональною передатною функцією;
  - виконати обернену заміну змінної p виразом $p - a$ (якщо виконувалася заміна);
- здійснити обернену композицію отриманих моделей [85].

Таблиця 2.6

Складні передатні функції та їх декомпозиція

№ з/п	Передатна функція	Передатні функції після декомпозиції
1	2	3
1	$\dfrac{\sqrt{p+a}}{p+b}$	$\dfrac{p+a}{p+b}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{p+a}}$
2	$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\cdot\dfrac{1}{p}$
3	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2-a^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p+b}}\cdot\dfrac{1}{p+a}$
4	$\dfrac{1}{\sqrt{p}(p-a)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\cdot\dfrac{1}{p-a}$
5	$\dfrac{a}{p\left(\sqrt{p}+a\right)}$	$\dfrac{a}{p}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{p}+a}$
6	$\dfrac{1}{p+a\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{p}+a}$
7	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2-a^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p-a}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{p+a}}$
8	$p^{-1}e^{-ap},\ a>0$	$\dfrac{1}{p}\cdot e^{-ap}$
9	$p^{-1}\left(1-e^{-ap}\right),\ a>0$	$\dfrac{1}{p}\cdot\left(1-e^{-ap}\right)$
10	$p^{-1}\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right),\ 0\le a<b$	$\dfrac{1}{p}\cdot\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right)$
11	$p^{-2}\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right),\ 0\le a<b$	$\dfrac{1}{p^2}\cdot\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right)$
12	$p^{-1}\left(e^{-ap}-1\right)^{-1},\ a>0$	$\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{e^{-ap}-1}$

Продовження таблиці 2.6

1	2	3
13	$p^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{a}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot e^{\frac{a}{p}}$
14	$p^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{a}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{p}\cdot e^{\frac{a}{p}}$
15	$p^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{a}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot e^{-\frac{a}{p}}$
16	$p^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{a}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{p}\cdot e^{-\frac{a}{p}}$
17	$\frac{1}{p}\exp\left(-\sqrt{ap}\right),\ a\ge 0$	$\frac{1}{p}\cdot e^{-\sqrt{ap}}$
18	$\frac{1}{\sqrt{p}}\exp\left(-\sqrt{ap}\right),\ a\ge 0$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot e^{-\sqrt{ap}}$
19	$\frac{1}{p\sqrt{p}}\exp\left(-\sqrt{ap}\right),\ a\ge 0$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{p}\cdot e^{-\sqrt{ap}}$
20	$\frac{1}{p\sinh(ap)},\ a>0$	$\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{e^{ap}-e^{-ap}}$
21	$\frac{1}{p^2\sinh(ap)},\ a>0$	$\frac{1}{p^2}\cdot\frac{2}{e^{ap}-e^{-ap}}$
22	$\frac{\sinh\left(\frac{a}{p}\right)}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{e^{\frac{a}{p}}-e^{-\frac{a}{p}}}{2}$
23	$\frac{\sinh\left(\frac{a}{p}\right)}{p\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{e^{\frac{a}{p}}-e^{-\frac{a}{p}}}{2}$
24	$\frac{1}{p\cosh(ap)},\ a>0$	$\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{e^{ap}+e^{-ap}}$
25	$\frac{1}{p^2\cosh(ap)},\ a>0$	$\frac{1}{p^2}\cdot\frac{2}{e^{ap}+e^{-ap}}$

Продовження таблиці 2.6

1	2	3
26	$\dfrac{\cosh\left(\dfrac{a}{p}\right)}{\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\cdot\dfrac{e^{\frac{a}{p}}+e^{-\frac{a}{p}}}{2}$
27	$\dfrac{\cosh\left(\dfrac{a}{p}\right)}{p\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\cdot\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{e^{\frac{a}{p}}+e^{-\frac{a}{p}}}{2}$
28	$\dfrac{1}{p}\tanh(ap),\ a>0$	$\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{e^{ap}-e^{-ap}}{e^{ap}+e^{-ap}}$
29	$\dfrac{1}{p}\coth(ap),\ a>0$	$\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{e^{ap}+e^{-ap}}{e^{ap}-e^{-ap}}$

2.5. Застосування методу дробових похідних для побудови інтегральних моделей

У моделюванні скалярних об’єктів в часовій області достатньо знайти і реалізувати відповідний заданій передатній функції інтегральний оператор. Однак такий підхід значно ускладнюється в дослідженні системи взаємопов’язаних об’єктів з розподіленими параметрами. У цьому випадку можна кожному елементу системи поставити у відповідність звичайне диференціальне рівняння з дробовими похідними, що отримується з його передатної функції [50, 98, 262]. Як показано вище, для багатьох класів об’єктів передатні функції містять дробові показники змінної p. Наприклад, для передатної функції $W(p)=\dfrac{a}{\sqrt{p}+b}$ відповідне рівняння має вигляд:

$$u^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t)+bu(t)=af(t)\,,$$

де $u(t)$ – вихідний сигнал; $f(t)$ – вхідний вплив об’єкта.

Таким чином, розгляду підлягатимуть одновимірні динамічні моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь з дробовими похідними або їх системи.

Розглянемо необхідні визначення. Оператором інтегрування дробового порядку $\alpha > 0$ називається оператор виду

$$I_\alpha f(t) = (i_\alpha * f)(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau, \tag{2.46}$$

де $i_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $f(t)$ – довільна неперервна функція. Інтеграл, що стоїть в правій частині (2.46), називається інтегралом Рімана-Ліувілля порядку α [272].

Оператор диференціювання дробового порядку $0 < \alpha < 1$ для будь-якої неперервної диференційованої функції $\psi(t)$ визначається як оператор, обернений до оператора (2.46). Зокрема, він може бути записаний у формі дробової похідної Маршо в наступному вигляді [272]:

$$(D_\alpha \psi)(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left\{ \frac{\psi(t) - \psi(t-\tau)}{\tau^{1+\alpha}} \right\} d\tau. \tag{2.47}$$

Оператор диференціювання дробового порядку $m < \alpha < m+1, m \in N$, для функції $\psi \in C^{(k)}, k \geq m$, може бути визначений у вигляді суперпозиції [272]:

$$D_\alpha \psi = D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} ... D_{\alpha_k} \psi, 0 < \alpha \leq 1, j = \overline{1,k}, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = \alpha,$$

де D_α визначається за формулою (2.47), а для $\alpha_j = 1$ – це звичайний оператор взяття першої похідної. Очевидно, що таке визначення оператора D_α неоднозначне та істотно залежить від способу розбиття числа α на складові

$\alpha_j, j=\overline{1,k}$. Тому позначимо $D_\alpha = D(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$ і під α матимемо на увазі вектор $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$. Суму ж $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k$ позначаємо $|\alpha|$.

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння з дробовими похідними виду:

$$\left[\left(\sum_{m=1}^{n} a_m D_{\alpha_m} + a_0\right)u\right](t) = f(t),\ a_n = 1,\ \alpha_m = (r_m,1,1,...,1), t\in[0,T], \tag{2.48}$$

$$0 < r_m \le 1,\ m=\overline{1,n},\ |\alpha_n| > |\alpha_{n-1}| > ... > |\alpha_1| > |\alpha_0| = 0,\ u^{(j)}(0) = u_j,\ \ j=\overline{0,k_n}.$$

Застосовуючи до рівняння (2.48) оператор Рімана-Ліувілля порядку $|\alpha_n|$, отримуємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду типу згортки:

$$u(t) + \int_0^t \sum_{m=0}^{n-1} a_m \frac{(t-\tau)^{|\alpha_n|-|\alpha_m|-1}}{\Gamma(|\alpha_n|-|\alpha_m|)} u(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)\frac{(t-\tau)^{|\alpha_n|-1}}{\Gamma(|\alpha_n|)}d\tau +$$

$$+\sum_{j=0}^{n} u_j \frac{t_j}{j!} + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sum_{j=1}^{k_m} u_j \frac{t^j + |\alpha_n| - |\alpha_m| - 1}{\Gamma(j+|\alpha_n|-|\alpha_m|)}. \tag{2.49}$$

Записавши (2.49) в операторному вигляді, отримуємо

$$u + \gamma * u = \varphi,$$

де

$$\gamma = \sum_{m=0}^{n-1} a_m i_{|\alpha_n|-|\alpha_m|},\ \ \varphi = f * i_{|\alpha_n|} + \sum_{j=0}^{n} u_j i_{j+1} + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sum_{j=0}^{k_m} u_j i_{j+|\alpha_n|-|\alpha_m|}.$$

Для розв'язання рівняння (2.49) можуть бути застосовані відомі чисельні методи [47].

Розглянемо деякі найпростіші випадки [98, 262, 272].

1. Задача Коші для рівняння

$$(D_\alpha - a)u(t) = f(t),\ 0<\alpha<1,\ t\in[0,T], u(0) = u_0. \tag{2.50}$$

Звівши (2.50), як зазначено вище, до інтегрального рівняння, знайдемо його резольвенту

$$R(t) = \frac{d}{dt} E_{\frac{1}{\alpha}}(at^{\alpha}), \tag{2.51}$$

де $E_{\frac{1}{\alpha}}(W)$ – ціла функція Міттаг-Леффлера, що визначається рядом [272]

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(W) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{W^m}{\Gamma(m\alpha + 1)}.$$

Тоді для розв'язання задачі (2.51) отримаємо формулу

$$u = u_0 + i_\alpha * f + R*[u_0 + i_\alpha * f]$$

або детальніше:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)\, d\tau + \int_0^t R(\tau)\left[u_0 + \int_t^{t_0} f(s) \frac{(t-\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds\right] d\tau.$$

2. Задача Коші для рівняння

$$(D_\alpha - a)u(t) = f(t),\ t \in [0,T],$$

де $\alpha = (\underbrace{\alpha, 1, ..., 1}_{m\ раз,\ m>0}),\ 0 < \alpha < 1,$

$$u^{(j)}(0) = u_j,\quad j = \overline{0,m}.$$

Провівши аналогічні перетворення, отримаємо

$$u = u_0 R + u_1 R * i_1 + ... + u_m R * i_m + R * f * i_{|\alpha|-1},$$

тобто

$$u(t) = u_0 R(t) + u_1 \int_0^t R(\tau) d\tau + ... + u_m \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} R(\tau) d\tau +$$
$$+ \int_0^t R(t-\tau) \int_0^\tau f(s) \frac{(\tau - s)^{|\alpha|-2}}{\Gamma(|\alpha|-1)} ds d\tau,$$

де R визначається за формулою (2.51).

3. Задача Коші для рівняння

$$\left[D_{n_\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k D_{k_\alpha} + a_0 \right] u(t) = f(t), t \in [0,T], \tag{2.52}$$

де

$$k_\alpha = \underbrace{(\alpha, \alpha, ..., \alpha)}_{k\ раз}, 0 < \alpha < 1,\ k = \overline{1,n},\ D_{j\alpha} u(0) = u_j,\ j = \overline{0, n-1}.$$

Щоб розв’язати (2.52), складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

і знайдемо всі його корені $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in C$. Тоді оператор в лівій частині (2.52) перетвориться до виду

$$D_{n_\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k D_{k_\alpha} + a_0 = \prod_{m=1}^{n} (D_\alpha - \lambda_m).$$

Після цього розв’язок рівняння (2.52) зведеться до послідовного розв’язування рівнянь виду (2.50).

Тими ж засобами можна досліджувати і системи звичайних диференціальних рівнянь з дробовими похідними. Розглянемо систему виду

$$(D_{\alpha_k} u_k)(t) + \sum_{i=1}^{n} a_{k_i} u_i(t) = f_k(t),\ 0 < \alpha_k < 1,\ k = \overline{1,n},\ t \in [0,T], \tag{2.53}$$

або коротко

$$D_{[\alpha]}u - Au = f,$$

де

$$D_{[\alpha]} = \begin{pmatrix} D_{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

$$A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^{n}, \ u = (u_1, u_2, ..., u_n)^T, \ \ f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T.$$

Будемо шукати розв’язок (2.53), який задовольняє початкові умови

$$u(0) = u^0 = (u^0{}_1, u^0{}_2, ..., u^0{}_n)^T.$$

Застосувавши до (2.53) оператор

$$I_{[\alpha]} = \begin{pmatrix} I_{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & I_{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$u - I_{[\alpha]}Au = I_{[\alpha]} f + u^0. \tag{2.54}$$

Як бачимо, остання рівність є системою лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду типу згортки

$$u_k(t) - \int_0^t i_{\alpha_k}(t-\tau) \sum_{i=1}^{n} a_{k_i} u_i(\tau) d\tau = \int_0^t i_{\alpha_k}(t-\tau) f_k(\tau) d\tau + u_k^0, \ k = \overline{1,n},$$

або більш детально

$$u_k(t)-\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}\sum_{i=1}^{n} a_{k_i}u_i(\tau)d\tau=\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)}f_k(\tau)d\tau+u_k^0,\ k=\overline{1,n}\,.$$

У випадку, коли $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=\alpha$, можна побудувати резольвенту системи (2.54)

$$R(t)=\frac{d}{dt}E_{\frac{1}{\alpha}}(At^{\alpha})\cdot$$

Розв'язок системи (2.54) при цьому запишеться у вигляді

$$u=I_{[\alpha]}f+u^0+\left[I_{[\alpha]}f+u^0\right]*R$$

або

$$u(t)=\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\left[\alpha\right]\right)}d\tau+u^0+\int_0^t R(t-\tau)\left[\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\left[\alpha\right]\right)}f(s)ds+u^0\right]d\tau\,.$$

Розглянемо тепер узагальнюючу (2.52) задачу Коші:

$$D_{n_\alpha}u(t)+\sum_{k=1}^{n-1}(D_{k_\alpha}a_k u)(t)+a_0(t)u(t)=f(t),\ t\in[0,T], \tag{2.55}$$

$$(D_{i_\alpha}u)(0)=u_j,\ j=\overline{0,n-1},$$

в припущенні, що $a_k(t), k=\overline{0,n-1},$ і $f(t)$ – поліноми за степенями t^α. Зведемо (2.55) до еквівалентного інтегрального рівняння шляхом послідовного застосування оператора I_α:

$$u(t)+\int_0^t K(t,s)u(s)ds=F(t),$$

де

$$K(t,s)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-s)^{(n-k)\alpha-1}}{\Gamma((n-k)\alpha)}a_k(s),$$

$$F(t)=\int_t^{t_0}\frac{(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}f(s)ds+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u_j t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^t\frac{(t-s)^{(n-k)\alpha-1}}{\Gamma((n-k)\alpha)}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(D_{m\alpha}a_k u)(0)}{\Gamma(m\alpha+1)}s^{ma}ds. \qquad (2.56)$$

Значення $(D_{m\alpha}a_k u)(0)$ в (2.56) можуть бути визначені через початкові значення u_j, $j=\overline{0,n-1}$. Дійсно,

$$a_k(t)=\sum_{j=0}^{k}C_j^{(k)}t^{j\alpha},\ k=\overline{0,n-1},$$

тоді

$$(D_{m\alpha}a_k y)(0)=\sum_{j=0}^{\min\{k,m\}}C_j^{(k)}\frac{y_{m-j}\Gamma(m_\alpha+1)}{\Gamma((m-j)\alpha+1)},\ k=\overline{0,n-1},\ m=\overline{0,n-2}.$$

Завдяки переходу від еквівалентних інтегральних рівнянь до розглянутої задачі можуть застосовуватись різні наближені методи. Тобто даний підхід дає змогу будувати одновимірні інтегральні динамічні моделі систем із розподіленими параметрами, що дозволяє на їх основі побудувати обчислювальні алгоритми, які можуть забезпечити високу точність та стійкість розв’язків.

2.6. Ланцюгово-дробовий метод апроксимації диференціально-різницевих моделей динамічних систем з розподіленими параметрами

Розглянемо чисельно-алгоритмічний метод апроксимації диференціальних рівнянь з частинними похідними в основі якого покладено метод апроксимації диференціально-різницевою моделлю із наступним її зведенням до передатної функції дробово-раціонального типу. Даний метод проілюструємо на прикладі побудови моделі приймачів теплових потоків [85].

Інтегральне перетворення диференціально-різницевих апроксимаційних моделей.

Розглянемо пропонований метод на прикладі побудови моделі однорідного градієнтного приймача теплових потоків. Тепловою моделлю приймача теплових потоків є теплоізольований по бічних поверхнях стержень або нескінченна пластина з лінійними розмірами δ (рис. 2.1). Базова математична модель має вигляд (1.13)-(1.14). Виконаємо розбиття приймача на n елементарних ділянок-блоків розміром Δ. Середні температури цих блоків $T_1, T_2, ..., T_n$ складають вектор стану розміром ($n \times 1$). При цьому розміри граничних блоків встановимо рівними $\frac{\Delta}{2}$, а їх середні температури T_1, T_n віднесемо до крайових поверхонь. Для кожного блоку складемо рівняння теплового балансу між зміною його тепловмісту і потоками тепла від сусідніх блоків, а для двох граничних блоків – і від зовнішнього середовища.

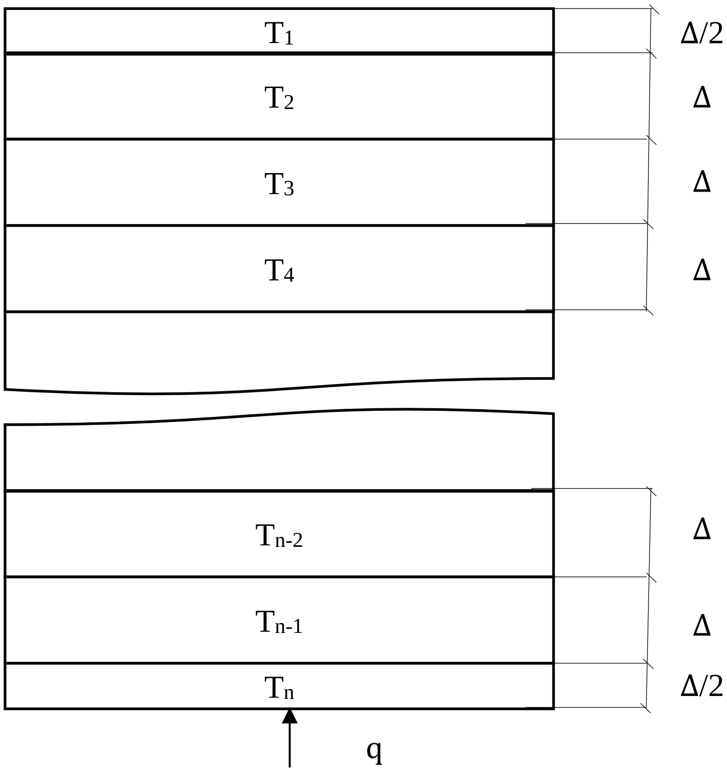


Рис. 2.1. Теплова схема диференціально-різницевої моделі

У випадку сталих теплофізичних характеристик матеріалу $(\lambda = const,\ c = const,\ \rho = const)$ будується диференціально-різницева модель відповідно до рис. 2.1, де частинні похідні за просторовою змінною замінюються різницевими співвідношеннями (приймаються граничні умови теплообмінну 2-го роду) [154]. Тоді рівняння (1.13)-(1.14) набувають вигляду:

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = bT_{i-1} - 2bT_i + bT_{i+1}\left(i = \overline{2, n-1}\right), \tag{2.57}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = 4bT_2 - 4bT_1, \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \tau} = 4bT_{n-1} - 4bT_n + 2dq_\delta, \tag{2.59}$$

де $b = \dfrac{a}{\Delta^2}$, $d = \dfrac{1}{c\rho\Delta}$. В результаті отримано n рівнянь: $(n-2)$ рівнянь (2.57) та рівняння (2.58) і (2.59). Диференціально-різницеву модель можна представити у формі наступної лінійної стаціонарної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = FT(\tau) + GU(\tau), \tag{2.60}$$

де вектори стану $T(\tau)$ і керування $U(\tau)$, матриці обернених зв'язків F і керування G мають вигляд:

$$\underset{(n\times 1)}{T(\tau)} = \begin{vmatrix} T_1(\tau) \\ \vdots \\ T_n(\tau) \end{vmatrix},\ \underset{(2\times 1)}{U(\tau)} = \begin{vmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \end{vmatrix},$$

$$\underset{(n\times 2)}{G}=\begin{vmatrix} 2d & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & 2d \end{vmatrix},\ \underset{(n\times n)}{F}=\begin{vmatrix} -4b & 4b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & -2b & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & -2b & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 4b & -4b \end{vmatrix}.$$

Для отримання передатних функцій приймача теплових потоків перетворимо його модель (2.60) за Лапласом до вигляду:

$$pT(p)=FT(p)+GU(p),$$

і, провівши найпростіші перетворення, отримаємо

$$T(p)=\left[pE-F\right]^{-1}GU(p), \tag{2.61}$$

де $T(p),U(p)$ – зображення за Лапласом векторів $T(\tau),U(\tau)$ відповідно.

Рівняння (2.61) визначає наступний вигляд матриці $W(s)$ передатних функцій:

$$\underset{(n\times 2)}{W(p)}=\frac{T(p)}{U(p)}=\left[\underset{(n\times n)}{pE-F}\right]^{-1}\underset{(n\times 2)}{G}=\begin{vmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) \\ \dots & \dots \\ W_{n-1,1}(p) & W_{n-1,2}(p) \\ W_{n1}(p) & W_{n2}(p) \end{vmatrix}, \tag{2.62}$$

де $W_{j1}(p)$ – передатна функція за каналом впливу $q_1(\tau)$, $W_{j2}(p)$ – передатна функція за каналом впливу $q_2(\tau)$.

Так як в якості моделі приймача теплових потоків (1.13) використовується диференціально-різницева модель у вигляді системи (2.60) звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, передатні функції вимірювальних каналів приймачів теплових потоків $W_{j1}(p)$ і $W_{j2}(p)$ мають класичну форму у вигляді співвідношення поліномів від комплексного параметра p:

$$W(p)=\frac{\beta_1 p^{n-1}+\beta_2 p^{n-2}+\ldots+\beta_n}{p^n+\alpha_1 p^{n-1}+\alpha_2 p^{n-2}+\ldots+\alpha_n}, \tag{2.63}$$

в якому порядок полінома чисельника на одиницю менше порядку полінома знаменника.

Отримання передатних функцій (2.62) є досить складною обчислювальної процедурою, особливо для значного числа n блоків диференціально-різницевої моделі приймача теплового потоку. Задаються чисельні значення складових матриць F і G моделі (2.60), в результаті отримуються значення параметрів α_i і β_i поліномів чисельника і знаменника у формулі (2.63) для передатних функцій $W_{j1}(s)$ і $W_{j2}(s)$ за всіма вимірювальними каналами приймача теплового потоку.

Спільною особливістю є високий порядок передатних функцій (2.63) для більшості розглянутих приймачів теплових потоків. В якості прикладу наведемо передатну функцію для однорідного градієнтного приймача теплового потоку [85, 154]:

$$W(p)=\frac{\begin{gathered}0,00051p^{10}+0,15p^9+20p^8+1400p^7+6,2\cdot10^4p^6+1,7\cdot10^6p^5+\\+2,7\cdot10^7p^4+2,5\cdot10^8p^3+1,2\cdot10^9p^2+2,2\cdot10^9p+0,029\end{gathered}}{\begin{gathered}p^{11}+330p^{10}+4,8\cdot10^4p^9+3,9\cdot10^6p^8+1,9\cdot10^8p^7+6,1\cdot10^9p^6+\\+1,2\cdot10^{11}p^5+1,4\cdot10^{12}p^4+9,5\cdot10^{12}p^3+2,9\cdot10^{13}p^2+2,6\cdot10^{13}p+0,012\end{gathered}}.$$

Так як ця обставина істотно ускладнює подальше використання передатних функцій, пропонується провести їх апроксимацію.

Алгоритм пониження порядку передатних функцій.

Застосуємо теорію ланцюгових дробів для пониження степеня дробово-раціональної передатної функції високого порядку [50]. Визначимо члени неперервного дробу для передатної функції

$$W\left(p\right)=\frac{a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}+\ldots+a_1p+a_0}{b_np^n+b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_1p+b_0}.$$

Позначивши $a_i=R_{2,i+1}$, $b_i=R_{i,i+1}$ і розклавши поліноми чисельника і знаменника передатної функції $W\left(p\right)$ за зростанням степенів оператора p, отримаємо

$$W\left(p\right)=\frac{R_{21}+R_{22}p+\ldots+R_{2n}p^{n-1}}{R_{11}+R_{12}p+\ldots+R_{1,n+1}p^n}.$$

Даний вираз перетворюємо до вигляду ланцюгового дробу [50, 85]:

$$W\left(p\right)=\cfrac{1}{\cfrac{R_{11}}{R_{21}}+\cfrac{p}{\cfrac{R_{21}}{R_{31}}+\cfrac{p}{\cfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots+\cfrac{p}{\cfrac{R_{2n,1}}{R_{2n+1,1}}}}}}}.$$

Таким чином, коефіцієнти ланцюгового дробу можуть бути виражені за формулами

$$h_i=\frac{R_{i1}}{R_{i+1,1}},\ i=1,2,\ldots,2n,$$

де $R_{jk}=R_{j-2,k+1}-\dfrac{R_{j-2,k+1}}{R_{j-1,1}}$, $j=3,4,\ldots,2n+1$; $k=1,2,\ldots,n+1$.

Проведемо тепер згортання ланцюгового дробу, взявши m його членів, інші його члени відкидаємо. В результаті отримується дробово-раціональна передатна функція:

$$\tilde{W}\left(p\right)=\frac{H_{m-1,1}+H_{m-1,2}p+H_{m-1,3}p^2+\ldots+H_{m-1,k-2}p^{m-3}+H_{m-1,k-1}p^{m-2}}{H_m+H_{m,2}p+H_{m,3}p^2+\ldots+H_{m,k-2}p^{m-3}+H_{m,k-1}p^{m-2}+H_{m,k}p^{m-1}}.$$

Позначивши $H_{n-1,i} = a_{i-1}$ і $H_{n,i} = b_{i-1}$ та впорядкувавши поліноми чисельника і знаменника передатної функції $W(p)$ за спаданням степенів оператора p, отримаємо наближену функцію:

$$\tilde{W}(p) = \frac{a_{m-2}p^{m-2} + a_{m-3}p^{m-3} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_{m-1}p^{m-1} + b_{m-2}p^{m-2} + \ldots + b_1 p + b_0}.$$

Отже, послідовність операцій для пониження порядку системи за допомогою ланцюгових дробів наступна [50, 85]:

- розмістити поліноми чисельника і знаменника передатної функції за зростанням степеня оператора p;
- розкласти передатну функцію в неперервний дріб;
- виконати зрізання неперервного дробу;
- перетворити зрізаний неперервний дріб у відношення двох поліномів.

Для досягнення потрібної точності апроксимації та мінімальної складності апроксимуючого виразу максимальний степінь дробово-раціональної передатної функції $\tilde{W}(p)$ підбирається такий, щоб виконувалась наступна умова:

$$\int_0^t \left| f(t) - \tilde{f}(t) \right| dt \le \varepsilon.$$

де t – час моделювання, ε – задана максимальна похибка.

Отримані результати можна поширити і на об’єкти з розподіленими параметрами, які мають іншу природу та форму опису диференціальних рівнянь із частинними похідними.

2.7. Побудова інтегральних макромоделей нелінійних динамічних моделей

Різноманітність способів математичного опису складних технічних систем, доцільність комбінування різних підходів до моделювання різнотипних елементів — все це приводить до необхідності врахування специфіки математичного опису кожного елемента системи. Так, для опису динаміки складних механічних елементів (довгих кінематичних передач, просторових рамних конструкцій і механізмів), які складаються як з однорідних так і з неоднорідних елементів (балок, стержнів, пластин, оболонок тощо) з різними типами зв'язку між собою (з'єднання через пружні і демпферні елементи, жорсткі та рухомо-шарнірні з'єднання тощо) застосування універсального методу математичного опису викликає значні труднощі. Крім того, наявність різнотипних зв'язків та різних типів руху між елементами (поздовжнього, поперечного, крутильних коливань) також ускладнюють задачу математичного опису. Така різноманітність способів взаємодії може бути відтворена за допомогою структурних моделей, які можуть складатися з різнотипних ланок, об'єднаних в єдину блочно-структурну схему [48]. Цей спосіб особливо зручний для складних систем, які складаються із великого числа підсистем [20, 238]. Кожна підсистема $y(t)=f\left(s,x(t)\right)$ зображується у вигляді «вхід-вихід» (рис. 2.2).

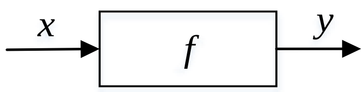


Рис. 2.2. Схема підсистеми типу «вхід – вихід»

Перевага структурних схем полягає в їх наочності та простоті методів перетворень, які призначені для переходу від n-мірного відношення до бінарного, яке визначене на вхідних та вихідних сигналах. Такий перехід дозволяє описати всю систему одним аналітичним виразом. Методи перетворення структурних схем особливо прості, якщо підсистеми лінійні [197].

Для представлення лінійних систем використання функцій, заданих в явному вигляді (передатні функції, інтегральні оператори), дозволяє побудувати опис складної системи на основі заданої структурної схеми. Для нелінійних аналітичних систем такі ж переваги дає застосування рядів Вольтерри, які також дають явний зв'язок між вхідними і вихідними сигналами [159].

Розглянемо неперервну нелінійну систему з послідовно з'єднаних лінійної ланки і безінерційної поліноміальної ланки (рис. 2.3) [105, 159].

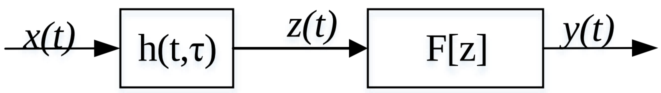


Рис. 2.3. Структурна схема нелінійної системи

Для такої системи співвідношення між сигналами $x(t)$ і $y(t)$ мають вигляд

$$z(t)=\int_{E^1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau\,, \tag{2.64}$$

$$y(t)=F\left[z(t)\right]=\sum_{i=1}^{N} a_i z^i(t). \tag{2.65}$$

Загальний опис системи можна отримати, підставивши (2.64) в (2.65):

$$y(t)=F\left[\int_{E^1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau\right]=\sum_{i=1}^{N} a_i\left[\int_{E^1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau\right]^i=$$
$$=\sum_{i=1}^{N} a_i\prod_{j=1}^{i}\left[\int_{E^1} h(t,\tau_j)x(\tau_j)d\tau_j\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^{N} a_i\int_{E^1}\prod_{j=1}^{i} h(t,\tau_j)x(\tau_j)d\nu_\tau=$$
$$=\sum_{i=1}^{N} a_i\int_{E^1} h(t,\tau_1,...,\tau_i)\prod_{j=1}^{i} x(\tau_j)d\nu_\tau.$$

Нехай маємо дві функціональні поліноміальні системи R_n і T_m з ядрами $h_i(t,\tau_1,...,\tau_i)$, $i=1,...,n$, та $k_j(t,\tau_1,...,\tau_j)$, $j=1,...m$, відповідно. Для паралельного з'єднання, що відповідає сумі систем, маємо:

$$\begin{aligned}(R_n+T_m)x(t)&=\sum_{i=1}^{N}\int_{E^i}\{h_i(t,\tau_1,...,\mathrm{t}_i)+k_i(t,\tau_1,...,\tau_i)\}\prod_{j=1}^{i} x(\tau_j)d\nu_\tau=\\&=\sum_{i=1}^{N}\int_{E^i} g_i(t,\tau_1,...,\mathrm{t}_i)\prod_{j=1}^{i} x(\tau_j)d\nu_\tau.\end{aligned}\tag{2.66}$$

В (2.66) ядра поліному Вольтерри ($N\le\max\{n,m\}$) задаються формулою

$$g_i(t,\tau_1,...,\tau_i)=h_i(t,\tau_1,...,\tau_i)+k_i(t,\tau_1,...,\tau_i).$$

Для послідовного з'єднання систем R_n і T_m, що відповідає їх композиції, маємо:

$$y(t)=(T_m*R_n)x(t)=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\int_{E^i} k_i(t,\tau_1,...,\tau_i)\prod_{i=1}^{i}\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_{E^j} h_j(\tau_i,\sigma_1,...,\sigma_j)\prod_{r=1}^{j} x(\sigma_r)d\nu_\sigma\right\}d\nu_\tau=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\int_{E^i} g_i(\mathrm{t},\sigma_1,...,\sigma_i)\prod_{r=1}^{i} x(\sigma_r)d\nu_\sigma,$$

де $N\le nm$, а ядра Вольтерри такі:

$$g_1(t,\sigma) = \int_{E^1} k_1(t,\tau) h_1(\tau,\sigma) d\tau,$$

$$g_2(t,\sigma_1,\sigma_2) = \int_{E^2} k_2(t,\tau_1,\tau_2) \prod_{r=1}^{2} h_1(\tau_r,\sigma_r) d\nu_\tau + \int_{E^1} k_1(t,\tau) h_2(\tau,\sigma_1,\sigma_2) d\tau,$$

$$\begin{aligned} g_3(t,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = & \int_{E^3} k_3(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3) \prod_{r=1}^{3} h_1(\tau_r,\sigma_r) d\nu_\tau + \\ & + \int_{E^2} k_2(t,\tau_1,\tau_2) h_1(\tau_1,\sigma_1) h_2(\tau_2,\sigma_2,\sigma_3) d\nu_\tau + \\ & + \int_{E^2} k_2(t,\tau_1,\tau_2) h_1(\tau_1,\sigma_1,\sigma_2) h_1(\tau_2,\sigma_3) d\nu_\tau + \\ & + \int_{E^1} k_1(t,\tau) h_3(\tau,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) d\tau \end{aligned}$$

і т.д. Ядра отриманого ряду є несиметричними відносно змінних σ_i.

Перейдемо тепер до розгляду функціональної системи з жорстким оберненим зв'язком, яка представлена на рис. 2.4. Для цієї системи співвідношення між сигналами $x(t)$, $e(t)$ і $y(t)$ мають вигляд

$$y(t) = R_n e(t), \tag{2.67}$$

$$e(t) = x(t) - y(t). \tag{2.68}$$

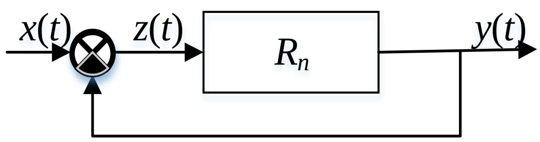


Рис. 2.4. Структура зі зворотним зв'язком

Нехай R_n – поліном Вольтерри степеня n, який має властивість збереження нуля, з ядрами $h_i(t,\tau_1,...,\tau_i)$.

Виключаючи з (2.68) сигнал $y(t)$, за допомогою рівняння замикання (2.67) отримаємо

$$e(t) = x(t) - R_n e(t). \tag{2.69}$$

Рівняння (2.69) є нелінійним інтегральним рівнянням Вольтерри другого роду. Його розв’язок існує і єдиний на інтервалі часу $[t_0, T]$.

Перепишемо рівняння (2.69) у вигляді

$$x(t) = e(t) + R_n e(t). \tag{2.70}$$

Співвідношення (2.70) можна представити у вигляді полінома Вольтерри T_n степеня n, тобто $x(t) = T_n e(t)$, в якого всі ядра, крім ядра першого порядку, співпадають з ядрами поліному R_n, а ядро першого порядку має вигляд

$$h_1^*(t,\tau) = \delta(t-\tau) + h_1(t,\tau). \tag{2.71}$$

Розв’язок рівняння (2.71) шукається у вигляді ряду Вольтерри

$$e(t) = Wx(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E^i} k_i(t, \tau_1, ..., \tau_i) \prod_{r=1}^{i} x(\tau_r) d\nu_\tau . \tag{2.72}$$

Враховуючи, що з (2.68) і (2.72)

$$y(t) = x(t) - e(t) = x(t) - W(x(t)) =$$
$$= x(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E^i} k_i(t, \tau_1, ..., \tau_i) \prod_{r=1}^{i} x(\tau_i) d\nu_\tau,$$

отримаємо перше ядро системи у вигляді

$$\delta(t-\tau) - k_1(t,\tau) = \Gamma(t,\tau),$$

тобто воно рівне резольвенті лінійного рівняння, а всі інші ядра рівні ядрам тієї ж системи за нев’язкою, але із оберненим знаком [159].

Таким чином, ядра системи з оберненим зв’язком завжди можна знайти в явному вигляді, якщо знайдена резольвента $\Gamma(t,\tau)$. Відмітимо, що ядро

$\Gamma(t,\tau)$ не обов'язково шукати у вигляді ряду Ліувілля-Неймана. Для цього можна застосовувати також чисельні методи.

Приклад побудови макромоделі нелінійної динамічної системи.

Розглянемо нелінійний динамічний об'єкт, який описується системою диференціально-алгебраїчних рівнянь [105, 230]:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -u + x; \\ y = u + u^2. \end{cases} \tag{2.73}$$

Модель (2.73) представлено у вигляді структурної схеми (рис. 2.5).

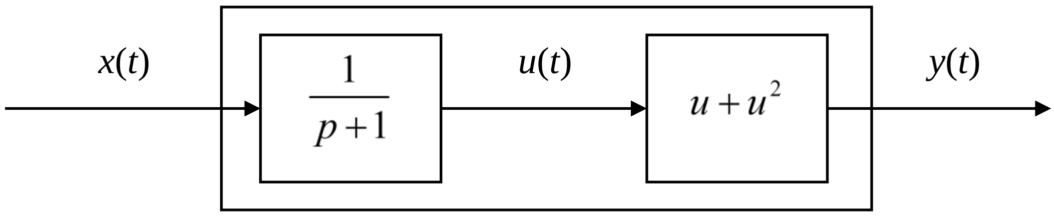


Рис. 2.5. Структурна схема моделі (2.73).

Шляхом еквівалентних перетворень моделі (2.73) [159] отримано модель у формі частинної суми інтегро-степеневого ряду Вольтерри:

$$\begin{aligned} y(t) = &\int_0^t K_1(s)x(t-s)ds + \\ &+\int_0^t\int_0^t K_2(s_1,s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2, \end{aligned} \tag{2.74}$$

де ядро першого порядку має вигляд:

$$K_1(s) = e^{-s},$$

а ядро другого порядку –

$$K_2(s_1,s_2) = e^{-(s_1+s_2)}.$$

На основі застосування теореми про згортку з (2.74) отримано поліноміальне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду другого степеня з різницевими ядрами:

$$y(t) = \int_0^t K_1(t-s)x(s)ds + \\ +\int_0^t\int_0^t K_2(t-s_1,t-s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2. \tag{2.75}$$

Модель, яка представлена структурною схемою на рис. 2.5 відповідає структурній схемі на рис. 2.3. Використовуючи в лінійній частині ланки, які є типовими для об’єктів із розподіленими параметрами, отримано ряд моделей у вигляді поліноміальних інтегральних операторів. У випадку напівінтегральної ланки отримано модель:

$$\int_0^t \frac{k}{\sqrt{\pi s}} x(t-s)ds + \int_0^t\int_0^t \frac{k^2}{\pi\sqrt{s_1s_2}} x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2 = y(t). \tag{2.76}$$

У випадку напівінерційної ланки модель набуває вигляду:

$$\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\pi ks}} - e^{\frac{s}{T}} erfc\sqrt{\frac{s}{T}}\right)x(t-s)ds + \int_0^t\int_0^t \frac{k^2}{T^2}\left(\sqrt{\frac{T}{\pi ks_1}} - e^{\frac{s_1}{T}} erfc\sqrt{\frac{s_1}{T}}\right)\times \\ \times\left(\sqrt{\frac{T}{\pi ks_2}} - e^{\frac{s_2}{T}} erfc\sqrt{\frac{s_2}{T}}\right)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2 = y(t). \tag{2.77}$$

Для ланки напівзапізнення отримано:

$$\int_0^t \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_0}{\pi(s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4s}} x(t-s)ds + \\ +\int_0^t\int_0^t \frac{1}{4}\sqrt{\frac{T_0^2}{\pi^2(s_1s_2)^3}} e^{-\frac{T_0}{4s_1}-\frac{T_0}{4s_2}} x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2 = y(t). \tag{2.78}$$

2.8. Методи побудови інтегральних моделей із ядрами, що розділяються

Моделювання динамічних систем за допомогою інтегральних моделей супроводжується роботою з багатовимірними функціями – ядрами інтегральних моделей. Це стосується інтегральних операторів Вольтерри та поліноміальних операторів Вольтерри у моделюванні нелінійних об'єктів, інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду у розв'язуванні задач аналізу та рівнянь Вольтерри першого роду у розв'язанні задач керування та відновлення вхідних сигналів. Однією із ключових проблем застосування таких моделей є накопичення кількості обчислень для їх числової реалізації. Для вирішення даної проблеми пропонується перетворювати ядра інтегральних операторів до розділеного вигляду, тобто подавати їх у вигляді суми добутків незалежних змінних.

Якщо інтеграл можна представити у вигляді ядра, що розділяється (виродженого ядра), то матиме місце рівність

$$\int_a^t K(t,s)y(s)ds = \sum_{l=1}^{m}\alpha_l(t)\int_a^t \beta_l(s)y(s)ds.$$

Для побудови вироджених ядер інтегральних моделей розроблено ряд методів, які є ефективними для одновимірних моделей. У випадку використання інтегро-степеневих рядів Вольтерри застосування класичних методів не досліджувалось.

У дослідженні динамічних систем, в більшості випадків, особливо для розгляду об'єктів із розподіленими параметрами, здійснити перехід (2.82) напряму не вдається. Виходом із цієї ситуації є зведення ядра до виродженого вигляду з використанням методів апроксимації.

Розглянемо ряд пропонованих методів для апроксимації багатовимірних функцій.

Метод найменших квадратів.

Пропонується метод апроксимації ядер рядів Вольтерри на основі методу найменших квадратів [102, 103, 200].

Одновимірне ядро. Розглянемо функцію $f(t_1)$, яка задається таблично

$$f(t_{1k}) \approx \varphi(t_{1k}) = z_k, k = 1,2,...,m.$$

Ядро шукаємо у вигляді полінома

$$P\left(t_1\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k t_1^{\,k}, \tag{2.79}$$

який визначається за умови мінімуму суми:

$$L(a_0,a_1,...,a_n)=\sum_{k=1}^{m}\left[\varphi(t_{1k})-P(t_{1k})\right]^2.$$

Оскільки $L(a_0,a_1,...,a_n)$ додатна і неперервна, то існує її мінімум. Пошук значень коефіцієнтів $a_0,a_1,...,a_n$, для яких L мінімальна, необхідно зрівняти частинні похідні L по a_l до нуля:

$$\frac{\partial L(a_0,...,a_n)}{\partial a_l}=0,\ l=0,1,...,n$$

Так як,

$$\frac{\partial L}{\partial a_l}=-2\sum_{k=0}^{m}t_{1k}^{l}\left[\varphi(t_{1k})-P(t_{1k})\right];\ l=0,1,...,n,$$

відповідно система для коефіцієнтів $a_0,a_1,...,a_n$ набуде вигляду

$$\begin{gathered}
a_0 m+a_1\sum_{k=1}^{m}t_{1k}+...+a_n\sum_{k=1}^{m}t_{1k}^{n}=\sum_{k=1}^{m}z_k,\\
a_0\sum_{k=1}^{m}t_{1k}+a_1\sum_{k=1}^{m}t_{1k}^{2}+...+a_n\sum_{k=1}^{m}t_{1k}^{n+1}=\sum_{k=1}^{m}z_k t_{1k},\\
...\\
a_0\sum_{k=1}^{m}t_{1k}^{n}+a_1\sum_{k=1}^{m}t_{1k}^{n+1}+...+a_n\sum_{k=1}^{m}t_{1k}^{2n}=\sum_{k=1}^{m}z_k t_{1k}^{n}.
\end{gathered} \tag{2.80}$$

Розв’язавши систему (2.80) отримаємо коефіцієнти $a_0,a_1,...,a_n$.

Двовимірне ядро. Розглянемо апроксимацію двовимірної функції $f(t_1,t_2)$ [102, 103, 200]. Нехай функція $f(t_1,t_2) \approx \varphi(t_1,t_2)$ задана у вигляді таблиць (таблиця 2.7) із двома входами.

Таблиця 2.7

Таблиця вхідних даних $\varphi(t_1,t_2)$

	t_{21}	t_{22}	………	t_{2k}	………	t_{2n}
t_{11}	φ_{11}	φ_{12}	………	φ_{1k}	………	φ_{1n}
t_{12}	φ_{21}	φ_{22}	………	φ_{2k}	………	φ_{2n}
………	………	………	………	………	………	………
t_{1s}	φ_{s1}	φ_{s2}	………	φ_{sk}	………	φ_{sn}
………	………	………	………	………	………	………
t_{1m}	φ_{m1}	φ_{m2}	………	φ_{mk}	………	φ_{mn}

Здійснимо апроксимацію функцій двох змінних $\varphi(t_1,t_2)$ виразом виду

$$P(t_1,t_2) = \sum_k a_k(t_2)t_1^k. \tag{2.81}$$

Визначення $P(t_1,t_2)$ потребує пошук коефіцієнтів $a_0(t_2), a_1(t_2), \ldots, a_n(t_2)$, які є функціями змінної t_2. Для цього обираємо ряд значень змінної t_2 $(t_{21}, t_{22}, \ldots, t_{2s})$ і вводимо функції однієї змінної:

$$\begin{cases} M_1(t_1) = \varphi(t_1,t_{21}); \\ M_2(t_1) = \varphi(t_1,t_{22}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_s(t_1) = \varphi(t_1,t_{2s}). \end{cases}$$

Кожну з функцій $M_1(t_1), \ldots, M_s(t_1)$ можна апроксимувати поліномом, тоді кожна графа вхідних даних (таблиця 2.7) апроксимується поліномом $n-$

го степеня, коефіцієнти якого задовольняють лінійну систему з симетричною матрицею (2.80). Розв’язуючи цю систему, знайдемо:

$$\begin{cases} P\left(t_1,t_{21}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(t_{21}\right)t_1^k; \\ P\left(t_1,t_{22}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(t_{22}\right)t_1^k; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P\left(t_1,t_{2s}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(t_{2s}\right)t_1^k. \end{cases} \tag{2.82}$$

Відношення (2.82) показують, що для кожної функції $a_k\left(t_2\right)\left(k=0,1,\ldots,n\right)$ знаходяться ординати $a_k\left(t_{21}\right),a_k\left(t_{22}\right),\ldots,a_k\left(t_{2s}\right)$. Повторне використання методу найменших квадратів дозволяє шляхом розв’язування системи виду (2.80) знайти наближення поліномом для $a_k\left(t_2\right)$.

У загальному випадку баготовимірні ядра визначаються шляхом апроксимації в аналогічному вигляді:

$$P(t_1,t_2,...,t_k)=\sum_{p=0}^{n}a_p(t_2,...,t_k)t_1^p. \tag{2.83}$$

Обчислювальний експеримент. Розглянемо тестову функцію: $f\left(t\right)=e^t$. Графік похибки апроксимації функції методом найменших квадратів поданий на рис. 2.6. Також розглянуто випадок апроксимації даних із штучно введеними шумами. Наприклад, $f\left(t\right)=e^t+\eta\left(t\right)$, де $\eta\left(t\right)$ – функція адитивного білого Гаусівського шуму. Отримані наближення мають похибки подані на рис. 2.7 у вигляді графіку.

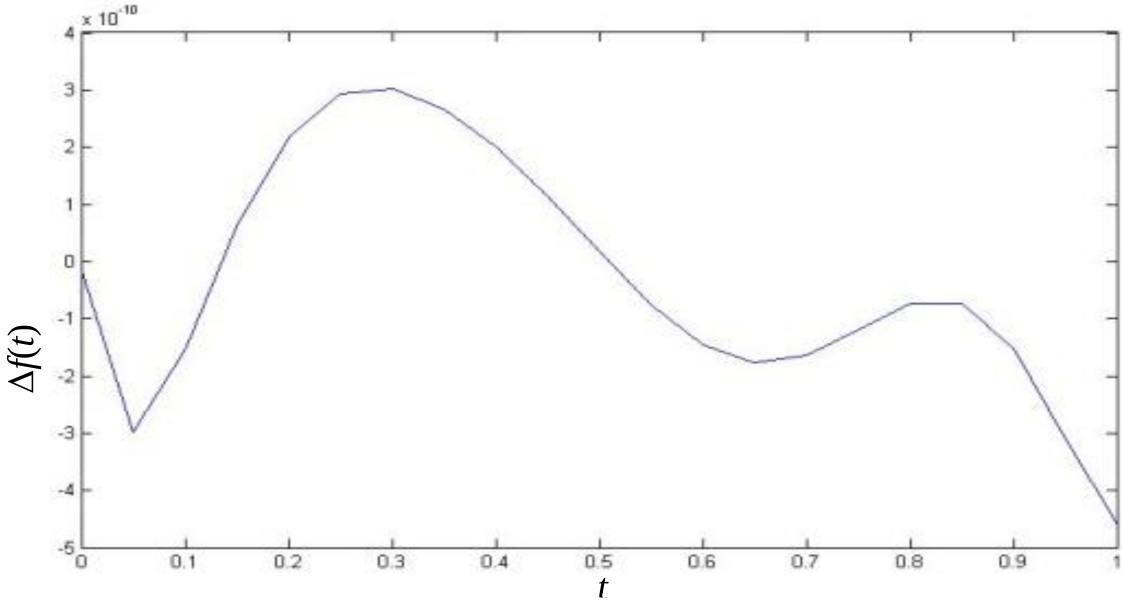


Рис. 2.6. Графік похибки апроксимації функції $f(t)$

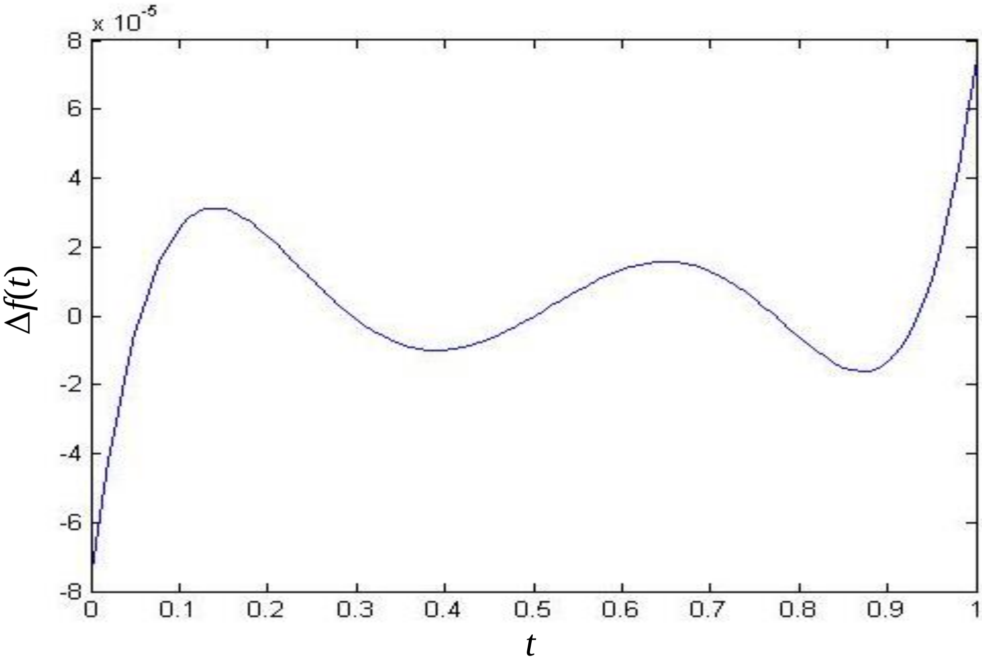


Рис. 2.7. Графік похибки апроксимації функції $f(t)$ із шумом

Приклад апроксимації двовимірної функції досліджено на тестовій функції: $f(t_1,t_2)=e^{t_1+t_2}$. Похибка апроксимаційного наближення функції методом найменших квадратів подана на рис. 2.8 у вигляді поверхні. У випадку побудови апроксимаційного представлення двовимірної функції при внесенні шумів типу білого шуму отримано апроксимаційне наближення, яке містить похибку, яка подана на рис. 2.9.

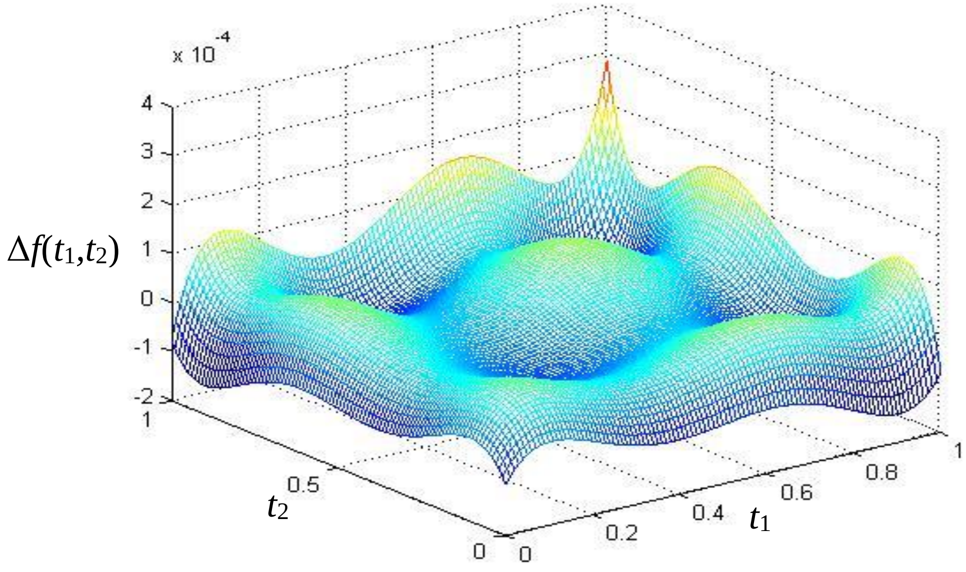


Рис. 2.8. Графік похибки апроксимації функції $f\left(t_1,t_2\right)$

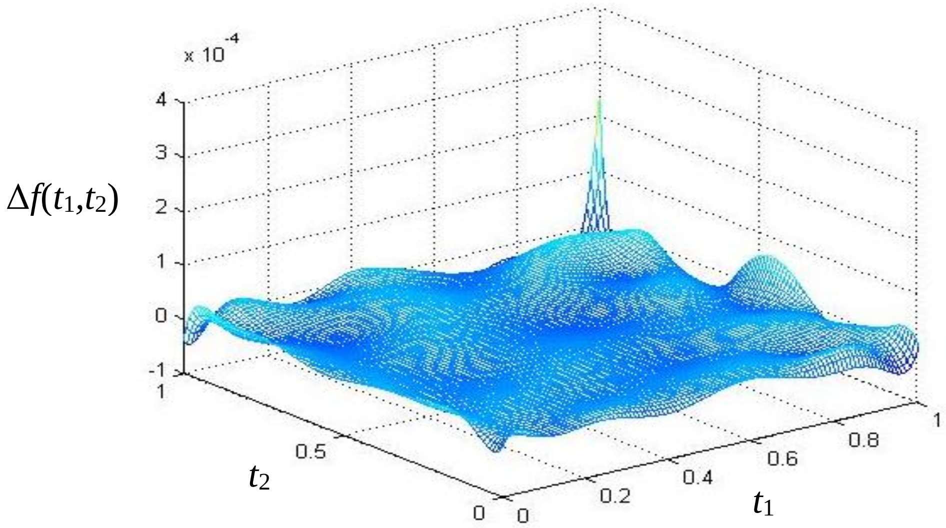


Рис. 2.9. Графік похибки апроксимації функції $f\left(t_1,t_2\right)$ із шумом

Метод експоненціальної апроксимації [106, 107].

Представимо одновимірну функцію $f(t)$ таблично

$$f\left(t_k\right)=z_k, k=1,2,...,l.$$

Ядро будуємо у вигляді

$$Q(t) = e^{\sum_{i=0}^{r} a_i t^i}, \tag{2.84}$$

що визначається умовою мінімуму суми:

$$L(a_0, a_1, ..., a_r) = \sum_{k=1}^{l} \left[\sum_{i=0}^{r} a_i t^i - \ln(z_k) \right]^2.$$

Оскільки $L(a_0, a_1, ..., a_r)$ додатна і неперервна, то існує її мінімум. Для пошуку коефіцієнтів $a_0, a_1, ..., a_r$, для яких L мінімальна, потрібно прирівняти нулю частинні похідні L по a_j:

$$\frac{\partial L(a_0, ..., a_r)}{\partial a_j} = 0,\ j = 0,1,...,r.$$

Відповідно система для коефіцієнтів $a_0, a_1, ..., a_r$ у випадку $r = 2$ матиме вигляд

$$\begin{cases} a_0 \sum_{k=1}^{l} t_k{}^4 + a_1 \sum_{k=1}^{l} t_k^3 + a_2 \sum_{k=1}^{l} t_k^2 = \sum_{k=1}^{l} t_k^2 \ln(z_k), \\ a_0 \sum_{k=1}^{l} t_k{}^3 + a_1 \sum_{k=1}^{l} t_k^2 + a_2 \sum_{k=1}^{l} t_k = \sum_{k=1}^{l} t_k \ln(z_k), \\ a_0 \sum_{k=1}^{l} t_k{}^2 + a_1 \sum_{k=1}^{l} t_k + a_2 \sum_{k=1}^{l} (1) = \sum_{k=1}^{l} \ln(z_k). \end{cases} \tag{2.85}$$

Розв’язавши систему (2.85) отримаємо коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_r$.

Розглянемо побудову двовимірної функції $f(t_1, t_2)$. У якості апроксимуючої функції візьмемо

$$Q(t_1, t_2) = e^{P_1(t_1) + P_2(t_2)} \tag{2.86}$$

де $P_1(t_1)$ та $P_2(t_2)$ деякі поліноми відносно t_1 і t_2. Пошук ядра буде відбуватись для умови мінімуму суми

$$L = \sum \left[P_1(t_1) + P_2(t_2) - \ln\left(f(t_1,t_2) \right) \right]^2,$$

де $f(t_1,t_2)$ є результатом експерименту і задається таблично.

Для $P_1(t_1) = a_0 t_1^2 + a_1 t_1 + a_2$ і $P_2(t_2) = a_3 t_2^2 + a_4 t_2 + a_5$ матимемо

$$L = \sum \left[a_0 t_1^2 + a_1 t_1 + a_2 + a_3 t_2^2 + a_4 t_2 + a_5 - \ln\left(f(t_1,t_2) \right) \right]^2 =$$

$$= \sum \left[b_0 t_1^2 + b_1 t_1 + b_2 t_2^2 + b_3 t_2 + b_4 - \ln\left(f(t_1,t_2) \right) \right]^2 .$$

Після диференціювання по b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 отримано систему:

$$\begin{cases} b_0 \sum t_1^4 + b_1 \sum t_1^3 + b_2 \sum t_1^2 t_2^2 + b_3 \sum t_1^2 t_2 + b_4 \sum t_1^2 = \sum t_1^2 \ln(f(t_1,t_2)), \\ b_0 \sum t_1^3 + b_1 \sum t_2^2 + b_2 \sum t_1 t_2^2 + b_3 \sum t_1 t_2 + b_4 \sum t_1 = \sum t_1 \ln(f(t_1,t_2)), \\ b_0 \sum t_1^2 t_2^2 + b_1 \sum t_1 t_2^2 + b_2 \sum t_2^4 + b_3 \sum t_2^3 + b_4 \sum t_2^2 = \sum t_2^2 \ln(f(t_1,t_2)), \\ b_0 \sum t_1^2 t_2 + b_1 \sum t_1 t_2 + b_2 \sum t_2^3 + b_3 \sum t_2^2 + b_4 \sum t_2 = \sum t_2 \ln(f(t_1,t_2)), \\ b_0 \sum t_1^2 + b_1 \sum t_1 + b_2 \sum t_2^2 + b_3 \sum t_2 + b_4 \sum (1) = \sum \ln(f(t_1,t_2)). \end{cases}$$

Розв’язавши дану систему матимемо коефіцієнти b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 для функції $Q(t_1,t_2) = e^{b_0 t_1^2 + b_1 t_1 + b_3 t_2^2 + b_4 t_2 + b_5}$.

В загальному випадку для побудови ядра беремо функцію $Q(t_1,t_2,...t_h) = e^{P_1(t_1) + P_2(t_2) + ... + P_h(t_h)}$, де $P_1(t_1), P_2(t_2), ..., P_h(t_h)$ – деякі поліноми відносно $t_1, t_2, ..., t_h$ відповідно.

Обчислювальний експеримент. Для апроксимації двовимірної функції у вигляді $f\left(t_1,t_2\right) = e^{t_1 + t_2}$ на основі вказаного методу отримано наближення, похибка якого подана на рис. 2.10.

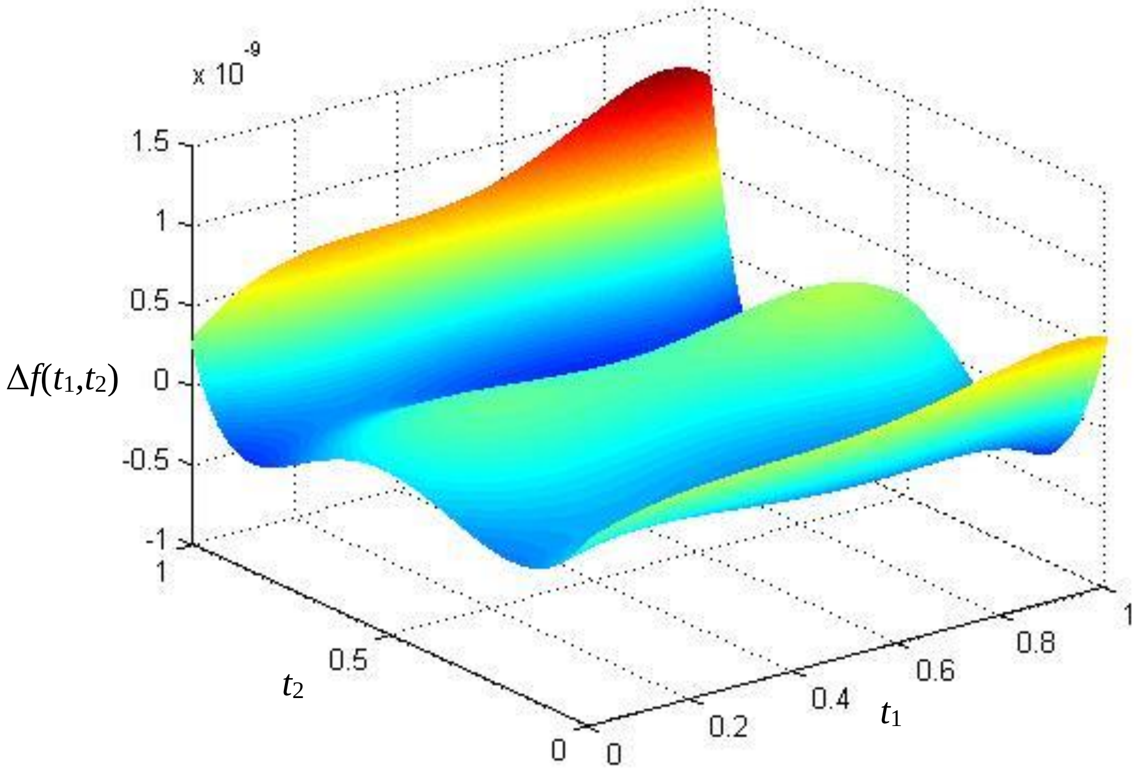


Рис. 2.10. Графік похибки апроксимації функції $f\left(t_1, t_2\right)$

Обчислювальні експерименти показали, що розглянуті алгоритми дозволяють виконувати апроксимацію функцій багатьох змінних заданих таблично. Використання даних методів для апроксимації ядер поліноміальних інтегральних операторів дозволяє отримати їх представлення у вигляді суми добутків незалежних змінних, тобто у виродженому вигляді. Також даний метод буде ефективним для побудови алгоритмів числового диференціювання багатовимірних функцій на основі диференціювання аналітично представленого апроксимаційного наближення.

Висновки до розділу 2

1. Досліджено особливості застосування методів еквівалентних перетворень моделей динамічних об'єктів із розподіленими параметрами (методи розщеплення, потенціалів, функції Гріна, інтегральних перетворень, дробових похідних, структурний підхід), що дозволило будувати моделі в

інтегральній формі на основі класичних моделей у формі диференціальних рівнянь із частинними похідними. Застосування даних методів дозволило звести складні динамічні багатовимірні моделі до скалярного вигляду (інтегрального оператора) із забезпеченням необхідної адекватності в межах певної частини досліджуваних властивостей і характеристик та допустимої складності стосовно алгоритмічного забезпечення програмних складових комп'ютерно-інтегрованих систем.

2. Застосування методів еквівалентних перетворень динамічних моделей об'єктів із розподіленими параметрами (розщеплення, потенціалів, функції Гріна, інтегральних перетворень, дробових похідних, структурного підходу) дозволило систематизувати способи отримання інтегральних динамічних моделей вимірювальних перетворювачів на основі заданих вихідних диференціальних рівнянь та побудувати інтегральні динамічні моделі вимірювальних перетворювачів першого і другого порядку, як об'єктів із зосередженими параметрами, та вимірювальних перетворювачів із розподіленими параметрами, зокрема температури.

3. Проведений аналіз моделей широкого спектру динамічних процесів об'єктів із розподіленими параметрами та методів їх еквівалентних перетворень дозволив удосконалити базовий набір моделей об'єктів із розподіленими параметрами, до яких віднесено ланки: напівінтегральну, напівінерційну, напівколивальну, запізнення та напівзапізнення. Це дозволяє, аналогічно до об'єктів із зосередженими параметрами, здійснювати синтез моделей об'єктів із розподіленими параметрами на основі структурно-алгоритмічного підходу в засобах імітаційного моделювання.

4. Удосконалено метод апроксимації моделей у вигляді диференціальних рівнянь із частинними похідними на основі застосування диференціально-різницевої апроксимації, перетворення Лапласа, структурно-алгоритмічного методу, методу ланцюгових дробів, що дозволяє будувати «економні» в обчислювальному сенсі моделі зі збереженням їх адекватності на рівні диференціально-різницевих моделей.

5. Набув подальшого розвитку метод апроксимації передатних функцій ірраціонального та трансцендентного типу на основі застосування ланцюгово-

дробової апроксимації, що дозволяє звести первині моделі до дробово-раціонального вигляду. Для апроксимації складних передатних функцій сформульовано рекомендації щодо застосування їх структурної декомпозиції.

6. Запропоновано методи апроксимації багатовимірних функцій на основі застосування меду найменших квадратів: метод апроксимації на основі степеневих функцій та метод експоненціальної апроксимації. Застосування цих методів дозволяє здійснювати апроксимацію ядер інтегро-степеневого ряду Вольтерри ядрами, які розділяються.

7. Застосування структурного методу та апарату інтегральних рядів Вольтерри дозволяє будувати макромоделі нелінійних динамічних об’єктів, в тому числі з розподіленими параметрами. Таке представлення дозволить більш ефективно розв’язувати ряд задач, зокрема, спрощення математичних моделей, розв’язування задач аналізу та відновлення вхідних сигналів. Проведені дослідження дозволять сформувати вимоги до спеціалізованого програмного забезпечення, яке забезпечує імітаційне моделювання систем, у складі яких є об’єкти з розподіленими параметрами, в тому числі із врахуванням нелінійностей.

РОЗДІЛ 3.
МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛЕЙ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ

Постійно зростаючі вимоги до якості функціонування сучасних складних технічних систем викликають потребу в адекватних математичних моделях, як на стадії їх проєктування, так і для розв’язування задач керування та контролю. При цьому, для адекватного опису таких систем необхідно користуватися відомими законами природи, які, на жаль, не завжди можна застосувати через складну структуру досліджуваних систем. Особливо це стосується систем, які містять об’єкти із розподіленими параметрами. З іншої сторони, відомі закони фізики, в більшості випадків, описують ідеалізовані явища та процеси, без врахування певних властивостей об’єктів або визначаються певними агрегованими параметрами не враховуючи нелінійні характеристики та їх розподіленість у просторі.

В таких випадках одним з перспективних підходів до побудови моделей є застосування методів ідентифікації. Форма моделі, зазвичай, підбирається відповідно до явищ та процесів, які протікають у досліджуваних динамічних системах. Для розв’язування задач керування, вимірювання та контролю найбільш прийнятними представленнями моделей є форма моделей у вигляді «вхід – вихід», зокрема, операторних моделей.

Розглянемо методи ідентифікації, причому, залежно від того, чи об’єкт має властивості лінійності або нелінійності, буде розглянуто методи побудови моделей у формі операторів Вольтерри або передатних функцій чи поліноміальних операторів Вольтерри.

3.1. Алгоритми ідентифікації лінійних динамічних систем у формі явних первинних моделей, які зводяться до інтегральних

Параметрична ідентифікація передатних функцій теплових потоків.

Для розв'язуванні задач побудови математичних моделей не повною мірою формалізовані та вирішені завдання побудови моделей у формі передатних функцій, що є основою застосування системного підходу у дослідженні складних об'єктів і є ефективними в практичних інженерних дослідженнях. Для багатьох реальних об'єктів, зокрема для вимірювальних перетворювачів, передатні функції не вдається побудувати на основі фізичних законів та із застосуванням еквівалентних перетворень. Тому визначення параметрів передатних функцій експериментальним шляхом, тобто шляхом параметричної ідентифікації, є одним з важливих завдань під час розв'язування задач керування, контролю та вимірювання [85, 92].

Розглянемо побудову моделі приймача теплових потоків у формі передатної функції

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m p^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n p^n}. \tag{3.1}$$

На вхід приймача подається ступінчастий сигнал. Отриману перехідну характеристику апроксимуємо за допомогою виразу

$$G(\tau)\approx\tilde{G}\left(\tau\right)=d_0+e^{-\nu\tau}\sum_{i=1}^{n} d_i\tau^{i-1}\ \left(i=\overline{1,n}\right), \tag{3.2}$$

де d_0, d_1, ν – постійні коефіцієнти. Вираз (3.2) дозволяє визначити передатну функцію (3.1) досліджуваного приймача на основі перетворення Лапласа-Карсона [38].

На основі даного підходу проведено експеримент у часовій області [38]. Використовуючи вираз (3.2) для $n=3$ побудовано передатну функцію

$$W(p)=0{,}1119+\frac{1{,}505}{6{,}85p+1}-\frac{1{,}067}{(6{,}85p+1)^2}+\frac{0{,}45}{(6{,}85p+1)^3}$$

або

$$W(p)=\frac{35{,}95p^3+86{,}37p^2+15{,}61p+1}{321{,}32p^3+140{,}74p^2+20{,}55p+1}. \tag{3.3}$$

Для $n=5$ отримано передатну функцію

$$W(p)=0{,}109+\frac{1{,}67}{5{,}227p+1}-\frac{2{,}227}{(5{,}227p+1)^2}+\frac{2{,}875}{(5{,}227p+1)^3}-$$

$$-\frac{2{,}041}{(5{,}227p+1)^4}+\frac{0{,}66}{(5{,}227p+1)^5},$$

або

$$K(p)=\frac{427{,}2p^5+1655{,}3p^4+791{,}9p^3+199{,}7p^2+22p+1}{3901{,}7p^5+3732p^4+1428p^3+273{,}2p^2+26p+1}. \tag{3.4}$$

Таблиця 3.1 містить результати апроксимації перехідної характеристики приймача передатними функціями (3.3)-(3.4).

Розглянутий метод дозволяє отримати необхідні передатні функції приймачів теплових потоків. Також даний підхід може використовуватись і для побудови математичних моделей у формі передатних функцій інших технічних об’єктів та технологічних процесів.

Спосіб визначення передатної функції динамічного об’єкта на основі інтегральних спектрів Пуассона [99].

Відомо, що найкращу оцінку параметрів математичної моделі об’єкта може дати тільки спеціально організований активний експеримент [47]. Однак організація такого експерименту не завжди можлива через високу вартість або неможливість практичної реалізації. Тому доводиться визначати параметри моделі об’єкта за його відгуком на вхідний вплив довільної форми. Ці динамічні характеристики часто бувають або унікальними, або такі, що не піддаються покращенню.

Таблиця 3.1

Результати апроксимації перехідної характеристики приймача теплового потоку

№ з/п	τ	$G(\tau)$	$\tilde{G}(\tau)$ $n=3$	$\tilde{G}(\tau)$ $n=5$	№ з/п	τ	$G(\tau)$	$\tilde{G}(\tau)$ $n=3$	$\tilde{G}(\tau)$ $n=5$
1	0,00	0,00	0,111	0,062	15	1,50	0,41	0,387	0,411
2	0,01	0,06	0,133	0,093	16	1,70	0,44	0,416	0,443
3	0,20	0,13	0,154	0,123	17	1,90	0,46	0,444	0,458
4	0,30	0,18	0,175	0,152	18	2,20	0,50	0,483	0,510
5	0,40	0,19	0,195	0,179	19	2,60	0,54	0,531	0,555
6	0,50	0,23	0,215	0,205	20	3,00	0,57	0,574	0,592
7	0,60	0,26	0,234	0,230	21	3,40	0,61	0,613	0,624
8	0,70	0,28	0,253	0,254	22	3,80	0,63	0,648	0,652
9	0,80	0,29	0,271	0,277	23	4,20	0,66	0,679	0,676
10	0,90	0,32	0,289	0,299	24	5,60	0,73	0,765	0,738
11	1,00	0,34	0,306	0,320	25	8,60	0,83	0,868	0,820
12	1,10	0,35	0,323	0,340	26	13,6	0,91	0,925	0,903
13	1,20	0,36	0,340	0,359	27	19,6	0,94	0,946	0,952
14	1,30	0,38	0,356	0,377	28	39,6	0,98	0,985	0,985

Розглянемо методику оцінки параметрів математичної моделі об’єкта у вигляді дробово-раціональної передатної функції [65, 145]

$$W(p)=\sum_{k=0}^{m}a_k p^k \Big/ \sum_{i=0}^{n}b_i p^i,\ n\geq m.$$

Зміст цієї методики в наступному. Передатна функція об’єкта нескінченно-диференційована $W(p)\in C^{\infty}$, а виміряний вхідний вплив і реакція об’єкта, задані на скінченній дискретній множині, описуються деякими неперервними функціями $x(t),\, y(t)\in C^0$. При цьому безпосередньо використовувати виміряні значення $x(t)$ і $y(t)$ для оцінки параметрів моделі $W(p)$ важко, так як будь-який метод розв’язування системи алгебраїчних рівнянь, до якої зводиться дана задача, по суті, полягає в оцінці не менше ніж $2n$ перших скінченних різниць від $x(t)$, $y(t)$ (де n – порядок знаменника $W(p)$). Тому на першому кроці необхідно забезпечити згладжування $x(t)$ і $y(t)$, таке, щоб виконувалась умова $x(t), y(t) \in C^{2n}$, що може бути досягнуто, наприклад, послідовним $2n$-кратним інтегруванням.

Найкраща форма інтегрального згладжування випливає з визначення перетворення Лапласа

$$W(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \eta(t) dt . \tag{3.5}$$

Якщо в (3.5) експоненту замінити її розкладом у ряд Тейлора-Маклорена в точці $p^* = p + \alpha$, де α – довільне додатне дійсне число, то отримаємо

$$W(p^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p^*)^k}{k!} \int_0^\infty e^{\alpha t} t^k \eta(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} p_k p^{*k} , \tag{3.6}$$

$$p_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty e^{\alpha t} t^k \eta(t) dt ,$$

де p_k – k-й момент Пуассона [65, 145], $\eta\left(t\right)$ – імпульсна перехідна функція об’єкта. Можна показати, що $p^k \in C_k$, тобто задовольняють умовам коректності розв’язку поставленої задачі.

Якщо у проведенні експерименту виміряна не функція $\eta(t)$, а реакція $y(t)$ об’єкта на вплив $x(t)$, то необхідний для оцінки величин коефіцієнтів дробово-раціональної функції $W(p)$ спектр Пуассона $W_k, k = \overline{0,2n}$ визначається з розв’язку відомої рівності

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}. \tag{3.7}$$

Нехай Y_k і X_k – послідовність моментів Пуассона вхідного впливу $x(t)$ і реакції об'єкта $y(t)$. Тоді шуканий спектр W_k обчислюється за формулами, які безпосередньо випливають з рівності

$$\sum_{k=0}^{\infty} W_k p^k = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k p^k \,/ \sum_{k=0}^{\infty} X_k p^k :$$

$$W_0 = Y_0 / X_0,\ W_k = (Y_k - \sum_{m=0}^{k-1} W_m X_{k-m}) / X_0. \tag{3.8}$$

Із системи (3.8) безпосередньо випливає, що похибка у визначенні k-го моменту Пуассона буде значно більша похибки оцінок моментів Y_k і X_k. Отже, достовірність параметрів моделі $W(p)$ для довільного вхідного впливу буде істотно гіршою, ніж для оцінки їх величин, наприклад, по перехідній або імпульсній функції об'єкта. Цей недолік методу принципово не усувний у будь-якій методиці обчислень.

У цьому випадку можна рекомендувати забезпечення хорошої завадозахищеності і надійності вимірювальної апаратури. Іншими словами, частота дискретизації $x(t)$ і $y(t)$ не повинна істотно відрізнятися від частоти за Котельниковим, тобто крок вимірювань повинен бути не більше, ніж $\Delta t \approx 1/ f_{зріз}$, де $f_{зріз}$ – верхня межа спектру $W(j\,\omega)$, яка відповідає частоті (в герцах), для якої модуль амплітудно-частотної характеристики об'єкта стає менше вбудованої величини наведеної похибки вимірювального комплексу.

У обчисленні спектрів Пуассона істотне значення має використовуваний метод чисельного інтегрування. У застосуванні класичних методів інтегрування отримують зміщені оцінки величин моментів внаслідок ефекту «мімікрії» частот. Найбільш доцільним для обчислення спектру Пуассона є метод Філона другого порядку [38, 117], зміст якого полягає в тому, що на кроці інтегрування функція $x(t)$ або $y(t)$ представляється параболою другого порядку. При цьому інтеграл (3.6) береться в явному вигляді, і обчислення спектру p_k проводиться за рекурентною формулою.

У розв'язуванні низки практичних задач істотне значення має вибір порядку методу Філона. У випадку використання даного методу першого порядку достовірність результатів часто є недостатньою, а у використанні методу третього порядку суттєво збільшується час для обчислень, однак зберігається якість результатів.

Відомо [38, 117], що визначники систем алгебраїчних рівнянь, для розв'язування яких визначаються коефіцієнти $W(p)$, погано обумовлені, точніше близькі до гільбертових. Величини гільбертового визначника ΔG для ряду значень n систем алгебраїчних рівнянь, що відповідають кількості невідомих коефіцієнтів передатної функції $W(p)$, наступні:

n	4	5	6	7	8
ΔG	$2\cdot 10^{-7}$	$3{,}7\cdot 10^{-12}$	$5{,}4\cdot 10^{-18}$	$4{,}8\cdot 10^{-25}$	$2{,}7\cdot 10^{-33}$

Звідки випливає, що оцінка визначника за експериментально виміряними динамічними характеристиками більше семи невідомих коефіцієнтів W(p) є задачею без розв'язків. Причина полягає у властивостях k – го моменту Пуассона

$$p_k = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^T e^{-\alpha t} t^k \eta(t)dt\,,$$

де T – тривалість перехідного процесу, після закінчення якого амплітуда η (t) буде меншою, ніж побудована величина похибки вимірювального комплексу.

З відомої теореми Чебишева про поліноми, які найменше відхиляються від нуля, слідує, що парабола $t^k \in [0,$ T] може бути представлена параболою степеня $k-1$ з похибкою не менше ніж 2^{1-2k}, наприклад, параболу t^5 можна замінити параболою 4-го степеня

$$t^5 = 2,5t^4 - \frac{35}{16}t^3 + \frac{25}{32}t^2 + \frac{25}{256}t + \frac{1}{512}$$

з похибкою не більше ніж 0,2%. Отже, можна стверджувати, що якщо похибка вимірювального комплексу σ = 0,5%, то всі моменти Пуассона, починаючи з п'ятого, будуть лінійно залежними від перших чотирьох. Якщо σ = 0,1%, то шостий і наступні моменти Пуассона можна подати як лінійну комбінацію перших п'яти. Таким чином, реальна точність вимірів динамічних характеристик промислових об'єктів ($\tilde{\sigma} = 1\%$) дозволяє оцінити величини не більше ніж чотирьох-п'яти невідомих коефіцієнтів передатної функції $W(p)$.

За допомогою алгоритму ідентифікації об'єкта, який було побудовано за даною схемою, обчислюються коефіцієнти дробово-раціональних функцій другого і третього порядків за такими формулами:

– для n = 2

$$D_0 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{vmatrix};\ D_1 = \begin{vmatrix} P_0 & P_2 \\ P_1 & P_3 \end{vmatrix};\ D_0 = \begin{vmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{vmatrix};$$

$$D = D_0 - D_1 + D_2;$$

$$\begin{aligned} &b_0 = 1;\ b_1 = \tau(D_1 - 2D_0)/D;\ b_2 = \tau^2 D_0/D; \\ &a_0 = (p_0(D_2 - D_1) + p_1 D_2)/2D; \\ &a_1 = \tau(p_0 D_1 - p_1 D_2)/2D; \end{aligned}$$

– для n = 3

$$D_0 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_4 \\ P_3 & P_4 & P_5 \end{vmatrix};\ D_1 = \begin{vmatrix} P_0 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_3 & P_4 \\ P_2 & P_4 & P_5 \end{vmatrix};\ D_2 = \begin{vmatrix} P_0 & P_1 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_4 \\ P_2 & P_3 & P_5 \end{vmatrix};\ D_3 = \begin{vmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix};$$

$$D = D_3 - D_2 + D_1 - D_0;\quad b_0 = 1;$$

$$b_1 = \frac{\tau(D_2 - 2D_1 + 3D_0)}{D},\ b_2 = \frac{\tau^2(D_1 - 3D_0)}{D},\ b_3 = \frac{\tau^2 D_0}{D};$$

$$a_0 = \frac{[p_0(D_3 - D_2 + D_1) + p_1(D_3 - D_2) + p_2 D_3]}{2D},$$

$$a_1 = \frac{\tau[p_0(D_2 - 2D_1) - p_1(D_3 - 2D_2) - 2p_2 D_3]}{2D},$$

$$a_2 = \frac{\tau^2[p_0 D_1 - p_1 D_2 + p_2 D_3]}{2D},$$

де $\tau = \dfrac{1}{\alpha}$.

Як показали результати розрахунків, їх якість істотно залежить від вдалого вибору вагового коефіцієнта α в (3.6). Будь-яких теоретичних оцінок щодо вибору оптимальної величини α не існує. Однак область існування оптимальної величини відома. Її зворотна величина τ повинна бути не менше кроку дискретизації $x(t)$ або $y(t)$ і не більше тривалості перехідного процесу. Оптимальною величиною τ_0 є найменше середньоквадратичне відхилення S між експериментальною і розрахунковою реакцією об’єкта на заданий вхідний вплив. Крім того, область існування τ може виявитися розбитою на підобласті фізично реалізованих розв’язків, які визначаються умовами Гурвиця.

Для визначення найменшої величини середньоквадратичного відхилення S вибирається поєднанням панорамної оцінки залежності $S(\tau)$ для двадцяти значень $\tau_i = 1{,}16\,\tau_{i-1}$ згідно методу градієнта на інтервалі $0{,}87\,\tau_0 \le \tau_j \le 1{,}13\,\tau_0$, де τ_0 відповідає найменшій величині S, отриманої у панорамному перегляді.

Задача визначення середньоквадратичного відхилення в даному алгоритмі має свої особливості. Необхідно знайти відгук об’єкта, заданого передатною дробово-раціональною функцією другого або третього порядку, на заданій дискретній сітці (в загальному випадку не обов’язково регулярної). При цьому реакцію об’єкта слід обчислювати також на дискретній сітці, яка в загальному випадку не співпадає з тою, на якій була визначена експериментальна реакція об'єкта. Алгоритм обчислення відгуку об'єкта повинен бути максимально швидкодіючим, оскільки у розв'язуванні задачі ідентифікації він виконується не менше 40-50 разів і визначає час розрахунку. Досить ефективний в даному випадку є метод інтегрування Тейлора [161].

У реалізації алгоритму інтегрування вхідний вплив може поступово змінюватися тільки в точках відліку. Між дискретами вимірювання він описується параболою третього порядку, або, якщо апріорі відомо, що вхідний сигнал є гладкою аналітичною функцією, – сплайном третього порядку, що забезпечує неперервність першої похідної $x(t)$. При цьому як вхідний вплив, так і відгук об'єкта може бути представлений рядом Тейлора. Отже, можна записати

$$X(p) = \sum_{k=0}^{3} \frac{X(k)k!}{(hp)^k},\ Y(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y(k)k!}{(hp)^k}, \tag{3.9}$$

де $X(k)$ і $Y(k)$ – коефіцієнти розкладу функцій $x(t)$ і $y(t)$ в ряди Тейлора, а k – крок їх дискретизації.

Якщо підставити ряди (3.9) в (3.7) і помножити отриману рівність на знаменник передатної функції $H(p)$, а потім прирівнявши члени з однаковими степенями *p,* отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{Y(k)b_{n-m+k}k}{h^{-k}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{X(k)a_{n-m+k}k}{h^{-k}},\ m = \overline{0, n-1}, \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Y(k)b_k(k+m)}{h^{-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{X(k)a_k(k+m)}{h^{-k}},\ m = \overline{0, \infty}, \tag{3.11}$$

де n – порядок знаменника $W(p)$.

Рівність (3.10) визначає реакцію об'єкта на ступінчасту зміну в момент $t = t_i$ величини вхідного впливу. Рівність (3.11) описує реакцію об'єкта на монотонно змінюючу частину вхідного впливу. Шукана величина реакції об'єкта в момент часу $t_{i+1} = t_i + t_1$, де $t_1 \leq h$, має вигляд

$$Y(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{m} Y_i(k)\left(\frac{t_1}{h}\right)^k .$$

Для практичних задач можна обмежитися членом $Y(m) < 10\, Y(t_i)$, що забезпечує методичну похибку не більше 0,1%.

Запропонований алгоритм дозволяє на основі пасивних експериментів обчислити коефіцієнти дробово-раціональної передатної функції з точністю до 0,1%.

В цілому обчислювальний експеримент свідчить, що запропонований алгоритм дозволяє на основі пасивних експериментів обчислити коефіцієнти дробово-раціональної передатної функції з точністю, що забезпечує практичне вирішення інженерних динамічних задач аналізу і синтезу в технічних додатках.

3.2. Алгоритм побудови моделей динамічних об'єктів у вигляді оператора Вольтерри з використанням детермінованих тестових сигналів

Розглянемо методи ідентифікації моделей у формі інтегро-степеневого ряду Вольтерри (1.29) [104, 110, 115, 148, 175, 191, 250]. Основна проблема полягає у складності розв'язування типової оберненої задачі – ідентифікації ядер Вольтерри $K_m, m = \overline{1,n}$ в (1.29) за відомими реакціями системи на визначені тестові впливи. Саме наявність ефективних методів, алгоритмів та засобів для ідентифікації ядер Вольтерри визначає перспективність використання (1.29) у математичному моделюванні складних фізико-технічних систем і об'єктів [94, 148].

Нехай на досліджуваний об'єкт здійснюють вплив сигнали, які описуються детермінованими функціями часу у вигляді ступінчатих сигналів.

<u>Одновимірне ядро</u>. Загальний вигляд лінійної частини моделі системи задається формулою

$$v_1\left[x(t)\right]=\int_{E^1} K_1(s)x(t-s)ds. \qquad (3.12)$$

Вагова функція у (3.12) визначається експериментально, якщо в якості вхідного сигналу обрати ступінчатий вплив амплітуди A $\left(x(t)=A\cdot 1(t)\right)$ (рис. 3.1). Тоді (3.12) набуває вигляду:

$$v_1\left[A\cdot 1(t)\right]=\int_{E^1} K_1(s)A\cdot 1(t-s)ds = A\int_{E^1} K_1(s)ds = f_1(t).$$

Виконавши диференціювання по верхній межі отримано:

$$K_1(t)=\frac{1}{A}\frac{df_1(t)}{dt}. \qquad (3.13)$$

Якщо на вхід подається дельта функція матимемо

$$v_1\left[\delta(t)\right]=\int_{E^1} K_1(s)\delta(t-s)ds = f_1(t).$$

В результаті ядро матиме вигляд:

$$K_1(t)=f_1(t).$$

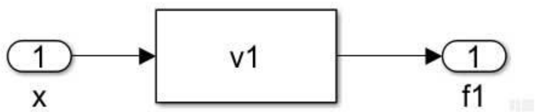


Рис. 3.1. Структурна схема для ідентифікації одновимірного ядра Вольтерри

Двовимірне ядро. Розглянемо однорідний регулярний інтегральний оператор другого степеня [110, 115, 250]:

$$v_2[x(t)]=\int_{E^2} K_2(s_1,s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2. \qquad (3.14)$$

Оскільки ядро $K_2(s_1,s_2)$ є симетричним, то з визначення однорідної функції другого степеня випливає, що для цього оператора справедливою є тотожність:

$$2v_2[x_1(t),x_2(t)] \equiv v_2[x_1(t)+x_2(t)] - v_2[x_1(t)] - v_2[x_2(t)], \tag{3.15}$$

де через $v_2[x_1(t),x_2(t)]$ позначено білінійний однорідний оператор другого степеня, тобто:

$$v_2[x_1(t),x_2(t)] = \int_{E^2} K_2(s_1,s_2)x_1(t-s_1)x_2(t-s_2)ds_1ds_2.$$

Система $v_2[x_1(t),x_2(t)]$ може бути отримана з системи $v_2[x(t)]$ за допомогою структурної схеми – рис. 3.2.

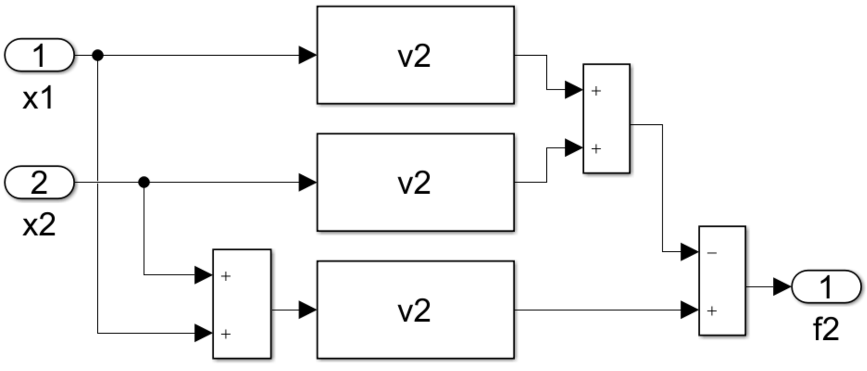


Рис. 3.2. Структурна схема для ідентифікації двовимірного ядра

Нехай $x_1(t)$ та $x_2(t)$ – $\delta-$функції: $\delta(t-T_1)$ та $\delta(t-T_2)$. Врахувавши (3.14) та (3.15):

$$2v_2[\delta(t-T_1),\delta(t-T_2)] =$$
$$= 2\int_{E^2} K_2(s_1,s_2)\delta(t-T_1-s_1)\delta(t-T_2-s_2)ds_1ds_2 = f_2(t_1,t_2).$$

Позначимо $s_1 = t-T_1$, $s_2 = t-T_2$. Без обмеження загальності візьмемо менше з чисел T_1 та T_2 рівним нулю. Нехай це буде T_1. Тоді, відповідно, маємо $s_1 = t,\ s_2 = t-T_2$. Змінюючи значення часу T_1 та T_2 між моментами подання імпульсів можна виміряти ядро $K_2(s_1,s_2)$ [159]. Отже, ядро матиме вигляд:

$$K_2(t_1,t_2) = \frac{1}{2} f(t_1,t_2).$$

Подавши на вхід системи ступінчаті впливи амплітудою A отримаємо:

$$2v_2[A\cdot 1(t-T_1), A\cdot 1(t-T_2)] =$$
$$= 2A^2 \int_{E^2} K_2(s_1,s_2)\cdot 1(t-T_1-s_1)\cdot 1(t-T_2-s_2)ds_1 ds_2 =$$
$$= 2A^2 \int_0^{t-T_1}\int_0^{t-T_2} K_2(s_1,s_2)ds_1 ds_2.$$

При різних значеннях T_1 і T_2, отримується деяка поверхня $f_2(s_1,s_2)$ в тривимірному просторі:

$$2A^2 \int_0^{t-T_1}\int_0^{t-T_2} K_2(s_1,s_2)ds_1 ds_2 = f_2\left(t_1,t_2\right).$$

Для визначення $K_2(s_1,s_2)$ необхідно диференціювати f_2 по t_1 та t_2:

$$K_2(t_1,t_2) = \frac{1}{2A^2}\frac{\partial^2 f_2(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \qquad (3.16)$$

Тривимірне ядро. Розглянемо однорідний інтегральний регулярний оператор третього степеня [110, 115, 159, 250]

$$v_3[x(t)] = \int_{E^3} K_3(s_1,s_2,s_3)x_1(t-s_1)x_2(t-s_2)x_3(t-s_3)ds_1 ds_2 ds_3. \qquad (3.17)$$

Враховуючи, що ядро третього порядку є симетричним, отримаємо:

$$3!v_3[x_1,x_2,x_3] = v_3[x_1+x_2+x_3] - v_3[x_1+x_2] - v_3[x_2+x_3] -$$
$$- v_3[x_1+x_3] + v_3[x_1] + v_3[x_2] + v_3[x_3].$$

Блок-схеми, які дозволяють отримати $v_3\left[x_1,x_2,x_3\right]$ з $v_3\left[x\right]$, наведені на рис. 3.3. Подаючи на вхід даної системи $x_1(t)=\delta(t-T_1)$, $x_2(t)=\delta(t-T_2)$, $x_3(t)=\delta(t-T_3)$, отримується ядро третього порядку:

$$v_3[\delta(t-T_1),\delta(t-T_2),\delta(t-T_3)] = 3!K_3(t_1,t_2,t_3) = f_3\left(t_1,t_2,t_3\right).$$

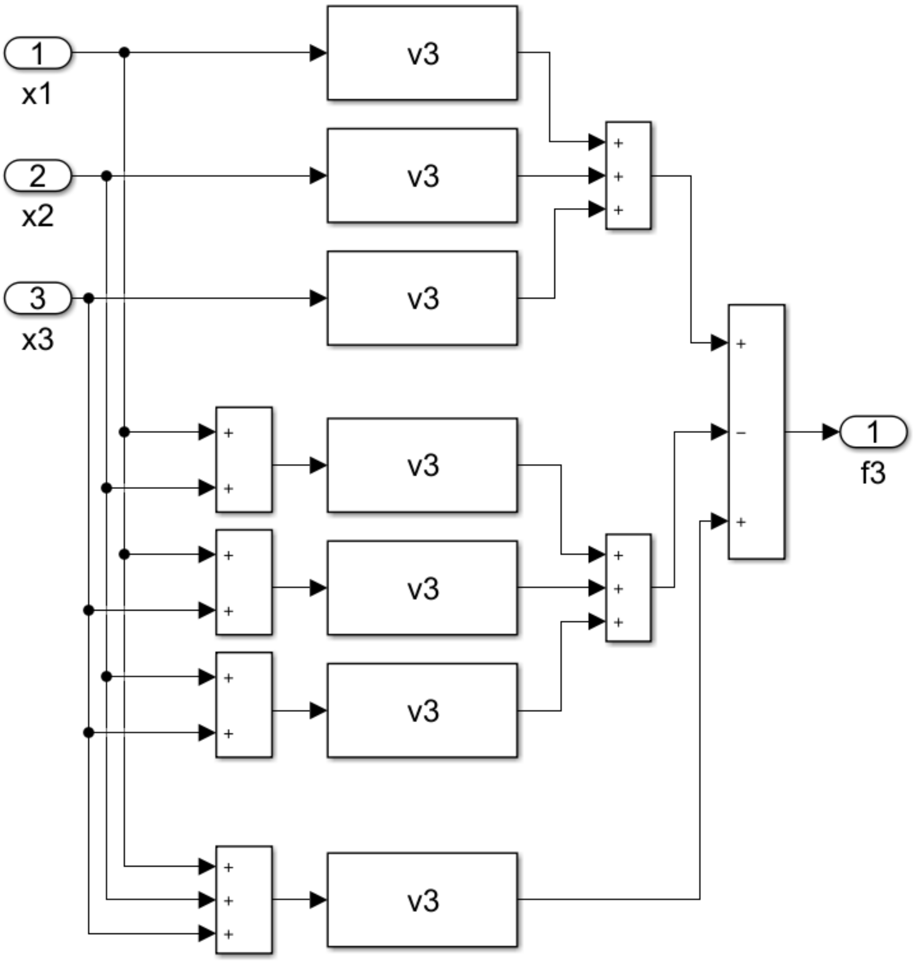


Рис. 3.3. Структурна схема для ідентифікації тривимірного ядра

В результаті матимемо

$$K_3(t_1,t_2,t_3)=\frac{1}{3!}f_3(t_1,t_2,t_3).$$

Подамо тепер на вхід системи ступінчаті сигнали амплітуди A. З (3.17) отримаємо:

$$v_3[A\cdot 1(t-T_1),A\cdot 1(t-T_2),A\cdot 1(t-T_3)]=$$

$$=3!A^3\int_0^{t-T_1}\int_0^{t-T_2}\int_0^{t-T_3}K_3(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3=f_3\left(t-T_1,t-T_2,t-T_3\right).$$

Аналогічно (3.16) визначення тривимірного ядра Вольтерри здійснюється за формулою:

$$K_3(t_1,t_2,t_3)=\frac{1}{3!A^3}\frac{\partial^3 f_3(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}. \tag{3.18}$$

Багатовимірне ядро. Для регулярного однорідного інтегрального оператора степеня p подаючи на вхід $\delta-$функції, отримаємо функції порядку p

$$v_p[\delta(t-T_1),...,\delta(t-T_p)]=p!K_p(t-T_1,...,t-T_p).$$

Ядро буде мати вигляд:

$$K_p(t_1,t_2,...,t_p)=\frac{1}{p!}f_p(t_1,t_2,...,t_p).$$

Для ступінчатих впливів з амплітудою A маємо

$$\begin{gathered} v_p[A\cdot 1(t-T_1),A\cdot 1(t-T_2),...,A\cdot 1(t-T_p)]= \\ =p!A^p\int_0^{t-T_1}\int_0^{t-T_2}...\int_0^{t-T_p}K_p(s_1,s_2,...,s_p)ds_1ds_2...ds_p= \\ =f_p(t-T_{1,},t-T_2,...,t-T_p). \end{gathered} \tag{3.19}$$

Диференціюючи (3.19) отримаємо

$$K_p(t_1,...,t_p)=\frac{1}{p!A^p}\frac{\partial^p f_p(t_1,...,t_p)}{\partial t_1...\partial t_p}. \tag{3.20}$$

У застосуванні підходу, який розглянуто вище, виникає ряд складнощів [115]. По-перше, для диференціювання експериментально отриманих залежностей за (3.13), (3.16), (3.18), (3.20), необхідно застосовувати специфічні методи для отримання стійких результатів [107, 106, 110]. По-друге, виникає необхідність проведення великої кількості експериментів для побудови ядер Вольтерри. Для знаходження ядра лінійної частини моделі необхідно здійснити один експеримент, для побудови ядра другого порядку – $2k+1$ експериментів, для тривимірного ядра – $2k^2+4k+1$ експериментів.

Наприклад, для $k = 101$ ($T = 10$, $h = 0{,}1$), кількість експериментів для побудови двовимірного ядра буде рівною $2k + 1 = 203$, для тривимірного – $2k^2 + 4k + 1 = 20807$. Для ядер вищих порядків кількість експериментів буде зростати у показниковій залежності відносно розмірності ядра.

Отже, значна кількість експериментів та необхідність проводити чисельне диференціювання високих порядків експериментальних залежностей унеможливлює в багатьох випадках застосування методу рядів Вольтерри для дослідження нелінійних динамічних систем.

3.3. Методи чисельного диференціювання функцій для ідентифікації інтегральних моделей

Процедура чисельного диференціювання використовується у побудові математичних моделей нелінійних динамічних об’єктів у вигляді інтегро-степеневого ряду Вольтерри [102, 110, 200]. Методи диференціювання в залежності від застосованих алгоритмів можна умовно поділити на [16, 158]: апроксимаційні методи – побудова функцій на основі методу найменших квадратів в аналітичному вигляді та їх диференціювання; інтерполяційні методи – побудова інтерполяційних поліномів і їх диференціювання; різницеві методи – диференціювання на основі різницевих алгоритмів; інтегральні методи – розв’язування інтегральних рівнянь.

Чисельне диференціювання експериментально отриманих функціональних залежностей, які містять деяку похибку, є класичним прикладом некоректної задачі, яка призводить до нестійкого розв’язку [158, 198, 199]. Тому розробка нових стійких до шумових завад методів диференціювання сигналів є актуальною задачею.

Застосування класичного підходу на основі інтерполяційних методів чисельного диференціювання функцій дозволило побудувати апроксимаційні вирази для знаходження першої, другої та третьої похідних. Обчислювальні експерименти показали, що при накладанні шуму дані методи підсилюють шум, тому пропонуються підходи основані на методі найменших квадратів, які розглянемо нижче [158].

Апроксимаційні методи чисельного диференціювання функцій.

Метод найменших квадратів. Розглянемо застосування методу найменших квадратів, який представлено в розділі 2, для числового диференціювання експериментальних залежностей заданих у формі таблиці [102, 200].

Здійснивши диференціювання $P(t_1)$ у (2.79) по t_1 отримаємо розв'язок у наступній формі

$$K_1(t_1) \approx \frac{dP(t_1)}{dt_1} = \sum_{k=0}^{n} k a_k t_1^{k-1}.$$

Похідна двовимірної функції визначається на основі диференціювання $P(t_1, t_2)$ з (2.81). В результаті отримуємо:

$$K_2(t_1, t_2) \approx \frac{\partial^2 P(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \sum_{k=0}^{n} \left(k a_k t_1^{k-1} \sum_{l=0}^{k} l a_l t_2^{l-1} \right). \qquad (3.21)$$

Аналогічно здійснюється диференціювання вищих порядків, яке використовується для побудови ядер ряду Вольтерри. Здійснивши диференціювання (2.83) отримуємо:

$$K_m(t_1, t_2, ..., t_n) \approx \frac{\partial^2 P(t_1, t_2, ..., t_n)}{\partial t_1 \partial t_2 ... \partial t_n}.$$

Експоненціальна апроксимація. Пропонується шукати похідну функції $f(t_1)$, яка є результатом експерименту і задається таблично, у вигляді

$$f(t_k) = z_k, k = 1, 2, ..., l$$

на основі експоненціальної апроксимації [106, 107].

Здійснивши диференціювання $f(t)$ через її апроксимаційне представлення $Q(t)$, яке визначається через (2.84), по t отримуємо:

$$K_1(t) \approx \frac{dQ(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r} i a_i t^{i-1} e^{\sum_{i=1}^{r} a_i t^i} .$$

У двовимірному випадку диференціювання здійснюється на основі апроксимаційного представлення (2.86):

$$K_2(t_1,t_2) \approx \frac{\partial^2 Q(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{dP_1(t_1)}{dt_1} \frac{dP_2(t_2)}{dt_2} e^{P_1(t_1)+P_2(t_2)}$$

У загальному випадку для знаходження похідної визначаємо функцію $Q(t_1,t_2,...t_h) = e^{P_1(t_1)+P_2(t_2)+...+P_h(t_h)}$, де $P_1(t_1), P_2(t_2),..., P_h(t_h)$ – деякі поліноми відносно $t_1,t_2,...,t_h$ відповідно:

$$K_n(t_1,t_2,...,t_n) \approx \frac{\partial^n Q(t_1,t_2,...,t_n)}{\partial t_1 \partial t_2 ... \partial t_n} = \frac{dP_1(t_1)}{dt_1} \frac{dP_2(t_2)}{dt_2} ... \frac{dP_n(t_n)}{dt_n} e^{P_1(t_1)+P_2(t_2)+...+P_n(t_n)} .$$

Обчислювальний експеримент. На рис. 3.4 представлено результати розв'язування модельної задачі оцінки диференціювання експериментально отриманих залежностей для побудови ядра другого порядку у вигляді графіків діагонального перерізу матриці результату диференціювання та його похибку (рис. 3.5). Отримані результати демонструють високу точність диференціювання, а в кінцевому результаті отримуються ядра, що розділяються.

Інтегральні методи чисельного диференціювання.

Розглянемо задачу інтерпретації результатів експериментів та проблеми, що виникають в процесі її розв'язування [59, 251], використовуючи операторну модель процесу перетворення залежності X у Y:

$$AX = Y , \tag{3.22}$$

де A – оператор, що описує динамічні властивості системи спостереження.

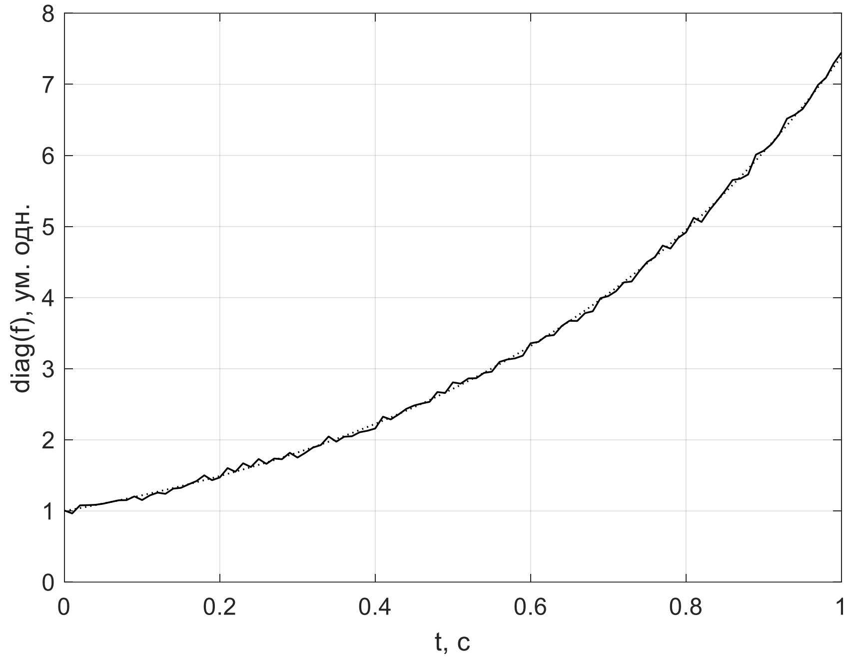


Рис. 3.4. Графіки результату оцінки диференціювання експериментальних даних у вигляді діагонального перерізу ядра другого порядку

(—— – наближене значення, …… – точне значення)

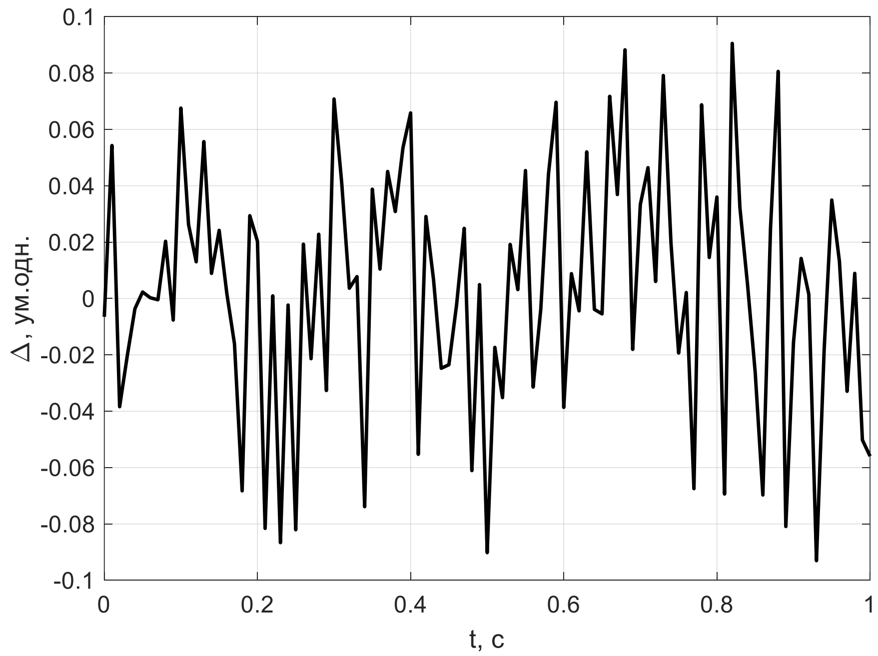


Рис. 3.5. Графік похибки діагонального перерізу матриці ядра другого порядку отриманого внаслідок диференціювання експериментальних даних

Розв’язок задачі відновлення сигналу X за сигналом Y є нестійким внаслідок наявності похибок в Y. Для розв’язування задач вказаного класу використовуються методи регуляризації, які дозволяють отримати наближено стійкий розв’язок.

Відомо, що розв’язок

$$X = A^{-1}Y, \tag{3.23}$$

який отримано прямим відновленням сигналу X за відгуком Y не задовольняє умови коректності, зокрема при цьому порушується умова стійкості [198]. Для отримання стійкого розв’язку на основі методу регуляризації Лаврентьєва розв’язується операторне рівняння

$$\alpha X + AX = Y,$$

де α – параметр регуляризації.

Запропонована модифікація вказаного підходу, яка полягає у введенні певного додаткового оператора C і розв’язуванні рівняння:

$$\alpha C_n X + AX = Y,$$

причому оператор C_n вибирається так, щоб він був додатно визначений.

<u>Регуляризаційні методи диференціювання зашумлених сигналів у реальному часі</u>. Розглянемо частковий випадок задачі (3.22), яка полягає у диференціюванні сигналу $y(t)$ за умови наявності завад [22, 108, 251]. Основна складність – це нестійкість розв’язку $x(t) = y'(t)$, яка проявляється внаслідок наявних шумів у вихідному сигналі. Задача числового диференціювання зашумленого сигналу $y(t)$ відносять до класу некоректно поставлених задач [198], тому традиційний підхід у розв’язуванні вказаних задач (3.22), (3.23) базується на використанні наближених методів, зокрема, у застосуванні методів регуляризації [108, 198, 251], за допомогою яких розв’язується інтегральне рівняння

$$\int_0^t x(\tau)d\tau = y(t) - y_0.$$

Розглянемо методи наближеного диференціювання зашумлених сигналів в реальному часі, які дозволяють підвищити точність розв'язування поставленої задачі. Запропоновані методи є подібними методу регуляризації А.Н. Тихонова [198] із регуляризаторами нульового, першого та другого порядків.

Нехай відоме деяке наближення $y_\eta(t)$ функції $y(t)$, яка підлягає числовому диференціюванню: $y_\eta(t) = y(t) + \eta(t)$, де $\eta(t)$ – функція завад.

Відомо, що розв'язок, який отримано прямим диференціюванням $y_\eta(t)$, не задовольняє умови коректності. Розглянемо задачу числового диференціювання в інтегральній формі:

$$\int_0^t x_\eta(\tau)d\tau = y_\eta(t) - y_0, \tag{3.24}$$

де $x_\eta(t) = x(t) + \mu(t)$, $\mu(t)$ – випадковий процес, який виникає внаслідок наявності завади $\eta(t)$ у вхідному впливі.

Побудуємо сімейство регуляризуючих операторів для задачі числового диференціювання і порівняємо їх відносно точності. Згідно [198] замість (3.24) можна розв'язувати інтегральне рівняння Вольтерри другого роду [108, 251]

$$\alpha C_n x_\eta(t) + \int_0^t x_\eta(\tau)d\tau = y_\eta(t) - y_0.$$

В результаті застосування перетворення Лапласа отримаємо

$$\alpha C_n x_\eta(p) + \frac{1}{p} x_\eta(p) = y_\eta(p) - \frac{1}{p} y_0. \tag{3.25}$$

Отриманий регуляризаційний вираз (3.25) може мати різні представлення залежно від виду регуляризатора C_n. Так, у регуляризаторі нульового порядку ($C_0 = 1$) матимемо:

$$\alpha x_\eta(p) + \frac{1}{p} x_\eta(p) = y_\eta(p) - \frac{1}{p} y_0. \tag{3.26}$$

Звідси

$$x_\eta(p) = \frac{p}{\alpha p + 1} y_\eta(p) - \frac{1}{\alpha p + 1} y_0. \tag{3.27}$$

Використавши регуляризатор першого порядку

$$C_1 = \frac{p}{p+k},$$

де k – регуляризаційний коефіцієнт, отримуємо рівняння

$$\alpha \frac{p}{p+k} x_\eta(p) + \frac{1}{p} x_\eta(p) = y_\eta(p) - \frac{1}{p} y_0. \tag{3.28}$$

Перетворивши (3.28), матимемо

$$x_\eta(p) = \frac{p^2 + kp}{\alpha p^2 + p + k} y_\eta(p) - \frac{p+k}{\alpha p^2 + p + k} y_0. \tag{3.29}$$

На основі регуляризатора другого порядку

$$C_2 = \frac{p^2}{p^2 + k_1 p + k_2},$$

де k_1, k_2 – регуляризаційні коефіцієнти, побудовано рівняння

$$\alpha \frac{p^2}{p^2 + pk_1 + k_2} x_\eta(p) + \frac{1}{p} x_\eta(p) = y_\eta(p) - \frac{1}{p} y_0,$$

перетворивши яке, маємо

$$x_\eta(p)=\frac{p^3+k_1p^2+k_2p}{\alpha p^3+p^2+k_1p+k_2}y_\eta(p)-\frac{p^2+k_1p+k_2}{\alpha p^3+p^2+k_1p+k_2}y_0. \qquad (3.30)$$

Регуляризаційні коефіцієнти k, k_1, k_2 необхідно підбирати таким чином, щоб всі корені характеристичних рівнянь систем (3.29), (3.30) були від'ємними, дійсними та максимальними за модулем, наприклад, для обчислювальних експериментів обрано

$$k=\frac{1}{4\alpha},\ k_1=\frac{1}{3\alpha},\ k_2=\frac{1}{27\alpha^2}.$$

Обчислювальні експерименти. Для дослідження точності числового диференціювання сигналів моделями (3.27), (3.29), (3.30) у середовищі Matlab/Simulink проведено серія обчислювальних експериментів. Вхідний сигнал визначався у вигляді функції

$$y(t)=a\cdot\cos(t)+\eta(t),$$

де a – коефіцієнт, $\eta(t)$ – шум. Точний розв'язок, не враховуючи шум, після диференціювання матиме вигляд: $x(t)=-a\cdot\sin(t)$.

На рис. 3.6–3.8 подано результати числового диференціювання функції $\cos(t)$ накладаючи 10% шуму. На рис. 3.6 зображено графік вхідного сигналу, на рис. 3.7 – результат числового диференціювання із використанням регуляризаторів нульового, першого та другого порядку, на рис. 3.8 – графіки абсолютних похибок. Аналіз отриманих результатів показав, що регуляризаційний оператор другого порядку дозволяє отримати найточніші результати [251].

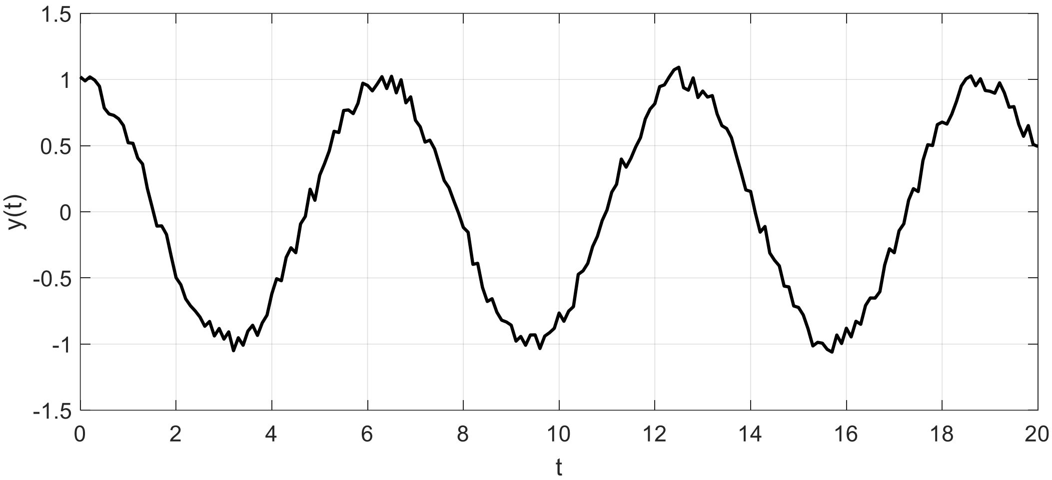


Рис. 3.6. Графік вхідного сигналу із накладанням 10% шуму

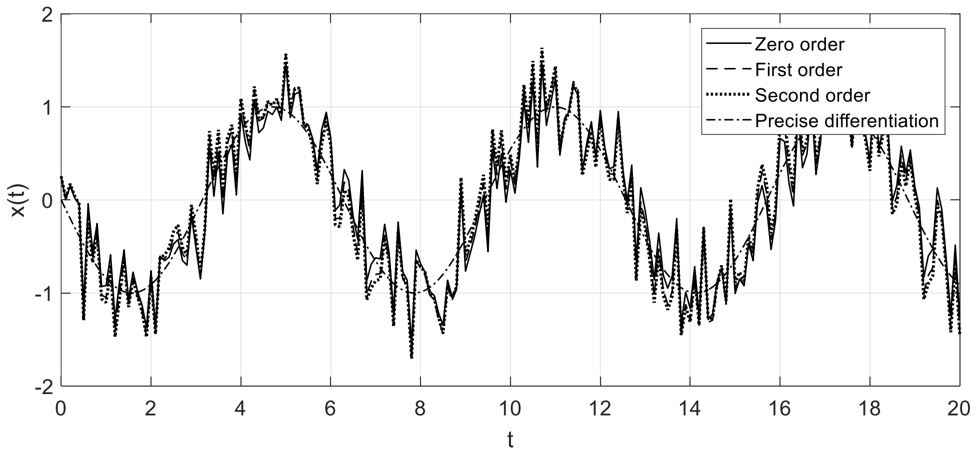


Рис. 3.7. Графіки диференційованого сигналу на основі регуляризаційних операторів нульового, першого та другого порядку при наявності 10% шуму

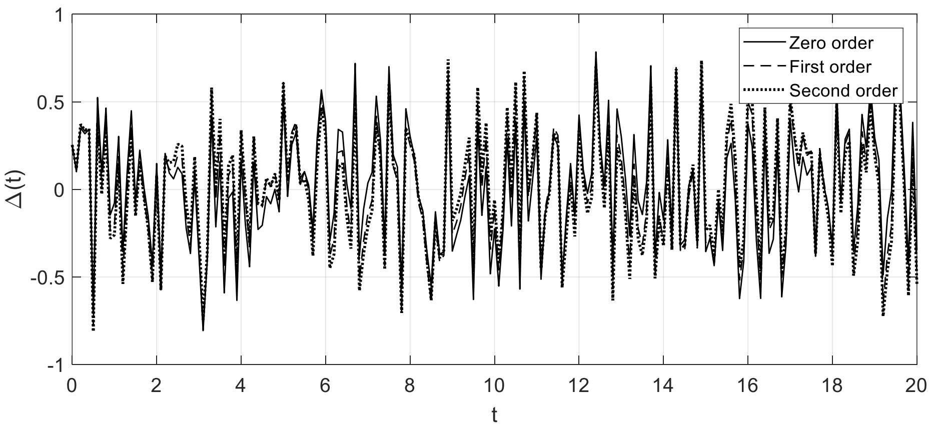


Рис. 3.8. Графіки абсолютних похибок диференціювання на основі регуляризаційних операторів нульового, першого та другого порядку

Проведенні обчислювальні експерименти показали, що запропоновані методи дозволяють реалізовувати диференціювання зашумлених функціональних залежностей та можуть бути використані у числовому диференціюванні експериментальних даних. Встановлено, що точність числового диференціювання залежить від величини вхідних завад та вибору регуляризаційних параметрів (операторів), причому, спостерігається збільшення рівня шуму у вихідному сигналі на 10%–40% порівняно із рівнем шуму у вхідному сигналі. Для пониження шумових завад варто додатково застосовувати фільтрацію.

Апаратно-орієнтований регуляризаційний алгоритм.

Операції цифрового диференціювання використовуються досить широко у зв'язку з активним впровадженням цифрових технічних засобів в системах керування сучасними технічними системами. Такі операції застосовуються, як в традиційних регуляторах, так і у реалізації більш складних законів регулювання, наприклад, у системах зі змінними структурами, для реалізації оптимальних і адаптивних законів керування. З іншої сторони, застосування цифрових диференціюючих пристроїв у системах неелектричного типу порівняно складне, та не завжди економічно виправдано [22, 38].

Розглянемо представлення застосування наведеного підходу в структурній постановці. Використання регуляризатора нульового порядку та нульових початкових умов дозволяє (3.26) подати у вигляді [22]

$$x(p) = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{-\frac{1}{\alpha}}{\alpha p + 1} \right) y(p). \tag{3.31}$$

Структурна схема моделі (3.31) побудована в Simulink подана на рис. 3.9. Як видно, диференціальну ланку можна побудувати шляхом паралельного з’єднання ланки підсилення із коефіцієнтом $\frac{1}{\alpha}$ та інерційної ланки $\frac{-\frac{1}{\alpha}}{\alpha s+1}$.

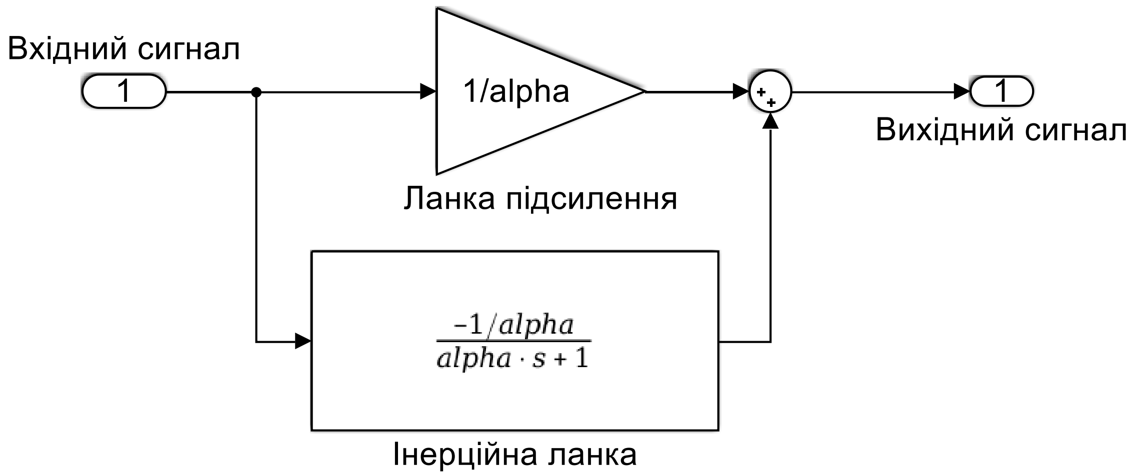


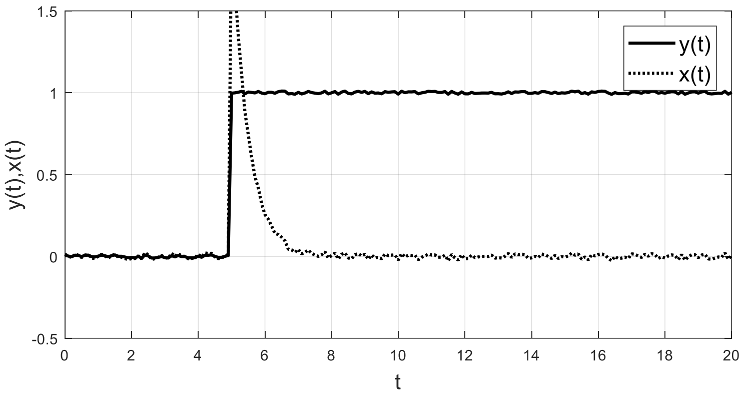
Рис. 3.9. Структурна схема оператора (3.31)

Обчислювальні експерименти. Для дослідження точності числового диференціювання сигналів на основі використання оператора (3.31) в середовищі Matlab/Simulink здійснено ряд обчислювальних експериментів. Вхідний сигнал має вигляд функції

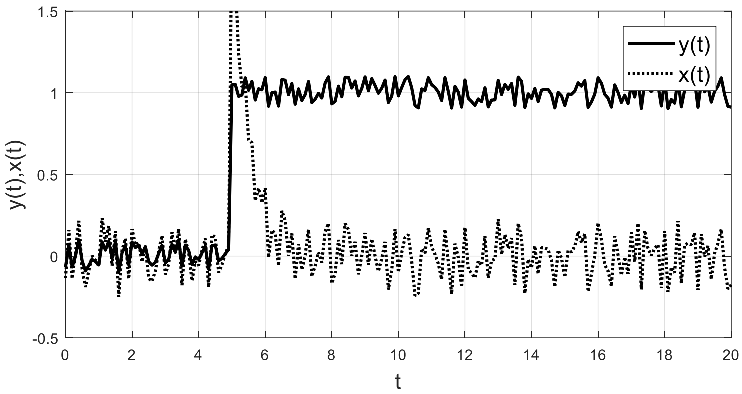
$$y(t)=1(t-5)+\eta(t),$$

де $1(t-5)$ – одиничний стрибок, $\eta(t)$ – шум.

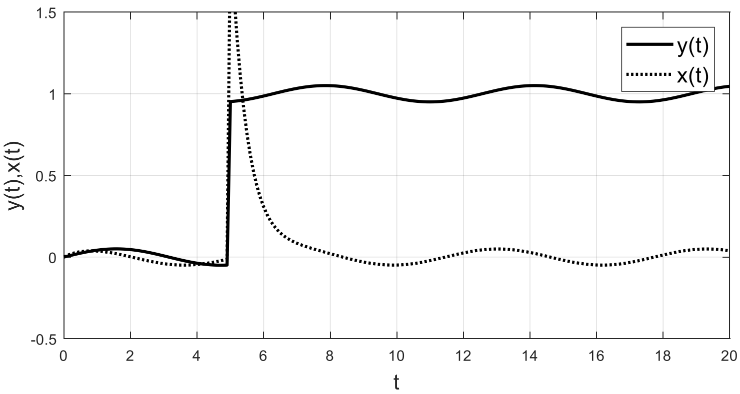
На рис. 3.10 подано графіки вхідного сигналу та результат чисельного диференціювання функції $1(t-5)$ із накладанням шуму для $\alpha=0.5$. На рис. 3.10.а зображено результати числового диференціювання при наявності 1% шуму у вхідному сигналі, на рис. 3.10.б – 10% шуму, на рис. 3.10.в – синусоїдального 5% шуму, на рис. 3.10.г – синусоїдального та білого 5% шуму.



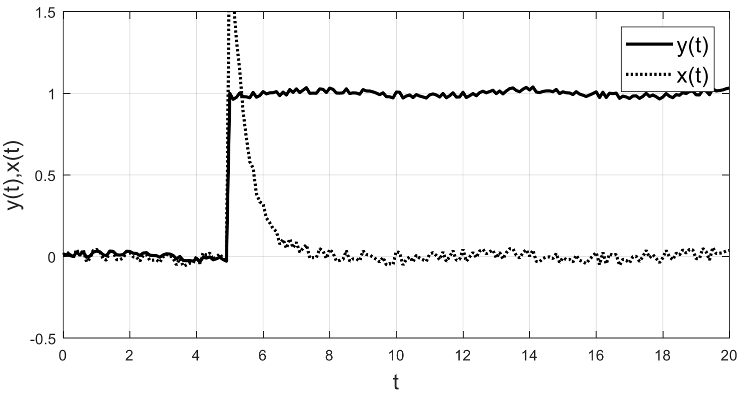
а)



б)



в)



г)

Рис. 3.10. Графіки вхідних сигналів (——) та результати чисельного диференціювання (⋯⋯⋯⋯⋯⋯) функції $1(t-5)$ при $\alpha = 0.5$

Результати обчислювальних експериментів показали, що запропонований метод дає змогу ефективно виконувати диференціювання сигналів, які містять шумові завади. Якість отриманих результатів залежить від параметра регуляризації α, причому є пряма залежність: при збільшенні шуму у вхідних сигналах необхідно збільшувати значення параметр α. В той же час, збільшення α збільшує час виходу перехідного процесу на усталений режим. Такий підхід дозволяє технічну реалізацію диференціаторів, зокрема у вигляді диференціюючого пристрою систем автоматики неелектричного типу [22].

3.4. Адаптивний метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем інтегральними рядами Вольтерри

Для зменшення кількості експериментів під час ідентифікації моделей у формі інтегро-степеневого ряду Вольтерри пропонується метод ідентифікації рядів Вольтерри шляхом ефективного планування експериментів [115, 116]. Суть даного методу розглянемо на прикладі побудови ядра однорідного поліноміального оператора Вольтерри другого степеня.

Для реєстрації результатів експериментів формується квадратна матриця:

$$F = \begin{bmatrix} f_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i-1,1} & f_{i-1,2} & \cdots & f_{i-1,i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_{i,1} & f_{i,2} & \cdots & f_{i,i-1} & f_{i,i} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_{i+1,1} & f_{i+1,2} & \cdots & f_{i+1,i-1} & f_{i+1,i} & f_{i+1,i+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1,1} & f_{n-1,2} & \cdots & f_{n-1,i-1} & f_{n-1,i} & f_{i+1,i+1} & \cdots & f_{n-1,n-1} & 0 \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,i-1} & f_{n,i} & f_{n,i+1} & \cdots & f_{n,n-1} & f_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Кожний стовпець даної матриці, відповідно до розбиття за часом із кроком *h*, відображає результат *i*-го експерименту, який проводиться для вхідних впливів $x_1(t)=1(t)$ і $x_2(t)=1(t-T_{2,i})$, де $T_{2,i}$ $(i=\overline{1,n})$ елемент вектора $T_2=[0:h:T]$, який визначає величину зміщення в часі ступінчатого сигналу. Згідно алгоритму побудови ядра для однорідного регулярного оператора другого степеня в матрицю заносяться результати експериментів, які враховують тільки вплив нелінійності, без врахування лінійних складових. Це приводить до того, що матриця матиме вигляд нижньотрикутної.

В основі запропонованого методу лежить властивість, яка полягає в тому, що вплив нелінійності на результат різних експериментів є однаковий (в межах заданої похибки), але зміщений у часі, відповідно до зміщення ступінчатого вхідного сигналу. Тобто, результати, які подані у стовпцях, наприклад, *i*-ому ($f_{i,i}, f_{i+1,i}, f_{i+2,i},\dots$) та *j*-ому ($f_{j,j}, f_{j+1,j}, f_{j+2,j},\dots$), повинні задовольняти умову

$$\left\| f_i, f_j \right\| \le \varepsilon, \tag{3.32}$$

де

$$\left\| f_i, f_j \right\| = \sqrt{\sum_g \left(\frac{d^2 f_{i+g,i}}{dt^2} - \frac{d^2 f_{j+g,j}}{dt^2} \right)^2},$$

ε – наперед визначене значення допустимої похибки.

Якщо стовпці *i*-ого та *j*-ого експериментів задовольняють (3.32), можна припустити, що результати експериментів від $i+1$ до $j-1$ будуть однаковими у визначеному розумінні, тобто, будуть відрізнятися один від одного в межах заданої похибки ε. Тому експерименти з $i+1$ по $j-1$ можна не проводити, а матрицю заповнити, використавши сплайн інтерполяцію окремо по кожній діагоналі матриці:

$$\boxed{f_{i,i}},\, f_{i+1,i+1},\, f_{i+2,i+2}, \ldots, f_{j-2,j-2},\, f_{j-1,j-1},\, \boxed{f_{j,j}},$$

$$\boxed{f_{i+1,i}},\, f_{i+2,i+1},\, f_{i+3,i+2}, \ldots, f_{j-1,j-2},\, f_{j,j-1},\, \boxed{f_{j+1,j}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Проведення експериментів починається із визначення першого (i = 1) та останнього (j = n) стовпців. Отримані результати оцінюються на основі умови (3.32). Якщо умова не виконується, тоді проводяться експерименти для заповнення стовпця $\left[\frac{i+j}{2}\right]$. Далі, аналогічно, розглядаються стовпці i та $\left[\frac{i+j}{2}\right]$, а також $\left[\frac{i+j}{2}\right]$ та j, тобто на основі дихотомічного підходу проводяться всі експерименти, які не задовольняють умові (3.32).

В результаті проведених експериментів отримано матрицю, в якій частина стовпців не заповнена, оскільки не всі експерименти проводились. Після цього застосовується метод сплайн інтерполяції по кожній діагоналі матриці для покриття всієї визначеної множини експериментів. На завершення, провівши подвійне диференціювання відповідно до формули (3.21), отримуємо двовимірне ядро ряду Вольтерри.

Запропонований метод описується за допомогою такого рекурсивного алгоритму, вважаючи, що вже проведені i-й та j-й експерименти [115]:

1. Оцінити результати i-го та j-го експериментів. Якщо умова (3.32) не виконується і експерименти не послідовні (стовпці не сусідні: $i+1 \neq j$), тоді:

1.1. Провести експерименти при $x_1 = 1(t)$ і $x_2 = 1\left(t - T_{2,\left[\frac{i+j}{2}\right]}\right)$ для заповнення $\left[\frac{i+j}{2}\right]$ стовпця матриці.

1.2. Повернутися до п. 1.1 при умові, що i не змінюється, а $j = \left[\frac{i+j}{2}\right]$.

1.3. Повернутися до п. 1.1 при умові, що $i = \left[\frac{i+j}{2}\right]$, а j не змінюється.

2. Провести сплайн інтерполяцію за діагоналями матриці.

3. Виконати чисельне диференціювання одним із методів аналітичного диференціювання.

<u>Модельні експерименти</u>. Ефективність наведеного підходу проілюструємо на модельних експериментах [115, 116]. Розглянемо випадок, коли нелінійна динамічна система має вигляд, представлений на рис. 3.11. На структурній схемі $A(x(t))$ – лінійна складова, $F(u(t))$ – нелінійна складова. В якості лінійної частини розглянемо різні типові ланки: інерційну, коливальну, напівінтегральну, напівінерційну та ланку затухання (або напівзапізнення) (таблиці 2.3 та 2.4). Математичний опис нелінійної частини має вигляд: $F(u(t)) = au + bu^2$ $(a, b \in R)$, тобто макромодель вказаної системи можна точно описати рядом Вольтерри із двома членами [159]. Приклади побудови таких макромоделей наведено в другому розділі: (2.75), (2.76), (2.77), (2.78).

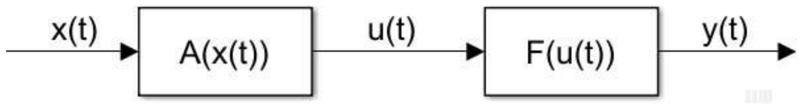


Рис. 3.11. Структурна схема моделі нелінійного динамічного об’єкта

Таблиця 3.2 містить кількість проведених експериментів для ідентифікації двовимірного ядра Вольтерри традиційним та адаптивним методами, коли лінійна частина визначається різними типовими ланками. Експерименти проводились при $T = 10$, $h = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}01$.

Таблиця 3.2

Кількість експериментів для побудови ядра однорідного поліноміального оператора Вольтерри другого степеня

№ з/п	Тип ланки для лінійної складової моделі	Передатна функція	Кількість експериментів	
			Традиційний метод	Адаптивний метод
1	Напівінтегральна	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	203	59
2	Інерційна ланка	$\frac{1}{1+p}$	203	7
3	Коливальна ланка	$\frac{1}{1+p+p^2}$	203	7
4	Напівінерційна	$\frac{1}{1+\sqrt{p}}$	203	7
5	Напівзапізнення	$e^{-\sqrt{p}}$	203	7

Оцінка якості отриманих моделей проводилась на основі аналізу результатів серії обчислювальних експериментів [115, 116]. Розглянемо два типові випадки: перший випадок – застосування адаптивного методу для побудови двовимірного ядра Вольтерри дозволило скоротити кількість експериментів із 203 до 59, другий – із 203 до 7 експериментів. У першому випадку використовується модель із напівінтегральною ланкою. На рис. 3.12 наведено графіки перехідних характеристик, які отримані з використанням моделей, що побудовані традиційним та адаптивним методами, які практично співпадають з точним значенням перехідної характеристики. На рис. 3.13 наведено графік відносних похибок отриманих перехідних характеристик, які також співпадають.

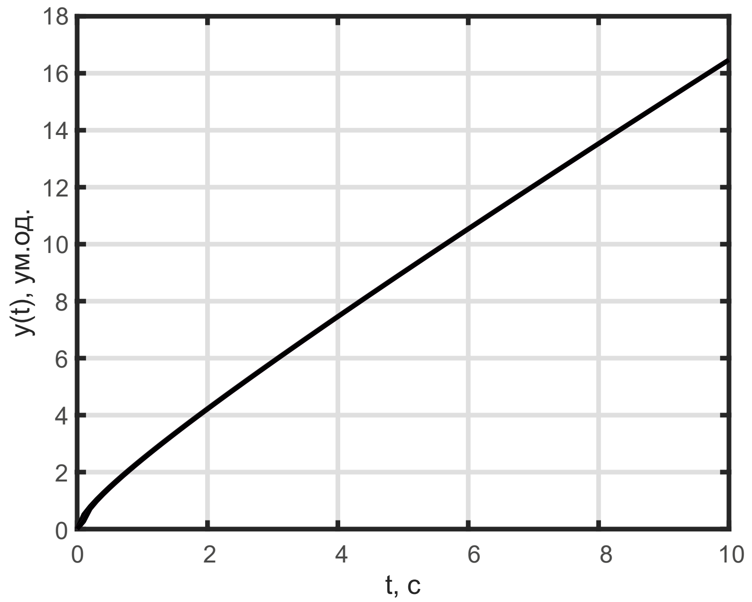


Рис. 3.12. Графіки перехідних характеристик об’єкта із напівінтегральною ланкою

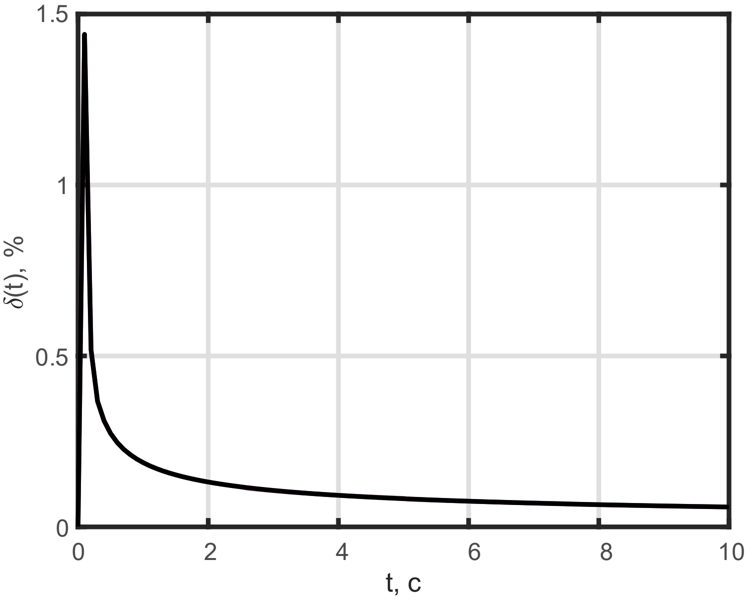


Рис. 3.13. Графік відносних похибок перехідних характеристик об’єкта із напівінтегральною ланкою

У другому випадку розглядаються системи, які під час перехідного процесу виходять на усталений режим роботи. На рис. 3.14 наводяться графіки перехідних характеристик моделей, які отримані за допомогою традиційного та адаптивного методу, а також точне значення перехідної характеристики для моделі із напівінерційною ланкою в лінійній частині. Графіки відносних похибок перехідних характеристик подано на рис. 3.15.

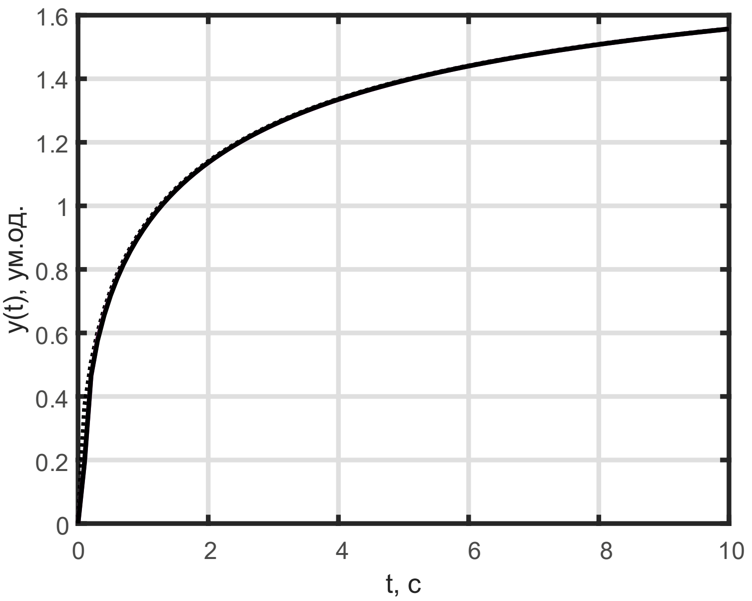


Рис. 3.14. Графіки перехідних характеристик об’єкта із напівінерційною ланкою

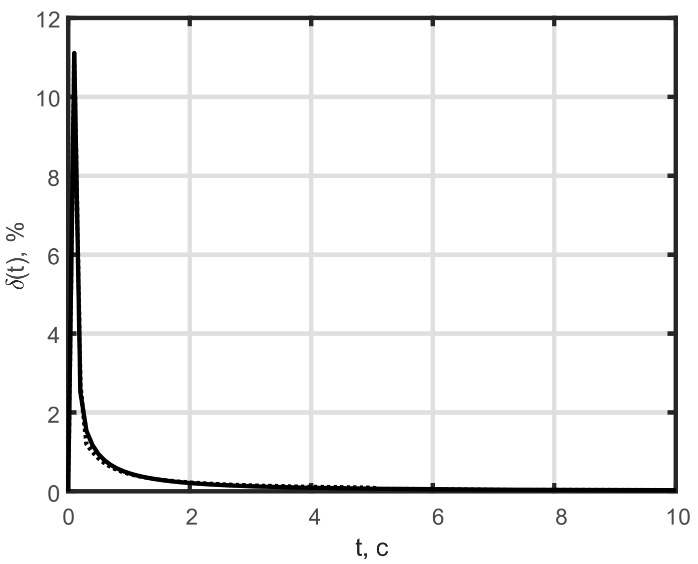


Рис. 3.15. Графіки відносних похибок перехідних характеристик об’єкта із напівінерційною ланкою

Отримані результати показують, що перехідні характеристики отримані із використанням моделей, які побудовані на основі традиційного та адаптивного методу практично співпадають.

Запропонований адаптивний метод ідентифікації нелінійних динамічних моделей дозволяє отримувати моделі у вигляді рядів Вольтерри із збереженням їх адекватності, але кількість необхідних експериментів для побудови ядер відрізняється на порядок. Такий підхід має значний економічний ефект, оскільки дозволяє скоротити часові та фінансові затрати на проведення натурних експериментів. Проведенні дослідження щодо оцінки методу стосувались випадку з двовимірними ядрами Вольтерри. Аналогічні міркування можна поширити і на випадки моделей з ядрами Вольтерри вищих порядків. Ефект скорочення кількості експериментів спостерігається на моделях, як із зосередженими, так і з розподіленими параметрами. Запропонований метод показав високу ефективність в ідентифікації моделей нелінійних систем, які під час перехідного процесу виходять на усталений режим роботи.

3.5. Застосування кореляційного методу для ідентифікації інтегральних моделей лінійних динамічних систем

Рівняння Вінера-Гопфа. Розглянемо метод ідентифікації моделей лінійних стаціонарних одновимірних об’єктів у формі інтегральних операторів на основі кореляційного підходу та дослідимо даний підхід до ідентифікації лінійних динамічних об’єктів із розподіленими параметрами [245].

Нехай лінійний стаціонарний одновимірний об’єкт описується оператором

$$y(t) = \int_0^{\infty} \omega(s) u(t-s) ds,$$

причому вихідний сигнал складається, як з корисного сигналу так і з похибки $\eta(t)$. Структурна схема обчислювального процесу для ідентифікації подана на рис. 3.16. Тоді вихідний сигнал буде описуватись наступним виразом:

$$y(t)=\int_0^\infty \omega(s)u(t-s)ds+\eta(t). \qquad (3.33)$$

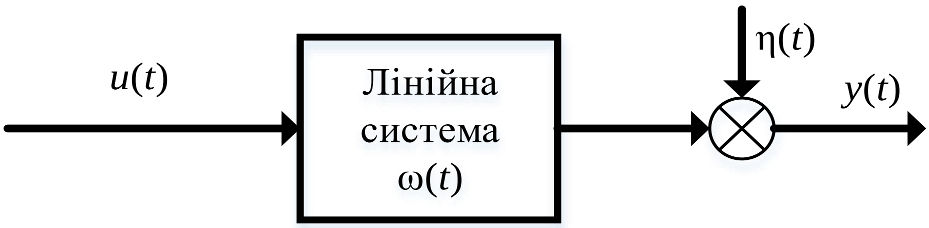


Рис. 3.16. Схема ідентифікації імпульсної перехідної характеристики лінійного об'єкта

Вираз (3.33) зв'язує одиничні реалізації випадкових синалів на вході та виході. Для переходу до детермінованих величин пемножимо обидві частини (3.33) на $u(\theta-\tau)$ та застосуємо операцію математичного очікування. Результатом буде вираз:

$$M\left[u(t-\theta)y(t)\right]=\int_0^\infty w(\tau)M\left[u(t-\theta)u(t-\tau)\right]d\tau+M\left[u(t-\theta)\eta(t)\right].$$

Враховуючи співвідношення

$$K_{uu}(\theta-\tau)=M\left[u(t-\theta)u(t-\tau)\right],$$

$$K_{uy}(\theta)=M\left[u(t-\theta)y(t)\right],$$

$$K_{u\eta}(\theta)=M\left[u(t-\theta)\eta(t)\right],$$

визначаємо автокореляційну функцію вхідного сигналу та взаємні кореляційні функції відповідно. Перейдемо до рівняння відносно кореляційних функцій сигналів:

$$K_{uy}(\theta)=\int_0^{\infty} w(\tau)K_{uu}(\theta-\tau)d\tau+K_{u\eta}(\theta).$$

Врахувавши, що $K_{u\eta}(\theta)=0$, тобто вхідний вплив $u(t)$ та завада $\eta(t)$ є некорельованими між собою, матимемо:

$$K_{uy}(\theta)=\int_0^{\infty} w(\tau)K_{uu}(\theta-\tau)d\tau. \quad (3.34)$$

Рівняння (3.34) є рівнянням Вінера-Гопфа. Воно пов'язує детерміновані величини, кореляційні функції сигналів, його розв'язок і дозволяє оцінити імпульсну вагову функцію лінійної стаціонарної системи відповідно до критерія мінімуму середньоквадратичної похибки [166]:

$$J=\frac{1}{T}\int_0^{T}\left[y(t)-\int_0^{\infty} w(\tau)u(t-\tau)d\tau\right]^2 dt.$$

Розв'язування рівняння Вінера-Гопфа (3.34) аналітичними методами викликає значні труднощі, які пов'язані, в першу чергу, із труднощами отримання аналітичного опису кореляційних функцій, що описують модель «вхід-вихід» сигналів, які отримані експериментально в режимі нормальної експлуатації об'єкта. По-друге, теоретично кореляційні функції повинні визначатися на основі нескінченної кількості вибірок. На практиці, зазвичай, вони оцінюються на скінченному інтервалі часу [0, T]. Це призводить до наближених оцінок кореляційних функцій. Випадкові похибки в оцінках кореляційних функцій призводять до істотних похибок у знаходженні $w(t)$, і задача розв'язування рівняння Вінера-Гопфа аналітичними методами стає некоректною [166]. Структура рівняння (3.34) така, що невеликі похибки в кореляційних функціях призводять до суттєвих похибок у розв'язку в оцінці імпульсної перехідної функції. Тому для отримання адекватних розв'язків рівняння Вінера-Гопфа необхідно використовувати їх згладжування. Крім того, оскільки під час проведення експерименту отримуються тільки оцінки кореляційних функцій, значення імпульсної вагової функції також виявляється наближеним.

Найбільш простим способом ідентифікації $w(t)$, який дозволяє не розв'язувати рівняння згортки (3.34) є спосіб, який полягає у використанні вхідного впливу сигналу, кореляційна функція якого близька за своїми властивостями до імпульсної функції Дірака $K_{uu}(\tau)=c\delta(\tau)$. Таким сигналом є сигнал типу «білого шуму», де c – інтенсивність шуму. В цьому випадку ядро інтеграла Вінера-Гопфа і дає наближену оцінку вагової функції об'єкта

$$K_{uy}(t)\approx cw(t).$$

Звідси за значенням взаємної кореляційної функції і визначаємо $\omega(t)$ об'єкта:

$$\omega(t)\approx\frac{1}{c}K_{uy}(t).$$

<u>Активний експеримент з довільними сигналами</u>. При практичній реалізації розглянутого підходу на вхід досліджуваного об'єкта, крім корисного сигналу $u(t)$, подається сигнал $x(t)$, який має вигляд «білого шуму» із інтенсивністю c [245]. Схема ідентифікації подана на рис. 3.17.

В цьому випадку вихідний сигнал системи визначається виразом

$$y(t)=\int_0^\infty u(t-\tau)w(\tau)d\tau+\int_0^\infty x(t-\tau)w(\tau)d\tau+\eta(t),$$

звідки можна отримати

$$K_{xy}(t)=\int_0^\infty w(\tau)K_{xu}(t-\tau)d\tau+\int_0^\infty w(\tau)K_{xx}(t-\tau)d\tau+K_{x\eta}(t). \tag{3.35}$$

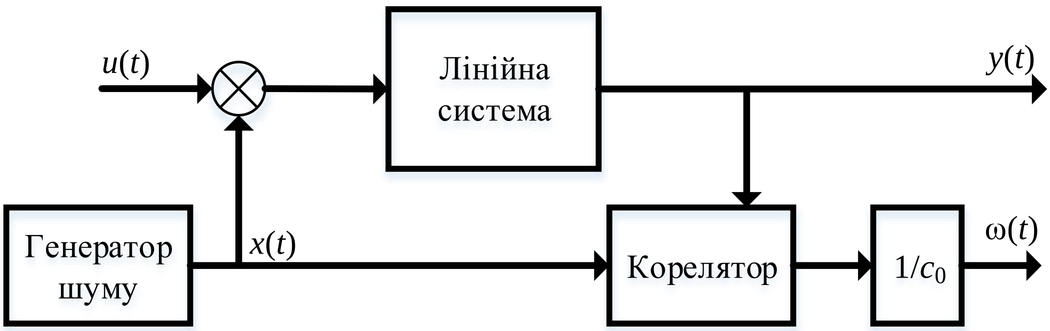


Рис. 3.17. Схема ідентифікації об’єкта з тестовим впливом у вигляді «білого шуму»

Оскільки вхідний $u(t)$ і додатковий $x(t)$ сигнали та сигнали $x(t)$ і $\eta(t)$ не корельовані, то $K_{xu}(t-\tau)=0$ та $K_{x\eta}(t)=0$. Тоді вираз (3.35) можна записати у вигляді

$$K_{xy}(t)=\int_{0}^{\infty} w(\tau)K_{xx}(t-\tau)d\tau,$$

звідки слідує

$$w(t)\approx\frac{1}{c}K_{xy}(t).$$

Значною перевагою розглянутого методу є те, що відсутній вплив вхідного керуючого сигналу та зовнішніх завад на точність визначення $w(t)$, оскільки корелятор фільтрує всі сигнали, некорельовані із сигналом генератора «білого шуму».

Обчислювальні експерименти показали ефективність ідентифікації лінійних динамічних моделей на основі використання рівняння Вінера-Гопфа. Властивості шуканої моделі та тип вхідних корисних сигналів достатньо сильно впливають на загальний результат. Тому при плануванні активних експериментів варто провести, якщо це можливо, аналіз досліджуваного об’єкта з метою визначення можливого виду моделі та оптимального корисного вхідного впливу.

Обчислювальні експерименти побудови інтегральних моделей на основі кореляційного методу. Наведений метод ідентифікації лінійних динамічних систем реалізовано в середовищі Matlab. Ефективність запропонованого підходу досліджено за допомогою обчислювальних експериментів, які здійснювались на модельних задачах. В процесі експерименту задавалась модель лінійного динамічного об’єкта, проводився експеримент шляхом подачі сигналу із накладанням «білого шуму» та визначалась імпульсна перехідна характеристика. Для оцінки точності отриманої моделі здійснювалось її порівняння із точним значенням імпульсної характеристики [245].

Для модельних задач було вибрано об’єкт, який задається передатною функцією $W_1\left(p\right)=\dfrac{1}{p+1}e^{-10p}$, тобто об’єкт є розподіленим та має властивості чистого запізнення. Для підвищення точності отримання імпульсної перехідної характеристики проводилась серія експериментів та шукалися її усереднені характеристики. При цьому значне значення для якісної ідентифікації має тип корисного вхідного сигналу. Тому досліджувався вплив різних вхідних сигналів на результат проведення операції ідентифікації.

Оцінку точності ідентифікації, в залежності від типу вхідних сигналів та кількості обчислювальних експериментів при однакових інших умовах (час моделювання T=30 с та крок дискретизації Δt=0,05 с), для моделі W_1 подано у таблиці 3.3.

Модельні задачі для дослідження можливості даного методу в ідентифікації моделей об’єктів із розподіленими параметрами формувались також із такими ланками: напівінтегральною, напівінерційною, затухання (таблиця 2.4).

Розглянемо ідентифікацію моделі об’єкта, який описується напівінтегральною ланкою. Провівши 100 експериментів, отримано автокореляційну функцію сигналу типу «білий шум» (рис. 3.18), імпульсну перехідну характеристику (рис. 3.19), перехідну характеристику отриманої моделі (рис. 3.20).

Таблиця 3.3

Оцінка впливу типу вхідних впливів та кількості обчислювальних експериментів на точності ідентифікації моделі об'єкта із властивостями ланки запізнення

Корисний сигнал	Кількість експериментів	Інтегральна абсолютна похибка імпульсної характеристики	Інтегральна абсолютна похибка перехідної характеристики
0(t)	5	0.9221	15.6721
	10	0.8590	10.9911
	20	0.5469	6.7839
	50	0.4844	5.2223
	100	0.4196	4.8201
	200	0.3181	3.7358
	500	0.2588	2.7868
	1000	0.2377	1.2738
sin(t)	5	2.6573	16.5809
	10	2.3145	7.5244
	20	1.9672	5.0091
	50	1.0392	4.3065
	100	0.9247	3.5399
	200	0.6321	2.6496
	500	0.4024	1.0263
	1000	0.3108	0.3968
1(t)	5	4.9883	79.0378
	10	4.7051	27.2941
	20	3.3934	25.3591
	50	3.1031	21.9910
	100	2.4684	15.2203
	200	2.1349	10.1142
	500	1.3482	3.0253
	1000	0.6151	2.8692

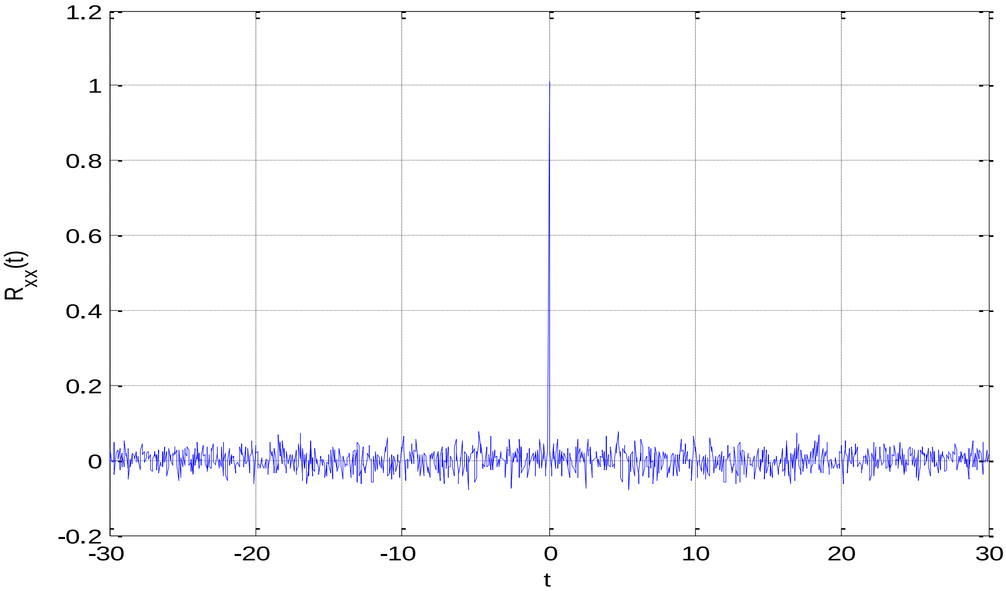


Рис. 3.18. Графік автокореляційної функції вхідного сигналу типу «білий шум»

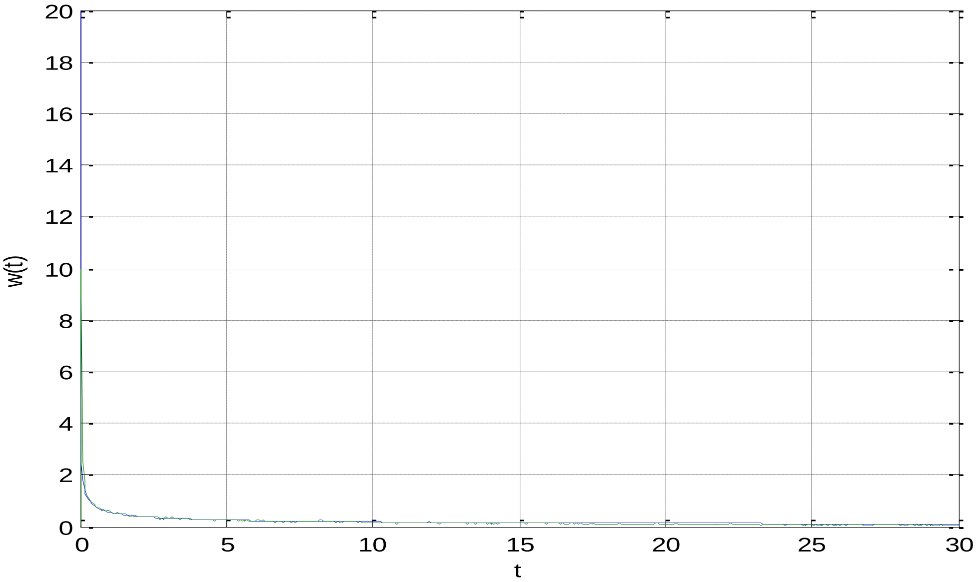


Рис. 3.19. Графіки побудованої імпульсної перехідної характеристики та її точне значення

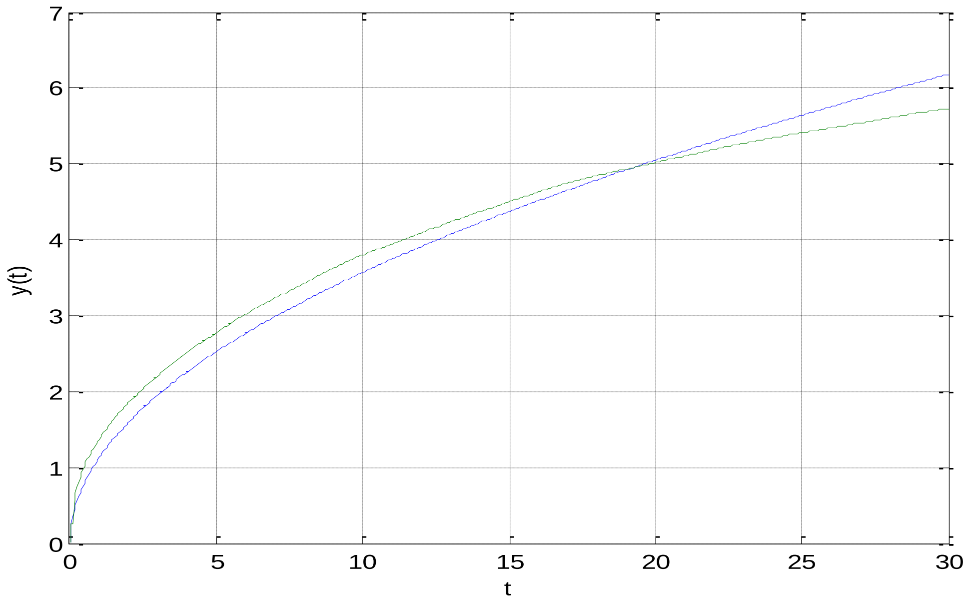


Рис. 3.20. Графіки обчисленої перехідної характеристики та її точне значення

Оцінка точності ідентифікації залежно від типу вхідних сигналів та кількості обчислювальних експериментів за однакових інших умов (час моделювання *T*=30 с та крок дискретизації Δ*t*=0,05 с) для моделей об’єктів, які задані напівінтегральною ланкою подано у таблиці 3.4

Таблиця 3.4

Оцінка впливу типу вхідних впливів та кількості обчислювальних експериментів на точність ідентифікації моделі об’єкта у формі напівінтегральної ланки

Корисний сигнал	Кількість експериментів	Інтегральна абсолютна похибка імпульсної характеристики	Інтегральна абсолютна похибка перехідної характеристики
0	5	4.5316	13.5258
	10	4.4946	32.1957
	20	3.1815	10.4351
	50	2.4624	4.6453
	100	2.4939	7.8253
	200	2.7034	10.7651
	500	2.4232	7.3728
	1000	2.3131	6.1767
sin	5	10.3509	31.2511
	10	5.4840	36.5089
	20	6.6571	12.3500
	50	3.9890	8.0415
	100	2.5321	7.2566
	200	2.6901	6.5881
	500	2.3584	5.6297
	1000	2.3656	7.0099
1	5	20.7852	372.3453
	10	60.3949	777.0198
	20	30.2596	448.3368
	50	14.1127	154.1349
	100	6.4386	91.1369
	200	7.1864	85.6626
	500	11.8603	155.3219
	1000	2.2421	14.2026

При дослідженні об’єктів, динаміка яких описується напівінерційною ланкою, отримано апроксимаційне ядро інтегрального оператора. Оцінка точності ідентифікації залежно від типу вхідних сигналів та кількості обчислювальних експериментів для моделей заданих напівінерційною ланкою подано у таблиці 3.5.

У таблиці 3.6 подано оцінку побудованих моделей об’єктів, динаміка яких описується ланкою затухання.

Таблиця 3.5

Оцінка впливу типу вхідних впливів та кількості обчислювальних експериментів на процес ідентифікації моделі об’єкта у формі напівінерційної ланки

Корисний сигнал	Кількість експериментів	Інтегральна абсолютна похибка імпульсної характеристики	Інтегральна абсолютна похибка перехідної характеристики
0	5	4.0807	15.3926
	10	3.3782	7.0194
	20	2.9201	12.8952
	50	2.3401	12.2445
	100	2.0525	11.4557
	200	1.9073	9.9351
	500	1.7547	9.7364
	1000	1.6181	8.0448
sin	5	4.5801	22.9958
	10	3.5526	16.2018
	20	4.2756	9.5821
	50	3.0707	11.6206
	100	2.4872	10.1921
	200	1.8392	7.9580
	500	1.7067	9.1105
	1000	1.6172	8.8848
1	5	5.1502	50.6296
	10	3.4262	12.9952
	20	6.2820	73.8770
	50	2.2750	3.3394
	100	2.2531	4.0025
	200	2.0347	7.7120
	500	2.4522	13.2490
	1000	1.7726	4.0629

Таблиця 3.6

Оцінка впливу типу вхідних вливів та кількості обчислювальних експериментів на точність ідентифікації моделі об’єкта у формі ланки затухання

Корисний сигнал	Кількість експериментів	Інтегральна абсолютна похибка імпульсної характеристики	Інтегральна абсолютна похибка перехідної характеристики
0	5	0.7301	7.1995
	10	0.5667	2.2583
	20	0.4940	2.0594
	50	0.3165	0.5627
	100	0.2310	0.8508
	200	0.1657	0.9065
	500	0.1477	1.6670
	1000	0.1283	0.9429
sin	5	1.1744	5.9631
	10	0.9933	1.6505
	20	0.8791	2.1374
	50	0.4859	0.9131
	100	0.2891	2.2732
	200	0.2615	2.6165
	500	0.2569	0.4177
	1000	0.2687	0.5594
1	5	8.4170	141.6626
	10	4.3938	75.0582
	20	3.5778	50.5299
	50	2.7867	41.0201
	100	1.8830	30.8038
	200	1.3679	22.4587
	500	1.4079	21.4953
	1000	0.3443	5.8079

Висновки до розділу 3

1. Досліджено методи ідентифікації параметричних динамічних моделей у формі передатних функцій на основі застосування детермінованого (застосування перетворення Лапласа та апроксимаційного представлення перехідної характеристики) та стохастичного (застосування моментів Пуассона) підходів, що дозволило отримувати апроксимаційні моделі об’єктів

із розподіленими параметрами у формі дробово-раціональних передатних функцій.

2. Набули подальшого розвитку методи числового диференціювання результатів експериментів на основі застосування апроксимації багатовимірних функцій функціональними представленнями у формі степеневих або експоненціальних апроксимаційних наближень шляхом застосування методу найменших квадратів із наступним аналітичним диференціюванням отриманих залежностей, а також на основі інтегрального методу диференціювання шляхом введення регуляризаційних операторів у початкове рівняння Вольтерри першого роду.

3. Набули подальшого розвитку методи ідентифікації моделей динамічних систем в інтегральній формі із застосуванням розроблених на основі методів апроксимації багатовимірних функцій стійких до шумових завад методів диференціювання експериментально отриманих функціональних залежностей, зокрема у формах оператора Вольтерри та інтегро-степеневого ряду Вольтерри.

4. Розроблено адаптивний метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем у формі поліноміальних інтегральних операторів Вольтерри, що дозволило скоротити кількість необхідних експериментів на порядок у порівнянні із традиційним підходом.

5. Набув подальшого розвитку метод побудови моделі лінійної динамічної системи у формі оператора Вольтерри на основі рівняння Вінера-Гопфа, що дозволило застосовувати даний метод в ідентифікації динамічних об’єктів із розподіленими параметрами.

РОЗДІЛ 4.
ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ (ПРЯМІ ЗАДАЧІ)

Для числової реалізації інтегральних моделей відомо широке коло методів, які перш за все орієнтовані на застосування квадратурних методів. Отримані моделі об'єктів із розподіленими параметрами, як лінійних так і нелінійних, характеризуються різними представленнями. Особливе місце займає представлення об'єктів із розподіленими параметрами інтегральними операторами, а саме інтегральним оператором Вольтерри для опису лінійних систем та поліноміальним інтегральним оператором Вольтерри для опису нелінійних систем. Для ефективної числової реалізації таких моделей, на даний час, наявними є ряд методів та засобів, але до теперішнього часу залишаються невирішеними проблеми, які пов'язані із сингулярністю моделей об'єктів із розподіленими параметрами та накопиченням кількості обчислень. Шляхи розв'язання зазначених проблем розглянемо нижче.

4.1. Методи числової реалізації інтегральних операторів із сингулярними ядрами

Метод регуляризації інтегральних моделей.

У моделюванні об'єктів із розподіленими параметрами їх моделі у вигляді інтегральних операторів мають, зазвичай, слабкосингулярну особливість [179]. Прикладом може слугувати оператор

$$y(t)=\int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^\alpha}ds\,,0<\alpha<1, \tag{4.1}$$

де $y(t)$ – шуканий вхідний сигнал, $x(t)$ – вхідний сигнал.

Значення ядра $\frac{1}{(t-s)^\alpha}$ прямує до ∞ при $t \to s$. Чисельне моделювання розглянутого класу об’єктів призводить до певних ускладнень у зв’язку з сингулярністю оператора (4.1).

Для числової реалізації інтегральних операторів виду (4.1) доцільним є застосування стійких і ефективних алгоритмів, заснованих на прийомах регуляризації некоректних задач.

Пропонується замінити оператор (4.1) наступним наближеним співвідношенням:

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t \frac{x(s)}{\beta + (t-s)^\alpha} ds, \tag{4.2}$$

де $\tilde{y}(t)$ – наближений шуканий розв’язок, β – параметр регуляризації (внутрішньої), який визначається способом модельних експериментів.

Застосування такого прийому викликано тим, що сингулярні інтегральні оператори не допускають у чисельній реалізації безпосереднього застосування методу квадратурних формул, які дозволяють отримати стійкі і досить легко реалізовані на комп’ютері обчислювальні алгоритми.

Для застосування квадратурних формул до рівняння (4.2) після введення дискретизації на шуканій множині розв’язків використовується в загальному випадку вираз

$$\tilde{y}(t_i) = \int_0^{t_i} \frac{x(s)}{\beta + (t_i-s)^\alpha} ds.$$

Використовуючи для заміни інтеграла формулу трапеції, маємо наступну систему рівнянь [47]

$$\tilde{\tilde{y}}(t_i) = h\sum_{j=0}^{i} A_j \frac{x(t_j)}{\beta_j + (t_i-t_j)^\alpha},$$

де $h = \frac{T}{n}$ – крок квадратури, A_j – коефіцієнти квадратурної формули.

Зсув сіток вузлів. Іншим підходом до розв’язування рівнянь із сингулярними ядрами є застосування методу зсуву сіток вузлів. Наприклад, для оператора (4.1) вводиться розбиття $t_i = ih,\ \ s_j = t_j + \Delta,\ \ j,i = 0,1,\ldots,n,$ де h – крок дискретизації, Δ – зсув між сітками, вважається рівним $\Delta = h/2$ або $\Delta \in [0, h/2]$ чи $\Delta \in (0, h/2)$.

Введення зсуву Δ дозволяє усунути особливості у використані чисельних методів, наприклад, методу квадратур [209].

Внутрішня регуляризація типових ланок. На основі запропонованого методу внутрішньої регуляризації побудовано регуляризаційні моделі типових ланок об’єктів із розподіленими параметрами. В таблиці 4.1 представлено моделі напівінтегральної і напівінерційної (першого та другого типу) ланок та ланки напівзапізнення.

Таблиця 4.1

Регуляризаційні моделі типових ланок об’єктів із розподіленими параметрами

Назва ланки	Оператор Вольтерри	Регуляризаційна модель
Напів-інтегральна	$\int_0^t \frac{k}{\sqrt{\pi(t-s)}} x(s)ds$	$\int_0^t \frac{k}{\beta + \sqrt{\pi(t-s)}} x(s)ds$
Напів-інерційна 1-го типу	$\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\pi(t-s)k}} - e^{\frac{(t-s)}{T}} erfc\sqrt{\frac{(t-s)}{T}}\right) x(s)ds$	$\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta + \pi(t-s)k}} - e^{\frac{(t-s)}{T}} erfc\sqrt{\frac{(t-s)}{T}}\right) x(s)ds$
Напів-інерційна 2-го типу	$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-a(t-s)} x(s)ds$	$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\beta + \pi(t-s)}} e^{-a(t-s)} x(s)ds$
Затухання (напів-запізнення)	$\int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4(t-s)}} x(s)ds$	$\int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\beta_1 + \pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{\beta_2 + 4(t-s)}} x(s)ds$

<u>Обчислювальні експерименти</u>. Дослідження ефективності запропонованого підходу внутрішньої регуляризації сингулярних інтегральних моделей здійснено на основі методу обчислювальних експериментів. Одночасно здійснено дослідження ефективності ланцюгово-дробової апроксимації передатних функцій відповідних типових ланок. На рис. 4.1 подано результат числової реалізації напівінтегральної ланки на основі інтегрального оператора та ланцюгово-дробової апроксимаційної моделі для вхідного впливу у вигляді функції Гевісайда. Похибка реалізації подана на рис. 4.2 у вигляді графіків.

Результати побудови перехідної характеристики напівінерційної ланки на основі числової реалізації інтегрального оператора та ланцюгово-дробової апроксимаційної моделі подано на рис. 4.3. Графіки похибок числової реалізації подано на рис. 4.4.

Результати числової реалізації ланки напівзапізнення на основі інтегрального оператора та ланцюгово-дробової апроксимаційної моделі для вхідного впливу у вигляді функції Гевісайда подано на рис. 4.5 та рис. 4.6.

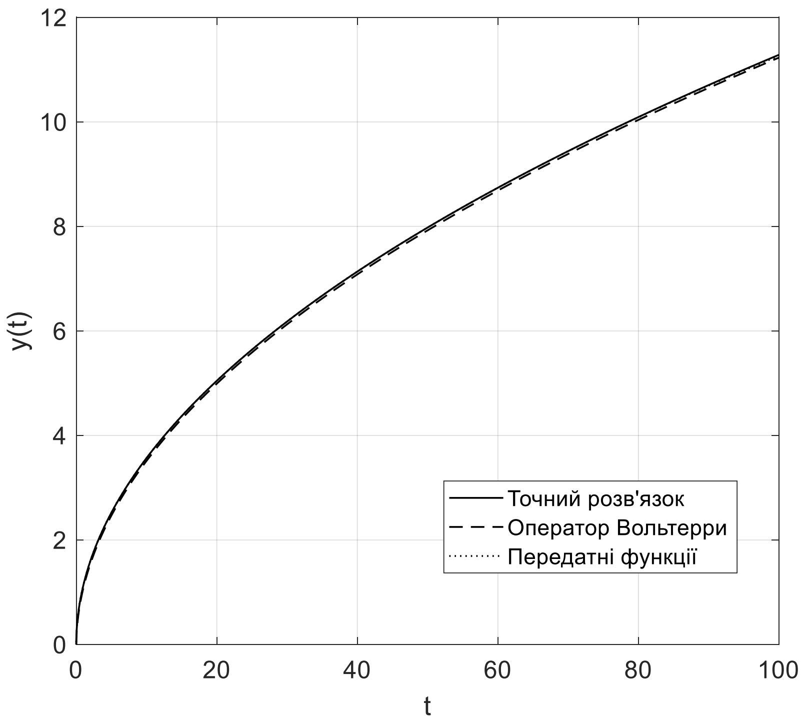


Рис. 4.1. Графіки перехідних характеристик напівінтегральної ланки

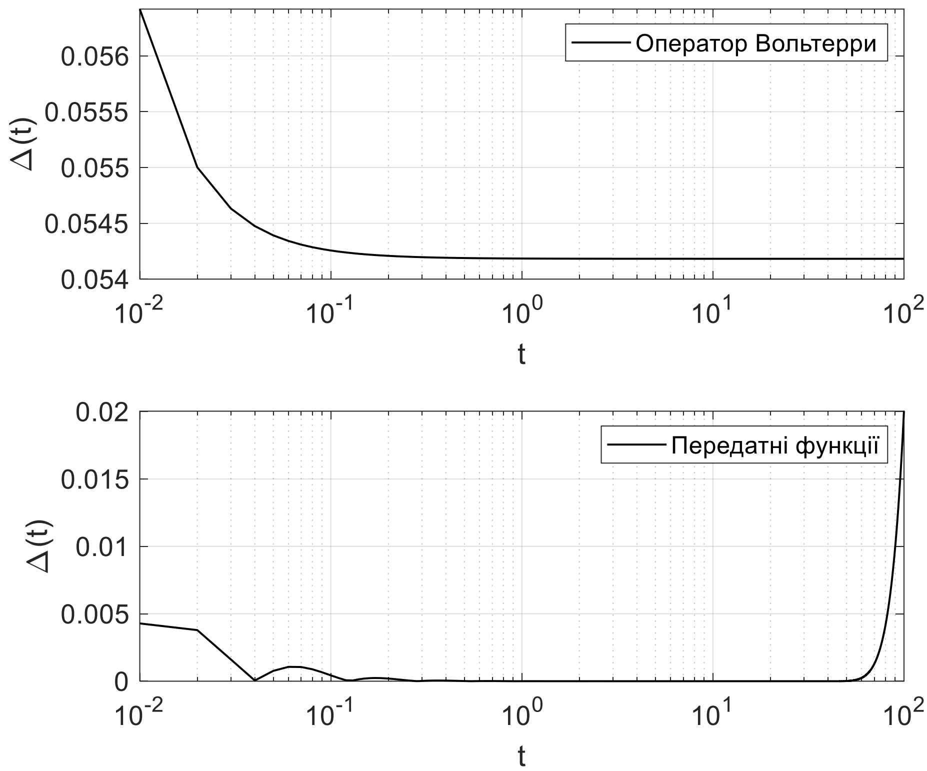


Рис. 4.2. Графіки абсолютних похибок числової реалізації перехідної характеристики напівінтегральної ланки

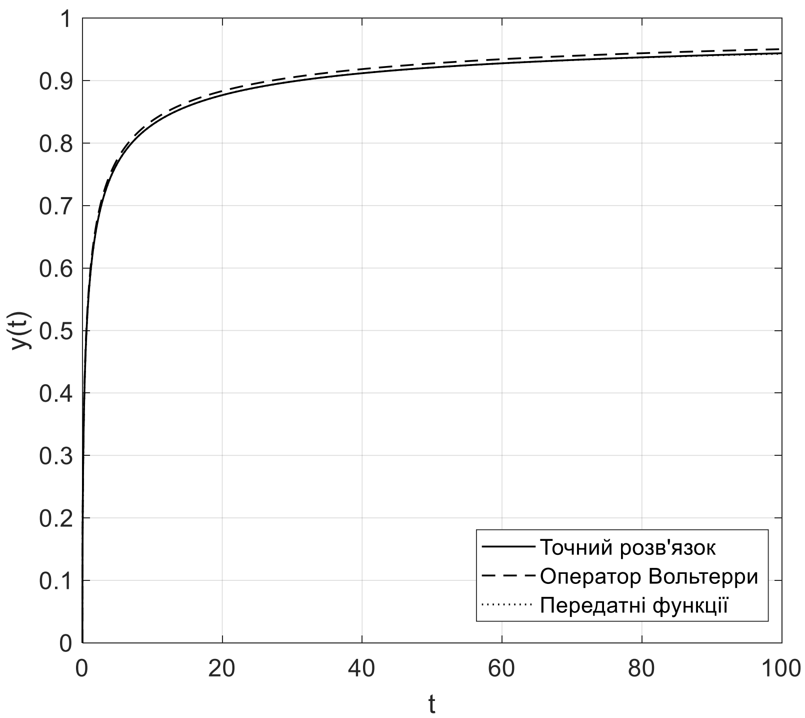


Рис. 4.3. Графіки перехідних характеристик напівінерційної ланки

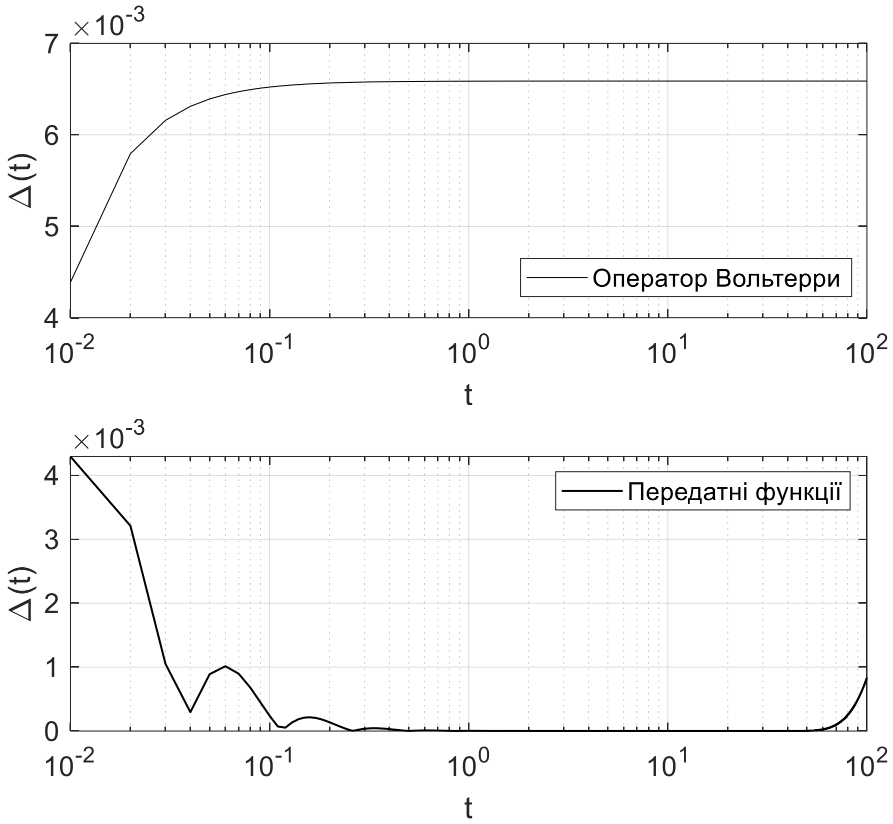


Рис. 4.4. Графіки абсолютних похибок числової реалізації перехідної характеристики напівінерційної ланки

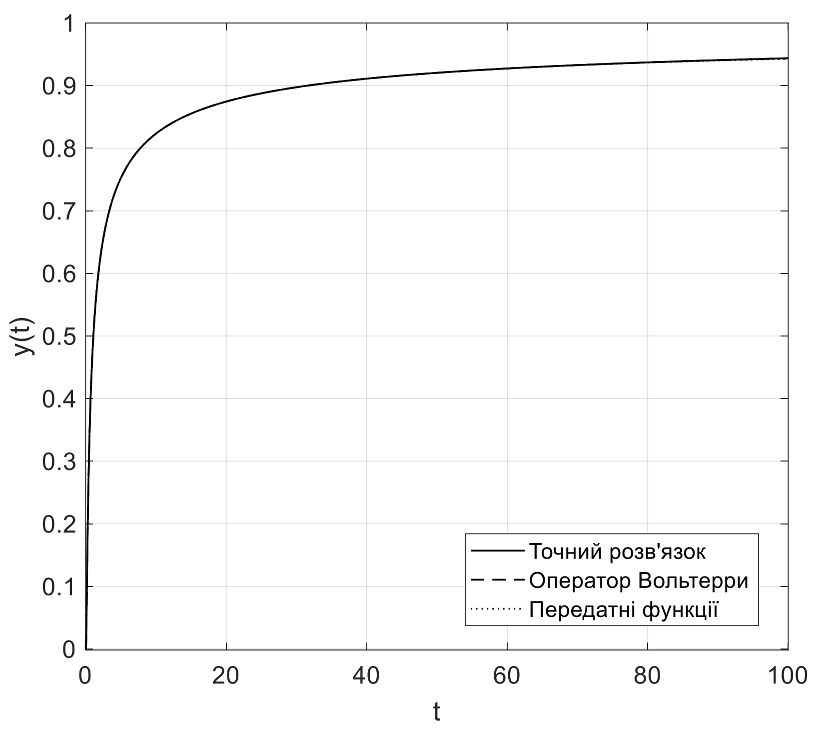


Рис. 4.5. Графіки перехідних характеристик ланки напівзапізнення

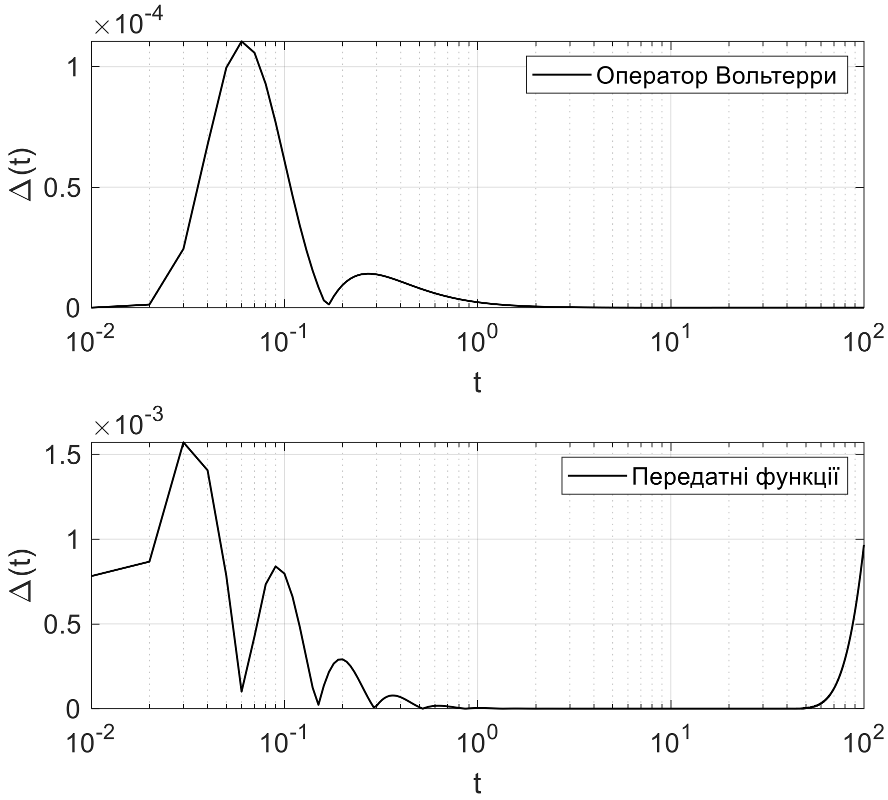


Рис. 4.6. Графіки абсолютної похибки числової реалізації перехідної характеристики ланки напівзапізнення

Регуляризація поліноміальних операторів Вольтерри.

Метод внутрішньої регуляризації пропонується застосовувати для регуляризації сингулярних поліноміальних операторів. Застосування даного підходу розглянемо на прикладі регуляризації і наступної числової реалізації неоднорідних поліноміальних інтегральних операторів другого степеня

$$\begin{gathered} y(t)=\int_0^t 0.5\sqrt{\frac{1}{\pi s^3}}e^{-\frac{1}{4s}}x(t-s)\,ds+ \\ +\int_0^t\int_0^t \frac{0.25}{\pi}\sqrt{\frac{1}{s_1^3 s_2^3}}e^{-\frac{s_1+s_2}{4s_1s_2}}x(t-s_1)\,x(t-s_2)\,ds_1ds_2 \end{gathered} \tag{4.3}$$

та третього степеня

$$y(t)=\int_0^t 0.5\sqrt{\frac{1}{\pi s^3}}e^{-\frac{1}{4s}}x(t-s)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^t \frac{0.25}{\pi}\sqrt{\frac{1}{s_1^3 s_2^3}}e^{-\frac{s_1+s_2}{4s_1s_2}}x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2+ \qquad (4.4)$$
$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t \frac{0.125}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{s_1^3 s_2^3 s_3^3}}e^{-\frac{s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3}{4s_1s_2}}x(t-s_1)x(t-s_2)x(t-s_3)ds_1ds_2ds_3.$$

Поліноміальні оператори (4.3) та (4.4) описують перехідний процес у нелінійних динамічних системах із розподіленими параметрами. Базовою в даних моделях є ланка напівзапізнення. Регуляризацію лінійної частини даних операторів наведено в таблиці 4.1. Ввівши регуляризаційний параметр в (4.3) отримано:

$$y(t)=\int_0^t 0.5\sqrt{\frac{1}{\beta_{1,1}+\pi s^3}}e^{-\frac{1}{\beta_{1,2}+4s}}x(t-s)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^t \frac{0.25}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\beta_{2,1}+s_1^3 s_2^3}}e^{-\frac{s_1+s_2}{\beta_{2,2}+4s_1s_2}}x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2. \qquad (4.5)$$

Виконавши регуляризацію (4.4) матимемо

$$y(t)=\int_0^t 0.5\sqrt{\frac{1}{\beta_{1,1}+\pi s^3}}e^{-\frac{1}{\beta_{1,2}+4s}}x(t-s)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^t \frac{0.25}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\beta_{2,1}+s_1^3 s_2^3}}e^{-\frac{s_1+s_2}{\beta_{2,2}+4s_1s_2}}x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2+ \qquad (4.6)$$
$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t \frac{0.125}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{\beta_{3,1}+s_1^3 s_2^3 s_3^3}}e^{-\frac{s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3}{\beta_{3,2}+4s_1s_2s_3}}x(t-s_1)x(t-s_2)x(t-s_3)ds_1ds_2ds_3.$$

В (4.5) і (4.6) $\beta_{1,1}$, $\beta_{1,2}$, $\beta_{2,1}$, $\beta_{2,2}$, $\beta_{3,1}$, $\beta_{3,2}$ – регуляризаційні внітрішні параметри відповідно для інтегрального оператора першого, другого та третього степеня. Визначення значень цих параметрів здійснюється на основі способу модельних експериментів.

Числову реалізацію таких моделей найкраще здійснювати на основі методу квадратурних та кубатурних формул, детальний огляд якого буде здійснено в наступному підрозділі. Ефективність запропонованого методу внутрішньої регуляризації оцінено на основі методу обчислювальних експериментів. Окремо розглянуто однорідні оператори другого степеня

$$y(t)=\int_0^t\int_0^t \frac{0.25}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\beta_{2,1}+s_1^3 s_2^3}}e^{-\frac{s_1+s_2}{\beta_{2,2}+4s_1s_2}}x(t-s_1)x(t-s_2)\,ds_1ds_2 \tag{4.7}$$

та третього степеня

$$y(t)=\int_0^t\int_0^t\int_0^t \frac{0.125}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{\beta_{3,1}+s_1^3 s_2^3 s_3^3}}e^{-\frac{s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3}{\beta_{3,2}+4s_1s_2s_3}}x(t-s_1)x(t-s_2)x(t-s_3)\,ds_1ds_2ds_3. \tag{4.8}$$

На рис. 4.7 зображено числовий розв’язок реакції системи яка описується (4.7) на одиничний вхідний вплив. Похибка числової реалізації представлена у вигляді графіка на рис. 4.8. Графік перехідної характеристики для (4.8) представлений на рис. 4.9, а на рис. 4.10 зображено графік її абсолютної похибки.

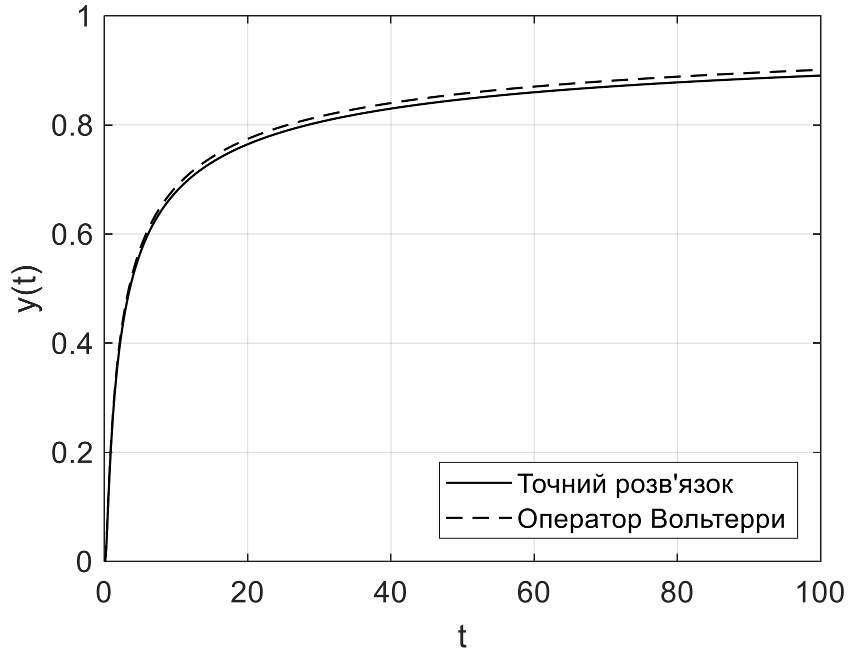


Рис. 4.7. Графіки перехідної характеристики для поліноміального інтегрального оператора другого степеня (4.7)

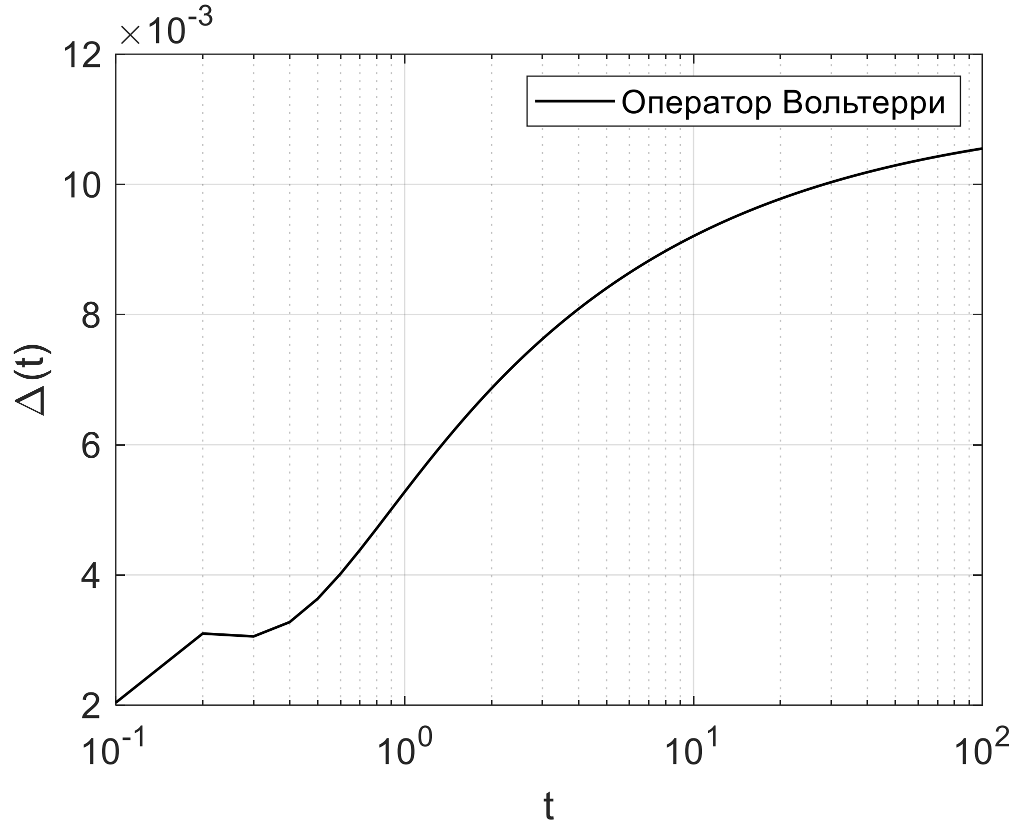


Рис. 4.8. Графік абсолютної похибки числової реалізації перехідної характеристики для поліноміального інтегрального оператора другого степеня (4.7)

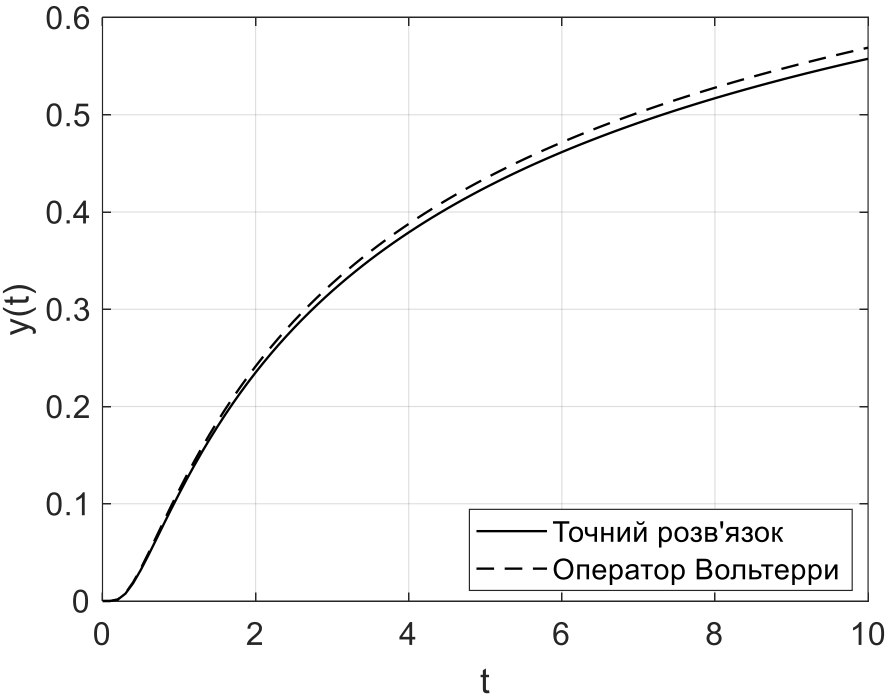


Рис. 4.9. Графік перехідної характеристики для поліноміального інтегрального оператора третього степеня (4.8)

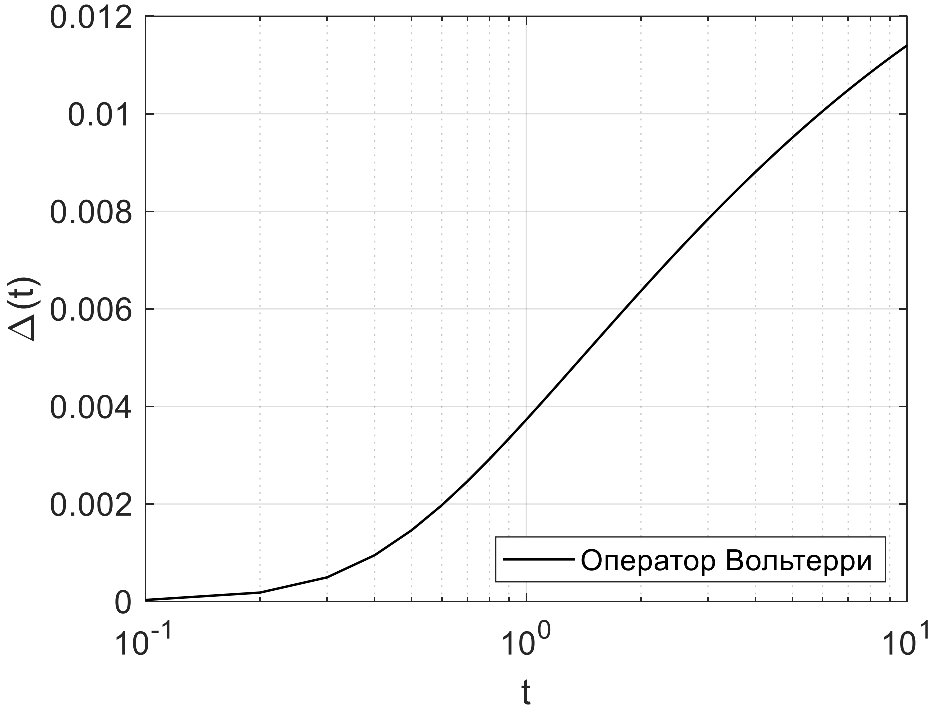


Рис. 4.10. Графік абсолютної похибки числової реалізації перехідної характеристики для поліноміального інтегрального оператора третього степеня (4.8)

4.2. Векторно-матричний підхід до числової реалізації поліноміальних інтегральних операторів Вольтерри

Метод квадратур. Розглянемо можливість застосування квадратурних формул прямокутників, трапецій та Сімпсона для числової реалізації неоднорідного інтегрального поліноміального оператора Вольтерри третього степеня

$$
\begin{gathered}
y(t)=\int_0^t K_1(s)x(t-s)ds+ \\
+\int_0^t\int_0^t K_2(s_1,s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2+ \qquad (4.9)\\
+\int_0^t\int_0^t\int_0^t K_3(s_1,s_2,s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)x(t-s_3)ds_1ds_2ds_3.
\end{gathered}
$$

Ввівши рівномірне розбиття та замінивши інтеграли в (4.9) квадратурними сумами отримуємо [47, 109, 248]:

$$y(t_i)=\sum_{j=1}^{i}A_{1,j}K_1(t_j)x(t_i-t_j)+$$
$$+\sum_{j=1}^{i}\sum_{g=1}^{i}A_{2,jg}K_2(t_j,t_g)x(t_i-t_j)x(t_i-t_g)+$$
$$+\sum_{j=1}^{i}\sum_{g=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}A_{3,jgl}K_3(t_j,t_g,t_l)x(t_i-t_j)x(t_i-t_g)x(t_i-t_l),i=\overline{1,n}.$$

Така постановка породжує проблему числової реалізації через складність опису багатовимірних апроксимаційних представлень інтегральних операторів та значну кількість обчислювальних дій. Пропонуємо застосовувати векторно-матричний підхід із зведенням всіх операцій до поелементного множення [248].

Розглянемо окремо однорідні оператори першого, другого та третього степеня. Коефіцієнти A_1, A_2, A_3 зобразимо у векторно-матричному вигляді. У випадку одновимірного оператора коефіцієнти A_1 визначаються вектором, який має різний вигляд, в залежності від методу, що використовується:

– метод прямокутників:

$$A_1^{\text{п}}=h\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0\end{pmatrix};$$

– метод трапецій:

$$A_1^{\text{т}}=h\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix};$$

– метод Сімпсона:

$$A_1^{\text{c}}=h\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \dots & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Для апроксимації двовимірного оператора отримано матриці, які визначають коефіцієнти A_2:

– метод прямокутників:

$$A_2^{\text{п}} = h^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

– метод трапецій:

$$A_2^{\text{т}} = h^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix};$$

– метод Сімпсона:

$$A_2^{\text{с}} = h^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \dots & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{16}{9} & \frac{8}{9} & \dots & \frac{8}{9} & \frac{16}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \dots & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \dots & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{16}{9} & \frac{8}{9} & \dots & \frac{8}{9} & \frac{16}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \dots & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Для заміни потрійного інтеграла з (4.9) отримано тривимірну структуру, яка містить коефіцієнти квадратурних формул. Її можна зобразити у вигляді кубу (рис. 4.11). Дану структуру можна задати наступним чином

$$A_3 = \left\{ A_3^{\text{м},1};\quad A_3^{\text{м},2};\quad A_3^{\text{м},3};\quad \dots\quad A_3^{\text{м},n-2};\quad A_3^{\text{м},n-1};\quad A_3^{\text{м},n} \right\}, \tag{4.10}$$

де $A_3^{\text{м},1}$; $A_3^{\text{м},2}$; $A_3^{\text{м},3}$; … $A_3^{\text{м},n-2}$; $A_3^{\text{м},n-1}$; $A_3^{\text{м},n}$ – матриці коефіцієнтів, які визначаються базовими методами квадратур та застосовуються до кожного виміру $A_{3,j}$, $A_{3,g}$, $A_{3,l}$.

У використанні методу прямокутників отримано такі матриці:

$$A_3^{\text{п},1} = A_3^{\text{п},2} = A_3^{\text{п},3} = \dots = A_3^{\text{п},n-2} = A_3^{\text{п},n-1} = h^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3^{\text{п},n} = h^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

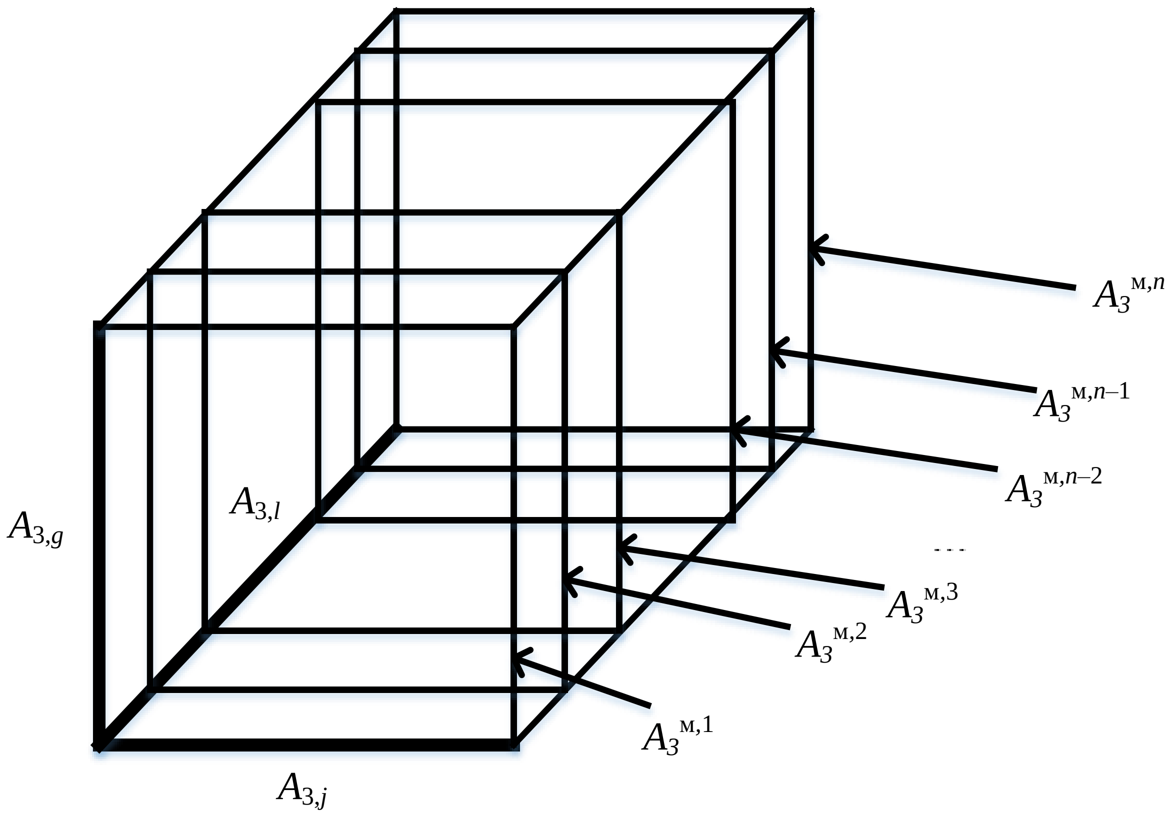


Рис. 4.11. Графічне зображення структури (4.10)

Застосування методу трапецій призводить до матриць:

$$A_3^{\text{т},1} = A_3^{\text{т},n} = h^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix};$$

$$A_3^{\text{т},2} = A_3^{\text{т},3} = \dots = A_3^{\text{т},n-2} = A_3^{\text{т},n-1} = h^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Застосувавши метод Сімпсона, маємо:

$$A_3^{\mathrm{c},1} = A_3^{\mathrm{c},2m+1} = h^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & \cdots & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{16}{27} & \frac{8}{27} & \cdots & \frac{8}{27} & \frac{16}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{2}{27} & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \cdots & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} & \frac{2}{27} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{2}{27} & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \cdots & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} & \frac{2}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{16}{27} & \frac{8}{27} & \cdots & \frac{8}{27} & \frac{16}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & \cdots & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix};$$

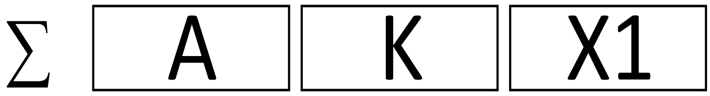
$$A_3^{\mathrm{c},2} = A_3^{\mathrm{c},4} = \ldots = A_3^{\mathrm{c},2\mathrm{m}} = h^3 \begin{pmatrix} \frac{4}{27} & \frac{16}{27} & \frac{8}{27} & \cdots & \frac{8}{27} & \frac{16}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{16}{27} & \frac{64}{27} & \frac{32}{27} & \cdots & \frac{32}{27} & \frac{64}{27} & \frac{16}{27} \\ \frac{8}{27} & \frac{32}{27} & \frac{16}{27} & \cdots & \frac{16}{27} & \frac{32}{27} & \frac{8}{27} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{8}{27} & \frac{32}{27} & \frac{16}{27} & \cdots & \frac{16}{27} & \frac{32}{27} & \frac{8}{27} \\ \frac{16}{27} & \frac{64}{27} & \frac{32}{27} & \cdots & \frac{32}{27} & \frac{64}{27} & \frac{16}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{16}{27} & \frac{8}{27} & \cdots & \frac{8}{27} & \frac{16}{27} & \frac{4}{27} \end{pmatrix};$$

$$A_3^{\text{c},3} = A_3^{\text{c},5} = \ldots = A_3^{\text{c},2m-1} = h^3 \begin{pmatrix} \frac{2}{27} & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \cdots & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} & \frac{2}{27} \\ \frac{8}{27} & \frac{32}{27} & \frac{16}{27} & \cdots & \frac{16}{27} & \frac{32}{27} & \frac{8}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{16}{27} & \frac{8}{27} & \cdots & \frac{8}{27} & \frac{16}{27} & \frac{4}{27} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{4}{27} & \frac{16}{27} & \frac{8}{27} & \cdots & \frac{8}{27} & \frac{16}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{8}{27} & \frac{32}{27} & \frac{16}{27} & \cdots & \frac{16}{27} & \frac{32}{27} & \frac{8}{27} \\ \frac{2}{27} & \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \cdots & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} & \frac{2}{27} \end{pmatrix}.$$

На рис. 4.12 подано структурне представлення вихідних даних вказаних операцій для різних однорідних операторів та їх програмна аналогія в середовищі Matlab. Для реалізації оператора першого степеня: `A` – вектор, який визначає коефіцієнти квадратурної формули, відповідно до викладеного вище; `K` – вектор значень ядра відповідно до дискретизації часової змінної; `X1` – вектор значень вхідного впливу. Програмна аналогія такого представлення має вигляд: `sum(A.*K(1:j).*X1).` Для реалізації оператора другого степеня: `A` та `K` – матриці, `X1` – матриця яка складається із однакових рядків вектора *x*; `X2` – матриця яка складається із однакових стовпців вектора *x*. Програмна реалізація для обчислення оператора має вигляд `sum(sum(A.*K(1:j,1:j).*X1.*X2))`. Для реалізації оператора третього степеня обчислення також зводяться до поелементних операцій, але вже тривимірних структур.

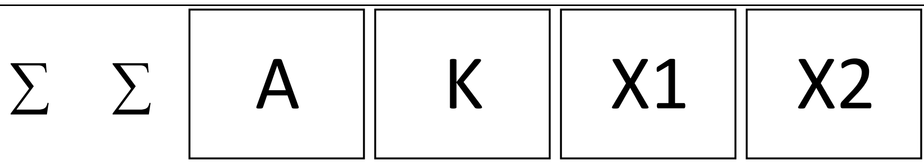
Такий підхід значно спрощує програмну реалізацію багатовимірних операторів, оскільки дозволяє легке масштабування до багатовимірного випадку, як це показано на рис. 4.12 [248].

Оператор першого степеня



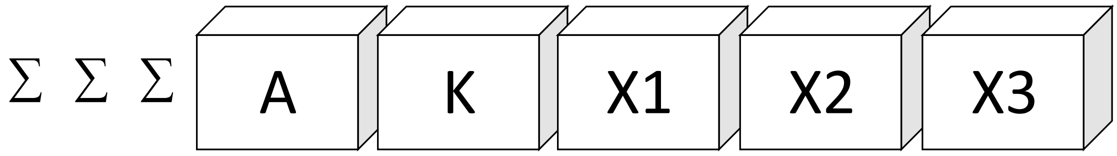

```
sum(A.*K(1:j).*X1);
```

Оператор другого степеня




```
sum(sum(A.*K(1:j,1:j).*X1.*X2));
```

Оператор третього степеня




```
sum(sum(sum(A.*K(1:j,1:j,1:j).*X1.*X2.*X3)));
```

Оператор n-го степеня

```
sum(...(sum(A.*K(1:j,...,1:j).*X1.*....*Xn)));
```

Рис. 4.12. Структурне представлення векторно-матричного підходу та його програмна аналогія

Модельні експерименти. Оцінку запропонованих апроксимацій інтегральних представлень досліджено на модельних прикладах. Розглянемо модель у вигляді:

$$y(t)=\int_0^t\int_0^t \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(s_1+s_2)}\sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}s_1\right)\sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}s_2\right)\times \\ \times x\left(t-s_1\right)x\left(t-s_2\right)ds_1ds_2. \tag{4.11}$$

На рис. 4.13 зображено графіки перехідної характеристики моделі (4.11) отриманих шляхом застосування методів прямокутників, трапецій та Сімпсона, а також точної перехідної характеристики. На рис. 4.14 зображено графік похибки обчислень.

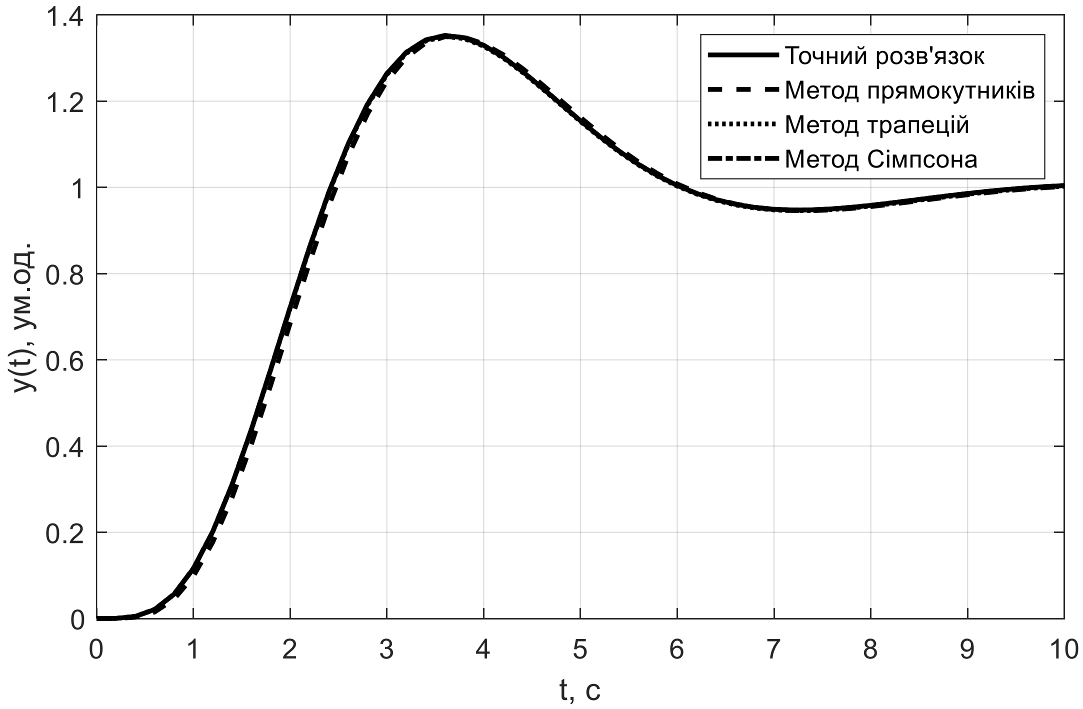


Рис. 4.13. Графіки перехідної характеристики для (4.11)

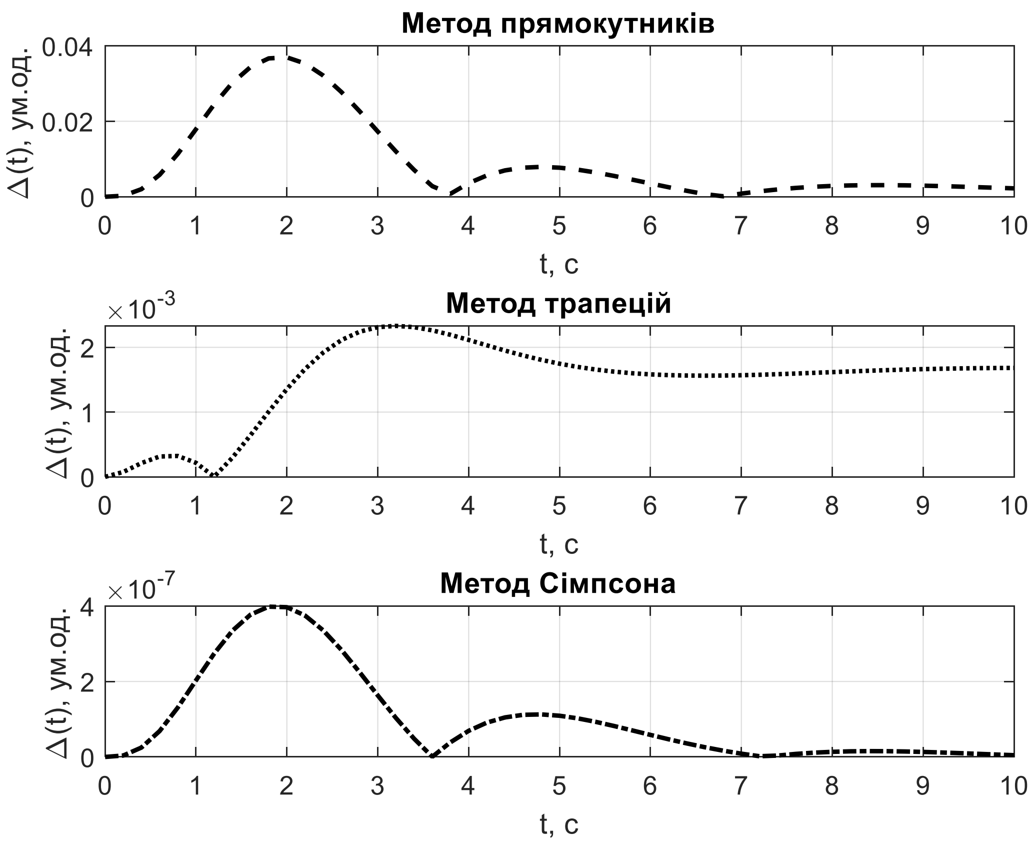


Рис. 4.14. Графіки абсолютних похибок обчисленої перехідної характеристики для (4.11)

Для аналізу числової реалізації поліноміального однорідного оператора Вольтерри третього степеня розглянемо модель

$$y(t)=\int_0^t\int_0^t\int_0^t \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{1}{2}(s_1+s_2+s_3)}\sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}s_1\right)\sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}s_2\right)\sin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}s_3\right)\times \\ \times x(t-s_1)x(t-s_2)x(t-s_3)ds_1ds_2ds_3. \tag{4.12}$$

Графіки перехідної характеристики отриманої за допомогою розглянутих методів та її точного значення представлено на рис. 4.15, графіки похибок обчислень – на рис. 4.16.

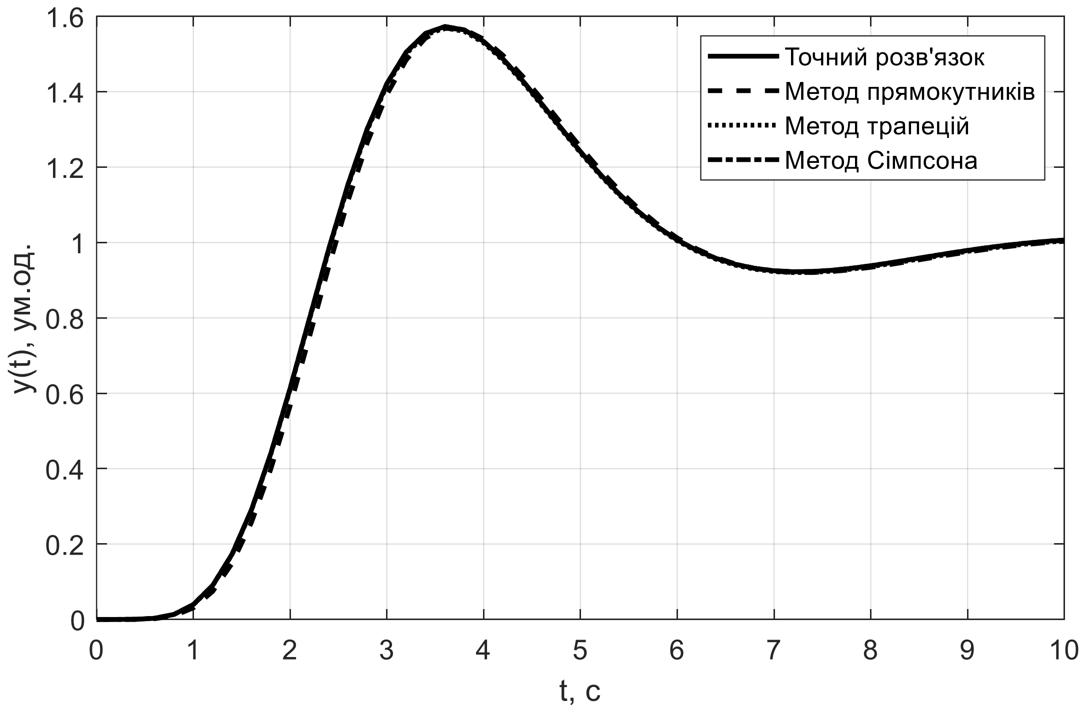


Рис. 4.15. Графіки перехідної характеристики для (4.12)

Отримані результати обчислювальних експериментів показали ефективність запропонованих методів, причому, серед розглянутих методів найточнішим є метод Сімпсона, але для застосування даного методу необхідно більше обчислень, які пов’язані із додатковим розбиттям для знаходження проміжних значень в точках інтерполяції. Оптимальним у відношенні «точність – складність реалізації» є метод трапецій, який дозволяє отримувати розв’язки із похибкою менше 1%, що є достатнім для інженерних розрахунків.

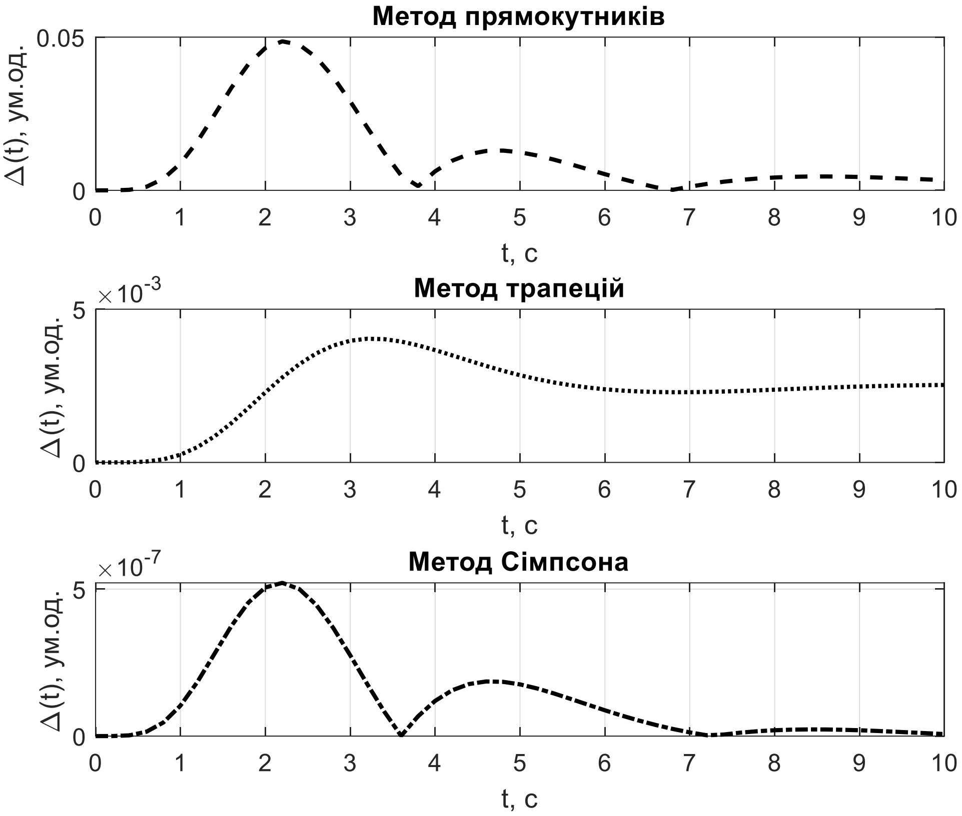


Рис. 4.16. Графіки абсолютних похибок обчисленої перехідної характеристики для (4.12)

Варто відмітити, що точність реалізації інтегральних моделей залежить лише від вибраного методу, кроку моделювання, виду ядра, і не залежить від розмірності оператора. Тому вибір кращого методу повинен ґрунтуватися, перш за все, на аналізі ядер інтегрального неоднорідного поліноміального оператора Вольтерри.

В залежності від виду ядра можна будувати обчислювальні алгоритми на основі використання різних квадратурних методів, які застосовуються окремо до кожного виміру. Причому можуть застосовуватись не тільки розглянуті методи (прямокутників, трапецій, Сімпсона), але й методи побудовані на основі комбінації квадратурних формул Ньютона-Котеса вищих порядків. Такий підхід дозволить отримати різні кубатурні формули та розширить множину алгоритмів апроксимації інтегральних моделей скінченними сумами і дозволить підібрати кращий метод в залежності від поставленої вихідної задачі.

Запропонований підхід дає змогу здійснювати розпаралелення обчислювальних алгоритмів, що значно пришвидшує числову реалізацію інтегральних операторів. В таблиці 4.2 подано порядок складності числової реалізації поліноміальних інтегральних операторів в залежності від кількісті можливих паралельних потоків.

Отже, представлення квадратурних та кубатурних формул у векторно-матричному вигляді дозволяє будувати ефективні алгоритми та програмні засоби для числової реалізації інтегральних моделей. Таке представлення надає можливості використовувати переваги матрично-орієнтованих пакетів прикладних програм (Matlab, Octave, Scilab), особливістю яких є висока швидкість виконання матричних операцій.

Таблиця 4.2

Складність реалізації поліноміальних інтегральних операторів

	Оператор першого степеня	Оператор другого степеня	Оператор третього степеня
Звичайний підхід	$O(n)$	$O^2(n)$	$O^3(n)$
Векторно-матричний	$\frac{O(n)}{kp}$	$\frac{O^2(n)}{kp}$	$\frac{O^3(n)}{kp}$
n – кількість точок розбиття, kp – кількість паралельних потоків			

4.3. Метод розділення ядер для ефективної числової реалізації поліноміальних інтегральних операторів

Одним із основних недоліків використання операторів Вольтерри у дослідженні динамічних моделей є накопичення кількості обчислень. Виходом із цієї ситуації, якщо це можливо, є розділення ядер. Даний підхід розглянемо на прикладі розділення ядер поліноміального інтегрального оператора третього степеня

$$y(t)=\int_0^t K_1(t,s)x(s)ds+\int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2+ \\ +\int_0^t\int_0^t\int_0^t K_3(t,s_1,s_2,s_2)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3. \tag{4.13}$$

Пропонується подавати ядра оператора (4.13) у виродженій формі

$$K_1(t,s)=\sum_{i=1}^{m_1}\tilde{\alpha}_i'(t)\tilde{\beta}_i'(s),$$

$$K_2(t,s_1,s_2)=\sum_{i=1}^{m_2}\tilde{\alpha}_i''(t)\tilde{\beta}_i''(s_1,s_2),$$

$$K_3(t,s_1,s_2,s_3)=\sum_{i=1}^{m_3}\tilde{\alpha}_i'''(t)\tilde{\beta}_i'''(s_1,s_2,s_3),$$

після чого отримується ефективне в обчислювальному сенсі представлення поліноміального інтегрального оператора

$$y(t)=\sum_{i=1}^{m_1}\tilde{\alpha}_i'(t)\int_0^t\tilde{\beta}_i'(s)x(s)ds+\sum_{i=1}^{m_2}\tilde{\alpha}_i''(t)\int_0^t\int_0^t\tilde{\beta}_i''(s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2+ \\ +\sum_{i=1}^{m_3}\tilde{\alpha}_i'''(t)\int_0^t\int_0^t\int_0^t\tilde{\beta}_i'''(s_1,s_2,s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3.$$

Розглянемо приклад зведення поліноміального інтегрального оператора третього степеня

$$y(t)=\int_0^t e^{-(t-s)}x(s)ds+\int_0^t\int_0^t e^{-(t-s_1)}e^{-(t-s_2)}x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2+ \\ +\int_0^t\int_0^t\int_0^t e^{-(t-s_1)}e^{-(t-s_2)}e^{-(t-s_3)}x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3 \tag{4.14}$$

до виродженого вигляду. Застосувавши елементарні математичні перетворення до (4.14) матимемо

$$y(t)=\int_0^t e^{-(t-s)}x(s)\,ds+\int_0^t\int_0^t e^{-(2t-s_1-s_2)}x(s_1)x(s_2)\,ds_1ds_2+$$
$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t e^{-(3t-s_1-s_2-s_3)}x(s_1)x(s_2)x(s_3)\,ds_1ds_2ds_3=$$
$$=\int_0^t e^{-t}e^{s}x(s)\,ds+\int_0^t\int_0^t e^{-2t}e^{s_1+s_2}x(s_1)x(s_2)\,ds_1ds_2+ \tag{4.15}$$
$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t e^{-3t}e^{s_1+s_2+s_3}x(s_1)x(s_2)x(s_3)\,ds_1ds_2ds_3.$$

Здійснивши винесення змінної t з-під знаків інтегралів (4.15) отримаємо представлення поліноміального інтегрального оператора Вольтерри третього степеня у виродженому вигляді:

$$y(t)=e^{-t}\int_0^t e^{s}x(s)\,ds+e^{-2t}\int_0^t\int_0^t e^{s_1+s_2}x(s_1)x(s_2)\,ds_1ds_2+$$
$$+e^{-3t}\int_0^t\int_0^t\int_0^t e^{s_1+s_2+s_3}x(s_1)x(s_2)x(s_3)\,ds_1ds_2ds_3.$$

Якщо таке представлення ядер здійснити прямим переходом не вдається, пропонується застосовувати їх апроксимацію. Розглянемо поліноміальний оператор (4.13). Здійснимо апроксимацію $K_1(t,s)$, $K_2(t,s_1,s_2)$, $K_3(t,s_1,s_2,s_3)$ на основі алгоритмів розглянутих вище (розділ 2). В результаті отримуємо їх представлення у виродженому вигляді:

$$K_1(t,s)=\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i'(t)\beta_i'(s), \tag{4.16}$$

$$K_2(t,s_1,s_2)=\sum_{i=1}^{m_2}\alpha_i''(t)\beta_i''(s_1,s_2), \tag{4.17}$$

$$K_3(t,s_1,s_2,s_3)=\sum_{i=1}^{m_3}\alpha_i'''(t)\beta_i'''(s_1,s_2,s_3). \tag{4.18}$$

Здійснивши підстановку (4.16), (4.17), (4.18) в (4.9) отримано:

$$y(t)=\int_0^t\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i'(t)\beta_i'(s)x(s)ds+\int_0^t\int_0^t\sum_{i=1}^{m_2}\alpha_i''(t)\beta_i''(s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2+$$
$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t\sum_{i=1}^{m_3}\alpha_i'''(t)\beta_i'''(s_1,s_2,s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3.$$

Шляхом винесення із-під знаку інтеграла незалежних змінних оператор перетворено до вигляду:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i'(t)\int_0^t\beta_i'(s)x(s)ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{m_2}\alpha_i''(t)\int_0^t\int_0^t\beta_i''(s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2+$$
$$+\sum_{i=1}^{m_3}\alpha_i'''(t)\int_0^t\int_0^t\int_0^t\beta_i'''(s_1,s_2,s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3.$$

Ввівши розбиття за часовою змінною та застосувавши метод квадратур отримано:

$$y(t_j)=\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i'(t_j)\sum_{g=1}^{j}A_g'\beta_i'(t_g)x(t_g)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m_2}\alpha_i''(t_j)\sum_{g=1}^{j}\sum_{k=1}^{j}A_{gk}''\beta_i''(t_g,t_k)x(t_g)x(t_k)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m_3}\alpha_i'''(t_j)\sum_{g=1}^{j}\sum_{k=1}^{j}\sum_{l=1}^{j}A_{gkl}'''\beta_i'''(t_g,t_k,t_l)x(t_g)x(t_k)x(t_l).$$

Такий підхід дозволяє для числової реалізації багатовимірних моделей у вигляді поліноміального оператора Вольтерри скоротити кількість обчислень на порядок. Оцінка спрощення подана у таблиці 4.3.

Таблиця 4.3

Кількість ітерацій для реалізації поліноміальних інтегральних операторів

	Звичайне ядро	Розділене ядро
Оператор першого степеня	$\frac{n(n+1)}{2}$	n
Оператор другого степеня	$\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$	$n(n+1)$
Оператор третього степеня	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\frac{n(2n+1)(n+1)}{2}$
n – кількість точок розбиття		

4.4. Числова реалізація динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду

Застосування методів розглянутих вище, зокрема, методу теплових потенціалів, методу дробових похідних, методу побудови макромоделей, інтегрального методу диференціювання, породжує необхідність розробки методів розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду. Також дані рівняння з’являються під час розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду, коли вихідне рівняння зводиться до рівняння другого роду. А також, варто відмітити, що для розв’язування задач керування часто постановка задачі формується у вигляді рівнянь Вольтерри другого роду [48].

Класичні методи розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду розглянуто в першому розділі. Зазвичай застосовуються методи побудови резольвенти рівняння, операційний метод, метод квадратур та ін. Розглянемо можливості застосування теорії ланцюгових дробів для вдосконалення наявних методів, а також особливості застосування квадратурних методів для розв’язування систем інтегральних рівнянь.

Рівняння Вольтерри другого роду в загальному випадку має наступний вигляд:

$$y(t)+\lambda\int_0^t K(t,s)y(s)ds = f(t), \tag{4.19}$$

де $K(t,s)$ – ядро, $y(t)$ – шукана функція, $f(t)$ – задана функція, λ – параметр.

Розв’язування рівнянь за допомогою резольвенти ланцюгово-дробовим методом [88, 93]. Розв’язок рівняння (4.19), може бути формально записаний у вигляді (1.42)-(1.43) [47]. Отже, розглядається ряд

$$y(t) = f(t) + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v \int_a^t K_v(t,s) f(s) ds\,. \tag{4.20}$$

Для збільшення швидкості збіжності ряду доцільно використовувати теорію ланцюгових дробів [17, 187]. Візьмемо степеневий ряд

$$L = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$$

який відповідає

$$y(t) = y_0(t) + \lambda y_1(t) + \lambda^2 y_2(t) + \ldots + \lambda^n y_n(t) + \ldots,$$

для $c_i = y_i$, $z = \lambda$.

Застосувавши алгоритм перетворення ряду в ланцюговий дріб, який розглянуто в розділі 3 (алгоритм С-дробів), побудовано представлення (4.20) у вигляді дробово-раціональної функціональної залежності.

Обчислювальні експерименти. Ефективність методу досліджувалась за допомогою обчислювальних експериментів, зокрема, для розв’язування наступного інтегрального рівняння [88]

$$y(t) - \int_0^t (t-s) y(s) ds = f(t),$$

для якого точний загальний розв’язок має вигляд [136]:

$$y(t) = f(t) - \int_0^t \sin(t-s) f(s) ds.$$

Для $f(t) = t$ точний розв'язок має вигляд:

$$y(t) = \sin(t).$$

В залежності від кількості ітераційних ядер отримано різні наближення, зокрема, для $n = 5$ розв'язок, знайдений ітераційним методом, буде мати вигляд:

$$y_i(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{5040}t^7 + \frac{1}{362880}t^9 - \frac{1}{39916800}t^{11}.$$

У випадку використання ланцюгово-дробового методу отримано розв'язок:

$$y_{лд}(t) = \frac{\frac{12671}{4363920}t^5 - \frac{2363}{18183}t^3 + t}{\frac{121}{16662240}t^6 + \frac{601}{872784}t^4 + \frac{445}{12122}t^2 + 1}.$$

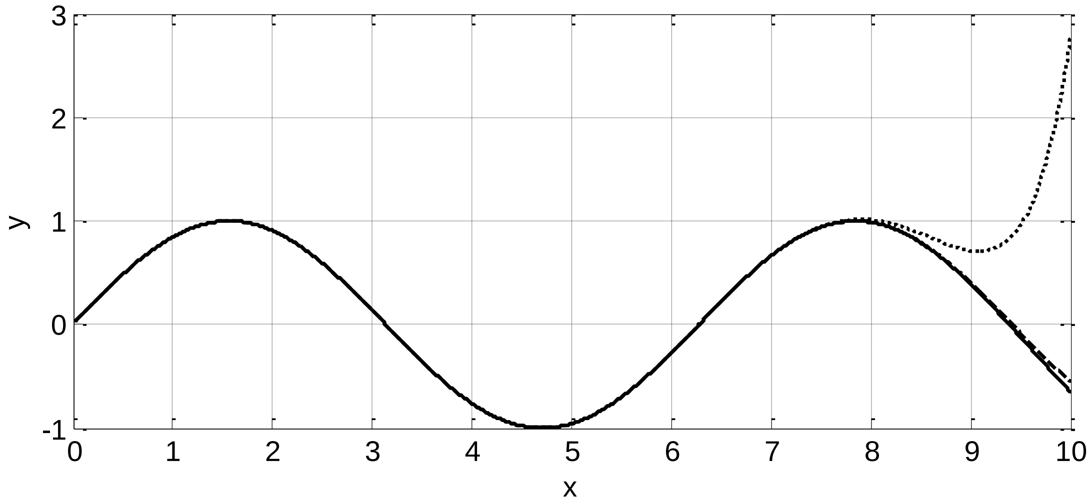
Результати обчислювальних експериментів подано на рис. 4.17, де зображено графіки точного розв'язку рівняння та розв'язки, отримані на основі ітераційного і ланцюгово-дробового методів. Інтегральні похибки розв'язків подані в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4

Інтегральні похибки моделювання

Кількість ітерацій	Метод ітерацій	Ланцюгово-дробовий метод
5	792.2477	16.6111
10	1.3948	0.0522
20	$3.5976 \cdot 10^{-11}$	$8.0103 \cdot 10^{-13}$

Отримані результати показують, що ланцюгово-дробовий метод розв'язування інтегральних рівнянь дозволяє підвищити збіжність ітераційного методу знаходження резольвенти інтегральних рівнянь.



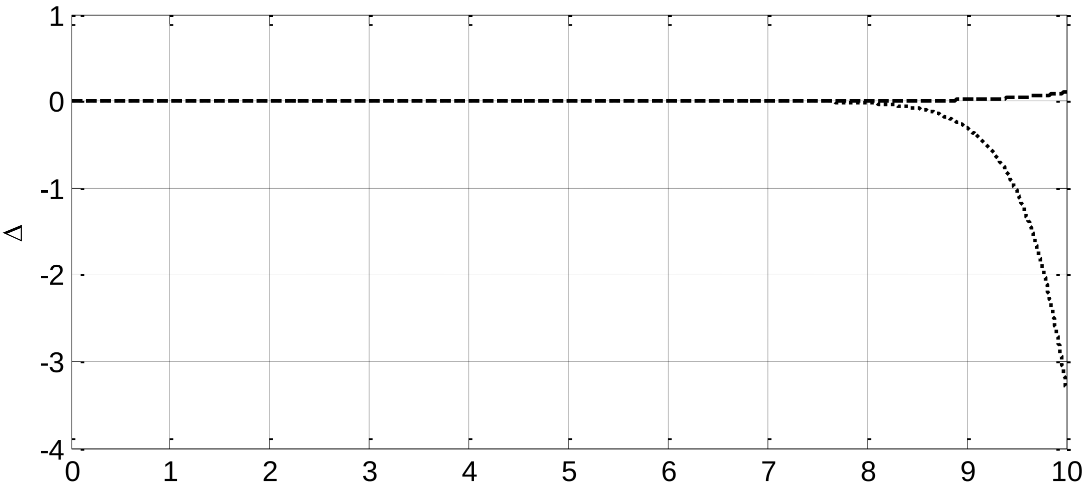


Рис. 4.17. Графіки розв'язків для $n=10$: зверху – розв'язок інтегрального рівняння (——— – точний, – – – – ланцюгово-дробовим методом, ······ – ітераційним методом); знизу – похибки розв'язку (– – – – ланцюгово-дробовим методом; ······ – ітераційним методом)

Метод розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду на основі ланцюгово-дробової дробової апроксимації. Розглянемо операційний метод, який наведено в розділі 1. У використанні даного методу труднощі виникають на двох етапах: під час отримання зображень для заданих функцій $k(t)$ і $f(t)$ (пряме перетворення) і знаходження оригіналу вихідного розв'язку за його зображенням.

Прикладом ядра, яке допускає точний перехід до зображення і наступні визначення резольвенти, є ядро виду

$$k(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n ,$$

зображення якого має вигляд

$$K(p) = \frac{a_0}{p} + a_1 \frac{1}{p^2} + \ldots + a_n \frac{n!}{p^{n+1}} .$$

Зображення резольвенти такого ядра

$$R_L(p) = \frac{K(p)}{1 - K(p)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + n! a_n}{p^{n+1} - a_0 p^n - a_1 p^{n-1} - \ldots - n! a_n}$$

є правильною дробово-раціональною функцією, оригінал якої знаходиться формально за однією з теорем операційного числення.

У дослідженні об’єктів із розподіленими параметрами, зазвичай, ядра інтегральних операторів мають складний вигляд, тому для представлення оригіналів і зображень у вигляді, зручному для прямого і оберненого перетворення необхідно проводити апроксимації вихідних функцій. У виборі методів дробово-раціональної апроксимації необхідно враховувати швидкість збіжності рядів, інформативність параметрів послідовностей тощо. Одним з найбільш ефективних методів апроксимації передатних функцій є метод апроксимації за допомогою ланцюгових дробів [96, 97, 187].

Алгоритм побудови ланцюгово-дробової апроксимаційної моделі складної передатної функції розглянуто в розділі 3, який ефективно можна застосовувати і для визначення резольвенти інтегрального рівняння Вольтерри другого роду.

Апроксимуючі системи для лінійних рівнянь. Щоб застосувати до розв’язання лінійного рівняння (4.19) метод квадратур необхідно використати вираз

$$y(t_i)-\int_0^h K(t_i,s)\,y(s)\,ds = f(t_i),\ \ i=\overline{1,n},$$

який слідує з вихідного рівняння для фіксованих значень t_i незалежної змінної t. Значення t_i можуть бути обрані спеціальним чином або задані заздалегідь, якщо, наприклад, права частина $f(t)$ задана таблицею. Беручи значення t_i як вузли квадратурної формули і замінюючи з її допомогою інтеграл в (4.19) скінченною сумою, отримаємо систему

$$y(t_i)-\sum_{i=1}^{i} A_i K(t_i,t_j)\,y(t_i) = f(t_i)+R_i[y],$$

де $R_i[y]$ — похибка апроксимації. Розв’язок $y_1, y_2, \ldots., y_n$ можна знайти послідовно за рекурентною формулою

$$y_i = \left(1-A_i K_{ij}\right)^{-1}(f_n+\sum_{j=1}^{i-1} A_i K_{ij} y_j),\ \ i=\overline{1,n}, \tag{4.21}$$

при умові

$$\left(1-A_i K_{ij}\right)\neq 0.$$

У разі застосування формули трапецій формула (4.21) набуває вигляду

$$y_i=\left(1-\frac{h}{2}K_{ij}\right)^{-1}(f_i+\frac{h}{2}K_{ij}y_j+h\sum_{j=1}^{i-1}A_i K_{ij}y_j).$$

<u>Алгоритми розв’язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду</u>. Розглянемо систему лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерри другого роду виду

$$\sum_{j=1}^{m} a_{rj}y_r(t)=\sum_{j=1}^{m}\int_a^t K_{rj}(t,s)\,y_j(s)\,ds + f_r(t),\ r=\overline{1,m}.$$

Якщо розв’язок шукається на відрізку $\left[a,b\right]$, розбиваємо його точками $a=t_1<t_2<\ldots<t_n<t_{n+1}=b$ на n частин. Для отримання апроксимуючої алгебраїчної системи використовуємо вираз

$$\sum_{j=1}^{m} a_{rj} y_r(t_i) = \sum_{j=1}^{m} \int_a^{t_i} K_{rj}(t_i,s) y_j(s) ds + f_r(t_i),\ r=\overline{1,m}, \qquad (4.22)$$

який отримується з вихідної системи для фіксованих значень t_i незалежної змінної t. В (4.22) m – розмірність системи, t_i, $i=\overline{1,n}$ – вибрані точки розбиття відрізка $\left[a,b\right]$. Після заміни інтегралів в (4.22) скінченними сумами отримується система

$$\sum_{j=1}^{m} a_{rj} y_r(t_i) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{i} K_{rj}(t_i,t_l) y_j(t_l) A_l = f_r(t_i) + R_{ri}[y],\ r=\overline{1,m}\ ,$$

де

$$K_{rji}^{(l)} = K_{rj}(t_i,t_l), \quad y_j^{(l)} = y_j(t_l), \quad f_r^{(i)} = f_r(t_i),$$

а також вважаючи $R_{ij}\left[y\right]$ малими і відкидаючи їх, отримуємо лінійну алгебраїчну систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m} a_{rj} y_r^{(i)} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{i} K_{rji}^{(l)} y_j^{(l)} A_l = f_r^{(i)}$$

для визначення наближених значень y_j розв’язку $y_r\left(t\right)$ у вузлах t_i $(i=\overline{1,n+1})$.

Висновки до розділу 4

1. Вдосконалено метод внутрішньої регуляризації сингулярних інтегральних операторів, у тому числі поліноміальних, шляхом введення регуляризаційного параметра в ядро інтегральної моделі Вольтерри, що

дозволяє отримати інтегральну модель з ядрами без особливостей та застосувати квадратурні методи для числової реалізації таких моделей.

2. Вдосконалено метод числової реалізації поліноміальних операторів Вольтерри на основі методу квадратур шляхом застосування векторно-матричного підходу до апроксимації інтегральних операторів та зведення всіх операцій до поелементного множення та додавання матриць, який орієнтований на ефективну програмну реалізацію, що дозволяє створити універсальний спосіб для програмної реалізації поліноміальних інтегральних операторів довільного порядку та створює можливості застосування паралельних алгоритмів обчислення інтегральних операторів.

3. Розроблено метод числової реалізації поліноміальних операторів Вольтерри із застосуванням апроксимації багатовимірних ядер функціями у вигляді суми добутків незалежних змінних, що дозволяє скоротити на порядок кількість необхідних обчислювальних процедур.

4. Набули подальшого розвитку методи розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду шляхом застосування теорії ланцюгових дробів: для побудови розв’язку у вигляді резольвенти шляхом застосування ітераційного підходу; у використанні операційного методу для знаходження розв’язку на основі застосування оберненого оператора Лапласа до апроксимованого зображення, що дозволило розширити сферу використання даних методів у дослідженні об’єктів із розподіленими параметрами.

РОЗДІЛ 5.
ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ

У розв'язуванні обернених задач динаміки зазвичай виникає необхідність розв'язування рівнянь Вольтерри першого роду. У випадку динамічних об'єктів із розподіленими параметрами складність посилюється тим, що їх ядра мають сингулярність, для уникнення якої необхідно застосовувати специфічні підходи. Розглянемо ряд методів, які дозволяють розв'язувати інтегральні рівняння Вольтерри першого роду та поліноміальні рівняння Вольтерри першого роду. Особливу увагу приділимо випадкам для яких моделі мають сингулярний вигляд.

5.1. Методи розв'язування обернених задач динаміки лінійних систем

Розглянемо розв'язування обернених задач динаміки, які зводяться до розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду (1.47). Дана задача є некоректною, тому для її розв'язування ефективним підходом є застосування регуляризаційних методів. Такими методами можуть бути: методи зведення до коректної математичної моделі, зокрема метод побудови інтегрального рівняння Вольтерри другого роду, який розглянуто в першому розділі (він є ефективним, якщо є можливість точного диференціювання ядра та правої частини); методи регуляризації – введення регуляризаційних параметрів, які стосуються як всієї моделі, так і її частин.

У першому розділі розглянуто підхід до розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду на основі застосування перетворення Лапласа. Застосування оберненого перетворення Лапласа (1.50), зазвичай, здійснюється на основі використання готових таблиць [18], але такий підхід є достатньо обмеженим через неповноту таких таблиць.

Застосування формули (1.50) ускладнене непростими математичними перетворенням. Для усунення вказаних проблем пропонується застосовування методу ланцюгово-дробової апроксимації [96]. Такий підхід детально розглянуто у розв’язуванні інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду операційним методом у розділі 4.

Застосування методу квадратурних формул для розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри I роду. Як було зазначено у першому розділі, однією із проблем у розв’язуванні інтегрального рівняння Вольтерри першого роду (1.47) є визначення значення y_1. Цю проблему можна вирішити шляхом диференціювання (1.47) по x [47]. В результаті отримаємо вираз

$$\int_a^t \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} y(s)ds + K(t,t)\,y(t) = f'(t),$$

звідки для $t = a$

$$y_1 = y(a) = \frac{f'(a)}{K(a,a)} = \frac{f'(a)}{K_{11}}. \tag{5.1}$$

Тепер система (1.52) має трикутну матрицю коефіцієнтів та дозволяє послідовно визначити наближені значення за допомогою формул [47]

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{1}{A_2 K_{22}}\left(f_2 - A_1 K_{21} y_1\right), \\ y_3 = \dfrac{1}{A_3 K_{33}}\left(f_3 - A_1 K_{31} y_1 - A_2 K_{32} y_2\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \dfrac{1}{A_n K_{nn}}\left(f_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} A_j K_{nj} y_j\right), \end{cases}$$

для

$$A_i K_{ii} \neq 0, i = \overline{1,n}.$$

Якщо $f(t)$ задана таблично на деякій сітці вузлів, то для розв’язування задачі з кроком h необхідно виконати процедуру інтерполяції $f(t)$ або представити її аналітично.

Нехай $t_1 = a < t_2 < t_3 < \ldots < t_n = b$ — сітка вузлів, на якій задані дискретні (експериментальні) значення функції $f(t)$, $f_i = f(t_i)$, $i = \overline{1,n}$. Застосовуючи формулу трапеції (з непостійним кроком) для заміни інтеграла (1.47) скінченною сумою і, позначаючи через $y_j = y(s_j)$, $j = \overline{1,n}$ шукані значення $y(s)$ у точках $s_1 = t_1 = a$, $s_2 = x_2, \ldots, s_n = t_n = b$, отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь з трикутною матрицею відносно y_j, $j = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} \dfrac{h}{2}\left(K_{21}y_1 + K_{22}y_2\right) = f_2, \\ \dfrac{h}{2}K_{i1}y_1 + \sum\limits_{j=2}^{i-1}\dfrac{t_{j+1} - t_{j-1}}{2}K_{ij}y_j + \dfrac{h_i}{2}K_{ii}y_i = f_i, i = \overline{3,n}, \end{cases} \tag{5.2}$$

де $h_i = t_i - t_{i-1}$, $K_{ij} = K\left(t_i, t_j\right)$.

Розв’язок системи (5.2) із врахуванням (5.1) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{f'(a)}{K_{11}}, \\ y_2 = \dfrac{f_2 - \dfrac{h_2}{2}K_{31}y_1}{\dfrac{h_2}{2}K_{22}}, \\ y_i = \dfrac{f_i - \dfrac{h_i}{2}K_{i1}y_1 - \sum\limits_{j=2}^{i-1}\dfrac{t_{j+1} - t_{j-1}}{2}K_{ij}y_j}{\dfrac{h_i}{2}K_{ii}}, i = \overline{3,n}, \end{cases}$$

причому вважається, що

$$\frac{h_i}{2}K_{ii} \neq 0.$$

Для відновлення сигналів на вході динамічних об’єктів із розподіленими параметрами необхідно розв’язувати інтегральні рівняння Вольтерри першого роду із сингулярними ядрами. В такому випадку пропонується застосовувати регуляризацію інтегральних моделей шляхом внесення внутрішнього регуляризаційного параметра, аналогічно до того, як це зроблено для розв’язування «прямої» задачі (розділ 4), тобто для числової реалізації інтегральних операторів.

5.2. Застосування диференціального регуляризаційного оператора у розв’язуванні інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду

У зв’язку з тим, що поставлена задача є некоректною, а наведені вище алгоритми не дозволяють знаходити розв’язки із необхідною точністю для випадку наявності шумів у вхідних даних, пропонується будувати регуляризаційні алгоритми шляхом використання диференціального регуляризаційного оператора:

$$Dx = \rho_2 \alpha^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \rho_1 \alpha \frac{dx}{dt} + \rho_0 \alpha x, \tag{5.3}$$

де α – параметр регуляризації, ρ_i – коефіцієнти регуляризації, які визначають порядок оператора, можуть мати значення 0 або 1.

Застосування запропонованого підходу до відновлення вхідних сигналів лінійних динамічних систем із розподіленими параметрами досліджувалось для відновлення сигналів, які проходять через об’єкти з розподіленими параметрами, що описуються типовими ланками. Таблиця 5.1 містить математичні моделі типових ланок об’єктів у формі інтегральних рівнянь першого роду, які побудовано на основі моделей, представлених у таблиці 2.4.

Основна складність застосування даних моделей для відновлення сигналів полягає в тому, що у цих моделях присутня сингулярність в інтегральному операторі [179]. Для виходу з цієї ситуації було здійснено внутрішню регуляризацію шляхом внесення регуляризаційного параметра β.

Таблиця 5.1

Моделі типових ірраціональних та трансцендентних ланок у формі інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду

Назва ланки	Математична модель
Напівінтегральна	$\int_0^t \frac{k}{\sqrt{\pi(t-s)}} x(s) ds = y(t)$
Напівінерційна	$\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\pi k(t-s)}} - e^{\frac{t-s}{T}} erfc\sqrt{\frac{t-s}{T}}\right) x(s) ds = y(t)$
Затухання (напівзапізнення)	$\int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4(t-s)}} x(s) ds = y(t)$

Використавши запропонований підхід (диференціальний регуляризаційний оператор (5.3)) до моделей представлених у таблиці 5.1 та внутрішню регуляризацію, отримано регуляризаційні моделі для напівінтегральної, напівінерційної ланок та ланки затухання (таблиця 5.2).

Таблиця 5.2

Регуляризаційні моделі типових ланок об'єктів із розподіленими параметрами

Назва ланки	Регуляризаційні моделі
1	2
Напів-інтегральна	$\alpha x(t) + \int_0^t \frac{k}{\beta + \sqrt{\pi(t-s)}} x(s) ds = y(t),$ $\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \int_0^t \frac{k}{\beta + \sqrt{\pi(t-s)}} x(s) ds = y(t),$ $\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \alpha x(t) + \int_0^t \frac{k}{\beta + \sqrt{\pi(t-s)}} x(s) ds = y(t),$

Продовження таблиці 5.2

1	2
	$\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \int_0^t \frac{k}{\beta + \sqrt{\pi(t-s)}} x(s)ds = y(t)$, $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha x(t) + \int_0^t \frac{k}{\beta + \sqrt{\pi(t-s)}} x(s)ds = y(t)$, $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} + \int_0^t \frac{k}{\beta + \sqrt{\pi(t-s)}} x(s)ds = y(t)$, $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} + \alpha x(t) +$ $+\int_0^t \frac{k}{\beta + \sqrt{\pi(t-s)}} x(s)ds = y(t)$
Напів-інерційна	$\alpha x(t) + \int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta + \pi k(t-s)}} - e^{\frac{t-s}{T}} erfc\sqrt{\frac{t-s}{T}}\right) x(s)ds = y(t)$, $\alpha \frac{dx(t)}{dt} +$ $+\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta + \pi k(t-s)}} - e^{\frac{t-s}{T}} erfc\sqrt{\frac{t-s}{T}}\right) x(s)ds = y(t)$, $\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \alpha x(t) +$ $+\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta + \pi k(t-s)}} - e^{\frac{t-s}{T}} erfc\sqrt{\frac{t-s}{T}}\right) x(s)ds = y(t)$, $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} +$ $+\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta + \pi k(t-s)}} - e^{\frac{t-s}{T}} erfc\sqrt{\frac{t-s}{T}}\right) x(s)ds = y(t)$,

Продовження таблиці 5.2

1	2
	$\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha x(t) +$ $+\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta+\pi k(t-s)}} - e^{\frac{t-s}{T}} erfc\sqrt{\frac{t-s}{T}}\right)x(s)ds = y(t),$ $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} +$ $+\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta+\pi k(t-s)}} - e^{\frac{t-s}{T}} erfc\sqrt{\frac{t-s}{T}}\right)x(s)ds = y(t),$ $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} + \alpha x(t) +$ $+\int_0^t \frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta+\pi k(t-s)}} - e^{\frac{t-s}{T}} erfc\sqrt{\frac{t-s}{T}}\right)x(s)ds = y(t)$
Затухання	$\alpha x(t) + \int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\beta+\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4(t-s)}} x(s)ds = y(t),$ $\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\beta+\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4(t-s)}} x(s)ds = y(t),$ $\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \alpha x(t) + \int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\beta+\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4(t-s)}} x(s)ds = y(t),$ $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\beta+\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4(t-s)}} x(s)ds = y(t),$ $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha x(t) + \int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\beta+\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4(t-s)}} x(s)ds = y(t),$ $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} +$ $+\int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\beta+\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4(t-s)}} x(s)ds = y(t),$ $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} + \alpha x(t) +$ $+\int_0^t 0.5\sqrt{\frac{T_0}{\beta+\pi(t-s)^3}} e^{-\frac{T_0}{4(t-s)}} x(s)ds = y(t)$

В результаті отримано інтегро-диференціальні рівняння. Для числової реалізації використано апроксимаційні представлення даних рівнянь, які побудовані на основі методу квадратур для інтегральних операторів, аналогічно до інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду, та різницевих формул для диференціальних операторів.

Ефективність запропонованого підходу досліджено за допомогою обчислювальних експериментів. На рис. 5.1 подано графік реакції об’єкта, що описується напівінтегральною ланкою, на одиничну функцію із накладанням шумової завади. На рис. 5.2 подано відновлений сигнал за умови визначення початкового значення на основі (5.1).

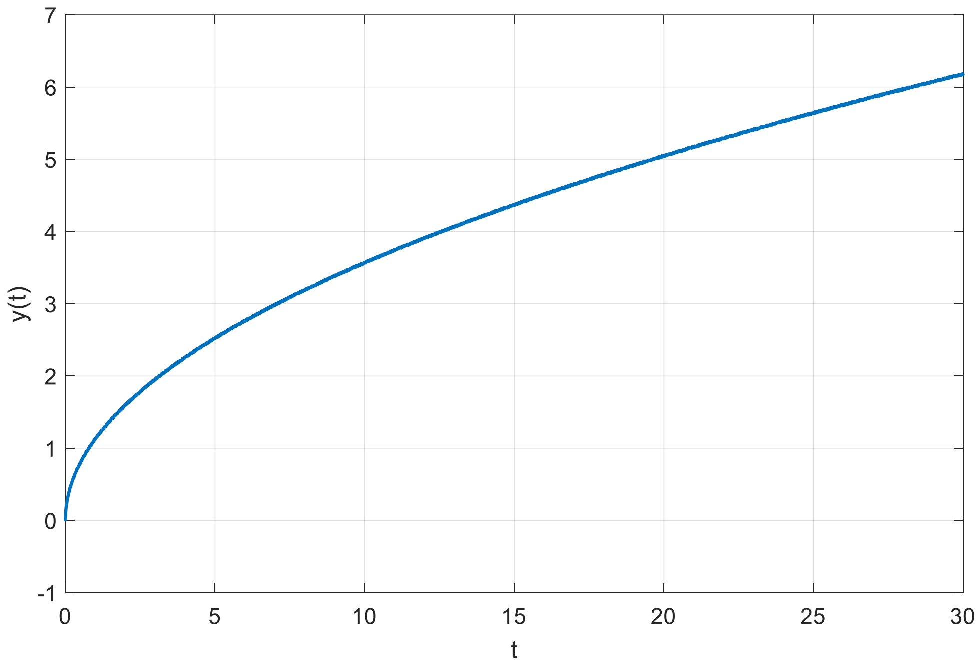


Рис. 5.1. Графік перехідної характеристики для напівінтегральної ланки

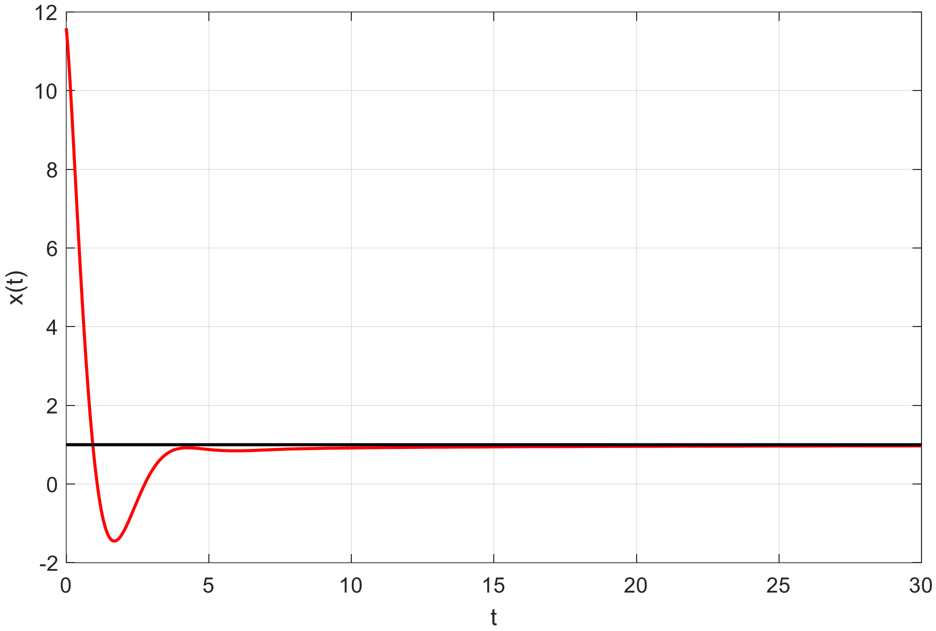


Рис. 5.2. Графік відновленого сигналу за допомогою рівняння Вольтерри першого роду на вході у напівінтегральну ланку
(——— – наближений розв’язок, ——— – точний розв’язок)

На рис. 5.3 зображено графік сигналу із накладанням шуму, який отриманий на виході напівінерційної ланки за умови одиничного вхідного впливу. На рис. 5.4 подано графік відновленого сигналу та його точне значення.

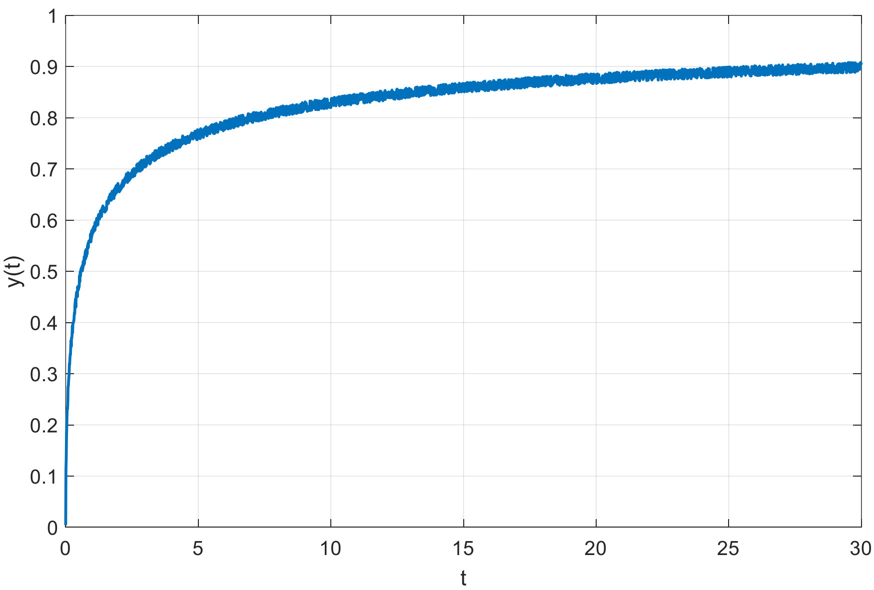


Рис. 5.3. Графік перехідної характеристики напівінерційної ланки із накладання шумових завад

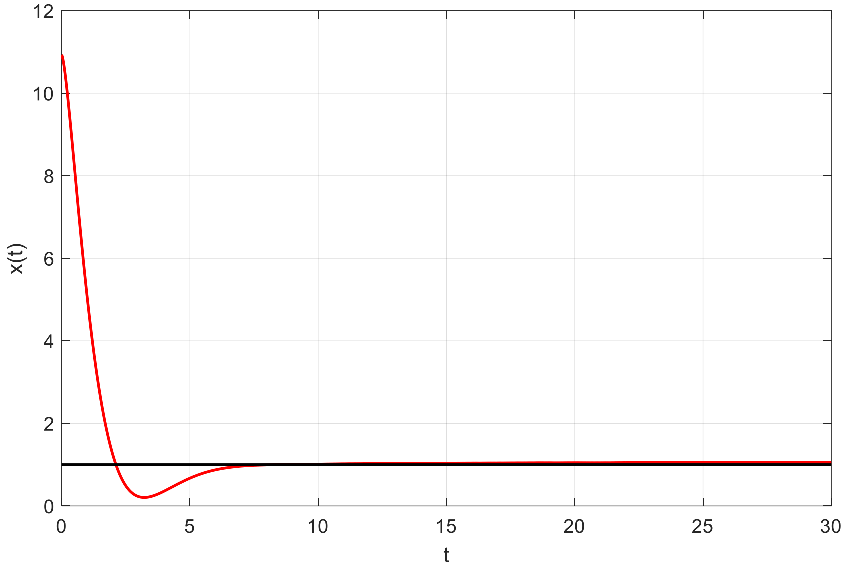


Рис. 5.4. Графік відновленого сигналу за допомогою рівняння Вольтерри першого роду на вході у напівінерційну ланку

(———— – наближений розв'язок, ———— – точний розв'язок)

Графік сигналу, який отриманий на виході ланки напівзапізнення із накладанням шумової завади за умови одиничного вхідного впливу зображено на рис. 5.5, а на рис. 5.6 подано точний та відновлений сигнал за умови наближеного обчислення початкового значення.

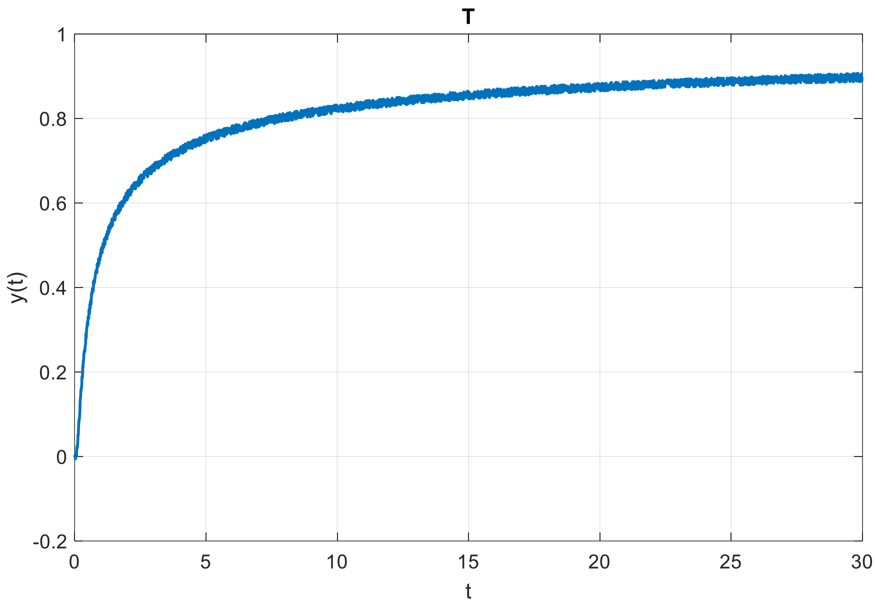


Рис. 5.5. Графік перехідної характеристики ланки напівзапізнення із накладанням шумових завад

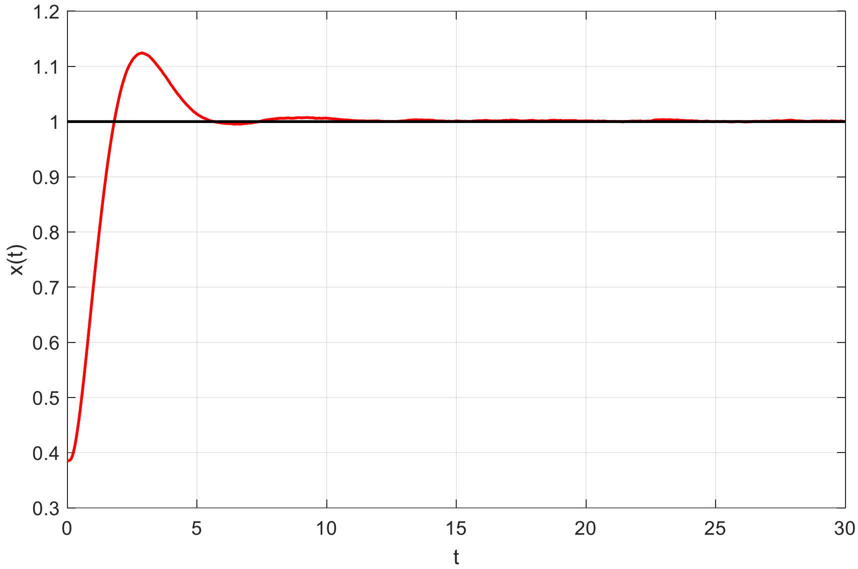


Рис. 5.6. Графік відновленого сигналу за допомогою рівняння Вольтерри першого роду на вході у ланку напівзапізнення

(——— – наближений розв’язок, ——— – точний розв’язок)

Результат обчислювального експерименту відновлення сигналу за умови відомого початкового значення поданий у вигляді графіку на рис. 5.7. Графік похибки відновлення поданий на рис. 5.8.

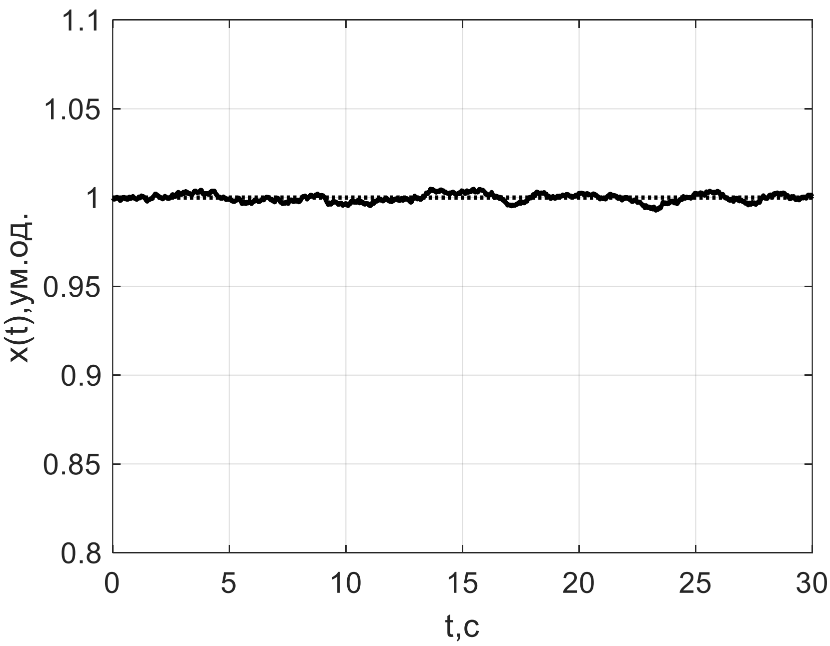


Рис. 5.7. Відновлений сигнал за допомогою рівняння Вольтерри першого роду на вході у ланку напівзапізнення для відомого початкового значення

(——— – наближений розв’язок, ...– точний розв’язок)

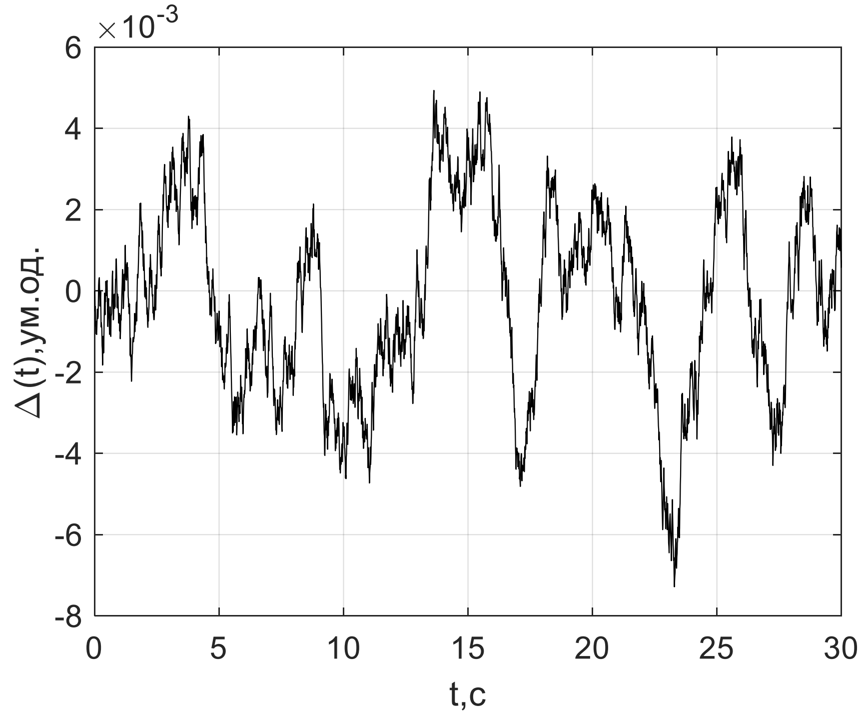


Рис. 5.8. Абсолютна похибка відновлення вхідного сигналу

Проведена серія обчислювальних експериментів показала, що запропонований метод регуляризації інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду на основі введення диференціального регуляризаційного оператора є ефективним у розв’язуванні задач відновлення сигналів на вході лінійних динамічних систем з розподіленими параметрами при умові введення параметра внутрішньої регуляризації. Найбільш ефективним є застосування диференціального регуляризаційного оператора $\alpha \dfrac{dx}{dt}$.

5.3. Відновлення сигналів на основі структурного підходу

Відновлення сигналів на основі передатних функцій. Розглянемо проблему застосування передатних функцій у розв’язуванні обернених задач динаміки для лінійних об’єктів. Модель лінійного динамічного об’єкта у формі передатних функцій має вигляд:

$$Y(s) = A(s)X(s), \tag{5.4}$$

де $X(s)$ – вхідний сигнал, $Y(s)$ – вихідний сигнал, s – змінна Лапласа, $A(s)$ – оператор, який задається у формі передатної функції. У розв'язуванні такої задачі існує широкий набір методів та засобів. Наприклад, в системі Matlab-Simulink модель (5.4) матиме вигляд, що представлена на рис. 5.9.

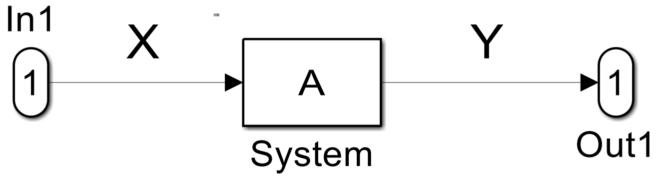


Рис. 5.9. Simulink-схема моделі (5.4)

Під час розв'язування обернених задач, у випадку відомої моделі оператора A, необхідно розв'язати операторне рівняння (5.4), за умови, що Y задано, а X необхідно знайти. Шукати розв'язок можна у вигляді:

$$X(s) = B(s)Y(s), \tag{5.5}$$

де $B(s) = A^{-1}(s)$. Структурна схема прямої та оберненої задачі побудована в Simulink подана на рис. 5.10.

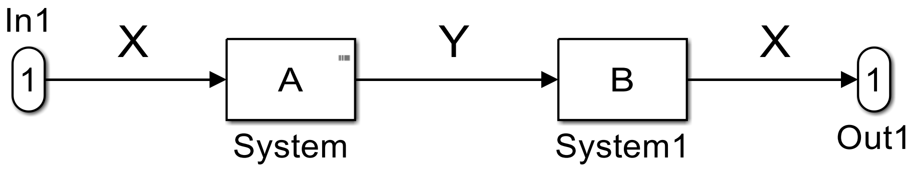


Рис. 5.10. Simulink-схема реалізації прямої та оберненої задачі

Ефективним методом розв'язування задачі відновлення вхідного сигналу є метод обернених операторів [43, 95, 111, 247, 249]. Суттєвою особливістю даного методу є безпосереднє застосування прямого оператора для отримання оберненого оператора. Виділимо два головних підходи реалізації методу обернених операторів: включення оберненого оператора в прямий зв'язок або прямого оператора $A(s)$ у зворотний зв'язок елементів системи [33, 38, 53, 197, 247, 249].

Для пошуку оператора $B(s)$ представимо (5.5) в еквівалентній формі із використанням зворотного зв’язку [111]:

$$B(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{1}{\frac{Y(s)}{X(s)}}=\frac{1}{A(s)}=\frac{1}{1+\left(A(s)-1\right)}. \tag{5.6}$$

Виразу (5.6) відповідає структурна Simulink-схема, яка подана на рис. 5.11.

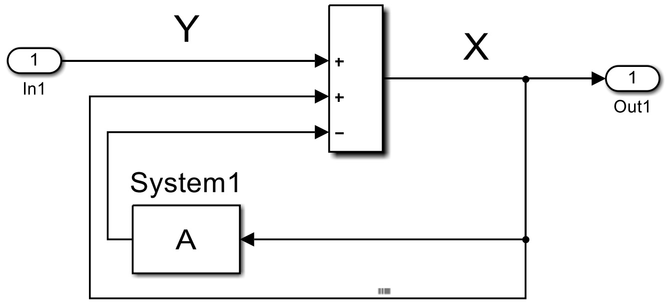


Рис. 5.11. Simulink-схема оператора B

На модель (5.6) накладається ряд обмежень. По-перше, передатну функцію $B(s)$ можна реалізувати фізично, щоб показник степеня чисельника був не більший за показник степеня знаменника, а це можливо лише тоді, якщо передатна функція $A(s)$ має однакові показники степенів чисельника та знаменника [43, 197]. По-друге, для отримання стійких розв’язків необхідно, щоб система, яка задається передатною функцією $A(s)$, була стійкою в розімкнутому та замкнутому станах [43, 197].

Розглянемо випадок побудови оберненого оператора за умови, що показник степеня знаменника більший за показник степеня чисельника в операторі $A(s)$. В такому випадку модель (5.6) застосовувати не бажано. Тому застосуємо до (5.6) метод регуляризації так, щоб степені чисельника та знаменника зрівнялися.

Запропоновано два способи побудови оператора $B(s)$. Розглянемо перший спосіб. Оператор $B(s)$ подається у вигляді:

$$B(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{1}{1+(A(s)-k)}, \tag{5.7}$$

де k – параметр регуляризації, $k\neq 1$, але близький 1. Даний параметр підбирається із урахуванням забезпечення стійкості оператора $B(s)$ [95].

Нехай

$$A(s)=\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+...+b_2 s^2+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_2 s^2+a_1 s+a_0},\ m\leq n, \tag{5.8}$$

тоді

$$B(s)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{b(s)}{a(s)}-k\right)}=\frac{1}{\dfrac{a(s)+(b(s)-ka(s))}{a(s)}}=\frac{a(s)}{a(s)+b(s)-k\cdot a(s)}.$$

Параметр k підбирається так, щоб всі полюси $B(s)$ були розміщенні в лівій півплощині. Для цього шукаємо корені характеристичного рівняння:

$$a(s)+b(s)-k\cdot a(s)=0.$$

Позначимо знайдені корені через $Rs(k)=\left(Rs_n(k),Rs_{n-1}(k),...,Rs_1(k)\right)$. Для виконання визначених умов необхідно розв'язати систему нерівностей:

$$\operatorname{Re} Rs(k)\leq 0,$$

тобто

$$\begin{cases} \operatorname{Re} Rs_n(k) \le 0; \\ \operatorname{Re} Rs_{n-1}(k) \le 0; \\ \dots \\ \operatorname{Re} Rs_1(k) \le 0. \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему визначаємо область Ω допустимих значень параметра регуляризації k. Для забезпечення максимальної адекватності регуляризованої моделі k підбираємо з врахуванням наступних умов:

$$\begin{aligned} &|k-1| \to \min; \\ &k \ne 1; \\ &k \in \Omega. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Структурна Simulink-схема моделі (5.7) подана на рис. 5.12.

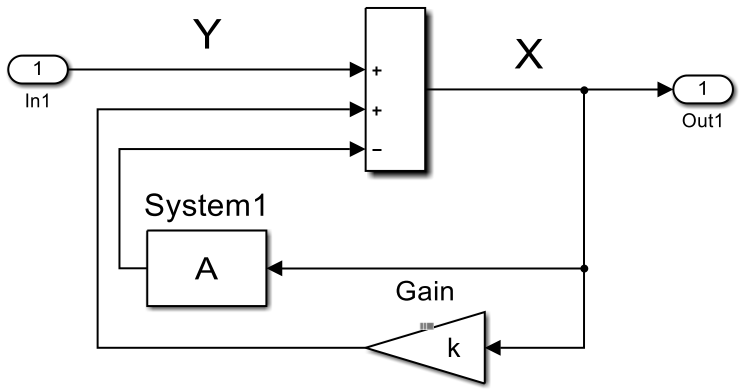


Рис. 5.12. Simulink-схема оператора $B(s)$ побудована на основі (5.7)

Другий спосіб побудови оператора $B(s)$ полягає в тому, що він подається у вигляді:

$$B(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{1 + k\big(A(s) - 1\big)}, \tag{5.10}$$

де k – параметр регуляризації близький не рівний 1. Із врахуванням (5.8) отримано

$$B(s) = \frac{a(s)}{a(s) + k \cdot b(s) - k \cdot a(s)}.$$

Далі шукаємо корені характеристичного рівняння:

$$a(s) + k \cdot b(s) - k \cdot a(s) = 0.$$

Позначимо знайдені корені через $Rs(k) = \left(Rs_n(k), Rs_{n-1}(k), ..., Rs_1(k)\right)$. Для виконання визначених умов розв’язується система нерівностей:

$$\mathrm{Re}\, Rs(k) \leq 0.$$

Розв’язок даної системи формує область Ω допустимих значень в якій забезпечується асимптотично стійкий розв’язок. Якщо можливо знайти k для забезпечення тільки рівності

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, Rs_n(k) = 0; \\ \mathrm{Re}\, Rs_{n-1}(k) = 0; \\ ... \\ \mathrm{Re}\, Rs_1(k) = 0, \end{cases}$$

то розв’язок буде стійкий, але не асимптотичний (умова дійсна і для першого способу).

Забезпечення максимальної адекватності моделі здійснюється шляхом підбору параметра k з урахуванням умов (5.9).

Структурна схема моделі (5.10) подана на рис. 5.13.

Обчислювальні експерименти. Розглянемо приклад відновлення сигналу на вході динамічної системи, яка задана передатною функцією $A(s)$, показники старшого степеня чисельника та знаменника якої однакові:

$$A(s) = \frac{s+2}{3s+4}.$$

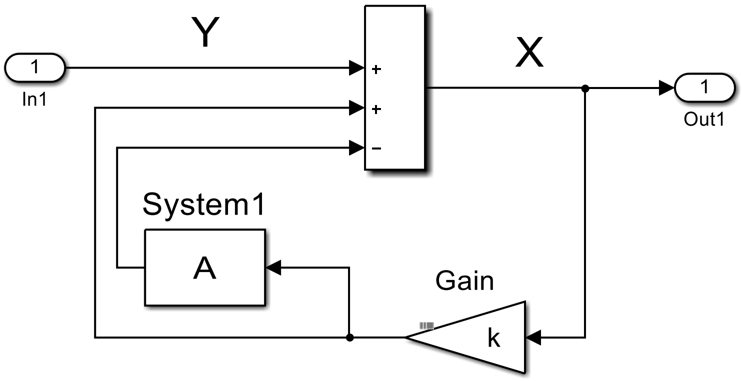


Рис. 5.13. Simulink-схема оператора $B(s)$ побудована на основі (5.10)

Обернений оператор виглядає наступним чином:

$$B(s) = \frac{3s+4}{2s+1}.$$

Результати проведення обчислювальних експериментів за допомогою засобів Linear System Analyze подано на рис. 5.14: графіки перехідної, імпульсної перехідної характеристик, діаграма Найквіста, нулі та полюси передатної функції B. На рис. 5.15 у вигляді графіка подано результат відновлення вхідного сигналу, а на рис. 5.16 – графік похибки відновлення.

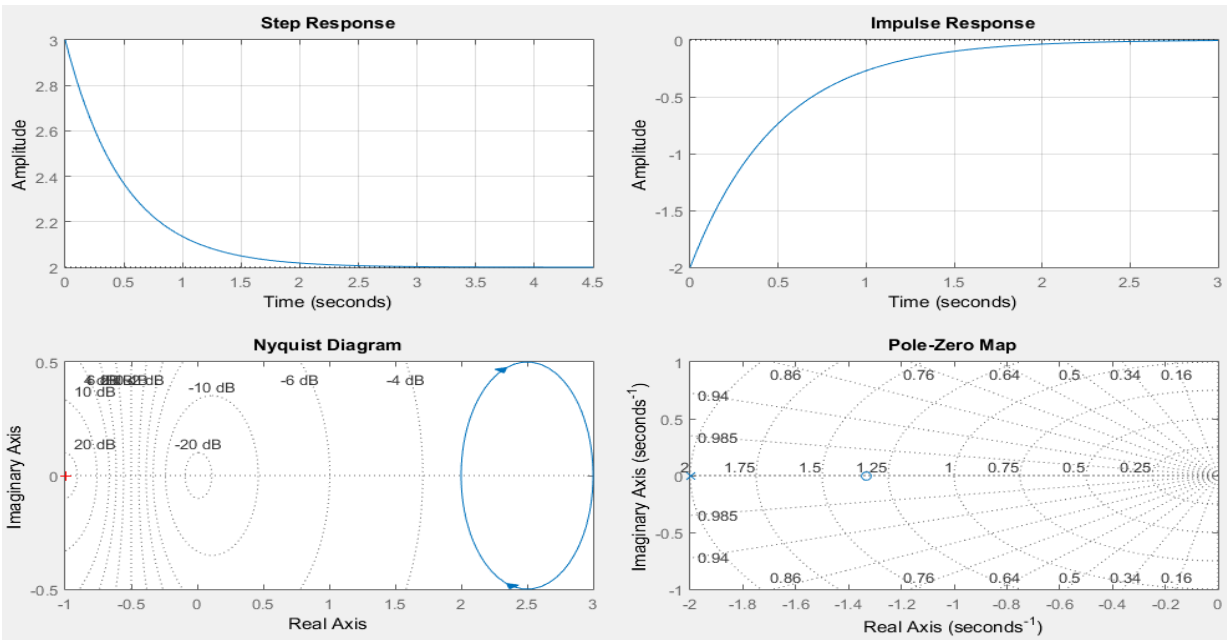


Рис. 5.14. Графіки перехідної, імпульсної перехідної характеристики, діаграма Найквіста, нулі та полюси передатної функції $B(s)$

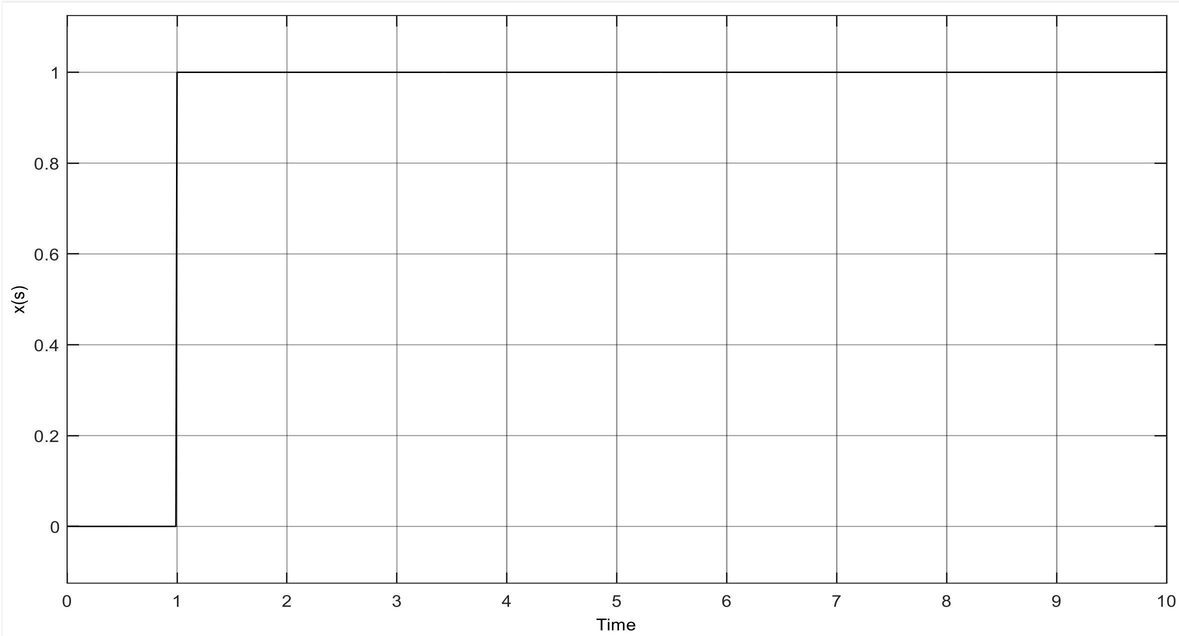


Рис. 5.15. Графік відновленого сигналу $X(s)$

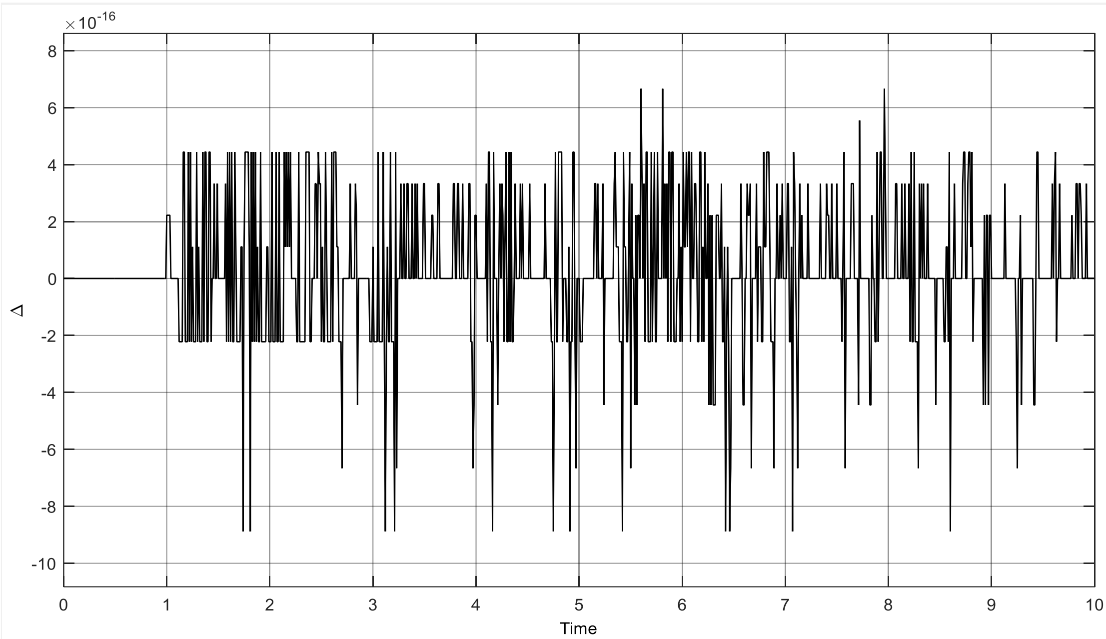


Рис. 5.16. Графік похибки відновлення сигналу

Нехай задана передатна функція:

$$A(s)=\frac{s^2+3s+1}{s^4+3s^3+5s^2+3s+1}.$$

Застосування першого способу дозволило отримати необхідний обернений оператор при умові $k=0.99$:

$$B_2(s) = \frac{s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 3s + 1}{0.01s^4 + 0.03s^3 + 1.05s^2 + 2.03s + 1.01}.$$

Застосування другого способу, за тих же умов, дозволяє отримати обернений оператор у вигляді:

$$B_2(s) = \frac{s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 3s + 1}{0.01s^4 + 0.03s^3 + 1.05s^2 + 2.03s + 1.01}.$$

Результати проведення обчислювальних експериментів подано у вигляді графіків: діаграма Найквіста для оператора B_1 – рис. 5.17, графіки перехідної, імпульсної перехідної характеристик, діаграма Найквіста, нулі та полюси передатної функції B_1 побудовані засобами Linear System Analyze – рис. 5.18. На рис. 5.19 подано графік перехідної характеристики A на основі якої здійснювалось відновлення вхідного сигналу. На рис. 5.20 у вигляді графіка подано результат відновлення вхідного сигналу на основі обернених операторів та точний вхідний сигнал.

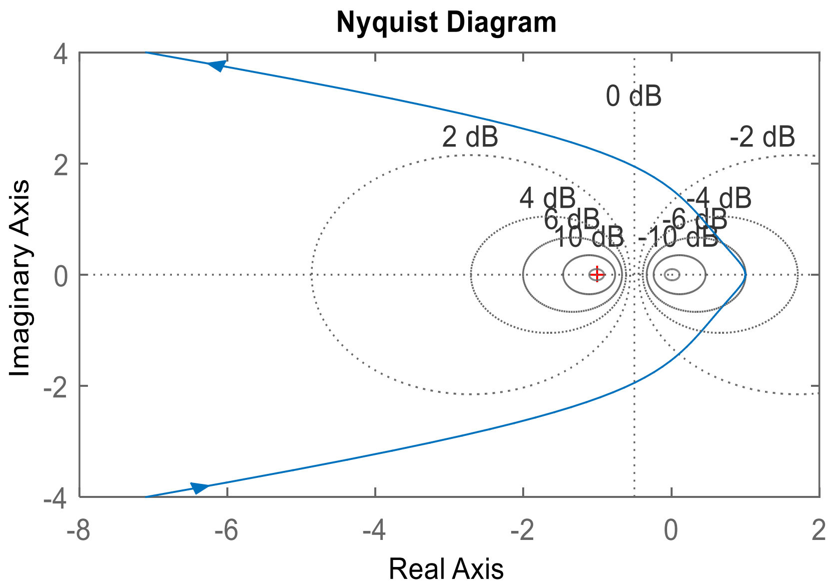


Рис. 5.17. Діаграма Найквіста оператора B_1

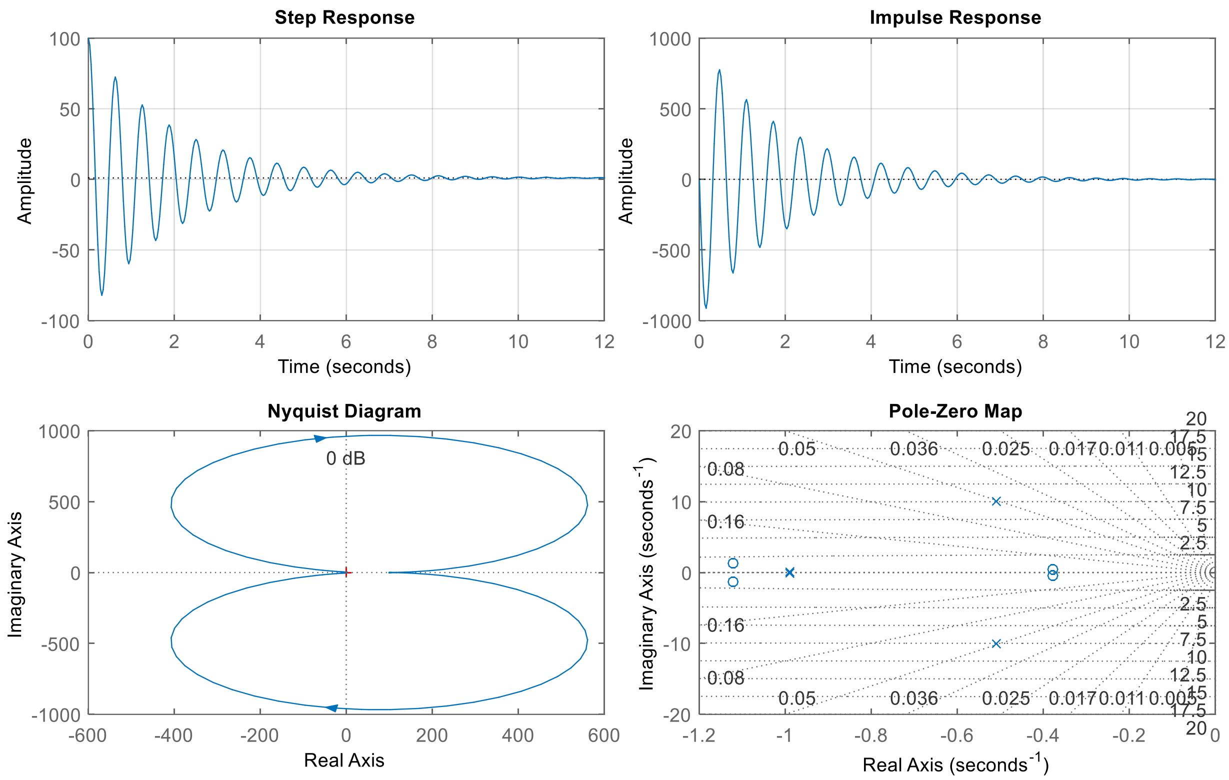


Рис. 5.18. Графіки перехідної, імпульсної перехідної характеристик, діаграма Найквіста, нулі та полюси передатної функції B_1

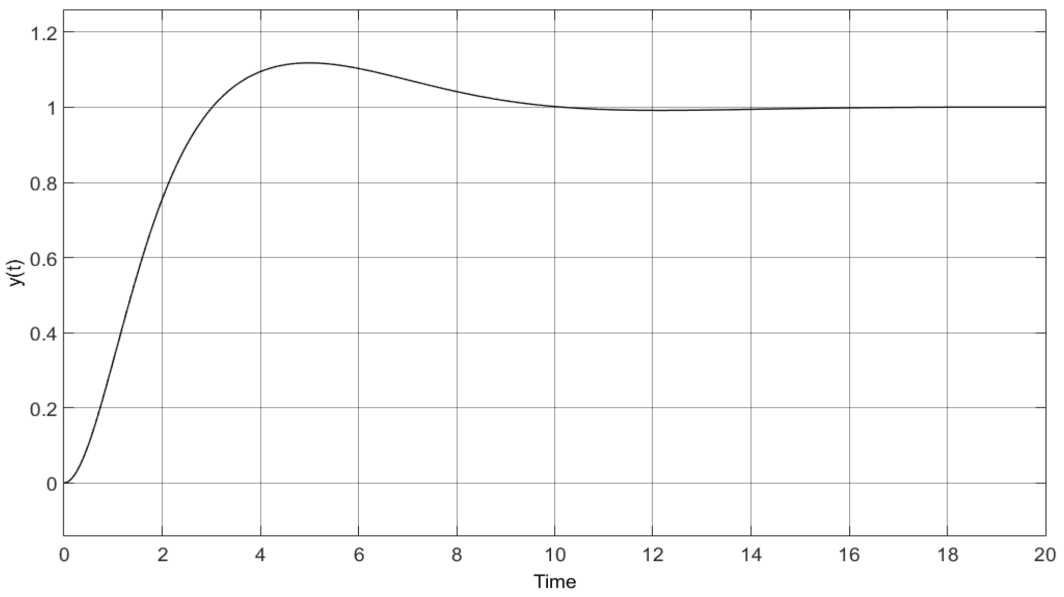


Рис. 5.19. Графік перехідної характеристики A

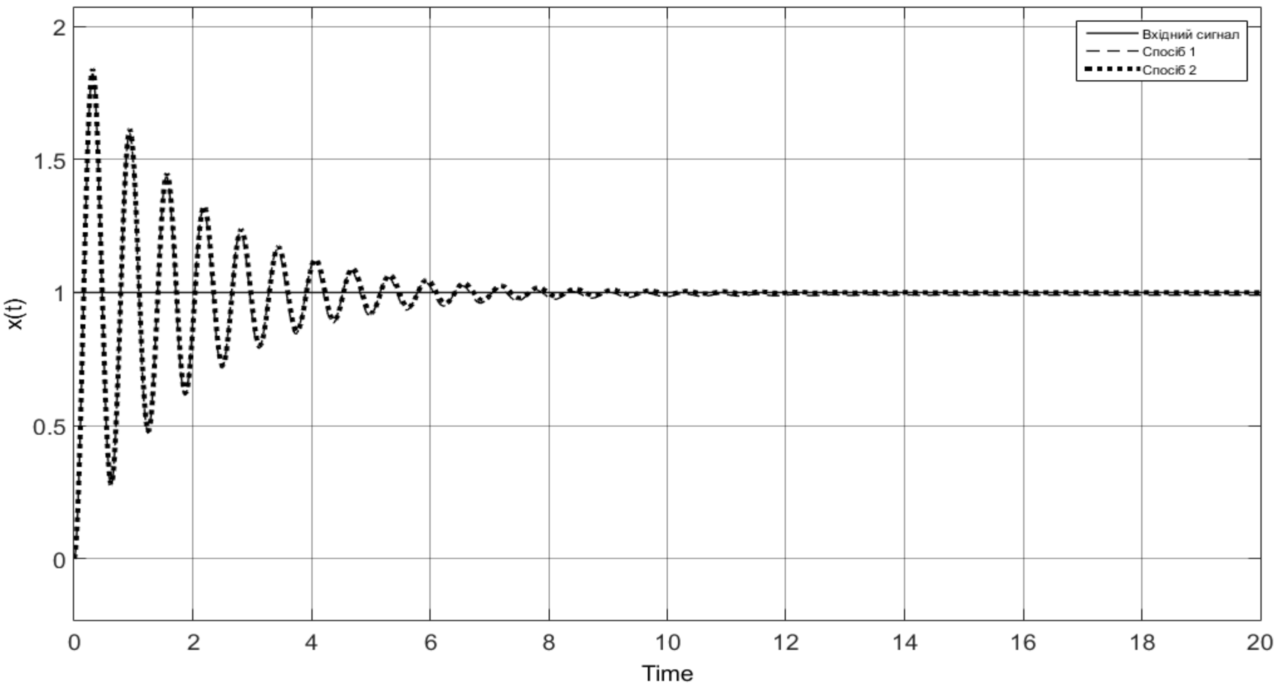


Рис. 5.20. Графіки точного та експериментально отриманого вхідного сигналу

Численні обчислювальні експерименти показали, що пропоновані способи побудови обернених операторів для відновлення вхідних сигналів можна ефективно використовувати під час розв'язування різних технічних задач, зокрема для відновлення сигналів спотворених вимірювальними пристроями. Підбір параметрів регуляризації можна оцінювати на основі критерія Найквіста, використовуючи наявні засоби в прикладних програмних середовищах. Загалом, здійсненні дослідження показали, що запропонований метод відновлення вхідних сигналів є ефективним для дослідження динаміки лінійних систем в комп'ютеризованих засобах динамічної корекції керуючих та вимірювальних систем. Причому такий підхід можна використовувати для відновлення вхідних сигналів на вході лінійних динамічних систем із розподіленими параметрами, які описуються апроксимаційними моделями ланцюгово-дробового типу.

5.4. Метод розв'язування білінійних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду

Квадратурний метод розв'язування поліноміального рівняння Вольтерри першого роду другого степеня.

Розглядається задача керування для нелінійної системи, яка полягає у знаходженні вхідного впливу $x(t)$, який відповідає заданому відгуку $y(t)$ [90, 189, 252, 246, 269, 273]. Розв'язання даної задачі розглянуто для знаходження розв'язку поліноміального інтегрального рівняння Вольтерри першого роду другого степеня [90, 100, 101, 252]:

$$y(t)=\int_0^t K_1(t,s)x(s)ds+\int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2\,. \tag{5.11}$$

Поставлену задачу пропонується розв'язувати шляхом заміни інтегралів квадратурними формулами. Це дозволяє отримати ряд переваг, зокрема, простоту реалізації та високу стійкість обчислювальних алгоритмів за рахунок регуляризуючих властивостей вибору кроку квадратури [47, 251, 252].

<u>Метод лівих прямокутників</u>. Застосувавши до (5.11) метод квадратур [47], причому, інтеграл $\int_0^t K_1(t,s)x(s)ds$ апроксимується методом трапецій, а подвійний інтеграл $\int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2$ – методом лівих прямокутників. Для $x(t_i)$ отримано наступне рекурентне співвідношення [101]:

$$x(t_i)=\left(\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_i)\right)^{-1}\left(y(t_i)-\frac{hK_1(t_i,t_0)x(t_0)}{2}-\sum_{j=1}^{i-1}hK_1(t_i,t_j)x(t_j)-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{g=0}^{i-1}h^2K_2(t_i,t_j,t_g)x(t_j)x(t_g)\right),$$

де $i=\overline{1..n}$, $h=t_i-t_{i-1}$. Значення в початковій точці t_0 отримуємо після диференціювання (5.11) по t [252]. Отже,

$$y'_t(t)=\int_0^t \frac{\partial K_1(t,s)}{\partial t}x(s)ds+K_1(t,s)x(t)+$$
$$+\int_0^t\int_0^t \frac{\partial K_2(t,s_1,s_2)}{\partial t}x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2+$$
$$+\int_0^t K_2(t,s_1,t)x(s_1)ds_1+\int_0^t K_2(t,t,s_2)x(s_2)ds_2,$$

звідки для $t=0$ і $K_1(0,0)\neq 0$

$$x(t_0)=\frac{y'_t(t_0)}{K_1(t_0,t_0)}.$$

<u>Метод трапецій</u>. Застосувавши до (5.11) метод трапецій [47] отримано [101]:

$$\begin{gathered}
y(t_i)=\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_i)x(t_i)+\sum_{j=1}^{i-1}hK_1(t_i,t_j)x(t_j)+\\
+\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_0)x(t_0)+\frac{1}{4}h^2K_2(t_i,t_0,t_0)x(t_0)x(t_0)+\\
+\frac{1}{2}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\left(K_2(t_i,t_{0,},t_j)+K_2(t_i,t_{j,},t_0)\right)x(t_0)x(t_j)+\\
+h^2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{g=1}^{i-1}K_2(t_i,t_{j,},t_g)x(t_j)x(t_g)+\\
+\frac{1}{4}h^2\left(K_2(t_i,t_i,t_0)+K_2(t_i,t_0,t_i)\right)x(t_0)x(t_i)+\\
+\frac{1}{2}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\left(K_2(t_i,t_{i,},t_j)+K_2(t_i,t_{j,},t_i)\right)x(t_j)x(t_i)+\\
+\frac{1}{4}h^2K_2(t_i,t_{i,},t_i)x(t_i)x(t_i),
\end{gathered}\tag{5.12}$$

де $i=\overline{1..n}$, $h=t_i-t_{i-1}$. Перепишемо (5.12) згрупувавши доданки відносно степенів шуканого $x(t_i)$:

$$y(t_i)=\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_i)x(t_i)+\sum_{j=1}^{i-1}hK_1(t_i,t_j)x(t_j)+$$
$$+\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_0)x(t_0)+\frac{1}{4}h^2K_2(t_i,t_0,t_0)x(t_0)x(t_0)+$$
$$+\frac{1}{2}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\Big(K_2(t_i,t_{0,},t_j)+K_2(t_i,t_{j,},t_0)\Big)x(t_0)x(t_j)+$$
$$+h^2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{g=1}^{i-1}K_2(t_i,t_{j,},t_g)x(t_j)x(t_g)+ \tag{5.13}$$
$$+\frac{1}{4}h^2\Big(K_2(t_i,t_i,t_0)+K_2(t_i,t_0,t_i)\Big)x(t_0)x(t_i)+$$
$$+\frac{1}{2}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\Big(K_2(t_i,t_{i,},t_j)+K_2(t_i,t_{j,},t_i)\Big)x(t_j)x(t_i)+$$
$$+\frac{1}{4}h^2K_2(t_i,t_{i,},t_i)x(t_i)x(t_i),$$

Введемо позначення:

$$A_i=\frac{1}{4}h^2K_2(t_i,t_{i,},t_i), \tag{5.14}$$

$$B_i=\frac{1}{4}h^2\Big(K_2(t_i,t_i,t_0)+K_2(t_i,t_0,t_i)\Big)x(t_0)+$$
$$+\frac{1}{2}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\Big(K_2(t_i,t_{i,},t_j)+K_2(t_i,t_{j,},t_i)\Big)x(t_j)+ \tag{5.15}$$
$$+\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_i),$$

$$C_i=\sum_{j=1}^{i-1}hK_1(t_i,t_j)x(t_j)+$$
$$+\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_0)x(t_0)+\frac{1}{4}h^2K_2(t_i,t_0,t_0)x(t_0)x(t_0)+$$
$$+\frac{1}{2}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\Big(K_2(t_i,t_{0,},t_j)+K_2(t_i,t_{j,},t_0)\Big)x(t_0)x(t_j)+ \tag{5.16}$$
$$+h^2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{g=1}^{i-1}K_2(t_i,t_{j,},t_g)x(t_j)x(t_g).$$

Тоді (5.13) з врахуванням позначень (5.14)–(5.16) має вигляд:

$$A_i x_i^2 + B_i x_i + C_i = 0. \tag{5.17}$$

Методи розв'язування нелінійного рівняння.

Після зведення (5.12) до вигляду (5.17) постає задача розв'язування системи нелінійних рівнянь. В даній системі всі рівняння є незалежними одне від одного. Система рівнянь (5.17) має трикутну форму та дозволяє послідовно визначити наближені значення за допомогою ітераційних методів. Для розв'язування задачі за початкове наближення пропонується використовувати корені попередніх рівнянь.

Вираз (5.17) є системою квадратних рівнянь. Як відомо довільне квадратне рівняння має два кореня, серед яких необхідно вибрати той, який буде відповідати певним додатковим умовам. Для вибору кореня застосовується наступний алгоритм: якщо $\left|x_{i-1} - x_{i_1}\right| \geq \left|x_{i-1} - x_{i_2}\right|$ то $x_i = x_{i_2}$, в іншому випадку $x_i = x_{i_1}$.

Такий же підхід можна застосовувати у розв'язуванні поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду вищих порядків. Тоді буде отримано систему нелінійних рівнянь поліноміального виду, причому кількість розв'язків даних рівнянь буде відповідати їх порядку. В такому випадку застосовується аналогічне порівняння для вибору оптимального кореня.

В роботі використано ряд поширених методів, які застосовуються для розв'язування нелінійних рівнянь, а саме: метод ланцюгових дробів, метод Ньютона, метод хорд, метод простої ітерації, метод дискримінанта (точний метод).

Застосовуючи точний метод корені обчислюється як [16]:

$$x_{i_1} = \frac{-B_i + \sqrt{B_i^2 - 4A_iC_i}}{2A_i},\; x_{i_2} = \frac{-B_i - \sqrt{B_i^2 - 4A_iC_i}}{2A_i}.$$

У розв'язуванні рівняння (5.17) методом ланцюгових дробів наближений розв'язок представляється у вигляді [187]:

$$x_{i_j} = \cfrac{-C_i}{A_i \cfrac{-C_i}{A_i \cfrac{-C_i}{A_i x_{i_{j-3}} + B_i} + B_i} + B_i}.$$

....

Ітераційний процес продовжується багаторазово до виконання умови

$$\left| x_{i_j} - x_{i_{j-1}} \right| < \varepsilon, \qquad (5.18)$$

де ε – задана точність обчислень; $x_{i_j}, x_{i_{j-1}}$ – наближені значення кореня рівняння.

У застосуванні методу Ньютона (дотичних) [16] розв'язок шукається на основі формули

$$x_{i_j} = x_{i_{j-1}} - \frac{f(x_{i_{j-1}})}{f'(x_{i_{j-1}})}.$$

Ітераційний процес завершується за виконання умови (5.18).

У застосуванні методу хорд [16] розв'язки шукаються на основі рівняння прямої, ітераційний процес визначається формулою:

$$x_{i_j} = x_{i_{j-1}} - \frac{f(x_{i_{j-1}})(b - x_{i_{j-1}})}{f(b) - f(x_{i_{j-1}})}.$$

Процес стягування хордою продовжується багаторазово, поки не одержано наближений корінь із заданою точністю (5.18).

У застосуванні методу простої ітерації початкове рівняння $f(x) = 0$ замінюється еквівалентним йому рівнянням $x = \varphi(x)$. У використанні методу простих ітерацій головною операцією є вибір функції $\varphi(x)$ у рівнянні $x = \varphi(x)$, яку варто підібрати так, щоб $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, причому швидкість збіжності послідовності $\{x_{i_n}\}$ до кореня ξ тим вища, чим менше значення q [16].

Обчислювальні експерименти. Дослідження ефективності запропонованого підходу відновлення вхідних сигналів нелінійних динамічних об’єктів із використанням різних методів розв’язування систем квадратних рівнянь здійснювалось на основі методу обчислювальних експериментів. Зокрема, для розв’язування поліноміального інтегрального рівняння Вольтерри першого роду другого степеня (2.74).

На рис. 5.21 зображено графік вхідного сигналу. Графік отриманого вихідного сигналу зображено на рис. 5.22. В обчислювальних експериментах даний сигнал розглядався як базовий, на основі якого відновлювався вхідний сигнал із використанням різних методів розв’язування системи нелінійних рівнянь. Відновлений сигнал (розв’язання з вибором точного кореня алгебраїчного нелінійного рівняння) та його похибка зображені у вигляді графіків на рис. 5.23.

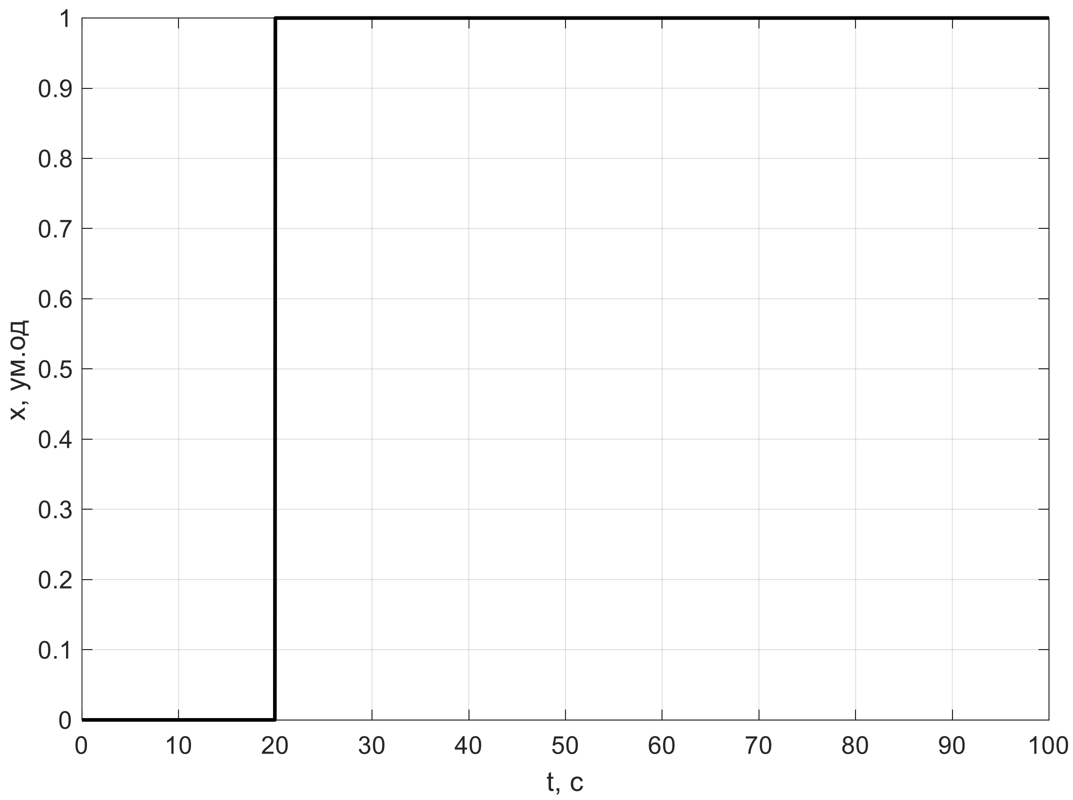


Рис. 5.21. Графік заданого вхідного сигналу

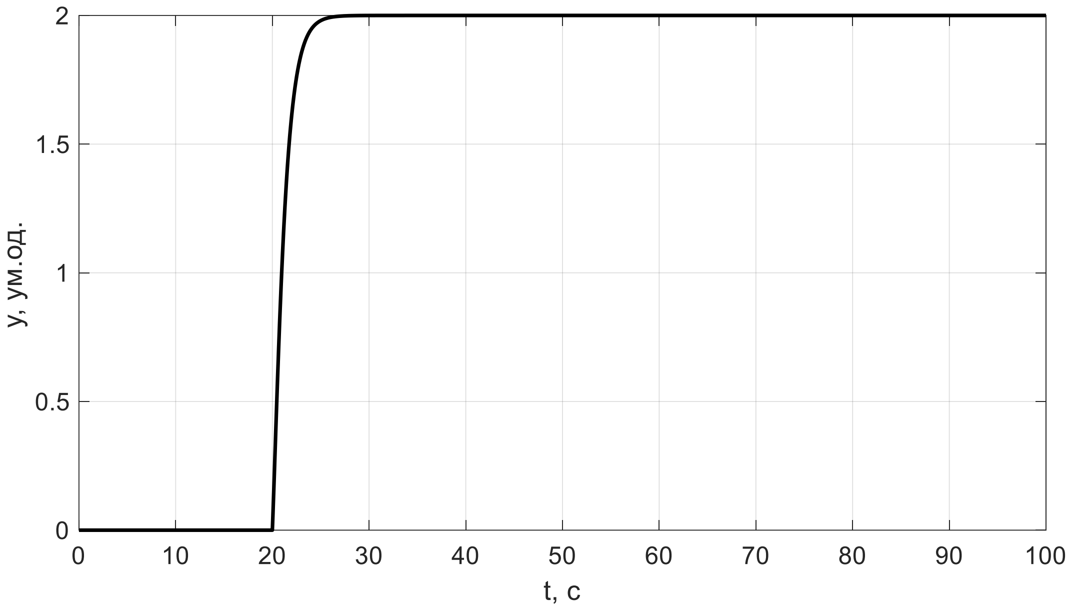


Рис. 5.22. Графік вихідного сигналу

Отриманий відновлений сигнал із використанням ланцюгових дробів та його похибка зображені на рис. 5.24. У використанні методу дотичних отримано відновлений сигнал та похибку відновлення, які зображено на рис. 5.25. Відновлений сигнал на основі використання методу хорд та відповідна похибка зображені на рис. 5.26. Використання методу простої ітерації дозволило отримати розв'язок поліноміального рівняння, який зображено на рис. 5.27.

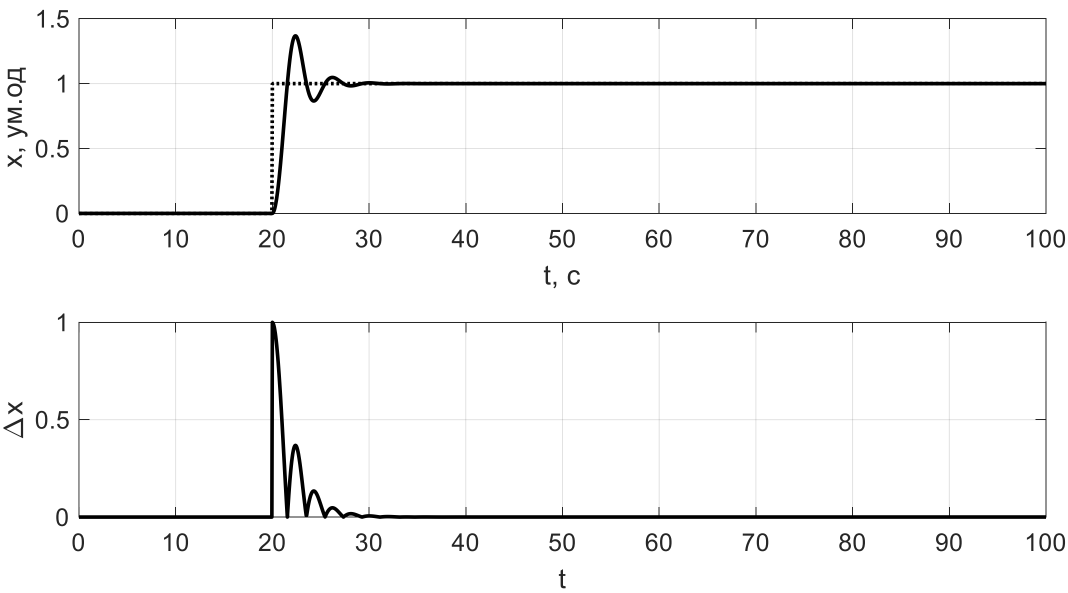


Рис. 5.23. Графіки відновленого сигналу у випадку використання методу точного визначення значення кореня квадратного рівняння (зверху) та похибки обчислень (знизу)

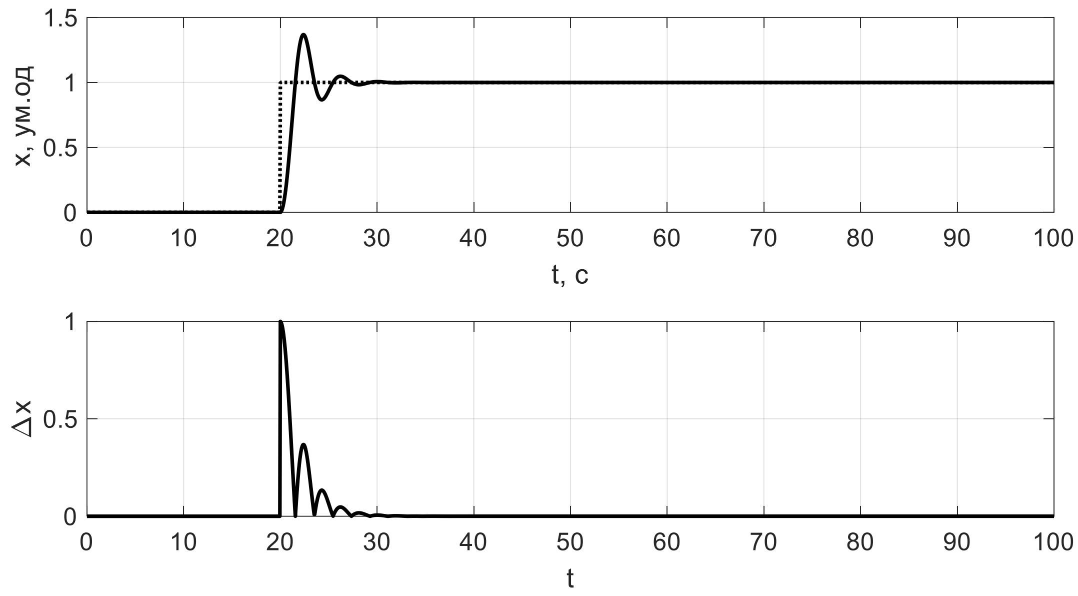


Рис. 5.24. Графіки відновленого сигналу у випадку використання методу ланцюгових дробів для розв’язування квадратного рівняння (зверху) та похибки обчислень (знизу)

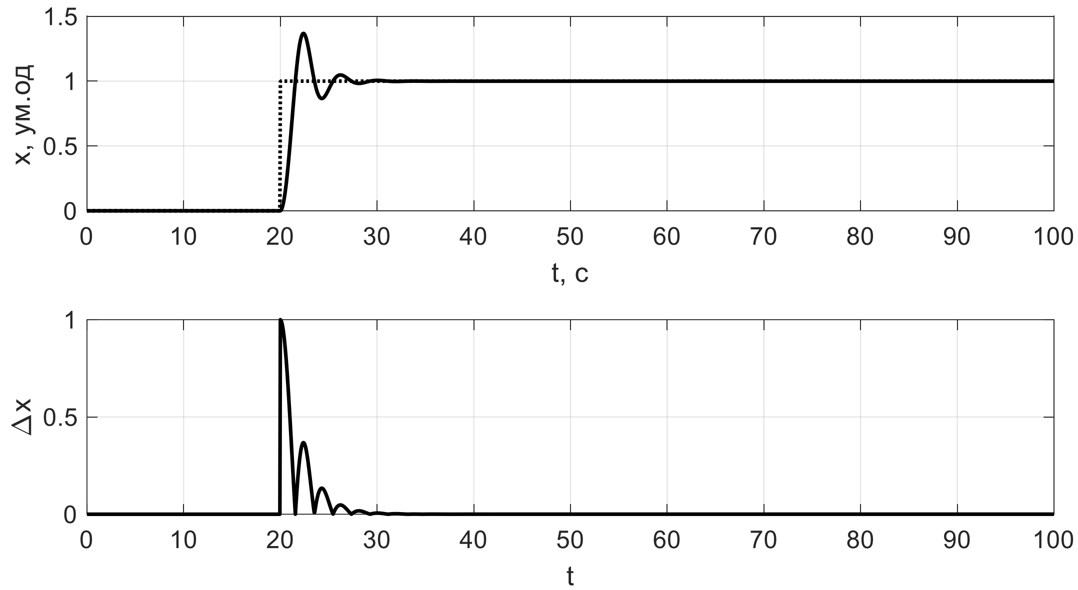


Рис. 5.25. Графіки відновленого сигналу у випадку використання методу дотичних для розв’язування квадратного рівняння (зверху) та похибки обчислень (знизу)

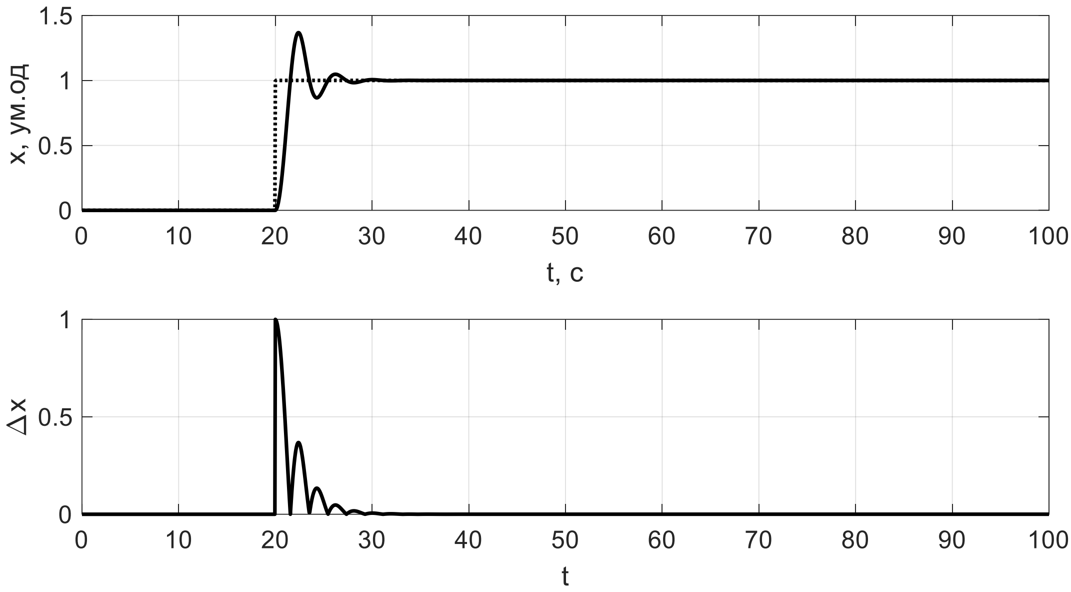


Рис. 5.26. Графіки відновленого сигналу у випадку використання методу хорд для розв’язування квадратного рівняння (зверху) та похибки обчислень (знизу)

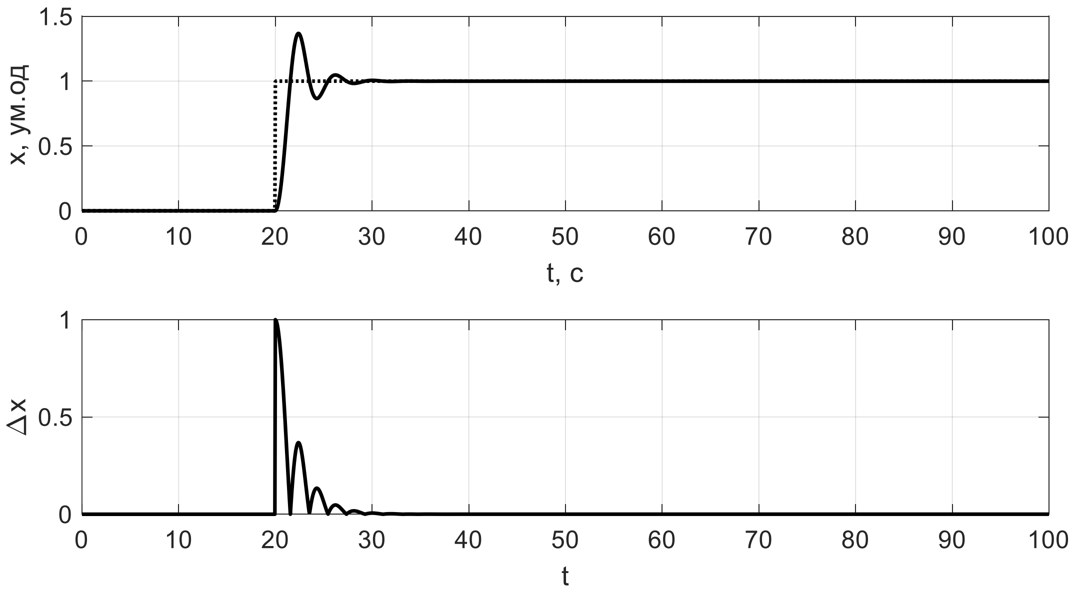


Рис. 5.27. Графіки відновленого сигналу у випадку використання методу простої ітерації для розв’язування квадратного рівняння (зверху) та похибки обчислень (знизу)

Отримані результати показали, що запропонований метод можна ефективно використовувати у відновленні сигналів на вході нелінійних динамічних систем, які описуються частинною сумою інтегро-степеневого ряду Вольтерри із двома членами. Використання різних методів розв’язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь дозволяють отримати практично однакові розв’язки. Тому вибір методу не є ключовим у розв’язуванні поставлених задач, але наявність різних методів та їх одночасне використання дозволить здійснювати контроль за правильністю розв’язків, особливо це стосується поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду із сингулярними ядрами.

5.5. Регуляризаційний метод розв’язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду

Відновлення сигналів, які проходять через нелінійні динамічні об’єкти є некоректною задачею, а застосування методів відновлення, представлених вище, для вхідних сигналів із завадами не дозволяє отримувати результати із необхідною точністю. Пропонуємо застосовувати, аналогічно до лінійних систем, диференціальні регуляризаційні оператори [90, 246]. На основі методу обчислювальних експериментів виявлено, що найкращі результати дає використання диференціального регуляризаційного оператора першого порядку (аналогічно до лінійних систем). Тоді розв’язування поліноміального рівняння Вольтерри першого роду зводиться до розв’язування наступного рівняння:

$$\alpha \frac{dx}{dt} + \int_0^t K_1(t,s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t,s_1,s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1 ds_2 = y(t), \tag{5.19}$$

де α – параметр регуляризації.

Застосувавши до (5.19) метод трапецій [47] та різницеву формулу першого порядку, отримано [90, 246]:

$$\alpha\frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{h}+\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_i)x(t_i)+\sum_{j=1}^{i-1}hK_1(t_i,t_j)x(t_j)+$$
$$+\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_0)x(t_0)+\frac{1}{4}h^2K_2(t_i,t_0,t_0)x(t_0)x(t_0)+$$
$$+\frac{1}{2}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\Big(K_2(t_i,t_{0,},t_j)+K_2(t_i,t_{j,},t_0)\Big)x(t_0)x(t_j)+$$
$$+h^2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{g=1}^{i-1}K_2(t_i,t_{j,},t_g)x(t_j)x(t_g)+ \qquad (5.20)$$
$$+\frac{1}{4}h^2\Big(K_2(t_i,t_i,t_0)+K_2(t_i,t_0,t_i)\Big)x(t_0)x(t_i)+$$
$$+\frac{1}{2}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\Big(K_2(t_i,t_{i,},t_j)+K_2(t_i,t_{j,},t_i)\Big)x(t_j)x(t_i)+$$
$$+\frac{1}{4}h^2K_2(t_i,t_{i,},t_i)x(t_i)x(t_i)=y(t_i),$$

де $i=\overline{1..n}$, $h=t_i-t_{i-1}$. Перепишемо (5.20) згрупувавши відносно степенів шуканого $x(t_i)$:

$$\frac{1}{4}h^2K_2(t_i,t_{i,},t_i)x(t_i)x(t_i)+$$
$$+\Bigg(\frac{1}{4}h^2\Big(K_2(t_i,t_i,t_0)+K_2(t_i,t_0,t_i)\Big)x(t_0)+$$
$$+\frac{1}{2}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\Big(K_2(t_i,t_{i,},t_j)+K_2(t_i,t_{j,},t_i)\Big)x(t_j)+$$
$$+\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_i)+\frac{\alpha}{h}\Bigg)x(t_i)+\sum_{j=1}^{i-1}hK_1(t_i,t_j)x(t_j)+ \qquad (5.21)$$
$$+\frac{1}{2}hK_1(t_i,t_0)x(t_0)+\frac{1}{4}h^2K_2(t_i,t_0,t_0)x(t_0)x(t_0)+$$
$$+\frac{1}{2}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\Big(K_2(t_i,t_{0,},t_j)+K_2(t_i,t_{j,},t_0)\Big)x(t_0)x(t_j)+$$
$$+h^2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{g=1}^{i-1}K_2(t_i,t_{j,},t_g)x(t_j)x(t_g)-\frac{\alpha}{h}x(t_{i-1})-y(t_i)=0.$$

Введемо позначення:

$$A_i = \frac{1}{4} h^2 K_2\left(t_i, t_{i,}, t_i\right), \tag{5.22}$$

$$\begin{gathered} B_i = \frac{1}{4} h^2 \left(K_2\left(t_i, t_i, t_0\right) + K_2\left(t_i, t_0, t_i\right)\right) x\left(t_0\right) + \\ + \frac{1}{2} h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \left(K_2\left(t_i, t_{i,}, t_j\right) + K_2\left(t_i, t_{j,}, t_i\right)\right) x\left(t_j\right) + \frac{1}{2} h K_1\left(t_i, t_i\right) + \frac{\alpha}{h}, \end{gathered} \tag{5.23}$$

$$\begin{gathered} C_i = \sum_{j=1}^{i-1} h K_1\left(t_i, t_j\right) x\left(t_j\right) + \\ + \frac{1}{2} h K_1\left(t_i, t_0\right) x\left(t_0\right) + \frac{1}{4} h^2 K_2\left(t_i, t_0, t_0\right) x\left(t_0\right) x\left(t_0\right) + \\ + \frac{1}{2} h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \left(K_2\left(t_i, t_{0,}, t_j\right) + K_2\left(t_i, t_{j,}, t_0\right)\right) x\left(t_0\right) x\left(t_j\right) + \\ + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{g=1}^{i-1} K_2\left(t_i, t_{j,}, t_g\right) x\left(t_j\right) x\left(t_g\right) - \frac{\alpha}{h} x\left(t_i\right) - y(t_i). \end{gathered} \tag{5.24}$$

Тоді (5.21) з врахуванням позначень (5.22), (5.23), (5.24) має вигляд:

$$A_i x_i^{\,2} + B_i x_i + C_i = 0. \tag{5.25}$$

Квадратні рівняння системи (5.25) розв’язуються послідовно, а для вибору одного з коренів застосовується наступний алгоритм: якщо $\left|x_{i-1} - x_{i_1}\right| \geq \left|x_{i-1} - x_{i_2}\right|$, то $x_i = x_{i_2}$, в іншому випадку $x_i = x_{i_1}$. У застосуванні ітераційних методів за початкове наближення береться корінь попереднього рівняння [251].

Модельні експерименти. Дослідження ефективності даного підходу здійснювалось у відновленні сигналу, який проходить через динамічну систему представлену на рис. 3.11. В даній системі врахована нелінійність другого порядку.

Розглянуто випадки, коли лінійна частина задана різними типами моделей, а саме – інерційною або коливальною ланками для лінійних динамічних об’єктів із зосередженими параметрами, напівінтегральною, напівінерціною ланками або ланкою напівзапізнення для об’єктів із розподіленими параметрами [90, 246].

У випадку інерційної ланки маємо наступну модель:

$$\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \int_0^t e^{-s} x(t-s)\,ds + \int_0^t \int_0^t e^{-(s_1+s_2)} x(t-s_1)\,x(t-s_2)\,ds_1 ds_2 = y(t). \qquad (5.26)$$

Результати обчислювальних експериментів подано на рисунках нижче. Вхідний сигнал має вигляд поданий у вигляді графіка на рис. 5.28. Крок моделювання у експериментах – 0.1. На рис. 5.29 подано графік сигналу на основі якого відновлюється сигнал при накладанні 1% шуму, на рис. 5.30 – графік відновленого сигналу у порівнянні із базовим, на рис. 5.31 – графік похибки відновлення.

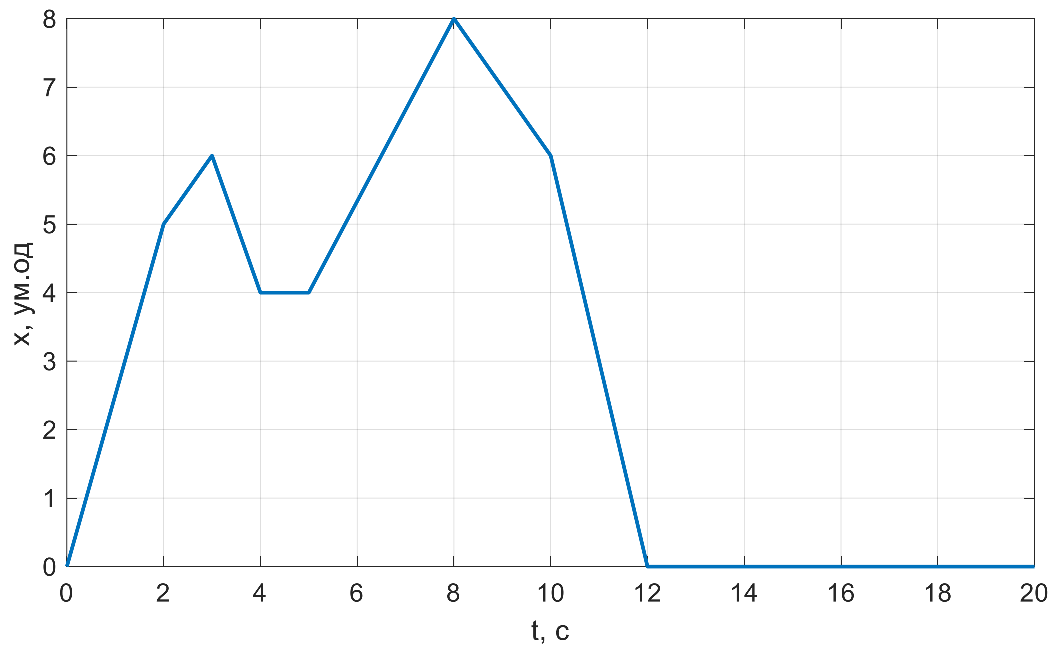


Рис. 5.28. Графік вхідного сигналу

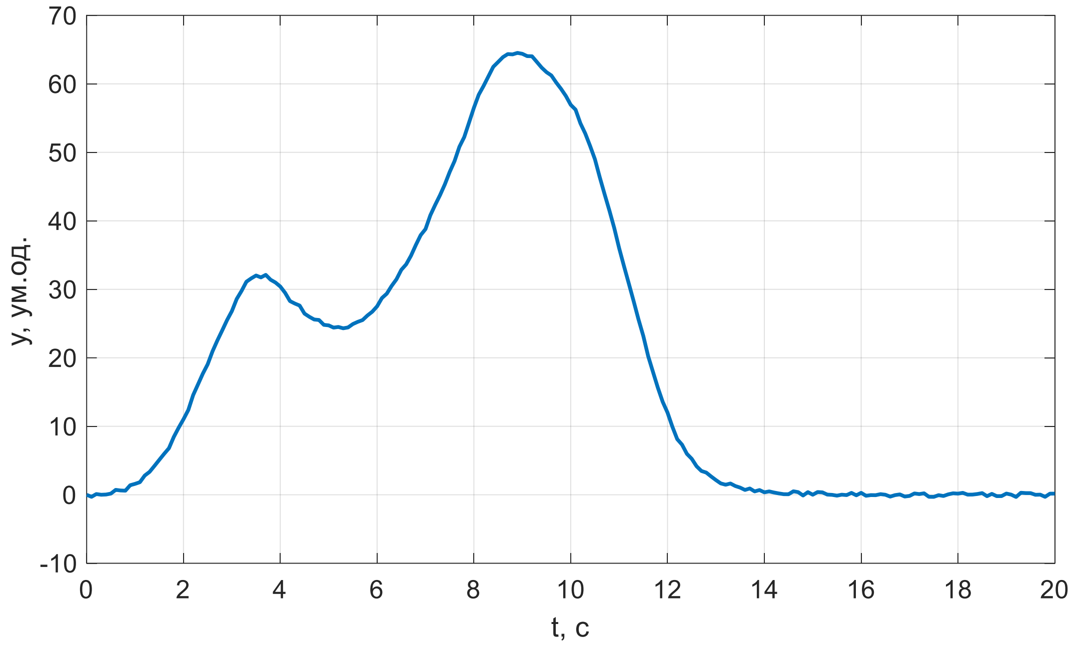


Рис. 5.29. Графік сигналу на виході нелінійної системи, яка описується моделлю *(5.26)*

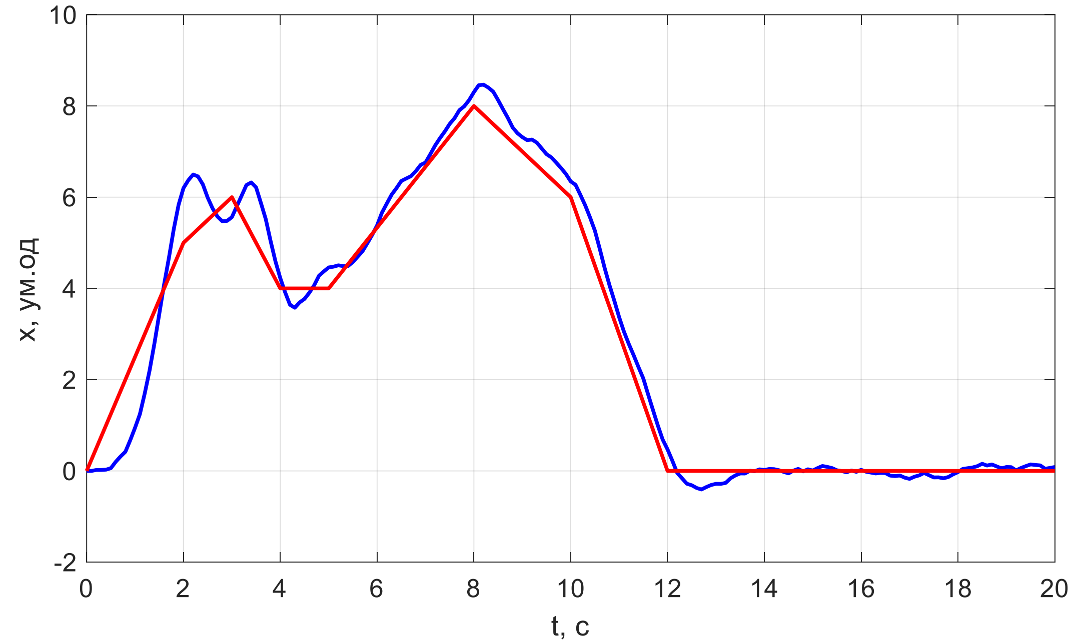


Рис. 5.30. Графіки вхідного сигналу

(——— – точний, ——— – обчислений)

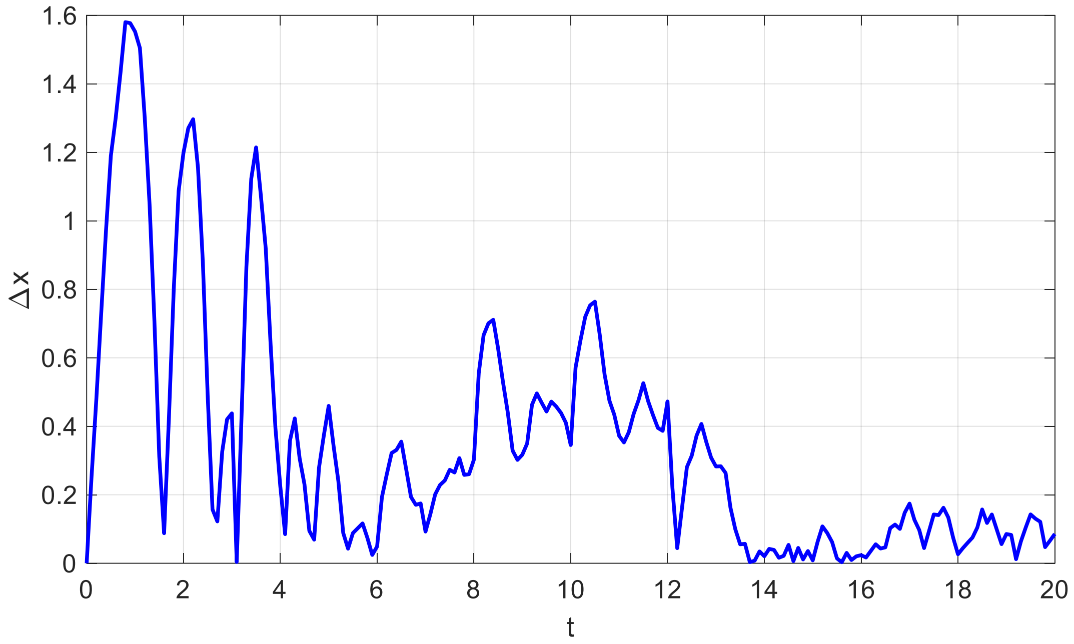


Рис. 5.31. Графік похибки відновлення

У випадку, коли лінійна частина задається коливальною ланкою, маємо наступну модель:

$$\frac{1}{\omega}\int_0^t e^{\sigma s}\sin(\omega s)x(t-s)ds+$$
$$+\frac{1}{\omega^2}\int_0^t\int_0^t e^{\sigma(s_1+s_2)}\left(\sin(\omega s_1)+\sin(\omega s_2)\right)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2=y(t). \tag{5.27}$$

Застосування даної моделі для відновлення сигналу, у зв'язку з тим що ядра інтегрального рівняння в початковій точці дорівнюють нулеві, не вдається отримати точні значення відновленого сигналу, тому пропонується виконати диференціювання виразу (5.27):

$$\frac{1}{\omega}\int_0^t e^{\sigma s}\left(\sin(\omega s)+\cos(\omega s)\right)x(t-s)ds+$$
$$+\frac{1}{\omega^2}\int_0^t\int_0^t e^{\sigma(s_1+s_2)}((\sin(\omega s_1)+\cos(\omega s_1))\sin(\omega s_2)+$$
$$+(\sin(\omega s_2)+\cos(\omega s_2))\sin(\omega s_1))x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2=\frac{dy(t)}{dt}.$$

Застосувавши регуляризаційний оператор отримаємо модель для відновлення сигналу:

$$\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{\sigma s}\left(\sin(\omega s)+\cos(\omega s)\right)x(t-s)\,ds +$$
$$+\frac{1}{\omega^2}\int_0^t\int_0^t e^{\sigma(s_1+s_2)}\left(\left(\sin(\omega s_1)+\cos(\omega s_1)\right)\sin(\omega s_2)+\right. \qquad (5.28)$$
$$\left.+\left(\sin(\omega s_2)+\cos(\omega s_2)\right)\sin(\omega s_1)\right)x(t-s_1)x(t-s_2)\,ds_1 ds_2 = \frac{dy(t)}{dt}.$$

На рис. 5.32 подано графік сигналу на основі якого відновлюється вхідний сигнал при наявності 1% шуму, на рис. 5.33 – графік відновленого сигналу, на рис. 5.34 – точність відновлення у вигляді графіка абсолютної похибки.

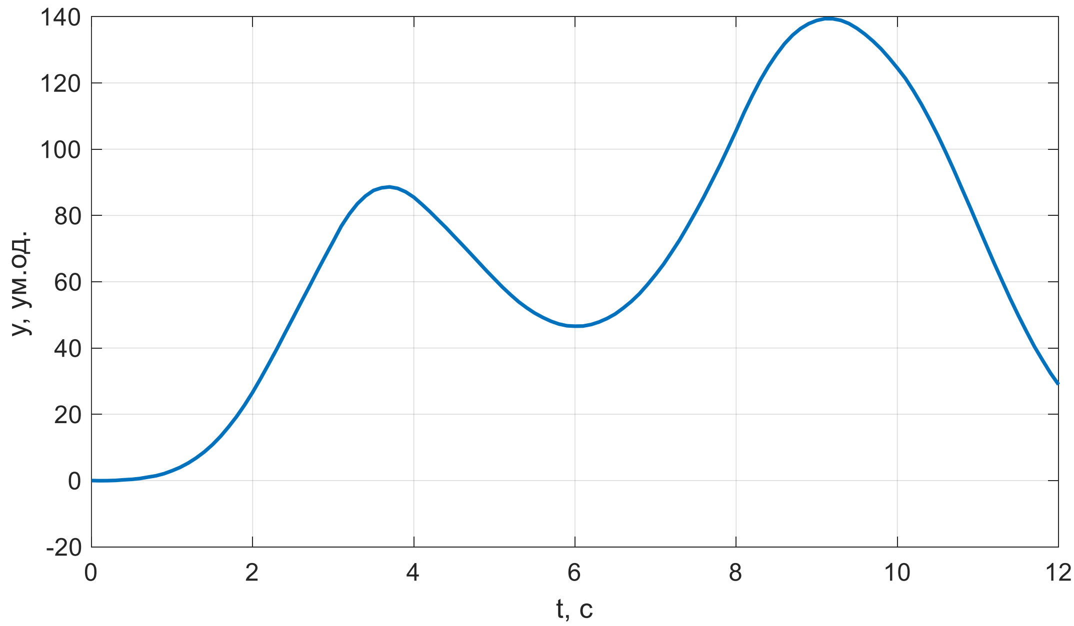


Рис. 5.32. Графік сигналу на виході нелінійної системи, яка описується моделлю *(5.28)*

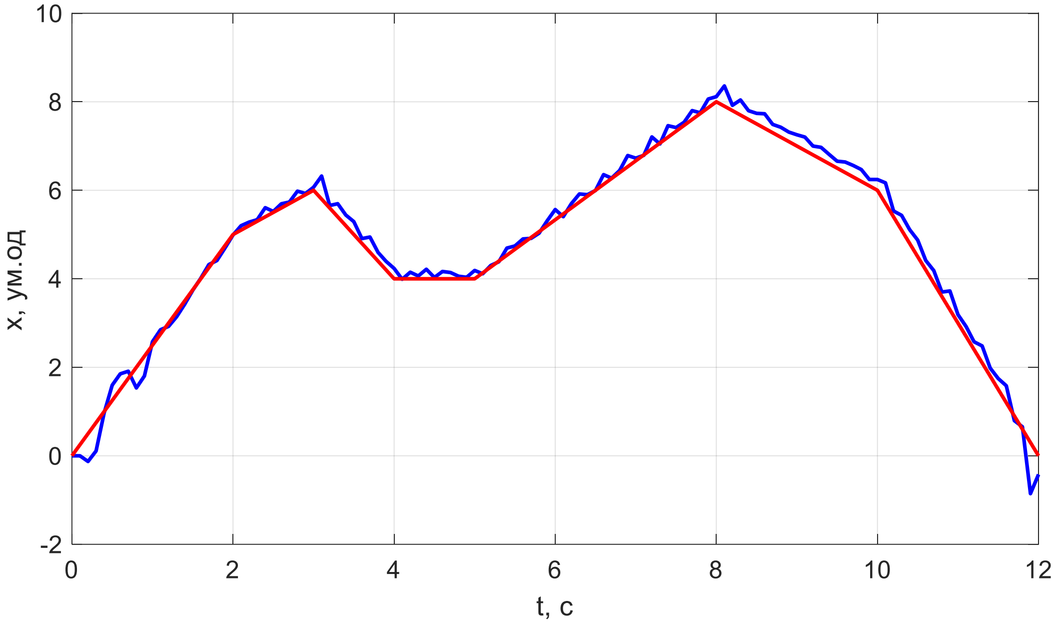


Рис. 5.33. Графіки відновленого сигналу

(——— – точний, ——— – наближений)

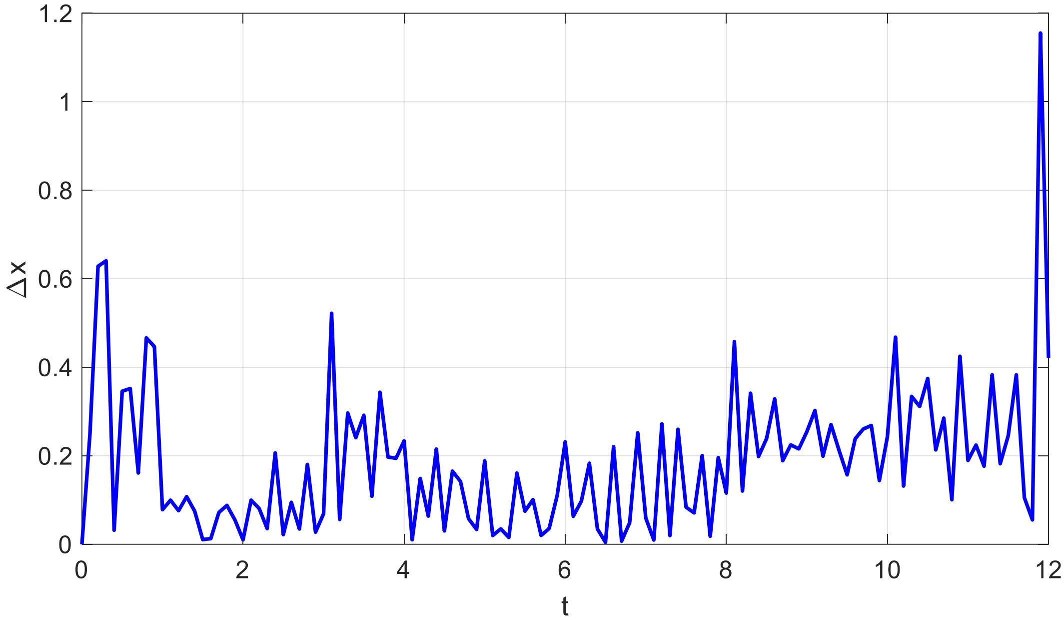


Рис. 5.34. Графік похибки відновлення

У випадку напівінтегральної ланки в лінійній частині на основі моделі (2.76) із застосуванням диференціального регуляризаційного оператора маємо наступну модель у вигляді інтегро-диференціального рівняння:

$$\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \int_0^t \frac{k}{\sqrt{\pi s}} x(t-s)\,ds + \\ + \int_0^t \int_0^t \frac{k^2}{\pi \sqrt{s_1 s_2}} x(t-s_1)\,x(t-s_2)\,ds_1 ds_2 = y(t). \tag{5.29}$$

Для числової реалізації даної моделі застосовується внутрішня регуляризація, оскільки в точці нуль ядра сингулярні, тоді на основі (5.29):

$$\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \int_0^t \frac{k}{\beta + \sqrt{\pi s}} x(t-s)\,ds + \\ + \int_0^t \int_0^t \frac{k^2}{\beta + \pi \sqrt{s_1 s_2}} x(t-s_1)\,x(t-s_2)\,ds_1 ds_2 = y(t). \tag{5.30}$$

Аналогічні заміни здійснюються і у моделях поданих нижче.

На рис. 5.35 наведено графік сигналу на основі якого відновлюється вхідний сигнал у випадку накладання шумових завад, на рис. 5.36 – графік відновленого сигналу, на рис. 5.37 – точність відновлення у вигляді графіка.

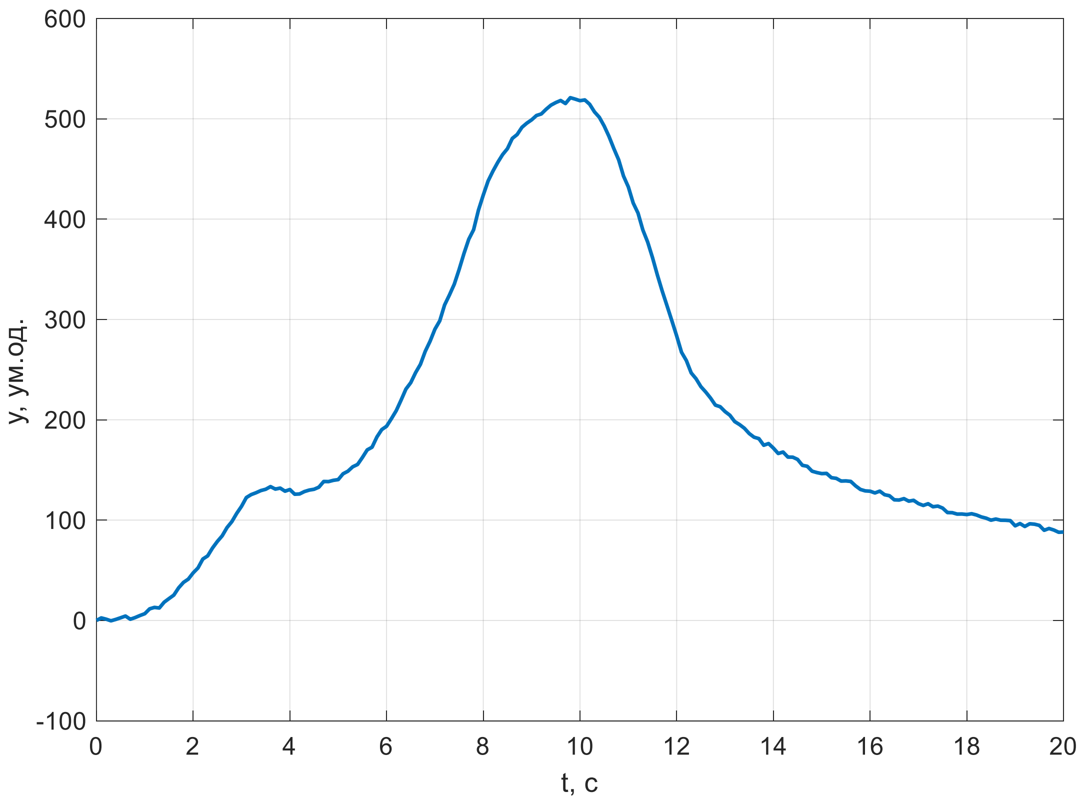


Рис. 5.35. Графік сигналу на виході нелінійної системи, яка описується моделлю *(5.30)*

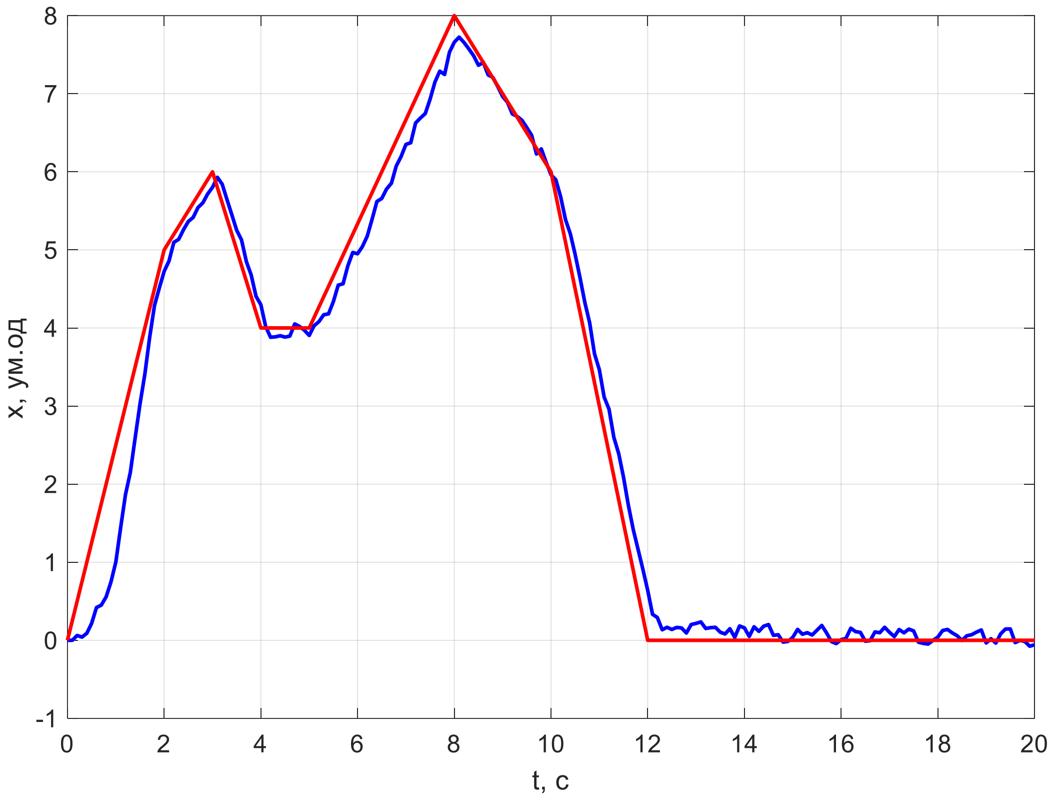


Рис. 5.36. Графіки вхідного сигналу

(———— – точний, ———— – наближений)

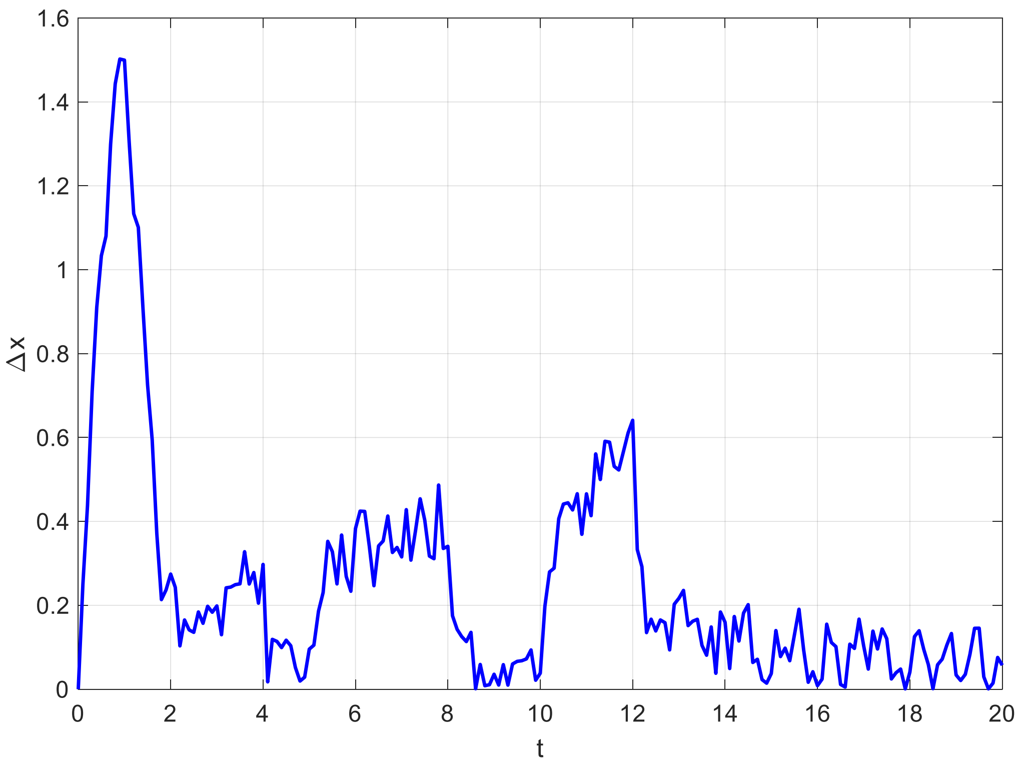


Рис. 5.37. Графік похибки відновлення

У випадку напівінерційної ланки в лінійній частині на основі моделі (2.77) із застосуванням диференціального регуляризаційного оператора та внутрішньої регуляризації маємо наступну модель у вигляді інтегро-диференціального рівняння:

$$\alpha\frac{dx(t)}{dt}+\int_0^t\frac{k}{T}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta+\pi ks}}-e^{\frac{s}{T}}erfc\sqrt{\frac{s}{T}}\right)x(t-s)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^t\frac{k^2}{T^2}\left(\sqrt{\frac{T}{\beta+\pi ks_1}}-e^{\frac{s_1}{T}}erfc\sqrt{\frac{s_1}{T}}\right)\times \tag{5.31}$$
$$\times\left(\sqrt{\frac{T}{\beta+\pi ks_2}}-e^{\frac{s_2}{T}}erfc\sqrt{\frac{s_2}{T}}\right)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1ds_2=y(t).$$

На рис. 5.38 наведено графік сигналу на основі якого відновлюється вхідний сигнал у випадку накладання шумових завад, на рис. 5.39 – графік відновленого сигналу, на рис. 5.40 – точність відновлення у вигляді графіка.

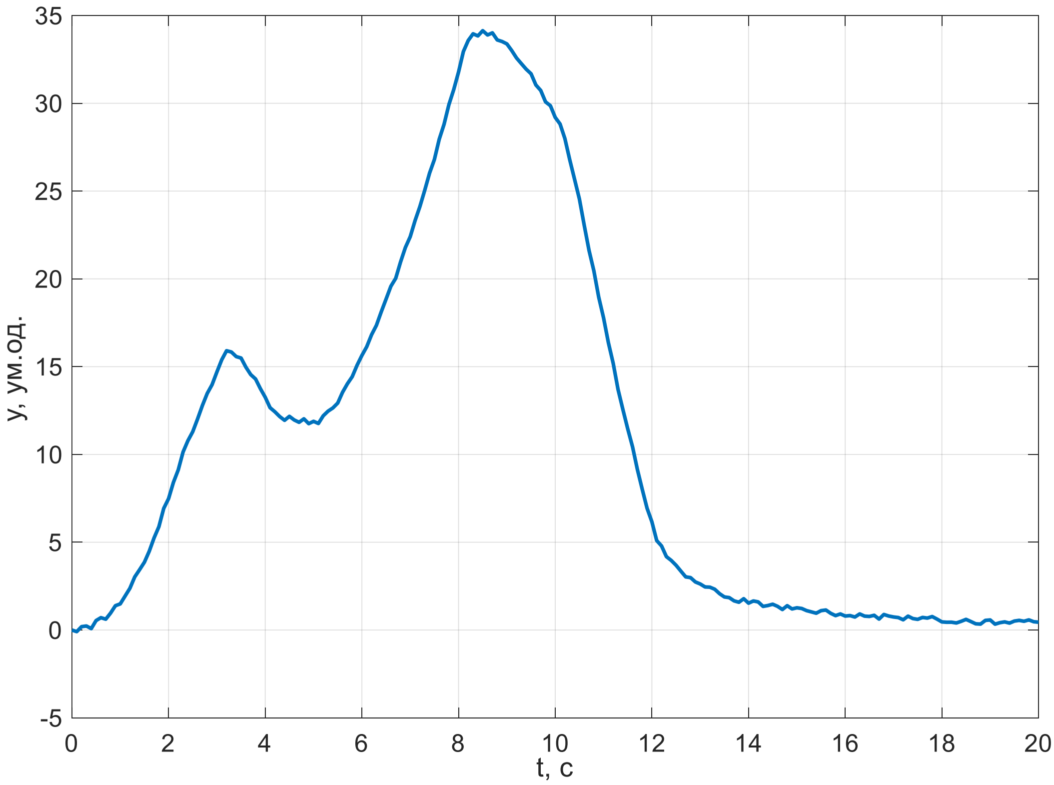


Рис. 5.38. Графік сигналу на виході нелінійної системи, яка описується моделлю *(5.31)*

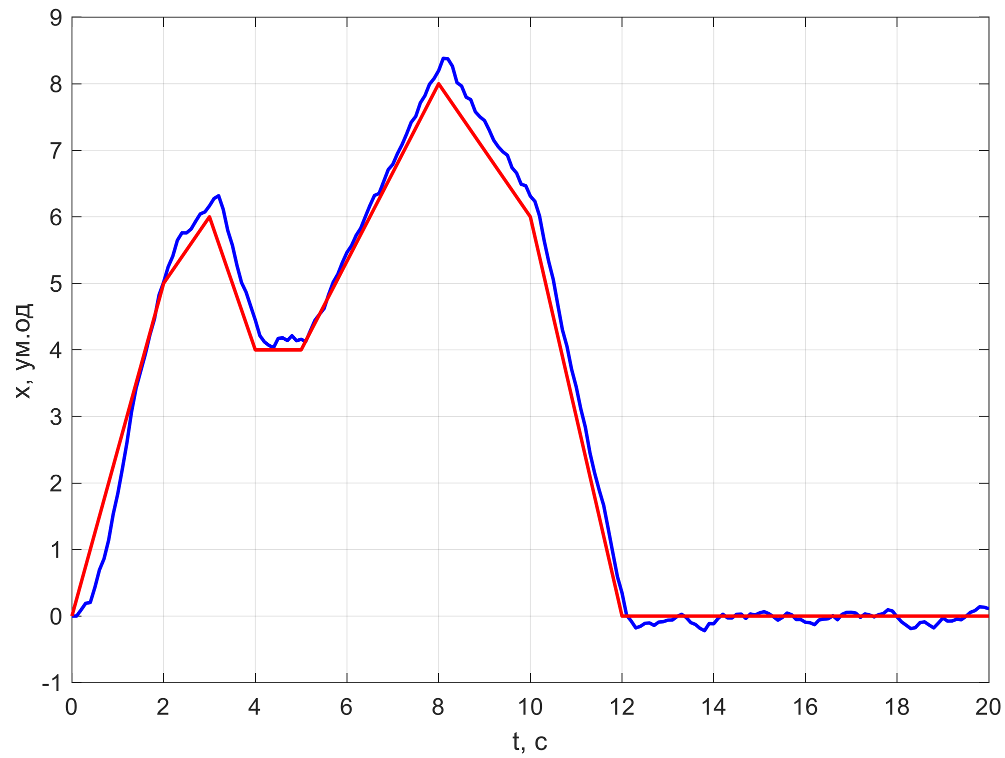


Рис. 5.39. Графіки вхідного сигналу

(———— – точний, ———— – наближений)

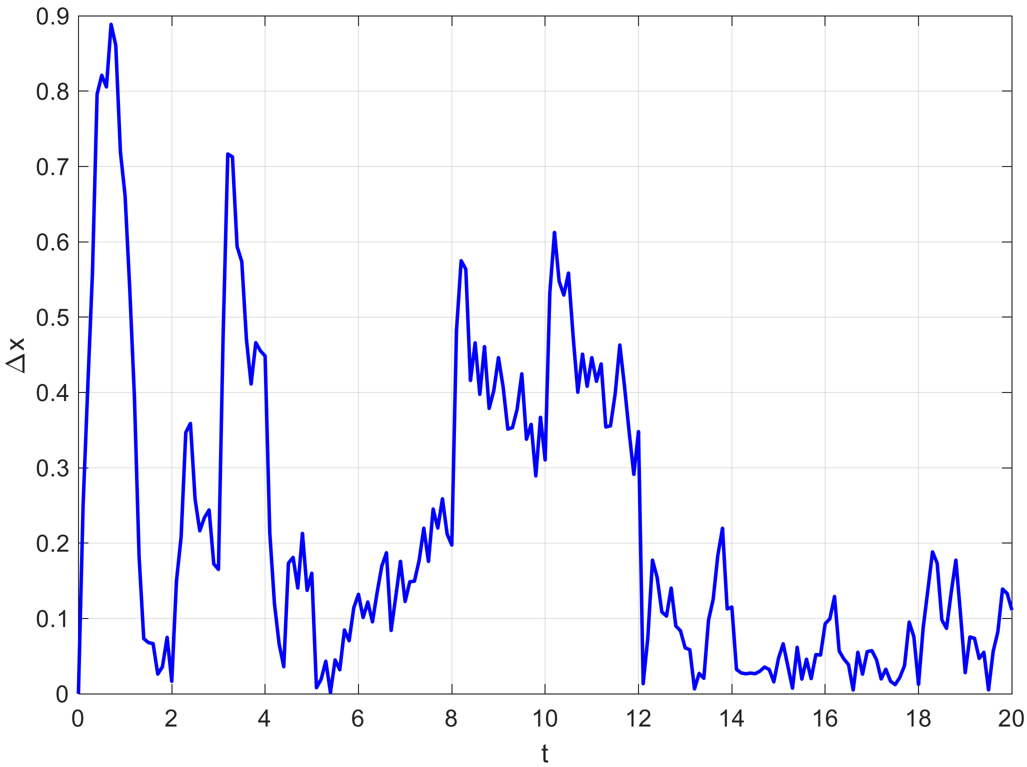


Рис. 5.40. Графік похибки відновлення

У випадку ланки напівзапізнення в лінійній частині на основі моделі (2.78) із застосуванням диференціального регуляризаційного оператора та внутрішньої регуляризації маємо наступну модель у вигляді інтегро-диференціального рівняння:

$$\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \int_0^t \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_0}{\beta + \pi(s)^3}} e^{-\frac{T_0}{\beta+4s}} x(t-s)\,ds + \\ + \int_0^t \int_0^t \frac{1}{4}\sqrt{\frac{T_0^2}{\beta + \pi^2 (s_1 s_2)^3}} e^{-\frac{T_0}{\beta+4s_1}-\frac{T_0}{\beta+4s_2}} x(t-s_1)\,x(t-s_2)\,ds_1 ds_2 = y(t). \tag{5.32}$$

На рис. 5.41 наведено графік сигналу на основі якого відновлюється вхідний сигнал при накладанні шумових завад, на рис. 5.42 – графік відновленого сигналу, на рис. 5.43 – точність відновлення у вигляді графіка.

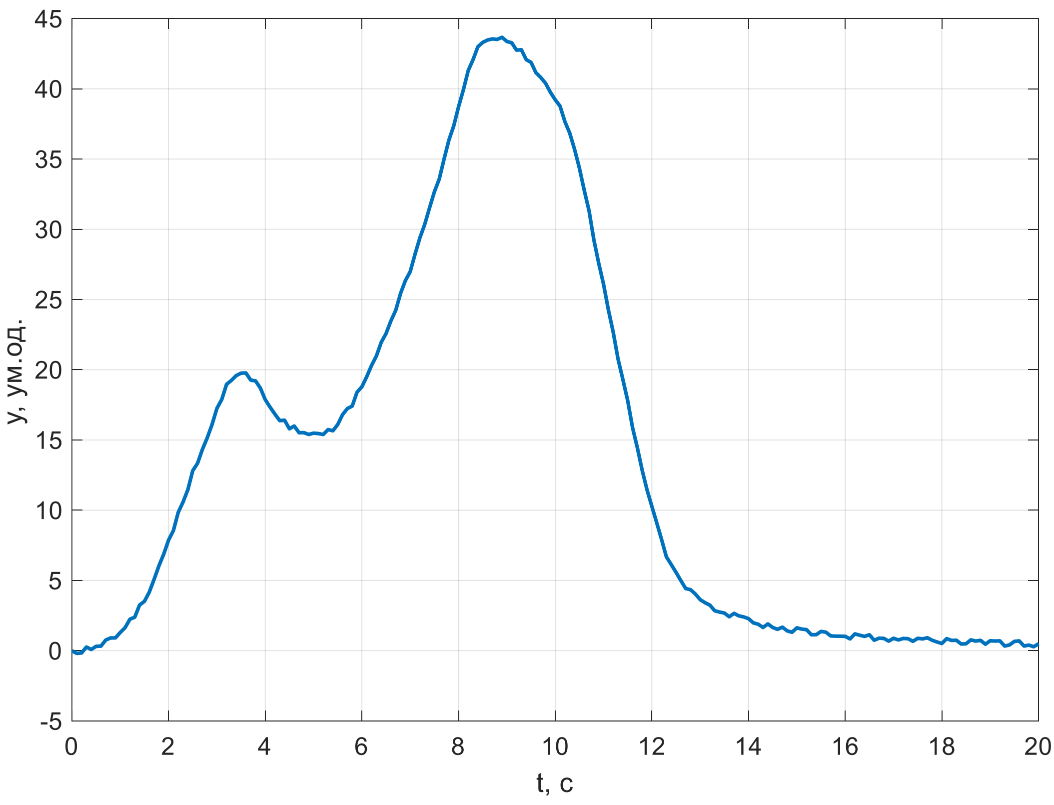


Рис. 5.41. Графік сигналу на виході нелінійної системи, яка описується моделлю *(5.32)*

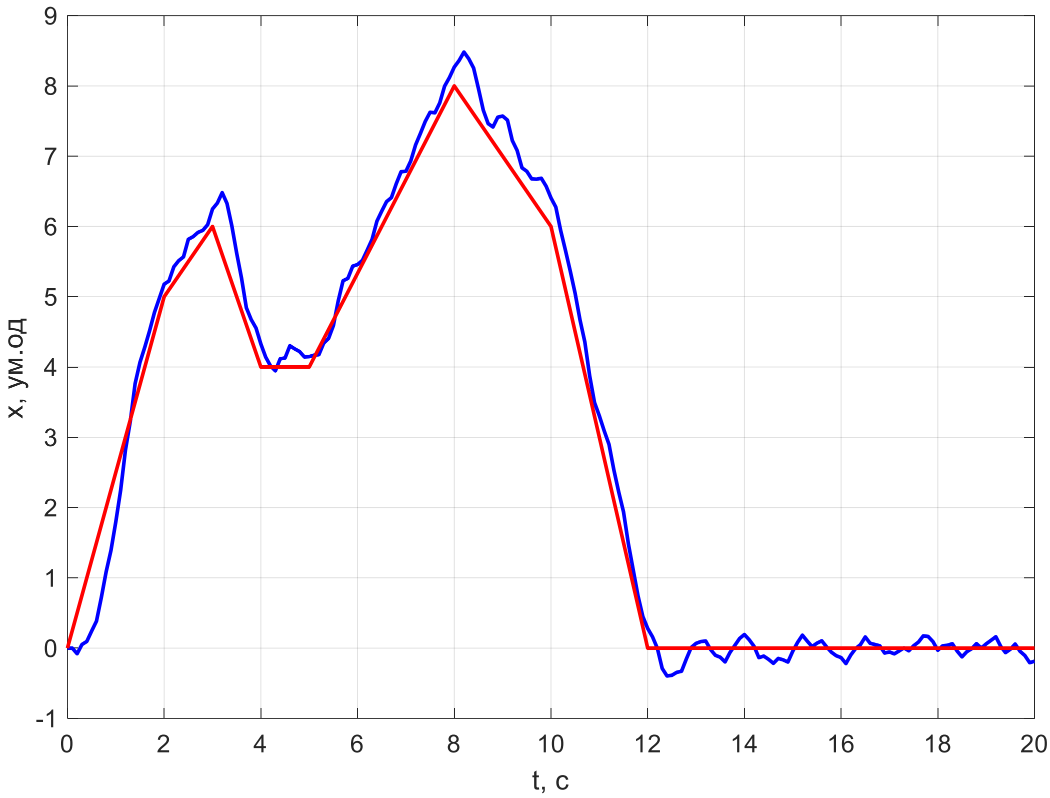


Рис. 5.42. Графіки вхідного сигналу

(——— – точний, ——— – наближений)

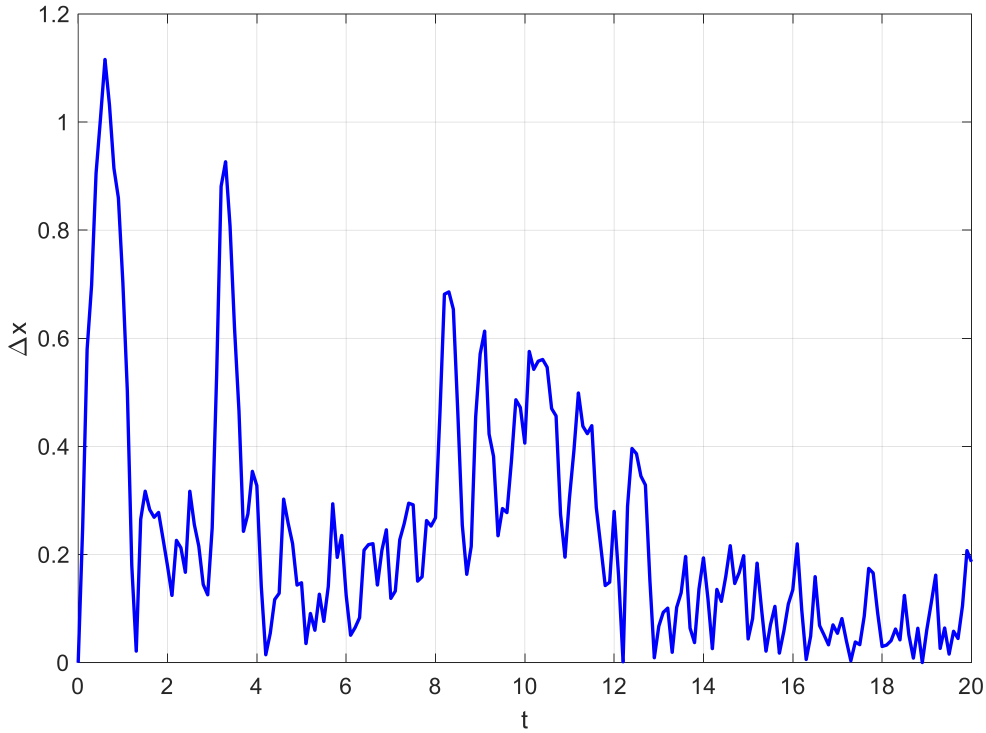


Рис. 5.43. Графік похибки відновлення

Висновки до розділу 5

1. Набув подальшого розвитку метод регуляризації у розв’язуванні інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду шляхом введення диференціального регуляризаційного оператора та параметра внутрішньої регуляризації сингулярного ядра. Розроблено алгоритми для розв’язування отриманих інтегро-диференціальних рівнянь на основі квадратурних та різницевих методів. Обчислювальні експерименти показали ефективність запропонованого підходу в умовах наявності шумів у вхідних сигналах.

2. Набув подальшого розвитку метод побудови обернених операторів на основі структурного підходу. Запропоновано способи побудови обернених операторів для відновлення сигналів шляхом введення регуляризаційних параметрів. Параметр регуляризації запропоновано підбирати із врахуванням забезпечення стійкості оператора та максимальної адекватності моделі.

3. Розроблено метод розв’язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду на основі квадратурних алгоритмів. Отримані апроксимаційні наближення у формі квадратних рівнянь розв’язуються на основі ітераційних методів: Ньютона, хорд, ланцюгових дробів, власних значень. Вибір необхідного кореня із двох здійснюється на основі вибору початкового наближення у вигляді попереднього кореня або кореня, який ближче до попереднього розв’язку. Проблему визначення першої точки запропоновано розв’язувати шляхом диференціювання заданого рівняння.

4. Для підвищення завадостійкості процесу відновлення сигналів на вході нелінійних динамічних об’єктів запропоновано регуляризаційний метод розв’язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри на основі введення диференціального регуляризаційного оператора. Для розв’язання отриманих поліноміальних інтегро-диференціальних рівнянь запропоновано застосовувати їх апроксимаційні наближення, отримані на основі методу квадратур (кубатур) та різницевих формул.

РОЗДІЛ 6.
КОМП'ЮТЕРНИЙ МОДЕЛЮЮЧИЙ КОМПЛЕКС. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МОДЕЛЬНИХ ТА ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

На основі розроблених в розділах 2-5 алгоритмів для розв'язування задач моделювання динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами побудовано комплекс програм у вигляді модулів розширень системи моделювання Matlab / Simulink.

6.1. Структура моделюючого програмного комплексу

Розроблений програмний комплекс побудовано з дотриманням вимог до програмних модулів в середовищі Matlab та з використанням наявних стандартних засобів і пакетів розширень. Програмні засоби побудовано з використанням матрично-векторних операцій, що дозволяє значно збільшити швидкість виконання роботи алгоритмів, оскільки така постановка є основною перевагою середовища Matlab у порівнянні з іншими програмними пакетами.

У розробці моделюючого програмного середовища використано: засоби із ядра Matlab – для виконання базових операцій (матричних); Simulink – для конструювання структурних моделей для імітації реальних процесів; Contrtol System Toolbox – для дослідження об'єктів, їх аналізу та синтезу за допомогою передатних функцій; Symbolic Math Toolbox – для реалізації алгоритмів еквівалентних та апроксимаційних перетворень; Partial Differential Equation Toolbox – для побудови апроксимаційних моделей в інтегральній формі на основі обчислювальних експериментів, що потребує розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними; System Identification Toolbox – для ідентифікації моделей динамічних об'єктів. Крім того, наявні засоби використовувались для аналізу якості пропонованих алгоритмів та програмних засобів шляхом проведення обчислювальних експериментів.

Структуру розробленого комплексу програмних засобів Objects with Distributed Parameters (ODP) представлено на рис. 6.1. Програмні модулі розділені на чотири взаємопов'язані між собою основні складові з такими назвами:

1. Еквівалентні та апроксимаційні перетворення (Equivalent and Approximation Transformations);
2. Ідентифікація (Identification);
3. Числова реалізація (Numerical Implementation);
4. Обернена задача (Inverse Problem).

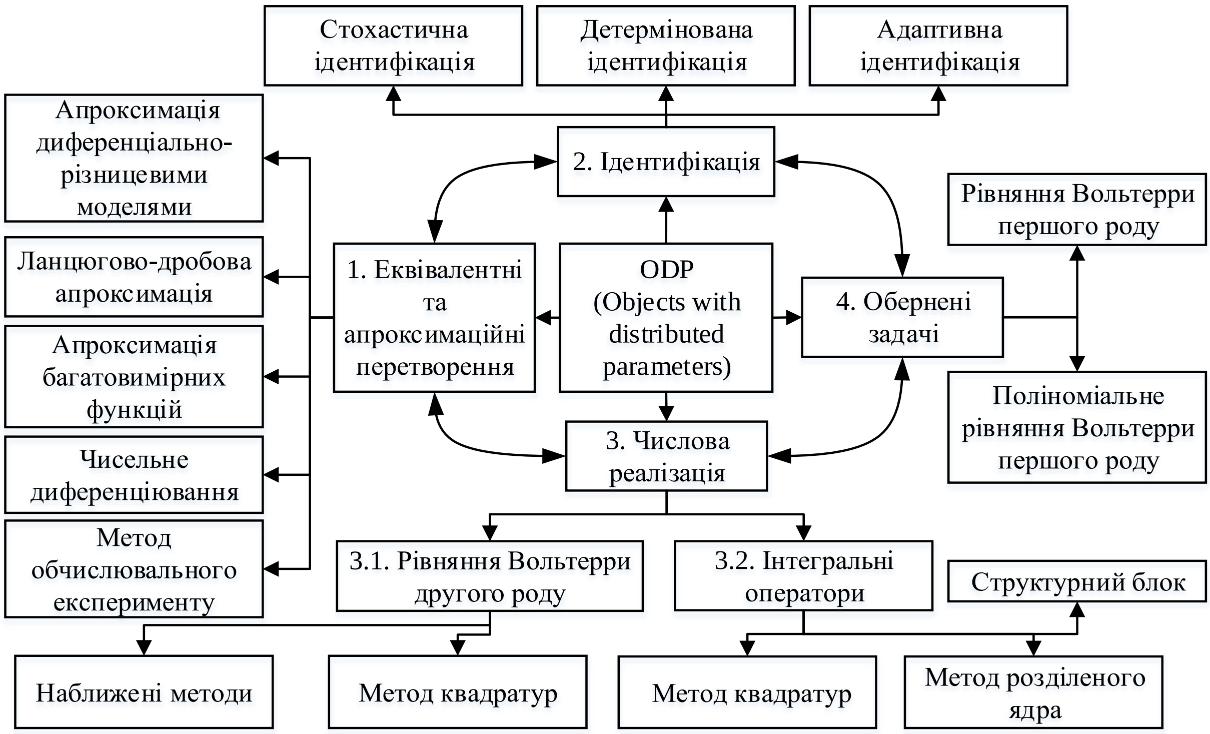


Рис. 6.1. Структура моделюючого середовища

Модулі програмного комплексу взаємодіють між собою шляхом виклику функцій, що належать іншим модулям, та шляхом використання результатів одних модулів у роботі інших. Перші дві складові призначені для побудови моделей на основі еквівалентних та апроксимаційних перетворень, а також шляхом ідентифікації. Моделі отримуються у символьній, матричній або функціональній формах та готові до їх використання у розв'язуванні, як прямих (числова реалізація моделей), так і обернених (відновлення вхідних сигналів, визначення керуючих впливів) задач.

6.2. Модульний склад програмного комплексу та методика його використання

Розглянемо структуру кожної складової програмного комплексу.

Модулі еквівалентних та апроксимаційних перетворень. Структура першої складової комплексу подана на рис. 6.2. Всі модулі даної складової можна поділити на моделі, які базуються на різних підходах, а саме: апроксимація на основі диференціально-різницевих моделей, ланцюгово-дробова апроксимація, апроксимація багатовимірних функцій на основі методу найменших квадратів, чисельне диференціювання експериментальних значень та побудова апроксимаційних моделей на основі методу обчислювальних експериментів.

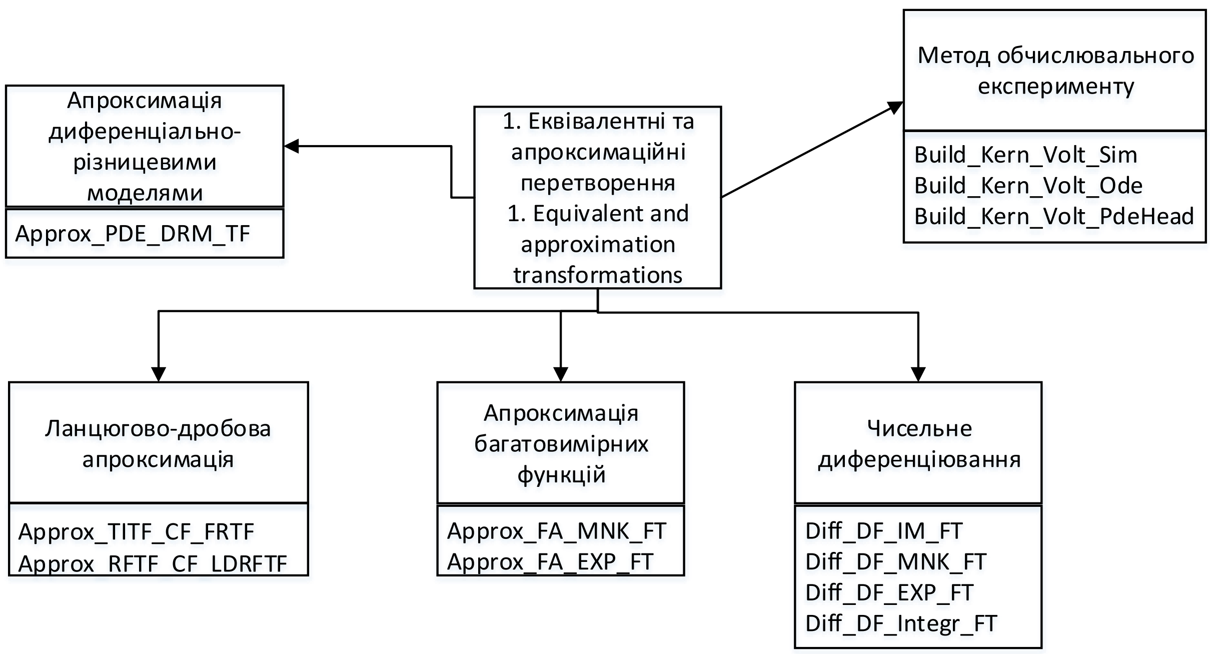


Рис. 6.2. Структурна схема модулів еквівалентних та апроксимаційних перетворень

Побудова апроксимаційних моделей у формі дробово-раціональних передатних функцій на основі диференціально-різницевої апроксимації задач нестаціонарної теплопровідності, які описуються диференціальними рівняннями із частинними похідними (параболічними рівняннями), здійснюється за допомогою **Approx_PDE_DRM_TF**. Результатом роботи даного модуля є дробово-раціональні передатні функції високого порядку

(>20). Із збільшенням щільності дискретизації просторової координати порядок зростає, але це призводить до отримання коефіцієнтів із малими значеннями, які не впливають на результат числової реалізації через вихід за межі розрядної сітки. Тому для практичного використання доцільно використовувати для апроксимації отриманих моделей модуль **Approx_RFTF_CF_LDRFTF** (ланцюгово-дробова апроксимація), що дозволяє спростити моделі із забезпеченням точності на рівні первинної моделі.

Синтаксис даних функцій та всіх наступних представлено в додатку Б.

Застосування ланцюгово-дробової апроксимації здійснюється в двох напрямках: побудова ланцюгово-дробової апроксимаційної моделі передатної функції поданої ірраціональною або трансцендентною передатною функцією – **Approx_TITF_CF_FRTF**; пониження степеня дробово-раціональної передатної функції на основі методу ланцюгових дробів – **Approx_RFTF_CF_LDRFTF**. Застосовуючи модуль **Approx_TITF_CF_FRTF** отримуються моделі об'єктів із розподіленими параметрами у формі дробово-раціональних передатних функцій, що дозволяє використовувати стандартні засоби Matlab/Simulink для їх дослідження.

Для апроксимації функцій багатьох змінних призначені модулі **Approx_FA_MNK_FT** та **Approx_FA_EXP_FT**. Ці функції дозволяють побудувати апроксимаційне представлення експериментальних даних та складних функцій в аналітичному вигляді (поліноміальному або експоненціальному). Це дозволяє розширити можливості Matlab щодо апроксимації функцій багатьох змінних, де в наявності є лише апроксимація одновимірних даних нелінійною функцією за допомогою засобу **lsqcurvefit** або тільки інтерполяція даних функціями **interp1**, **interp2**, **interp3**, **interpn**. Розроблені функції також виступають як допоміжні для чисельного диференціювання та представлення ядер інтегральних операторів у виродженій формі.

Чисельне диференціювання функціональних залежностей в середовищі Matlab можна здійснювати на основі функції **diff**, яка дозволяє отримати скінченні різниці різного порядку. Для розширення можливостей середовища Matlab побудовано модуль **Diff_DF_IM_FT**, який здійснює диференціювання функцій заданих у табличному вигляді на основі інтерполяційних методів. Диференціювання на основі аналітичного подання експериментальних даних здійснюється модулями **Diff_DF_MNK_FT** та **Diff_DF_EXP_FT**. В основі роботи даних функцій покладено застосування методів апроксимації функціональних залежностей за допомогою модулів **Approx_FA_MNK_FT** та **Approx_FA_EXP_FT**. Диференціювання функцій на основі інтегрального методу шляхом застосування регуляризаційного оператора здійснюється функцією **Diff_DF_Integr_FT**, на основі якої побудовано Simulink-блок **Diff_DF_Integr_FT**.

Модулі **Build_Kern_Volt_Sim, Build_Kern_Volt_Ode, Build_Kern_Volt_PdeHead** дозволяють будувати інтегральні моделі у формі поліноміальних інтегральних операторів Вольтерри першого, другого та третього степеня на основі методів ідентифікації шляхом застосування методу обчислювальних експериментів. Моделі будуються на основі числової реалізації базових моделей, які, або задані в середовищі Simulink у вигляді структурної схеми з лінійними та нелінійними елементами, або задані звичайними диференціальними рівняннями (розв'язуються із використанням функцій Matlab **ode23**, **ode45** та ін.), або задані диференціальними рівняннями з частинними похідними (розв'язуються із використанням функцій Partial Differential Equation Toolbox). У побудові моделей дані функції використовують модулі **Ident_Kern1_Volt_NumExper, Ident_Kern2_Volt_NumExper, Ident_Kern3_Volt_NumExper**.

<u>Модулі ідентифікації інтегральних динамічних моделей</u>. Структура другої складової комплексу подана на рис. 6.3. Всі модулі даної складової призначені для побудови моделей на основі експериментальних даних.

Основна увага приділена побудові моделей у формі оператора Вольтерри та поліноміального оператора Вольтерри. Побудова моделі на основі стохастичних даних здійснюється за допомогою моделі Вінера-Гопфа, а за допомогою детермінованих вхідних сигналів – моделі у формі поліноміальних операторів Вольтерри. Розроблені програмні засоби дозволяють розширити наявні в Matlab програмні засоби, які дозволяють отримати моделі у формі авторегресійних моделей (лінійних та нелінійних) та інтегральних моделей Вінера-Гаммерштейна.

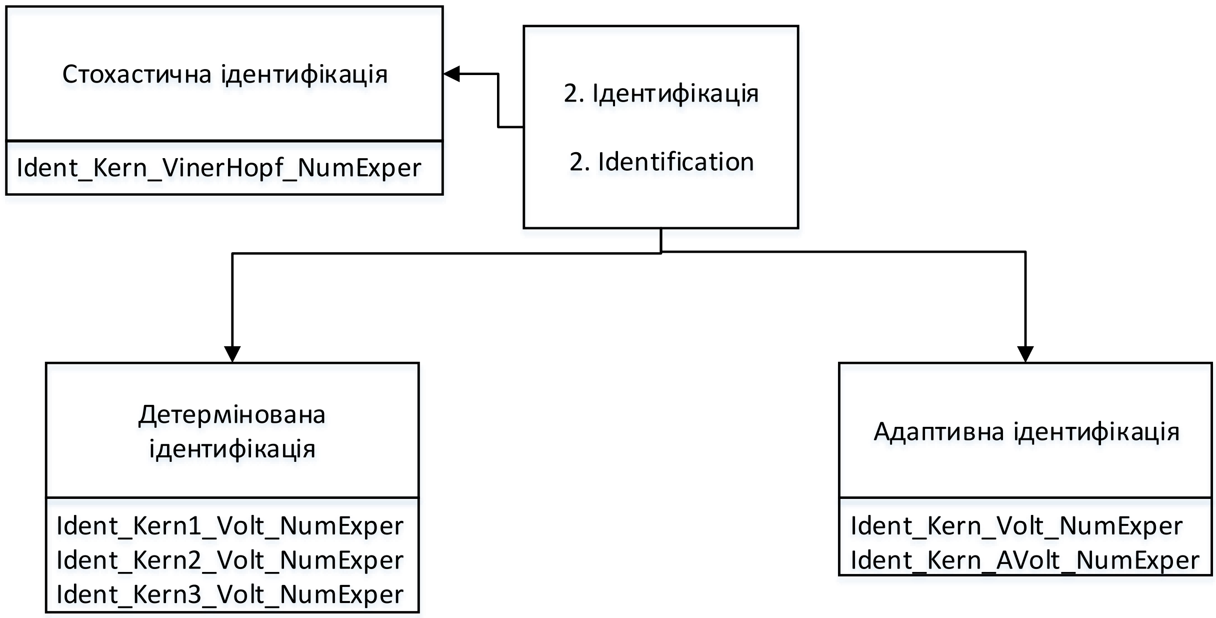


Рис. 6.3. Структурна схема модулів для ідентифікації моделей

Ідентифікація моделі у формі інтегрального оператора на основі результатів експериментів отриманих для вхідних впливів, які містять (заданий наперед) білий шум, здійснюється функцією **Ident_Kern_VinerHopf_NumExper**.

Побудова моделей у формі однорідних інтегральних операторів Вольтерри першого, другого та третього степенів здійснюється за допомогою програмних модулів **Ident_Kern1_Volt_NumExper**, **Ident_Kern2_Volt_NumExper**, **Ident_Kern3_Volt_NumExper** відповідно. Отримані моделі визначаються у векторно-матричному вигляді.

Причому модель першого степеня – вектор, другого степеня – матриця, третього степеня – тривимірна структура. Таке представлення є зручним у подальшому використанні, як для розв'язування задач числової реалізації, так і для розв'язування задач відновлення.

Побудова моделей у формі неоднорідних інтегральних операторів Вольтерри першого, другого та третього степенів здійснюється за допомогою програмних модулів **`Ident_Kern_Volt_NumExper`** та **`Ident_Kern_AVolt_NumExper`**. Дані програмні засоби дозволяють будувати неоднорідні інтегральні моделі у формі частинної суми інтегро-степеневого ряду Вольтерри. Програмні засоби побудовані таким чином, що дозволяють здійснювати побудову моделей, як на основі натурних, так і на основі обчислювальних експериментів. Модуль **`Ident_Kern_AVolt_NumExper`** побудований із врахуванням ефективного планування експериментів відповідно до розробленого адаптивного алгоритму.

<u>Модулі числової реалізації інтегральних моделей</u>. Третя складова комплексу подана на рис. 6.4. Ця складова програмного комплексу розділена на дві частини: засоби розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду та їх систем і засоби чисельної реалізації операторів Вольтерри, включаючи поліноміальні. Варто відмітити, що засобів для роботи з інтегральними моделями в середовищі Matlab практично немає. Вони обмежені лише засобами числової реалізації алгоритмів знаходження визначених інтегралів: **`integral`**, **`integral2`**, **`integral3`**, **`quadgk`**, **`quad2d`**, **`cumtrapz`**, **`trapz`**, **`polyint`**. Реалізації динамічних інтегральних моделей присвячено ряд публікацій, зокрема, програмному комплексу Integral Equation Toolbox [42], але його можливості також є обмеженими.

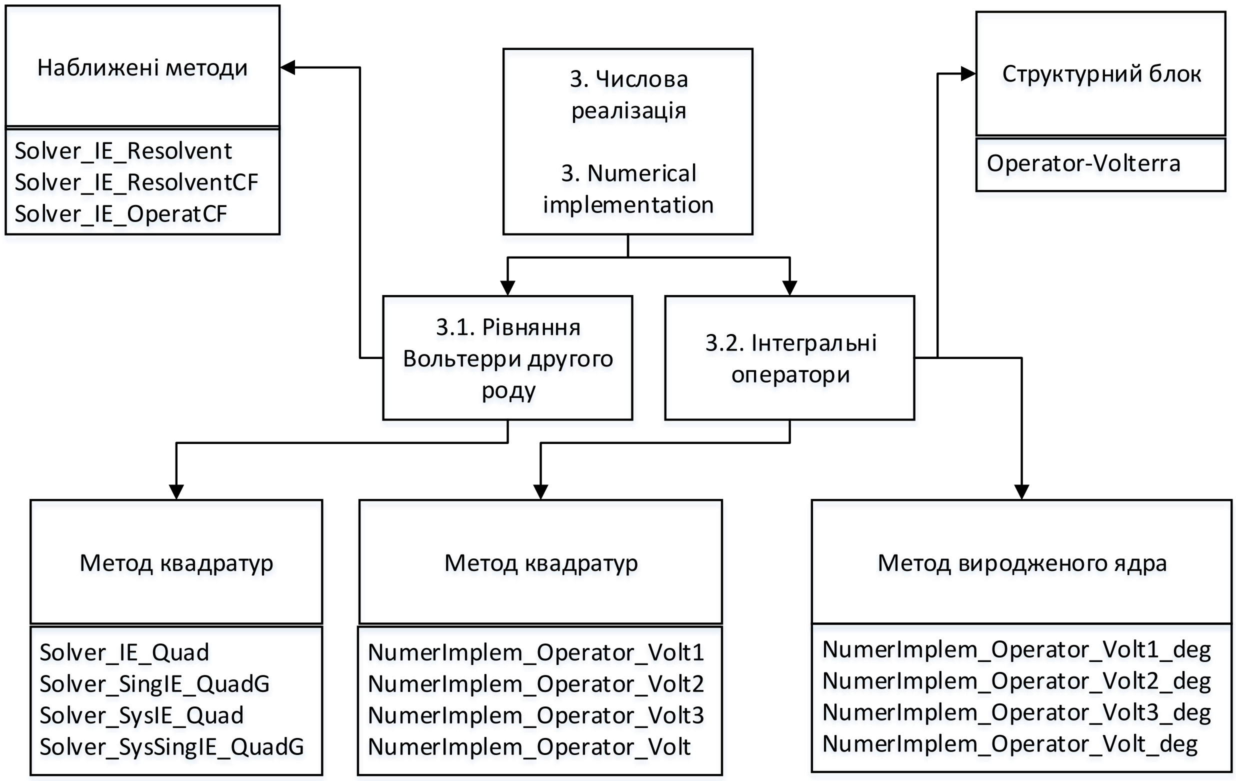


Рис. 6.4. Структурна схема модулів для числової реалізації динамічних інтегральних моделей

Для розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду аналітичними методами із використанням Symbolic Math Toolbox розроблено модулі **Solver_IE_Resolvent**, **Solver_IE_ResolventCF**, **Solver_IE_OperatCF**. Перші два, побудовані на основі застосування методу резольвенти, яка шукається ітераційним методом. Для збільшення швидкості збіжності застосовано метод ланцюгових дробів. Модуль **Solver_IE_OperatCF** призначений для пошуку розв'язку інтегрального рівняння Вольтерри другого роду операційним методом із застосуванням ланцюгово-дробової апроксимації, апроксимація застосовується у випадку, якщо немає стандартних засобів отримання оригіналу розв'язку. Такі випадки часто зустрічаються у моделюванні динамічних об'єктів із розподіленими параметрами.

Для розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду методом квадратур призначені модулі **Solver_IE_Quad** та

Solver_SingIE_QuadG. В основі даних модулів лежать методи прямокутників, трапецій та Сімпсона. Дані модулі можна використовувати також для розв'язування рівнянь із сингулярними ядрами. В першому випадку необхідно видозмінити ядро шляхом внесення регуляризаційного параметра, в другому випадку – сингулярність уникається шляхом використання адаптивного кроку інтегрування. Модулі **Solver_SysIE_Quad** та **Solver_SysSingIE_QuadG** призначенні для розв'язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, в тому числі із сингулярними ядрами.

Для числової реалізації інтегральних операторів розроблено такі модулі: **NumerImplem_Operator_Volt1**, **NumerImplem_Operator_Volt2**, **NumerImplem_Operator_Volt3**, **NumerImplem_Operator_Volt**. В основі програмної реалізації цих модулів лежить метод квадратур (прямокутників, трапецій, Сімпсона), причому у програмуванні використано векторно-матричний підхід, що максимально використовує можливості середовища Matlab. Перші три модулі реалізують однорідні інтегральні оператори Вольтерри першого, другого та третього степенів відповідно. Модуль **NumerImplem_Operator_Volt** дозволяє чисельно реалізувати неоднорідні інтегральні оператори.

Для числової реалізації інтегральних операторів із виродженими ядрами розроблено модулі: **NumerImplem_Operator_Volt1_deg**, **NumerImplem_Operator_Volt2_deg**, **NumerImplem_Operator_Volt3_deg**, **NumerImplem_Operator_Volt_deg**. Аналогічно до попередніх модулів, в основі їх програмної реалізації лежить метод квадратур (прямокутників, трапецій, Сімпсона). Призначення даних модулів є аналогічним, але за рахунок виродженості ядер вони можуть застосовуватись для обчислень, що вимагають високої швидкодії.

Використовуючи розроблені модулі в середовищі Simulink побудовано імітаційний блок (рис. 6.5), який на основі введених параметрів (рис. 6.6) здійснює імітацію динаміки об’єкта, який описується заданим ядром. Ядро може визначатися довільним чином (користувацька функція), а також є можливість реалізації наперед заданими функціями користувача. Це такі ядра, які реалізують стандартні типові ланки: для об’єктів із зосередженими параметрами – інтегральна, інерційна, коливальна, форсуюча; для об’єктів із розподіленими параметрами – затухання, запізнення, напівінтегральна, напівінерційна. Моделі ланок задані відповідно до таблиці 2.3 та таблиці 2.4.

Рис. 6.5. Simulink-блок для реалізації оператора Вольтерри

Модулі для розв’язування обернених задач (відновлення сигналів). Структура четвертої складової розробленого програмного комплексу подана на рис. 6.7. Ця частина програмного комплексу присвячена розв’язуванню обернених задач, відновленню сигналів на вході динамічних об’єктів, формуванню необхідних керуючих впливів. Для розв’язування таких задач розроблено модулі числової реалізації інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду (у випадку лінійних систем) та поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду (у випадку нелінійних задач). Розроблені модулі значно розширюють можливості середовища Matlab, оскільки для розв’язування обернених задач стандартних засобів немає. На достатньому рівні наявні лише засоби відновлення зображень та сигналів на які накладено різні типи шумів. Ці модулі відносяться до Signal Processing Toolbox, Image Processing Toolbox.

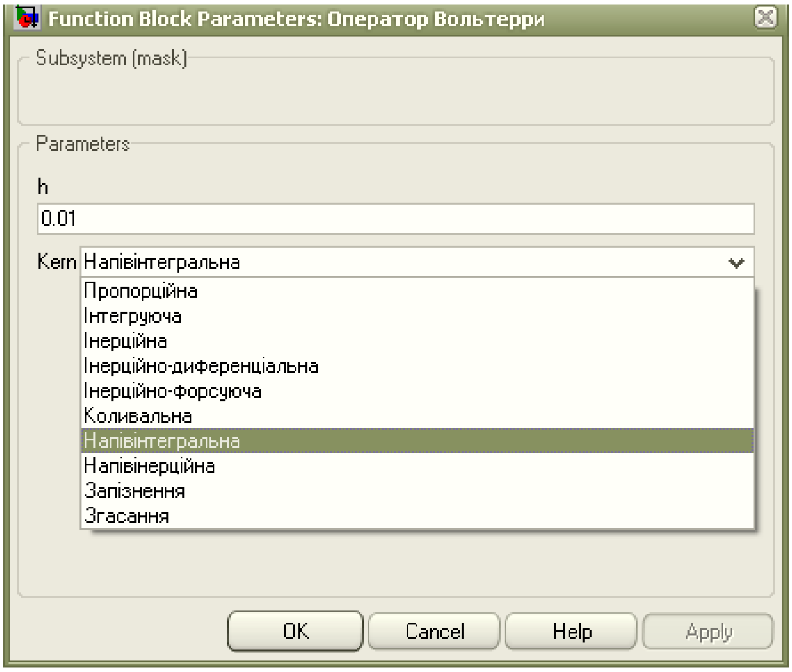


Рис. 6.6. Вікно параметрів Simulink-блоку для реалізації оператора Вольтерри

Рис. 6.7. Структурна схема модулів для розв’язування обернених задач

Для розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду на основі методу квадратур розроблено модуль **`Inv_IEVolt_Quad`**, який, на жаль, у випадку вхідного впливу із шумом не завжди може бути використаним. Тому, на основі запропонованого методу регуляризації інтегрального рівняння Вольтерри першого роду диференціальним оператором, розроблено модуль **`Inv_IEVolt_QuadR`**. Даний модуль також може розглядатись як засіб для розв’язування інтегро-диференціальних рівнянь. Якщо розглядаються задачі відновлення сигналів на вході нелінійних динамічних об’єктів, то для таких задач розроблено модулі **`Inv_IEVolt2_Quad`** та **`Inv_IEVolt2_QuadR`**, які призначені для розв’язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду другого степеня.

6.3. Методика розв’язування прямих та обернених задач на прикладі моделювання динамічних процесів у вимірювальних перетворювачах температури

Вимірювання щільності потоків теплового випромінювання має місце у багатьох експериментальних дослідженнях і технологічних процесах. У розробці методів теплометрії ускладнюючими факторами є різноманітність приймачів теплового потоку за типом і різновидом конструкцій, теплових і вимірювальних схем і, що дуже важливо, за видом математичних моделей теплопереносу. Математичні моделі повинні адекватно описувати процеси в приймачах з урахуванням всіх значущих особливостей: розподіленість параметрів, наявність елементів з різнорідних матеріалів, армуючих і захисних шарів, контактних теплових опорів, повітряних зазорів та ін.; нелінійна залежність параметрів матеріалів від температури та інші нелінійності; різні граничні умови на поверхні приймача і т.д. Модель повинна задовольняти також вимогам прийнятної точності і обчислювальної ефективності. Крім того, повинна задовольнятись спільність, як виду самих математичних моделей, так і програмного забезпечення для їх числової реалізації у відношенні до різних видів приймачів теплового потоку [38, 79, 85, 112, 121, 154, 223].

У побудові математичних моделей не повною мірою формалізовані і розв’язані завдання побудови моделей в операторній формі, зокрема у формі передатних функцій та інтегральних операторів, які є основою застосування системного підходу у дослідженні складних об’єктів і є ефективними в практичних інженерних дослідженнях.

Розглянемо задачу моделювання динаміки термоприймачів, в яких процес теплопереносу можна описати аналогічно до задачі поширення тепла в необмеженій пластині. Як відмічалось вище, базовою математичною моделлю таких задач є диференціальні рівняння із частинними похідними. Такі моделі є ефективними у розв’язуванні задач проєктування [167, 168, 169], оскільки на даний час розроблено широкий набір методів та засобів їх реалізації [234], але у розв’язуванні задач відновлення сигналів, такі моделі не завжди є ефективними. Також складність значно збільшується у використанні таких моделей в інтегрованих системах управління, які потребують розв’язання задач в реальному часі. Для таких задач ефективними будуть моделі в операторній формі. У випадку, якщо вимірювальний перетворювач має лінійні властивості, то модель можна представити у вигляді інтегрального оператора Вольтерри, у випадку врахування нелінійних властивостей у вигляді поліноміального оператора Вольтерри. Крім інтегральних операторів ефективними представленнями моделі є модель у формі передатних функцій ірраціонального та трансцендентного типу, методи отримання яких розглянуто в розділі 2. Також у розділі 2 представлено метод отримання диференціально-різницевих моделей та їх апроксимаційних представлень у вигляді дробово-раціональних передатних функцій.

На основі застосування еквівалентних та апроксимаційних методів побудовано моделі вимірювального перетворювача температури в різних формах: диференціальне рівняння із частинними похідними (є базовою формою), інтегральний оператор Вольтерри, передатна функція, структурна модель. Всі моделі наведено у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

Моделі вимірювального перетворювача

<table>
<tr><td>Форма моделі</td><td>Модель</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$T(t)$ — шукана функція температури; τ – часова змінна,
x – просторова координата, $a=\dfrac{\lambda}{c\rho}$ – коефіцієнт температуропровідності,
c – теплоємність, λ – теплопровідність, ρ – густина, δ – товщина приймача,
$q(t)$ – тепловий потік</td></tr>
<tr><td>Диференціальне рівняння</td><td>$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}$$
$$-\lambda\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=\delta}=q(t);$$
$$\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0}=0;$$
$$T(x,t)\big|_{t=0}=0$$</td></tr>
<tr><td>Система інтегральних рівнянь</td><td>Модель отримана на основі методу інтегральних представлень (метод теплових потенціалів)
$$T(x,t)=\int_0^t\frac{\varphi(\tau)e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}x\,d\tau+\int_0^t\frac{\psi(\tau)e^{-\frac{(\delta-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}(x-\delta)\,d\tau.$$
$$\begin{cases}\varphi(t)-\delta\displaystyle\int_0^t\frac{\psi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\delta^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau=-\frac{q(t)}{\lambda},\\ -\psi(t)+\delta\displaystyle\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\delta^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau=0.\end{cases}$$</td></tr>
</table>

Продовження таблиці 6.1

1	2
Передатна функція	Модель отримана на основі методу інтегральних перетворень (перетворення Лапласа) $$\frac{T(x,p)}{q(\delta,p)}=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\frac{p}{a}}}\frac{e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x}+e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}}{e^{\sqrt{\frac{p}{a}}\delta}-e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\delta}}$$
	Модель отримана на основі застосування перетворення Лапласа до диференціально-різницевої апроксимаційної моделі із застосуванням ланцюгово-дробової апроксимації $$W(p)=\frac{\beta_1 p^{n-1}+\beta_2 p^{n-2}+\ldots+\beta_n}{p^n+\alpha_1 p^{n-1}+\alpha_2 p^{n-2}+\ldots+\alpha_n}$$
Оператор Вольтерри	Модель отримана на основі пошуку функції Гріна методом Бубнова-Гальоркіна $$T(t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\int_0^t K_n(t-\tau)q(\tau)d\tau,$$ B_n, K_n – параметри моделі (розділ 2)
	Модель отримана на основі застосування методу обчислювальних експериментів $$T(t)=\int_0^t K(t-\tau)q(\tau)d\tau,$$ K – ядро визначене в табличному вигляді

Продовження таблиці 6.1

1	2
Структурна модель	Модель із використанням ланцюгово-дробової апроксимації $$\frac{T(0,p)}{q(\delta,p)}=W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot\frac{1}{1-W_3(p)}$$ $$W_1(p)=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\frac{p}{a}}},\ W_2(p)=2e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\delta},\ W_3(p)=e^{-2\sqrt{\frac{p}{a}}\delta},$$ $W_1(p)$, $W_2(p)$, $W_3(p)$ – замінюються ланцюгово-дробовими апроксимаційними моделями
	Модель із використанням операторів Вольтерри $$T(0,t)=W_1(t)\cdot W_2(t)\cdot\frac{1}{1-W_3(t)}q(\delta,t)$$ $$W_1(t)=\int_0^t\frac{1}{\lambda}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi(t-s)}}x(s)ds,$$ $$W_2(t)=\int_0^t\sqrt{\frac{\delta^2/a}{\pi(t-s)^3}}e^{-\frac{\delta^2/a}{4(t-s)}}x(s)ds,$$ $$W_2(t)=\int_0^t\sqrt{\frac{\delta^2/a}{\pi(t-s)^3}}e^{-\frac{4\delta^2/a}{4(t-s)}}x(s)ds,$$ $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t)$ – замінюються апроксимаційними моделями на основі методу квадратур

Числова ефективність отриманих моделей досліджена шляхом розв’язування модельних задач в яких змінювались крок моделювання та вхідні впливи. Обчислювальні експерименти показали, що застосування всіх поданих моделей дозволяє отримувати розв’язки із прийнятною точністю. У розв’язуванні задач проєктування найбільш прийнятним, у зв’язку із добре розробленими методами та засобами, є застосування моделей у формі диференціальних рівнянь із частинними похідними. Якщо розв’язок потрібно отримати тільки у визначеній просторовій точці, що зазвичай потрібно для розв’язування задач керування, контролю та вимірювання, найбільш прийнятними з точку зору «точність – складність реалізації» є операторні моделі. У випадку наявності шумових завад у вхідних впливах варто застосовувати моделі у формі інтегральних операторів Вольтерри. Розглянемо приклад застосування отриманих моделей.

Для дослідження побудованих моделей використано метод обчислювальних експериментів, зокрема на рис. 6.8 та рис. 6.9 подано результати типового обчислювального експерименту. Вхідний сигнал теплового потоку поданий у вигляді графіку на рис. 6.8, а результуючий сигнал температури подано у вигляді графіка на рис. 6.9.

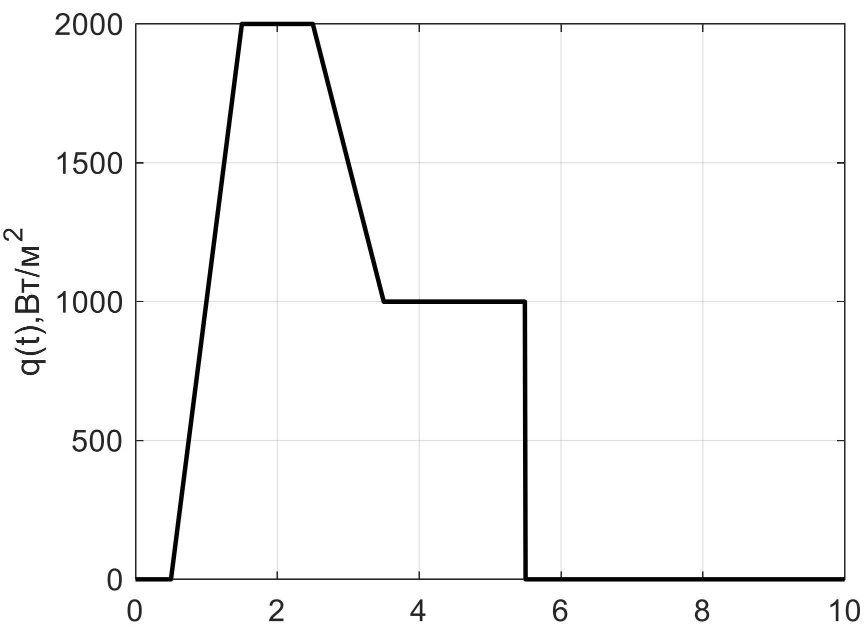


Рис. 6.8. Графік вхідного теплового потоку

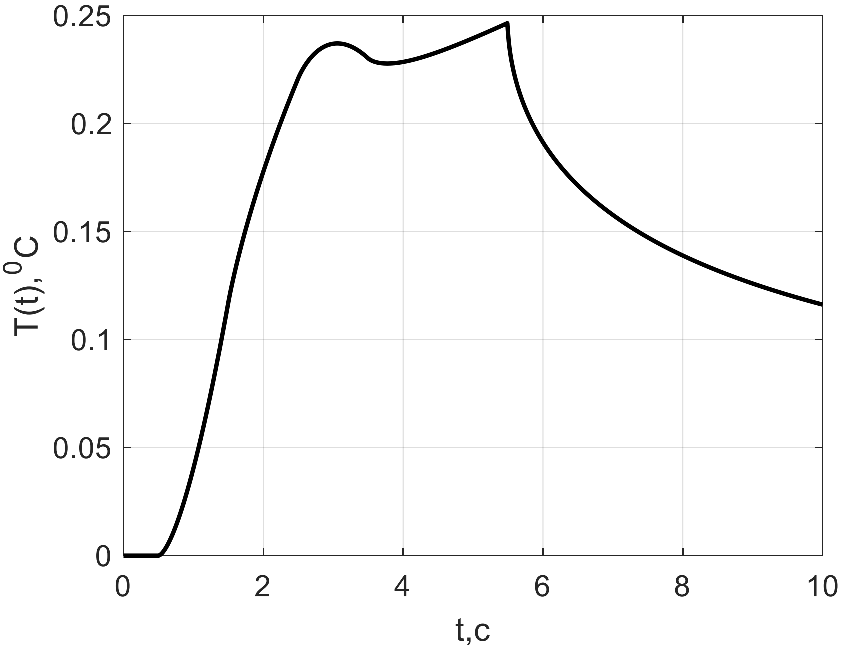


Рис. 6.9. Графік обчисленого сигналу температури

У розв’язуванні оберненої задачі (за відомим значенням температури визначається тепловий потік) застосовано моделі, які побудовані на основі представлень, поданих у таблиці 6.1.

Застосування моделей у формі диференціальних рівнянь із частинними похідними породжує задачі числової реалізації диференціальних операторів, які, як відомо, є некоректними. Такий підхід за наявності шумових завад не дозволяє отримати шуканий розв’язок із задовільною точністю. Наявні на сьогодні методи передбачають використання оптимізаційних методів, але вони не можуть бути застосовані в умовах реального часу, тобто у розв’язуванні задач відновлення сигналу, які є основними у проєктуванні вимірювальних перетворювачів.

Застосування передатних функцій призводить до моделей, які реалізувати на даний момент достатньо складно, або взагалі неможливо. На основі наявної передатної функції побудовано модель у вигляді:

$$\frac{q(\delta,p)}{T(0,p)} = \lambda\sqrt{\frac{p}{a}}\,\frac{e^{\sqrt{\frac{p}{a}}\delta} - e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}\delta}}{2}. \tag{6.1}$$

Модель (6.1) містить ланку напівзапізнення, яку можна реалізувати на основі викладених вище методів. Однак, для ланок напівдиференціювання немає відомих засобів їх числової реалізації. Тобто підхід із використанням передатних функцій, в даному випадку, є неприйнятним.

Застосування дробово-раціональних передатних функцій, отриманих на основі диференціально-різницевої моделі або ланцюгово-дробової апроксимації (6.1), призводять до моделей в яких порядок знаменника менший за порядок чисельника. Для реалізації таких моделей необхідно вводити додаткові регуляризаційні параметри, які тільки посилюють недоліки застосування апроксимаційних моделей передатних функцій об’єктів із розподіленими параметрами, зокрема – значно посилюється ефект Гіббса.

Застосування структурних моделей неможливе, оскільки отримані моделі не є оборотними, а окреме відновлення сигналу на вході кожної складової неможливе, оскільки присутній зворотний зв’язок.

Тому для розв’язування даної задачі найкращим є застосування оператора Вольтерри, який в такій постановці перетворюється в інтегральне рівняння Вольтерри першого роду:

$$\int_0^t K(t,s)q(s)ds = T(t).$$

Дана задача є некоректною, тому застосовується регуляризація моделі шляхом введення диференціального параметра регуляризації. В результаті отримаємо інтегро-диференціальне рівняння:

$$\alpha\frac{dq(t)}{dt} + \int_0^t K(t,s)q(s)ds = T(t).$$

Можливість застосування даної форми моделі досліджено на модельних прикладах. Зокрема, на рис. 6.10 подано графік відновленого сигналу теплового потоку на основі сигналу температури (рис. 6.9) шляхом застосування розроблених засобів за умови відомого значення в початковій точці. Точність відновлення наведено на рис. 6.11 у вигляді графіка.

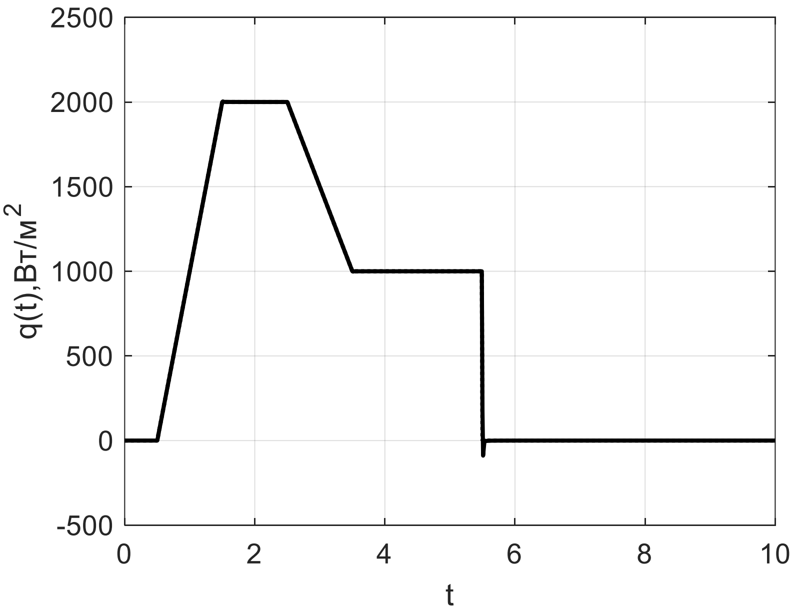


Рис. 6.10. Графіки відновленого теплового потоку

(——— – відновлене значення, ……. – точне значення)

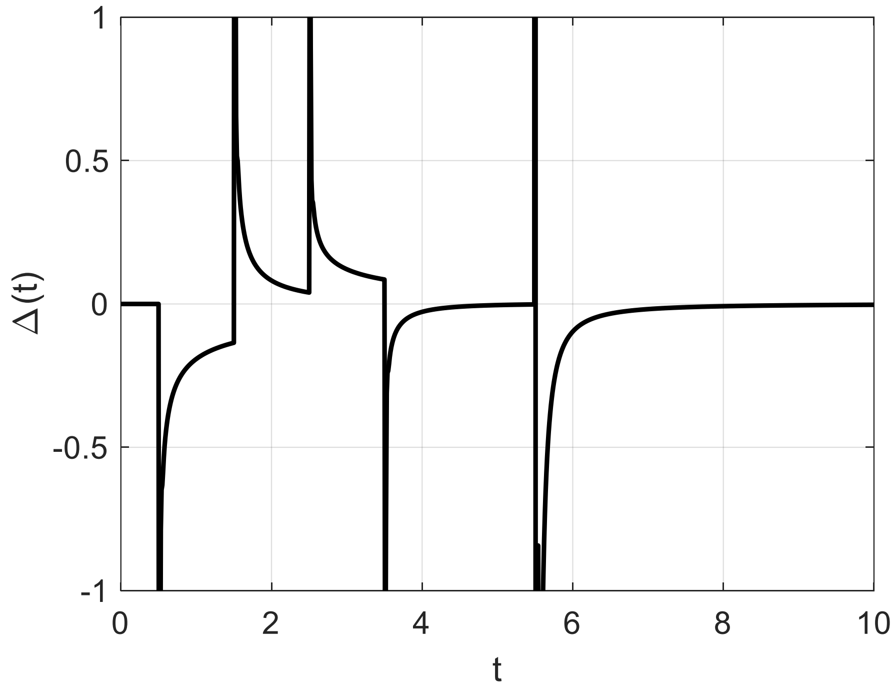


Рис. 6.11. Графік похибки відновлення

Також досліджувався випадок, коли температура задана із певною похибкою. На рис. 6.12 наведено графік сигналу температури із накладанням шумових завад. Відновлений тепловий потік, на основі даної температури, представлено у вигляді графіка на рис. 6.13.

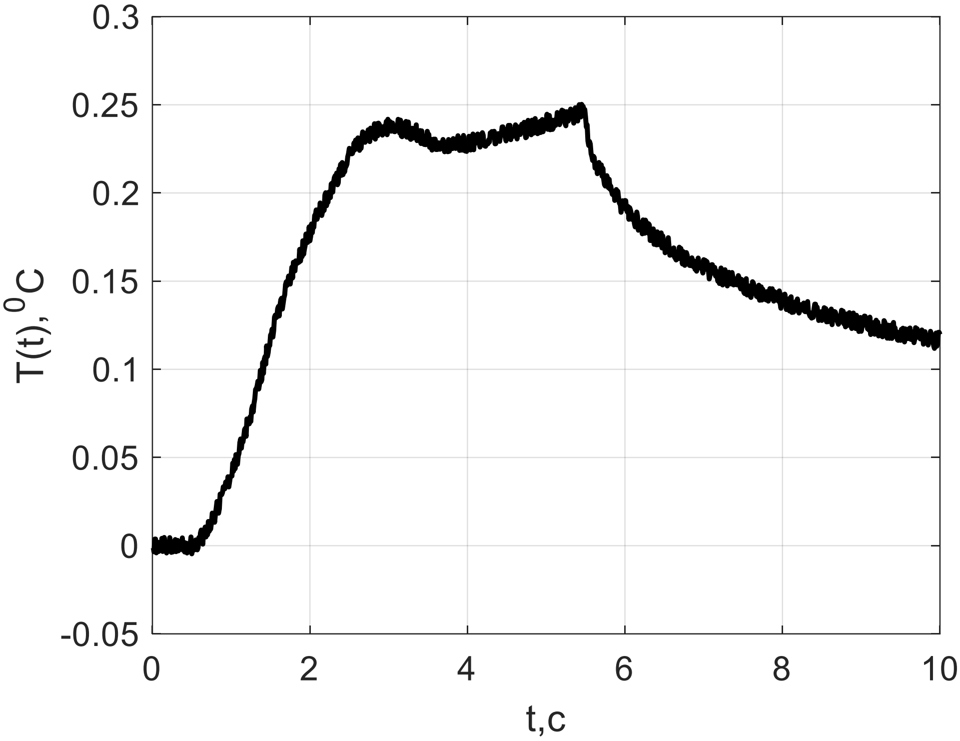


Рис. 6.12. Температура на виході вимірювального перетворювача температури

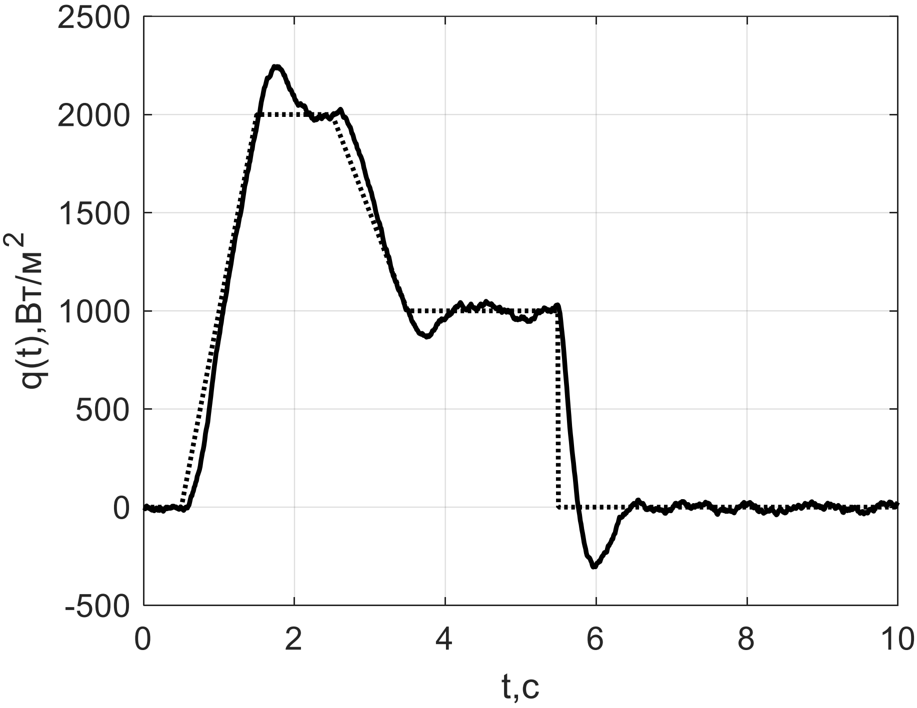


Рис. 6.13. Відновлений тепловий потік

(——— – відновлене значення, ……. – точне значення)

Отже, розроблені методи та засоби побудови моделей вимірювальних перетворювачів температури запропоновані в роботі та методи числової реалізації даних моделей дозволяють із прийнятною точністю розв’язувати задачі керування, контролю та вимірювання.

6.4. Задача оперативного контролю температурних режимів чипів магістрального та комутаційного обладнання комп’ютерних мереж

Результати дослідження використано у розв’язуванні задачі оперативного контролю температурних режимів чипів магістрального та комутаційного обладнання комп’ютерних мереж. Наявне на ринку обладнання, яке використовують у побудові комп’ютерних мереж, зазвичай не містить вмонтованих датчиків контролю температури, а те, яке їх містить, має високу ціну, тому його використання не завжди є економічно доцільним. У зв’язку з цим, особливо в літній період, коли температура електронних компонент може перевищувати допустимі значення, штучно обмежується трафік через комунікаційне обладнання, що приводить до неефективного його використання. Постає задача модернізації комунікаційного обладнання для вирішення проблеми оперативного реагування на зміну температури окремих компонент, яка суттєво залежить від поточного навантаження.

Розроблені методики використанні для вдосконалення комутатора доступу, на рис. 6.14 зображено початковий вигляд комутатора (при відкритому корпусі). В конструкції комутатора здійснено зміни (рис. 6.15), які полягають у тому, що на чипи комутатора встановлено радіатори для кращої тепловіддачі та терморезитори для контролю температури. Дані, які отримуються з терморезиторів перетворюються з аналогового виду в цифровий (за допомогою присутнього в комутаторі аналого-цифрового перетворювача для визначення опору магістральних з’єднань) і далі передаються на сервер для обробки.

Рис. 6.14. Мережевий комутатор

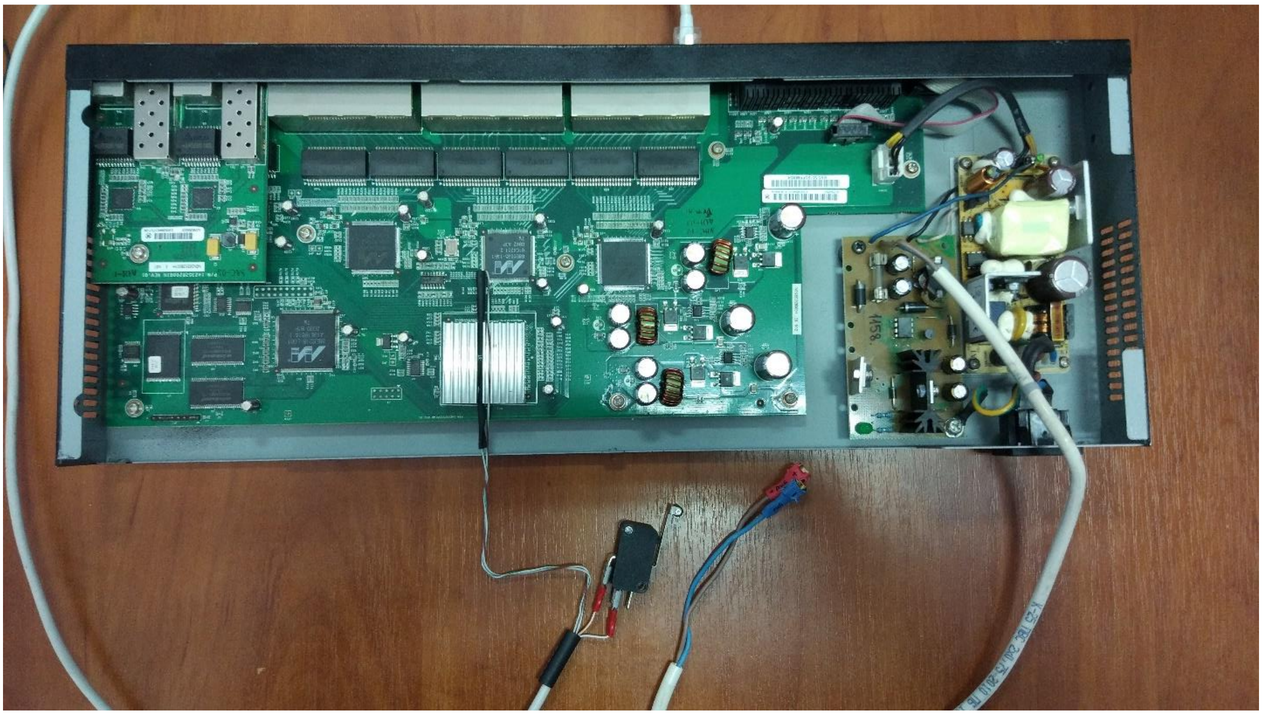


Рис. 6.15. Мережевий комутатор із конструктивними змінами

Вимірювальна система «чип – температурний сенсор» має властивість розподіленості за просторовою координатою. Це призводить до того, що у вимірюванні температури з’являється затримка між показами вимірювального перетворювача та реальним значенням температури чипу. На рис. 6.16 наведено графіки температури, що реєструється вимірювальним перетворювачем, який закріплений на чипі, та значення температури, що фіксується всередині чипа. Як видно з графіків, затримка під час реєстрації температури становить більше 5 с, що може бути критичним для процесу оперативного контролю.

Для зменшення затримки реакції системи контролю пропонується проводити обробку цифрової інформації, що поступає з аналого-цифрових перетворювачів температурних датчиків комутаторів шляхом розв’язування оберненої задачі відновлення сигналу з використанням моделі вимірювальної системи «чип – температурний сенсор».

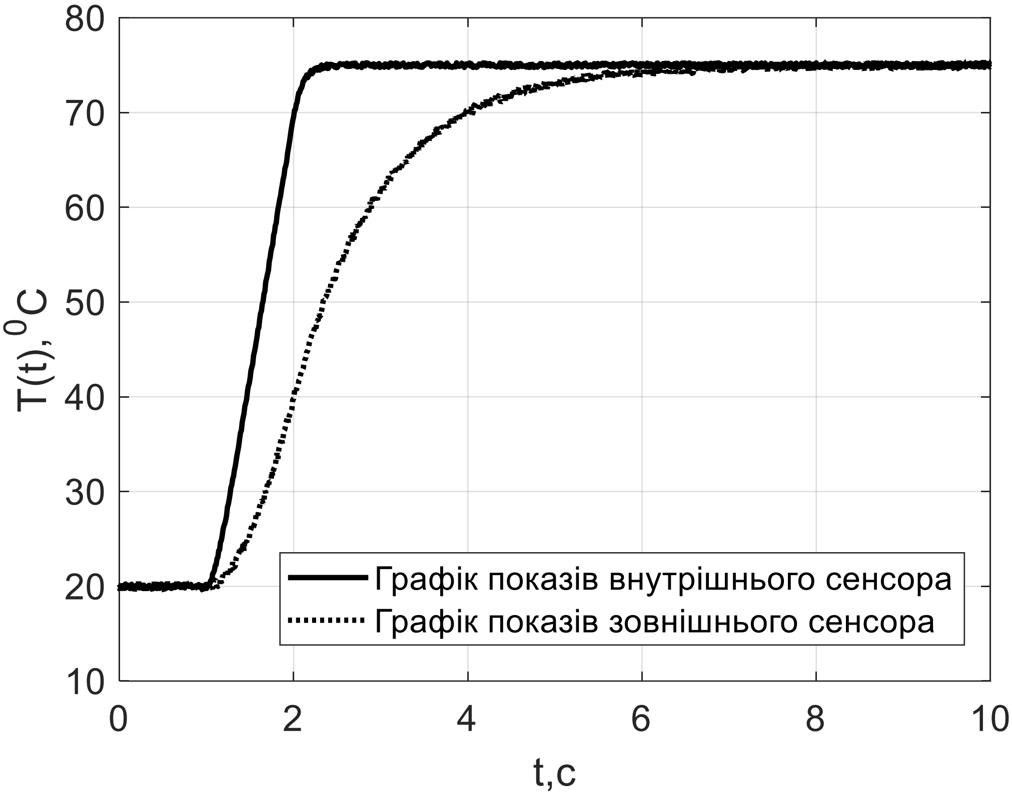


Рис. 6.16. Графіки результатів виміру температури

Експериментально виявлено, що вимірювальна система є нелінійною, тому модель побудовано у формі частинної суми інтегро-степеневого ряду Вольтерри. На основі експериментальних досліджень визначено, що задовільна адекватність моделі досягається використовуючи поліноміальний інтегральний оператор другого степеня, тобто вплив третього і вищих членів інтегрального ряду є незначним (менше 0,5 %). Побудована модель має вигляд:

$$R(t) = k_0 + \int_0^t K_1(s)T(t-s)ds + \int_0^t\int_0^t K_2(s_1,s_2)T(t-s_1)T(t-s_2)ds_1ds_2, \qquad (6.2)$$

де $R(t)$ – значення опору терморезистора, $T(t)$ – значення температури в чипі, k_0 – безрозмірний коефіцієнт, $K_1(s)$ – ядро першого порядку подане в табличному вигляді (вектор), $K_2(s_1,s_2)$ – ядро другого порядку подане в табличному вигляді (матриця). Для відновлення сигналу на основі моделі (6.2) здійснено її регуляризацію шляхом введення диференціального регуляризаційного оператора. В результаті отримано модель:

$$\alpha\frac{dT}{dt} + \int_0^t K_1(s)T(t-s)ds + \int_0^t\int_0^t K_2(s_1,s_2)T(t-s_1)T(t-s_2)ds_1ds_2 = R(t) - k_0, \qquad (6.3)$$

де α – параметр регуляризації.

Модельні експерименти. Моделі (6.2) та (6.3) досліджено за допомогою модельних експериментів розв’язування прямих і обернених задач відповідно. На рис. 6.17 наведено графік тестового вхідного впливу, на рис. 6.18 – графік реакції системи на вхідний сигнал з використанням одного та двох членів поліноміального оператора. Отримані результати показали, що невикористання другого члена буде призводити до значної похибки і зниження адекватності моделі.

Розглянуто також задачу відновлення сигналу температури на основі виміряного опору. На рис. 6.18 зображено графік сигналу на основі якого відновлюється шуканий сигнал, результат відновлення сигналу (точний та наближений) у вигляді графіків зображено на рис. 6.19. На рис. 6.20 наведено графік відносної похибки обчисленого розв’язку.

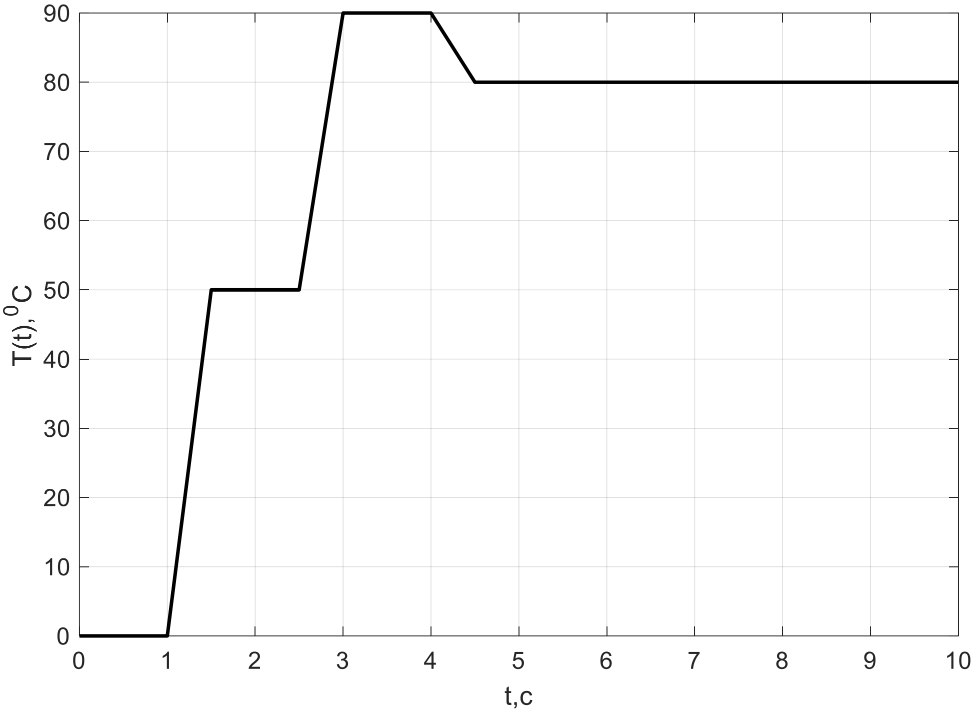


Рис. 6.17. Графік тестового вхідного впливу

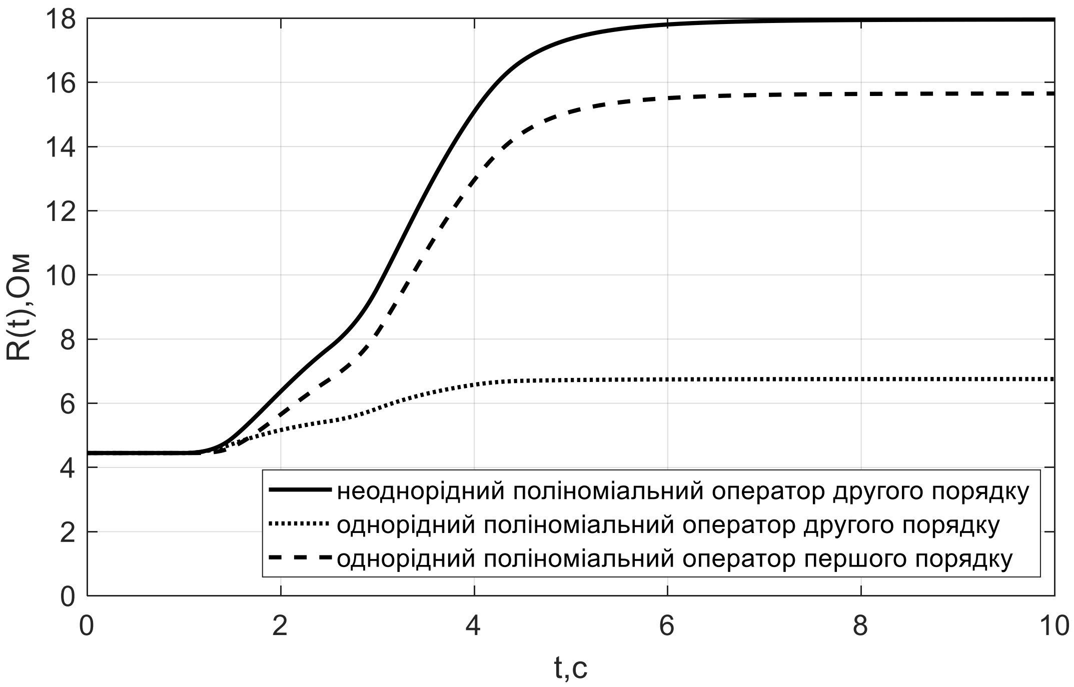


Рис. 6.18. Графіки реакції системи

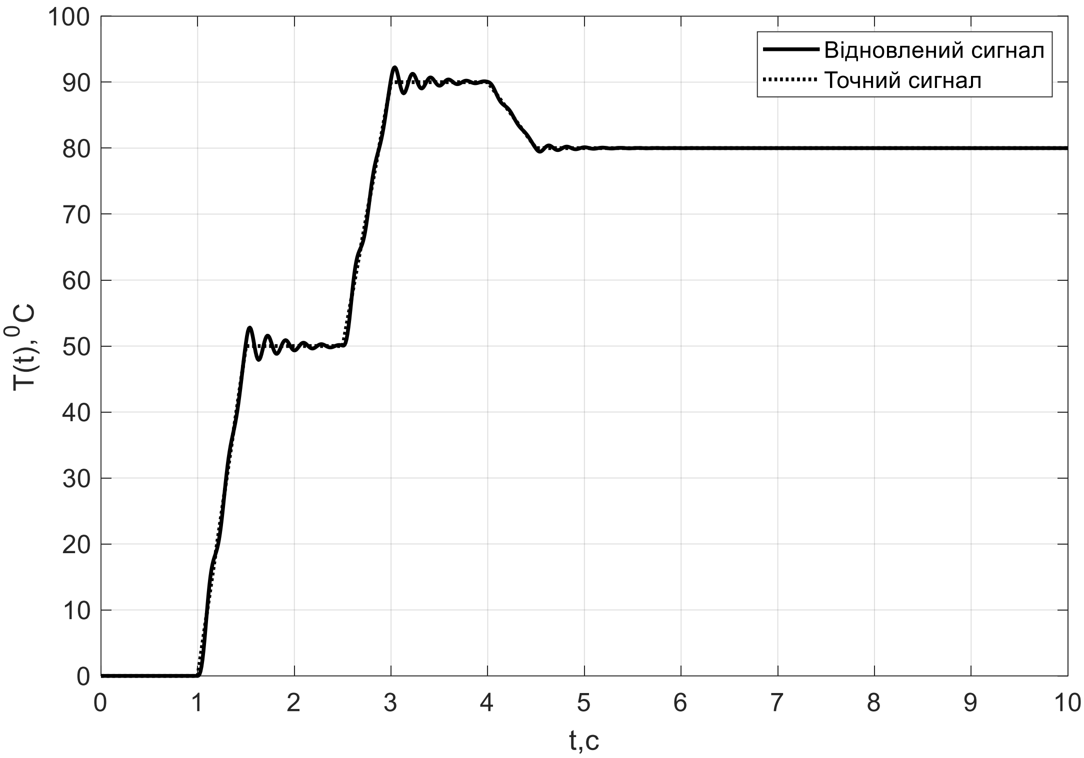


Рис. 6.19. Графік обчисленої температури

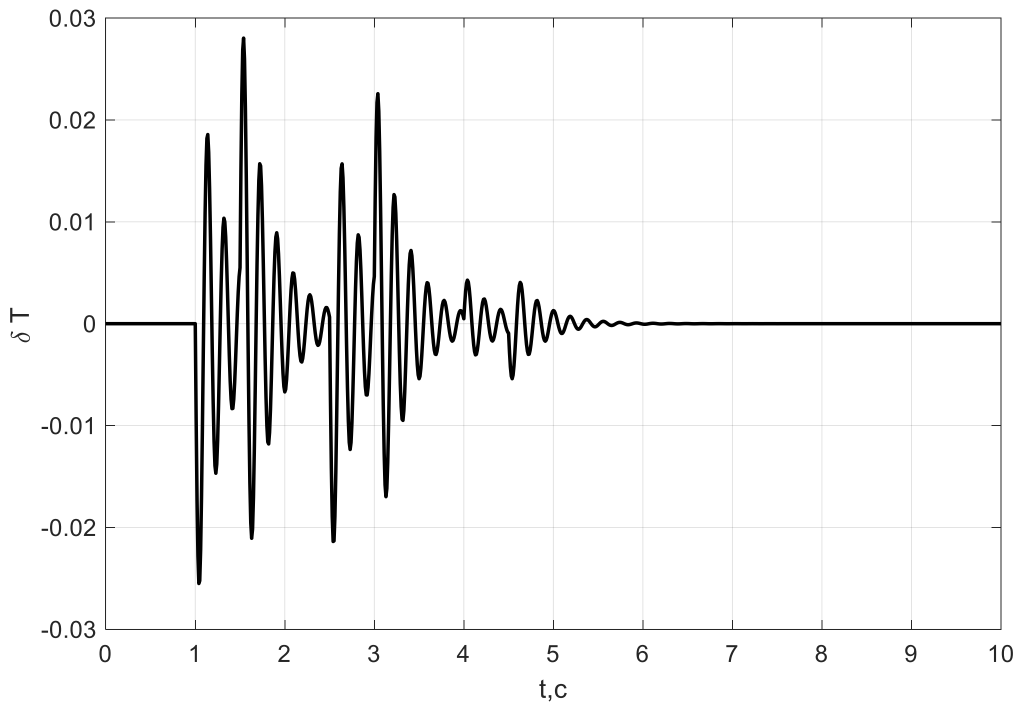


Рис. 6.20. Графік відносної похибки числового розв’язку відновлення сигналу

Ефективність отриманої моделі досліджувалась з накладанням шумових завад на вхідний сигнал. На рис. 6.21 наведено графік сигналу із накладанням шуму, на рис. 6.22 – графіки відновленого сигналу та його точне значення. Графік відносної похибки відновлення зображено на рис. 6.23.

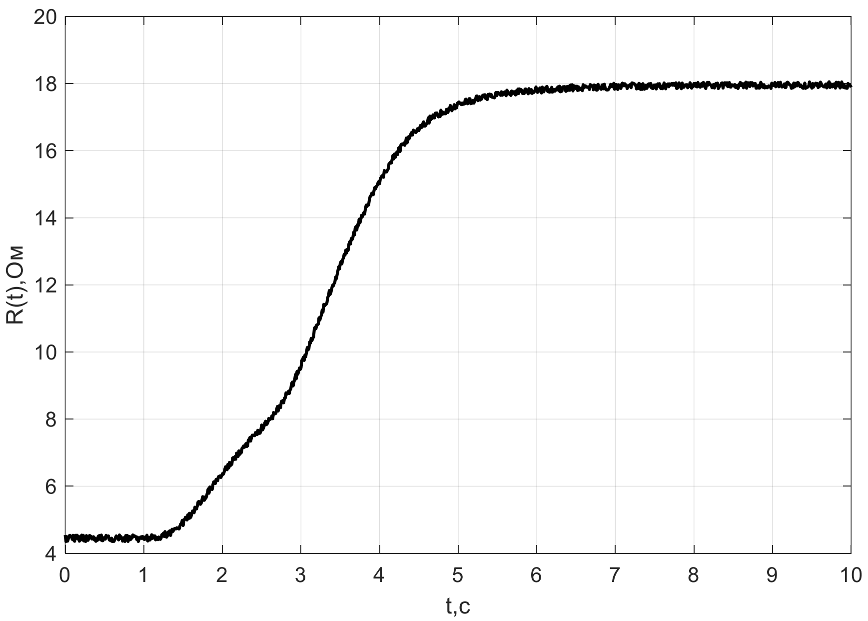


Рис. 6.21. Графік сигналу на виході системи із накладанням шумових завад

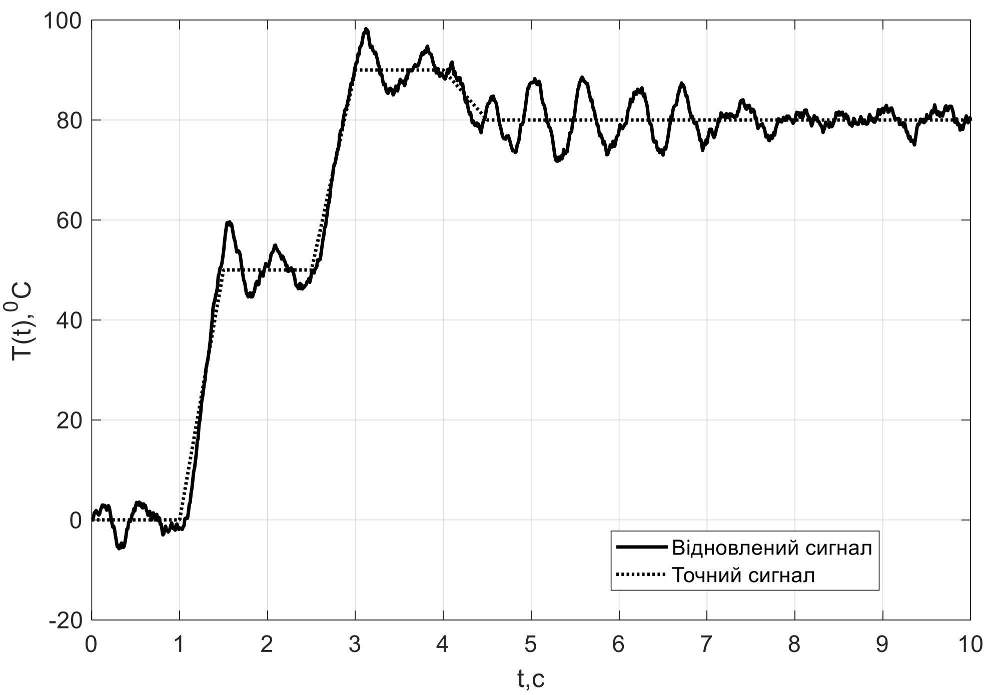


Рис. 6.22. Графіки сигналу на вході системи

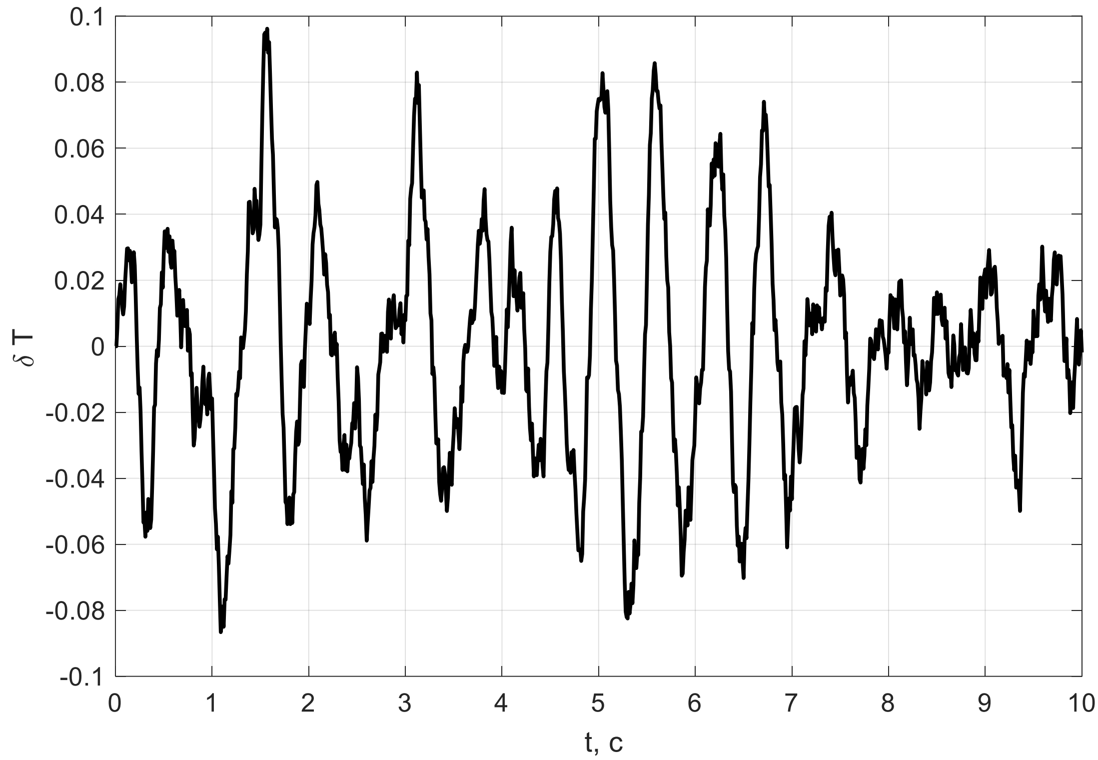


Рис. 6.23. Графік відносної похибки числової реалізації оберненої задачі

<u>Впровадження результатів</u>. Модель (6.3) є основою програмної складової комп’ютеризованої підсистеми контролю температурних режимів, яка реалізована на сервері у вигляді програмного аналогу комплексу ODP на мові Pyton. Значення температури визначається на основі розв’язування поліноміального інтегро-диференціального рівняння (6.3). Вхідним сигналом є сигнал отриманий із вимірювального перетворювача. Далі в автоматичному режимі у випадку перевищення граничної температури знижується навантаження на обладнання або здійснюється його виключення загалом. В той же час повідомлення про проблему надсилається адміністратору комп’ютерної мережі.

Особливістю моделі (6.3) є те, що вона визначена ядрами інтегральних операторів, які задані таблично (вектор та матриця), що накладає часові обмеження у використанні моделі. Дана проблема вирішується шляхом застосування механізму повторного запуску обчислювальних процесів у двох паралельно працюючих потоках. Результуючий розв’язок є результатом об'єднання розв'язків, які отримані у виконанні обчислювальних процесів у двох потоках, причому враховуються фрагменти отриманих результатів, де спостерігається стійка збіжність розв'язку. На рис. 6.24 представлено графіки отриманих розв'язків з використанням рестартів обчислювальних процесів, які зміщенні в часі у різних паралельних потоках. На рис. 6.25 зображено графік розв'язку, який отримано у результаті об'єднання фрагментів розв'язків отриманих в різних потоках, тобто результат відновлення значень температури.

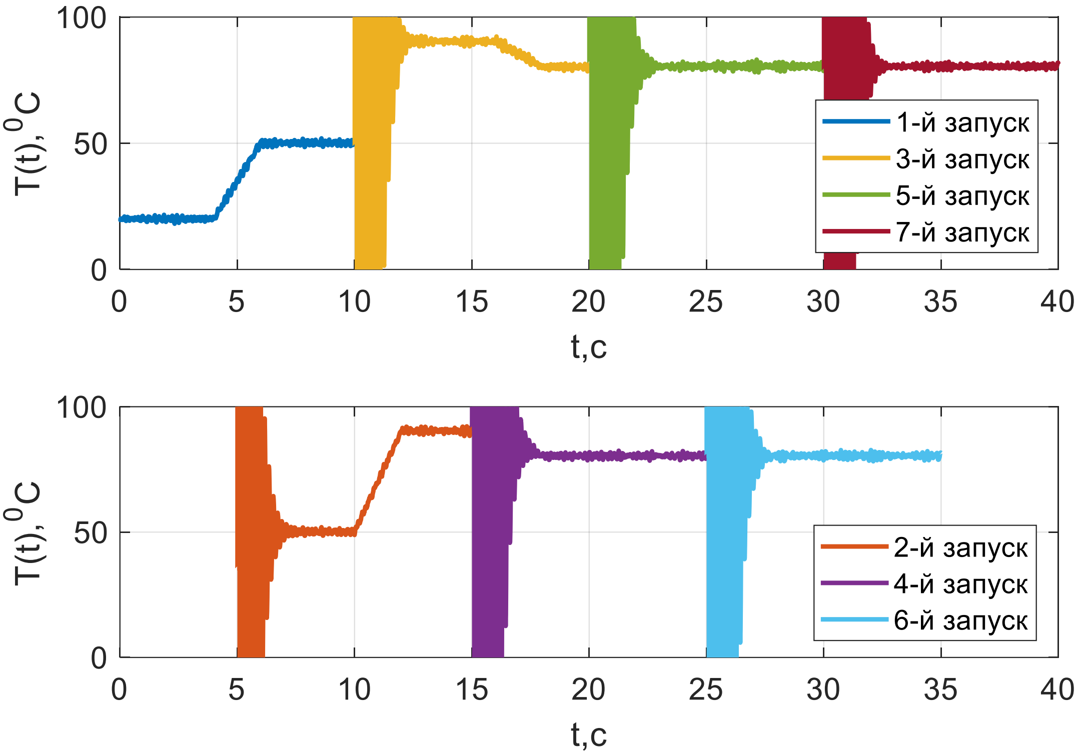


Рис. 6.24. Графіки розв'язків задачі відновлення температури з використанням рестартів обчислювальних процесів

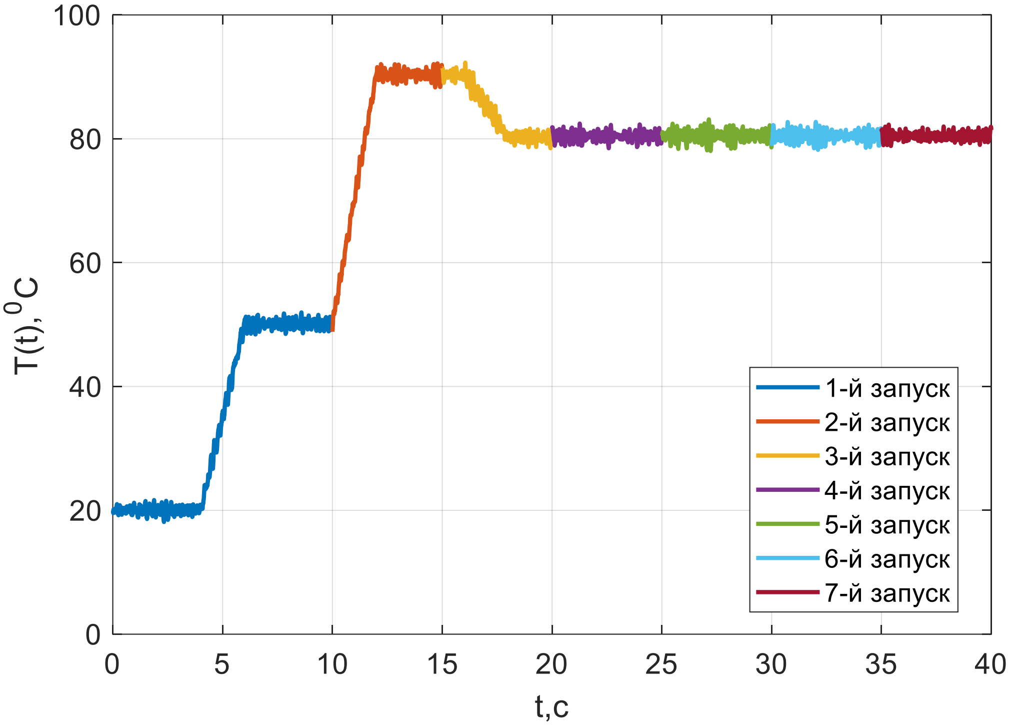


Рис. 6.25. Результат об’єднання фрагментів розв’язків

Результати роботи впроваджено у виробництво, а саме у виробничий процес фірми LANET. Візуальний інтерфейс реєстрації результатів вимірювання температури представлено на рис. 6.26. На рис. 6.27 представлено варіант для якого здійснюється автоматичний контроль температури.

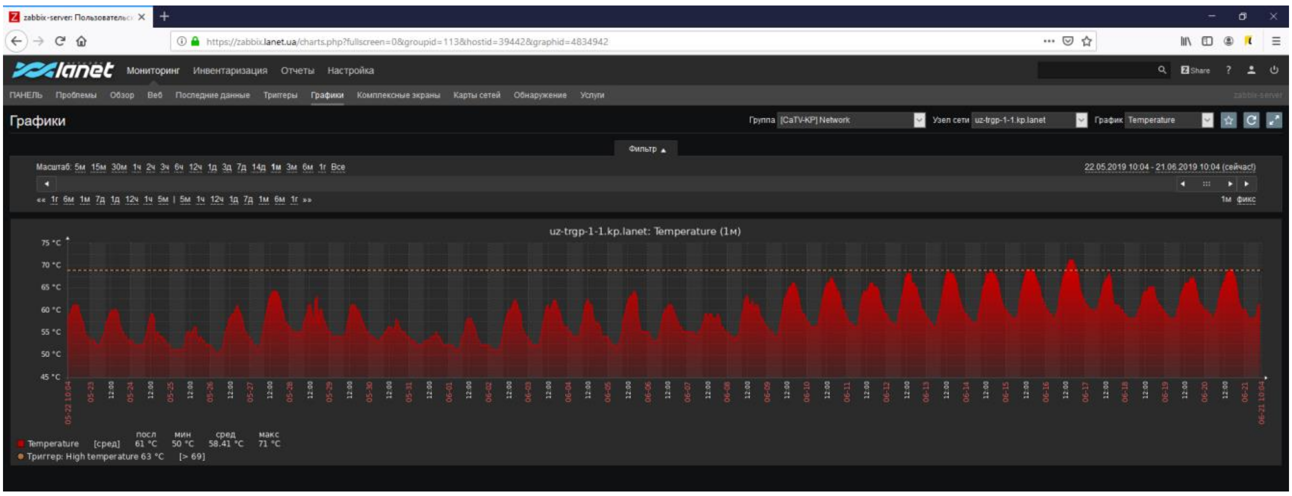


Рис. 6.26. Графік зміни температури

Отримані результати використовуються для контролю температури чіпів комутаторів та дозволяють в автоматичному режимі запобігати перевищенню температури обладнання.

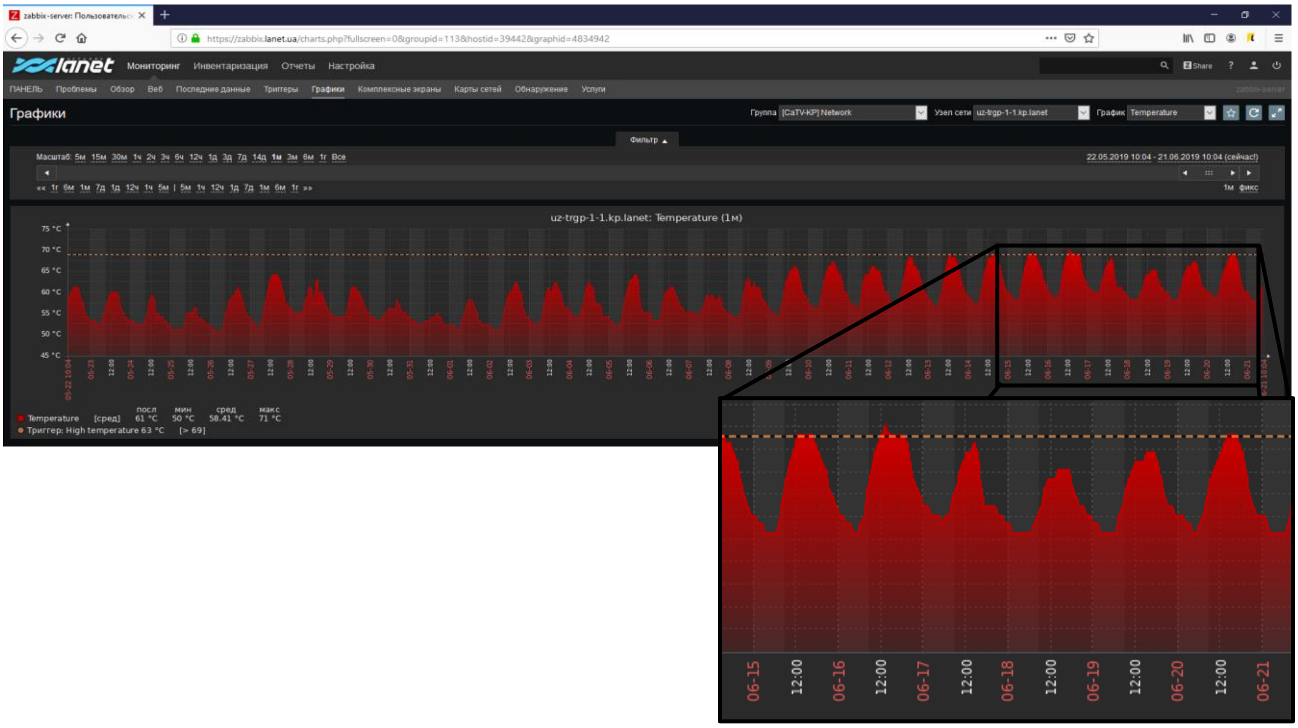


Рис. 6.27. Графік зміни температури при автоматизованому контролі

Висновки до розділу 6

1. Розроблено програмний комплекс для моделювання процесів у динамічних об’єктах із розподіленими параметрами, модулі якого дозволяють будувати інтегральні моделі на основі еквівалентних, апроксимаційних перетворень та методів експериментальної ідентифікації, а також розв’язувати прямі та обернені задачі динаміки на основі числової реалізації інтегральних операторів та рівнянь Вольтерри першого роду, в тому числі поліноміальних. Програмний комплекс значно розширює можливості середовища Matlab для створення комп’ютеризованих систем керування, контролю та вимірювання.

2. На основі розроблених методів і засобів розв’язано ряд модельних та прикладних задач, зокрема розроблені методики відновлення сигналів використано в контрольно-вимірювальному комплексі для моніторингу температурних режимів чипів комутаторів доступу та агрегації. Це дозволило суттєво покращити швидкість реакції системи моніторингу температури та підвищити надійність і ефективність комутаційного та магістрального обладнання комп’ютерних мереж.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано науково-технічну проблему створення методів і засобів математичного моделювання динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами шляхом отримання і застосування спрощених динамічних моделей у вигляді одновимірних інтегральних операторів і рівнянь, що дозволяє знизити складність алгоритмічної та програмної реалізації моделей у системах керування, контролю і вимірювання із забезпеченням їх високої завадостійкості та швидкодії. Зокрема отримано такі наукові результати:

1. Проведений аналіз сучасного стану проблем математичного та комп'ютерного моделювання динамічних процесів, що відбуваються в системах керування, контролю та вимірювання, дозволив із врахуванням зростаючих вимог до їх техніко-експлуатаційних характеристик (швидкодія, завадостійкість) вибрати й обґрунтувати підхід до розвитку комп'ютеризованих керованих систем, який полягає в розширенні класу математичних моделей із залученням одновимірних інтегральних моделей Вольтерри, в тому числі поліноміальних, у вигляді інтегральних операторів та рівнянь, що дає змогу враховувати нелінійні залежності та розподіленість параметрів компонентів цих систем.

2. Проведений аналіз моделей широкого спектру динамічних процесів об'єктів із розподіленими параметрами та методів їх еквівалентних перетворень дозволив удосконалити базовий набір моделей об'єктів із розподіленими параметрами, до яких віднесено ланки: напівінтегральну, напівінерційну, напівколивальну, запізнення та напівзапізнення. Це дозволяє, аналогічно до об'єктів із зосередженими параметрами, здійснювати синтез моделей об'єктів із розподіленими параметрами на основі структурно-алгоритмічного підходу в засобах імітаційного моделювання. Застосування методів еквівалентних перетворень динамічних моделей об'єктів із розподіленими параметрами (розщеплення, потенціалів, функції Гріна, інтегральних перетворень, дробових похідних) дозволило побудувати інтегральні моделі вимірювальних перетворювачів, зокрема температури.

3. Розроблено та досліджено ряд методів апроксимаційних перетворень динамічних моделей: метод представлення ядер поліноміальних інтегральних моделей Вольтерри у виродженому вигляді на основі апроксимації багатовимірних функцій функціональними представленнями у формі степеневих або експоненціальних апроксимаційних наближень шляхом застосування методу найменших квадратів; метод апроксимації моделей у вигляді диференціальних рівнянь із частинними похідними на основі застосування диференціально-різницевої апроксимації, перетворення Лапласа, структурно-алгоритмічного методу, методу ланцюгових дробів, що дозволяє будувати «економні» в обчислювальному сенсі моделі зі збереженням їх адекватності на рівні диференціально-різницевих моделей; метод ланцюгово-дробової апроксимації передатних функцій ірраціонального та трансцендентного типу, для якого сформульовано рекомендації щодо застосування структурної декомпозиції складних передатних функцій.

4. Досліджено методи ідентифікації параметричних динамічних моделей у формі передатних функцій на основі застосування детермінованого (застосування перетворення Лапласа та апроксимаційного представлення перехідної характеристики) та стохастичного (застосування моментів Пуассона) підходів, що дозволило отримувати апроксимаційні моделі об’єктів із розподіленими параметрами у формі дробово-раціональних передатних функцій та метод побудови моделі лінійної динамічної системи у формі непараметричного оператора Вінера-Гопфа в сфері його застосування до об’єктів із розподіленими параметрами шляхом формування рекомендацій щодо вибору типу вхідних сигналів та необхідної мінімальної кількості експериментів.

5. Набули подальшого розвитку методи ідентифікації моделей динамічних систем в інтегральній формі із застосуванням розроблених на основі методів апроксимації багатовимірних функцій стійких до шумових завад методів диференціювання експериментально отриманих функціональних залежностей, зокрема у формах оператора Вольтерри та інтегро-степеневого ряду Вольтерри; для скорочення кількості необхідних експериментів при ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем

розроблено адаптивний метод побудови моделей у формі поліноміальних інтегральних операторів Вольтерри, що дозволило скоротити кількість необхідних експериментів на порядок у порівнянні із традиційним підходом.

6. Розроблено, вдосконалено та досліджено методи числової реалізації інтегральних операторів: метод числової реалізації поліноміальних операторів Вольтерри із застосуванням апроксимації багатовимірних ядер функціями у вигляді суми добутків незалежних змінних, що дозволяє скоротити на порядок кількість необхідних обчислювальних процедур; метод числової реалізації поліноміальних операторів Вольтерри на основі методу квадратур шляхом застосування векторно-матричного підходу до апроксимації інтегральних операторів, який орієнтований на ефективну програмну реалізацію, що дозволяє створити універсальний спосіб для програмної реалізації поліноміальних інтегральних операторів довільного порядку та створює можливості застосування паралельних алгоритмів обчислення інтегральних операторів; метод внутрішньої регуляризації сингулярних інтегральних операторів, у тому числі поліноміальних, шляхом введення регуляризаційного параметра в ядро інтегральної моделі Вольтерри, що дозволяє отримати інтегральну модель з ядрами без особливостей та застосувати квадратурні методи для числової реалізації таких моделей.

7. Розроблено метод розв’язування поліноміального інтегрального рівняння Вольтерри першого роду на основі квадратурних алгоритмів шляхом використання ітераційних методів розв’язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Для підвищення завадостійкості процесу відновлення сигналів на вході динамічних об’єктів запропоновано регуляризаційний метод розв’язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри на основі введення диференціального регуляризаційного оператора. Для розв’язання отриманих інтегро-диференціальних рівнянь запропоновано застосовувати їх апроксимаційні наближення, отримані на основі методу квадратур (кубатур) та різницевих формул.

8. Розроблено програмний комплекс для моделювання процесів у динамічних об’єктах із розподіленими параметрами, модулі якого дозволяють будувати інтегральні моделі на основі еквівалентних, апроксимаційних

перетворень та методів експериментальної ідентифікації, а також розв’язувати прямі та обернені задачі динаміки на основі числової реалізації інтегральних операторів та рівнянь Вольтерри першого роду, в тому числі поліноміальних. Програмний комплекс значно розширює можливості середовища Matlab при створенні комп’ютеризованих систем керування, контролю та вимірювання.

9. На основі розроблених методів і засобів розв’язано ряд модельних та прикладних задач, зокрема розроблені методики відновлення сигналів використано в алгоритмах функціонування вимірювальних комплексів контролю температурних режимів чипів комутаторів доступу та агрегації. Це дозволило суттєво покращити швидкість реакції системи моніторингу температурних режимів роботи об’єктів інформаційно-обчислювальних систем, зокрема комутаційного та магістрального обладнання комп’ютерних мереж.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агошков В. И., Дубовский П. Б., Шутяев В. П. Методы решения задач математической физики. Учебное пособие. Москва, Физматлит, 2002. 320 с.

2. Алексеев А. А., Кораблев Ю. А, Шестопалов М. Ю. Идентификация и диагностика систем: учебник. Москва. Академия, 2009. 351 с.

3. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. Введение в Octave для инженеров и математиков. Москва, 2012. 368 с.

4. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В., Рудченко Е. А. Scilab: Решение инженерных и математических задач. Москва, 2008. 260 с.

5. Алифанов О. М., Ненарокомов А. В., Артюхин Е. А. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. Москва, 2009. 299 с.

6. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке Matlab. Санкт-Петербург, 2000. 475 с.

7. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. Matlab 7. Санкт-Петербург, 2005. 1194 с.

8. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск, 1999. 193 с.

9. Апарцин А. С. О повышении точности моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра. *Электронное моделирование*. 2001. Т. 23. № 6. С. 3–12.

10. Апарцин А. С. О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода. *Автоматика и телемеханика*. 2004. № 2. С. 118–125.

11. Апарцин А. С. О существовании и единственности решении полилинейных уравнений Вольтерра I рода. *Обратные и некорректные задачи прикладной математики*. Иркутск, 2005. Том. 3. С. 18–23.

12. Апарцин А. С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода. *Журн. вычислит. матем. и матем. физики*. 2007. Т. 47. № 8. С. 1378–1386.

13. Апарцин А. С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода: элементы теории и численные методы. *Известия ИГУ, серия математика*. 2007. № 1. С. 13–42.

14. Апарцин А. С., Солодуша С. В. О математическом моделировании нелинейных динамических систем рядами Вольтерры. *Электронное моделирование*. 1999. № 2. С. 3–12.

15. Арнольд В. И. Цепные дроби. Москва, 2001. 40 с.

16. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы : учеб. пособие для студ. физ.-мат. спец. вузов. 5-е изд. Москва, 2007. 637 с.

17. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимация Паде. Москва, 1986. 502 с.

18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том I. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Москва, 1969. 344 с.

19. Белоносов С. М., Овсиенко В. Г., Карачун В. Я., Применение интегральных представлений к решениям задач теплопроводности и динамики вязкой жидкости. Киев, 1989. 163 с.

20. Бенькович Е. С., Колесов Ю. Б., Сениченков Ю. Б. Практическое моделирование сложных динамических систем. Санкт-Петербург, 2001. 401 с.

21. Бобрешов А. М., Мымрикова Н. Н. Проблемы анализа сильно нелинейных режимов электронных устройств на основе рядов Вольтерры. *Вестник ВГУ. Серия «Физика. Математика»*. 2013. № 2. С. 15–25.

22. Божок А. М., Іванюк В. А., Понеділок В. В. Апаратно-орієнтований регуляризаційний метод диференціювання сигналів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.* Кам'янець-Подільський, 2017. Вип. 16. С. 14–21.

23. Бойко И. Ф., Турчак В. В. Идентификация систем измерений. *Електроніка та системи упр.* 2009. № 1. С. 11–19.

24. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза, 2016. 396 с.

25. Бреславець В. С., Кравець В. О., Серков О. А. Експериментальне визначення ядер Вольтерра моделі пристрою захисту інформаційних каналів зв'язку. *Системи обробки інформації*. 1999. № 2(6). С. 52–55.

26. Бриндли К. Измерительные преобразователи. Москва, 1991. 144 с.

27. Булавацький В. М., Кривонос Ю. Г., Скопецький В. В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ, 2005. 284 с.

28. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. Москва, 1975. 568 с.

29. Бутковский А. Г. Структурная теория распределенных систем. Москва, 1977. 320 с.

30. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. Москва, 1979. 224 с.

31. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. 2-е изд. Москва, 2004. 160 с.

32. Васильєв В. В., Сімак Л. О., Зеленков О. А. та ін. Аналіз та математичне моделювання динамічних систем на базі некласичних операційних числень. Київ, 2006. 184 с.

33. Вашны Е. Г. Динамика измерительных цепей (систем). Москва, 1969. 288 с.

34. Верлань А. А., Іванюк В. А. Спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами на основі методу розщеплення. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2017. Т. 7, № 4. С. 285–290.

35. Верлань А. А., Сагатов М. В., Сытник А. А. Квадратурные алгоритмы моделирования измерительных преобразователей с распределёнными параметрами. *Моделювання та інформаційні технології*. Вип. 6, 2000. С. 131–136.

36. Верлань А. А., Стертен Ю, Положаенко С. А. Алгоритм реализации интегральных макромоделей явного вида. *Електротехнічні та комп'ютерні системи*. 2017. № 24. С. 143–149.

37. Верлань А. А., Федорчук В. А. Підходи до побудови скалярних динамічних моделей розподілених ланок керованих електромеханічних систем. *Мат. та комп'ютер. моделювання. Сер. Техн. науки*. 2016. Вип. 13. С. 49–60.

38. Верлань А. Ф., Абдусатаров Б. Б., Игнатченко А. А., Максимович Н. А. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов. Київ, 1993. 208 с.

39. Верлань А. Ф., Горошко И. О., Карпенко Е. Ю., Королёв В. Ю., Мосенцова Л. В. Методы и алгоритмы восстановления сигналов и изображений. *Монография*. Київ, 2011. 367 с.

40. Верлань А. Ф., Дячук А. А., Палагин В. В. Методы математической редукции моделей динамических систем. Киев. Наукова думка, 2019. 311 с.

41. Верлань А. Ф., Евдокимов В. Ф. Электронное моделирование передаточных функций. Київ, 1970. 232 с.

42. Верлань А. Ф., Контрерас Д. Е., Сізіков В. С., Тихончук С. Т., Федорчук В. А. Integral equation toolbox – пакет програм для розв'язування інтегральних рівнянь в середовищі Matlab. Київ, 1997. 44 с.

43. Верлань А. Ф., Максимович Н. А. Применение метода обратных операторов для компьютерного восстановления сигнала инерционного измерительного прибора. *Электрон. моделирование*. 2001. Т. 23, № 4. С. 14–26.

44. Верлань А. Ф., Положаенко С. А. Применение эквивалентной модели для оценки состояния систем. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*, Кам'янець-Подільський, 2019. Вип. 18. С. 25-31.

45. Верлань А. Ф., Положаєнко С. А., Протасов С. Ю. Идентификационный метод оперативного контроля процесса численного решения дифференциальных уравнений. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. Кам'янець-Подільський, 2019. Вип. 18. С. 25–31.

46. Верлань А. Ф., Сагатов М. В., Сытник А. А. Методы математического и компьютерного моделирования измерительных преобразователей и систем на основе интегральных уравнений. Ташкент, 2011. 336 с.

47. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Київ, 1986. 544 с.

48. Верлань А. Ф., Федорчук В. А. Моделі динаміки електромеханічних систем. Київ, 2013. 221 с.

49. Верлань А. Ф., Федорчук В. А., Іванюк В. А. Інтегральні моделі нестаціонарних задач теплопровідності на основі методу теплових потенціалів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2019. Вип. 19. С. 24–30.

50. Верлань А. Ф., Федорчук В. А., Іванюк В. А. Комп'ютерне моделювання в задачах динаміки електромеханічних систем. Кам'янець-Подільський, 2010. 204 с.

51. Верлань А. Ф., Федорчук В. А., Іванюк В. А. Реалізація ланцюгово-дробових наближень передатних функцій структурним методом. *Моделювання в електротехніці, електроніці і світлотехніці : матеріали міжнародної науково-технічної конференції* МЕЕС'10. Київ. С. 45–46.

52. Верлань Д. А. Ітераційні алгоритми апроксимації функцій двох змінних. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* Кам'янець-Подільський, 2009. Вип. 2. С. 24–32.

53. Верлань Д. А., Фуртат Ю. О. Способи розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра І роду з виродженим ядром в задачах відновлення вхідних сигналів динамічних об'єктів. *Математичне та комп'ютерне моделювання.*

Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2016. Вип. 13. С. 61–65.

54. Волков Н. В. Функциональные ряды в задачах динамики автоматизированных систем. Москва, 2001. 100 с.

55. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. *Под ред. П. И. Кузнецова*. Москва, 1982. 304 с.

56. Гаращенко Ф. Г., Волошин О. Ф., Кириченко М. Ф., Крак Ю. В., Пічкур В. В., Стоян В. А. Розвиток методів і технологій моделювання та оптимізації складних систем: монографія. Київ, 2009. 667 с.

57. Грановский В. А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения. Ленинград : Энергоатомиздат, 1984. 224 с.

58. Гроп Д. Методы идентификации систем. Москва, 1979. 302 с.

59. Губарев В. Ф. Проблема математической интерпретации данных. I. Системы с сосредоточенными параметрами. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 2. С. 59–72.

60. Губарев В. Ф. Проблема редукции порядка модели линейной стационарной системы большой размерности. *Кибернетика и вычислительная техника*. 2016. Вып. 186. С. 30–45.

61. Губарев В. Ф. Рациональная аппроксимация систем с распределенными параметрами. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. Т. 44, № 2. С. 99–115.

62. Датчики : Справочное пособие / *Под общ. ред. В. М. Шарапова, Е. С. Полищука*. Москва, 2012. 624 с.

63. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. Киев: Наук. думка, 2007. 701 с.

64. Демиденко Н. Д., Потапов В. И., Шокин Ю. И. Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами. Новосибирск, 2006. 551 с.

65. Дехтяренко П. И., Коваленко В. П. Определение характеристик звеньев систем автоматического регулирования. Москва, 1973. 120 с.

66. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. Москва, 1971. 288 с.

67. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Москва, 1985. 414 с.

68. Дзебисов Х. П. Интегральные представления и краевые задачи в многомерном комплексном анализе. Москва, 2005. 256 с.

69. Дилигенская А. Н. Идентификация объектов управления. Учебное пособие. Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2009. 136 с.

70. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об’єктів і систем керування. Вінниця, 2012. 308 с.

71. Дубовой В. М. Моделювання систем контролю та керування. Вінниця, 2005. 174 с.

72. Дьяконов В. В., Круглов В. А. Математические пакеты расширения Matlab : специальный справочник. Санкт-Петербург, 2001. 480 с.

73. Дьяконов В. П. Matlab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. *Серия «Библиотека профессионала».* Москва, 2005. 576 с.

74. Дьяконов В. П. Matlab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. Основы применения. *Серия «Библиотека профессионала».* Москва, 2005. 800 с.

75. Егоренков Д. Л. Фрадков А. Л., Харламов В. Ю. Основы математического моделирования. Построение и анализ моделей с примерами на языке MATLAB. Санкт-Петербург, 1994. 191 с.

76. Ермаков С. М., Бродский В. З., Жиглявский А. А. и др. Математическая теория планирования эксперимента. Москва, Наука, Глав. ред. Физико-математический лит-ры, 1983. 390 с.

77. Жежера Н. И. Математическое описание устройств и процессов как объектов систем автоматического управления. Москва, Креативная экономика, 2012. 390 с.

78. Жуков К. Г. Модельное проектирование встраиваемых систем в LabVIEW. Москва, 2011. 688 с.

79. Жученко А. И., Кубрак Н. А., Голинко И. М. Динамика объектов с распределенными параметрами. Київ, 2005. 121 с.

80. Жученко А. І., Кваско М. З., Кубрак Н. А. Ідентифікація динамічних характеристик. Комп’ютерні методи. Київ, 2000. 182 с.

81. Жученко А. І., Цапар В. С. Розробка спрощеної математичної моделі скловарної печі. Харьков, 2011. Выпуск №2/4 (74). 2015. С. 42–47.

82. Жученко О. А., Цапар В. С. Метод спрощення математичних моделей об’єктів керування із розподіленими параметрами. *Автоматизація технологічних і бізнес-процесів*. Херсон, 2015. Вип. 7. 2015. С. 15–25.

83. Зваридчук В. Б. Про інтегральні моделі в задачах керування динамікою систем з розподіленими параметрами. *Журн. обчисл. та приклад. математики*. 2004. № 2. С. 92.

84. Зельченко В. А., Шаров С. Н. Расчет и проектирование автоматических систем с нелинейными динамическими звеньями. Ленинград, 1986. 174 с.

85. Иванюк В. А., Костьян Н. Л., Махович А. И. Способы формирования передаточных функций приемника теплового потока. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам’янець-Подільський, 2013. Вип. 8. С. 61–69.

86. Іванюк В. А. Ланцюгово-дробова апроксимація ірраціональних та трансцендентних передатних функцій об’єктів з розподіленими параметрами. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам’янець-Подільський, 2008. Вип. 1. С. 75–85.

87. Іванюк В. А. Ланцюгово-дробова апроксимація ірраціональних та трансцендентних передатних функцій об’єктів з розподіленими параметрами. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам’янець-Подільський національний, 2008. Вип. 1. С. 75–85.

88. Іванюк В. А. Ланцюгово-дробовий метод розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам'янець-Подільський, 2012. Вип. 6. С. 88–97.

89. Іванюк В. А. Математичні пакети прикладних програм : навчальний посібник. Кам'янець-Подільський, 2015. 160 с.

90. Іванюк В. А. Метод відновлення сигналів на вході нелінійних динамічних об'єктів з розподіленими параметрами. *Моделювання*. Київ, 2018. С. 154–157.

91. Іванюк В. А. Моделювання процесу занурення буксируваних підводних об'єктів шляхом ланцюгово-дробової апроксимації передатних функцій. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам'янець-Подільський, 2009. Вип. 2. С. 98–107.

92. Іванюк В. А. Непараметрична ідентифікація передатних функцій теплових потоків. *Збірник наукових праць молодих вчених Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка*. Кам'янець-Подільський, 2016. Вип. 7. С. 131–132.

93. Іванюк В. А. Розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду на основі методу ланцюгових дробів. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів*. Вип. 11, у 3 т. Кам'янець-Подільський, 2012. Т. 2. С. 30–31.

94. Іванюк В. А., Грищук В. А. Побудова апроксимаційних інтегральних моделей нелінійних динамічних об'єктів. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : тези доповідей V міжнародної наукової конференції*. Кам'янець-Подільський, 2012. С. 34–35.

95. Іванюк В. А., Дячук О. А., Понеділок В. В. Метод обернених операторів відновлення сигналів на вході лінійних динамічних систем, що задані передатними функціями. *Математичне та комп'ютерне моделювання.*

Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. Кам’янець- Подільський, 2017. Вип. 15. С. 62–67.

96. Іванюк В. А., Корнєєв О. М. Розв’язування інтегральних рівнянь типу згортки за допомогою інтегральних перетворень. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам’янець-Подільський, 2010. Вип. 4. С. 91–97.

97. Іванюк В. А., Корнєєв О. М. Використання ланцюгових дробів при розв’язанні інтегральних рівнянь типу згортки операційним методом. *Интегральные уравнения – 2009 – Integral equations – 2009 : сб. тезисов конф*. Київ, 2009. С. 83–85.

98. Іванюк В. А., Костьян Н. Л. Інтегральний метод розв’язування диференціальних рівнянь при моделюванні об’єктів із розподіленими параметрами. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2018. Вип. 18. С. 78–85.

99. Иванюк В. А., Костьян Н. Л. Способ построения динамической модели линейного объекта по реакции на входное воздействие произвольной формы. *Электронное моделирование*. Київ, 2014. Т. 36. С. 113–119.

100. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Алгоритм розв’язування обернених задач динаміки нелінійних об’єктів на основі рядів Вольтерри. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : тези доповідей*. Кам’янець-Подільський, 2016. С. 81–83.

101. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Алгоритми моделювання нелінійних систем керування на основі інтегральних рівнянь. *Моделювання : тези XXXV науково-технічної конференції*. Київ, 2016. С. 27.

102. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Аналітичне подання рядів Вольтерри на основі експериментальних даних. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам’янець-Подільський, 2014. Вип. 11. С. 43–50.

103. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Апроксимація функцій багатьох змінних методом найменших квадратів. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів*. Вип. 13, у 3 т. Кам'янець-Подільський, 2014. Т. 2. С. 48–49.

104. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Ідентифікація нелінійних динамічних систем у вигляді інтегральних рядів Вольтерри на основі детермінованих моделей. *Моделювання : тези XXXIII науково-технічної конференції*. Київ, 2014. С. 14–15.

105. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Побудова моделей нелінійних динамічних систем заданих структурними схемами у випадку послідовних з'єднань на основі ряду Вольтерри. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів* : вип. 15, у 3 т. Кам'янець-Подільський, 2016. Т. 2. С. 39–40.

106. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Побудова ядер інтегрального ряду Вольтерри на основі методу апроксимації фігурою обертання. *Матеріали Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів»*. Рівне, 2015. С.79.

107. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Побудова ядер інтегрального ряду Вольтерри методом апроксимації фігурою обертання. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам'янець-Подільський, 2015. Вип. 12. С. 36–42.

108. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Регуляризаційні динамічні оператори диференціювання зашумлених сигналів. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : вип. 16, у 3 т. Кам'янець-Подільський, 2018. Т. 2. С. 52–53.

109. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Чисельна реалізація інтегральних рядів Вольтерри. *Сучасні проблеми математичного моделювання,*

прогнозування та оптимізації : тези доповідей. Кам’янець-Подільський, 2014. С. 64–65.

110. Іванюк В. А., Понеділок В. В., Грищук В. А. Комп’ютерна реалізація детермінованого способу ідентифікації інтегральних моделей нелінійних динамічних об’єктів. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам’янець-Подільський, 2014. Вип. 10. С. 59–67.

111. Іванюк В. А., Понеділок В. В., Іванюк Т. М. Способи відновлення сигналів на вході лінійних динамічних систем заданих моделями у вигляді передатних функцій методом обернених операторів. *Наукові праці Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів*. Вип. 16, у 3 т. Кам’янець-Подільський, 2017. Т. 2. С. 38–40.

112. Іванюк В. А., Ситник О. О., Стертен Ю. Дослідження еквівалентних форм представлення динамічних моделей вимірювальних перетворювачів методом обчислювальних експериментів. *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: Технічні науки*, 2018. № 1. С. 27–34.

113. Іванюк В. А., Стертен Ю. Дослідження обчислювальних особливостей форм динамічних моделей вимірювальних перетворювачів. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей. Кам’янець-Подільський, 2018. С. 30–31.

114. Іванюк В. А., Тихоход В. О., Протасов С. О. Інтегральні моделі ірраціональних та трансцендентних ланок. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам’янець-Подільський, 2011. Вип. 5. С. 101–109.

115. Іванюк В. А., Федорчук В. А. Адаптивний метод ідентифікації моделей у вигляді інтегральних рядів Вольтерри. *Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання 2019*. Івано-Франківськ, 2019. С. 103–106.

116. Іванюк В. А., Федорчук В. А. Адаптивний метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем інтегральними рядами Вольтерри. *Електронне моделювання*, 2019. Т. 41, № 3. С. 33–42.

117. Калиткин Н. Н. Численные методы: учебное пособие. БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

118. Капалин В. И., Князева Л. В., Гридчин С. И., Князев В. В., Серков А. А. Идентификация и моделирование электронных систем при воздействии мощных электромагнитных помех. *Электронное моделирование*. 1991. № 5. С. 50–54.

119. Карпенко В. М., Федорчук В. А. Побудова структурних апроксимаційних моделей розподілених ланок електромеханічних систем на прикладі бурильної колони бурової установки. *Мат. та комп'ютер. моделювання. Сер. Техн. науки*. 2010. Вип. 3. С. 78–95.

120. Карташов Э. М., Кудинов В. А., Калашников В. В. Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. Москва, 2018. 435 с.

121. Киселев Н. В., Мядзель В. Н., Рассудов Л. Н. Электроприводы с распределенными параметрами. Ленинград, 1985. 220 с.

122. Клименко В. П., Клименко В. П., Ляхов А. Л. Прикладная математическая задача как объект компьютерной алгебры. *Мат. машини і системи*. 2003. № 3-4. С. 103–123.

123. Ковалюк Д. О., Москвіна С. М. Моделювання теплотехнологічних об’єктів з розподіленими параметрами : монографія. Вінниця, 2010. 182 с.

124. Корнєєв О. М., Федорчук В. А. Квадратурний алгоритм розв'язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри з виродженими ядрами. *Мат. та комп'ют. моделювання. Сер. Техн. науки*. 2011. Вип. 5. С. 123–133.

125. Короткий А. И., Стародубцева Ю. В. Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса. Челябинск, 2015. 168 с.

126. Костинюк Л. Д., Мороз В. І., Паранчук Я. С. Моделювання електроприводів: Навч. посібник. Львів, 2004. 404 с.

127. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. Москва. Наука, 1974. 223 с.

128. Кувшинов Г. Е., Наумов Л. А., Чупина К. В. Системы управления глубиной погружения буксируемых объектов. Владивосток, 2005. 85 с.

129. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К. Математические модели сплошных сред. Київ : *Наукова думка*, 2010. 551 с.

130. Лазарев Ю. Ф. Моделювання динамічних систем у Matlab. Київ, 2011. 421 с.

131. Ланнэ А. А. Нелинейные динамические системы: синтез, оптимизация, идентификация. Ленинград, 1985. 240 с.

132. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. Москва, 1987. 368 с.

133. Лозинський А., Мороз В., Паранчук Я. Розв’язування задач електромеханіки в середовищах пакетів MathCAD і MATLAB: Навч. посібник. Львів, 2000. 166 с.

134. Максименко С. Н., Козак А. В. Численные алгоритмы аппроксимации функций двух переменных применительно к решению интегральных уравнений. Моделювання та інформаційні технології. Київ, 2006. Вып. 36. С. 40–51.

135. Максименко С. Н., Одокиенко С. Н. Итерационный алгоритм с предварительной оптимизацией начального приближения для нелинейных интегральных уравнений Урысона. Моделювання та інформаційні технології. Київ, 2005. №30. С. 20–25.

136. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. Москва, 2000. 685 с.

137. Мартыненко Н. А., Пустыльников Л. М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. Москва, 1986. 303 с.

138. Матвійчук Я. М. Математичне макромоделювання динамічних систем: теорія та практика. Наукове видання. Львів, 2000. 236 с.

139. Михалевич В. С., Сергиенко И. В., Задирака В. К., Бабич М. Д. К вопросу оптимизации вычислений. *Кибернетика и системный анализ*. 1994. – № 2. С. 65–94.

140. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2010. 260 с.

141. Мокін Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації електромеханічних систем : навчальний посібник. Вінниця : Універсум, 2005. 300 с.

142. Монтгомери Д. К. Планирование эксперимента и анализ данных. Владивосток: Судостроение, 1980. 384 с.

143. Мороз В. І. Інтегральні рівняння в моделюванні керованих електромеханічних систем. *Електротехніка і електромеханіка*. 2007. № 3. С. 39–43.

144. Мосенцова Л. В., Наконечная О. А. Некоторые особенности задачи обработки результатов наблюдений в интегральной постановке. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. *Серія: Технічні науки: зб. наук. пр*. Кам'янець-Подільський, 2013. Вип. 8. С. 120–135.

145. Надежность современных и перспективных турбогенераторов. *Ред. Г. Г. Счастливый*. Київ, 1978. 203 с.

146. Никольский С. М. Квадратурные формулы. Москва, 1979. 255 с.

147. Одокиенко С. Н. Реализация неявных интегральных динамических моделей посредством быстодействующих алгоритмов. *Моделювання та інформаційні технології*. Київ, 2006. Вып. 36. С. 51–59.

148. Павленко В. Д. Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерры на основе данных измерений импульсных откликов. *Электронное моделирование*. 2010. Т. 32. №3. С. 3–18.

149. Павленко В. Д., Сперанский В. А. Построение модели канала связи на основе рядов Вольтерра в частотной области. *Труды Одесск. политехн. ун–та*, Одесса, 2011. Вып. 2 (36). С. 204–210.

150. Павленко В. Д., Фомин А. А., Павленко С. В., Ильин В. М. Метод диагностики непрерывных систем на основе моделей в виде ядер Вольтерра. *Моделювання та керування станом еколого-економічних систем регіону* : Збірник праць. Київ, 2008. Вип. 4. С. 180–191.

151. Павленко С. В., Павленко В. Д., Положаенко С. А. Методы идентификации нелинейных систем на основе моделей Вольтерра с помощью тестовых полиимпульсных воздействий. *Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Информатика и моделирование*. Харьков, 2012. №62 (968). С.155–161.

152. Палагин В. В. Модели и методы обработки сигналов при взаимодействии с коррелированными негауссовскими помехами. *Электронное моделирование*. 2015. Том 37, № 6. С.19-34.

153. Палагін В. В., Палагіна О. А., Зорін О. С. Комп'ютерне моделювання системи обробки шумових сигналів на фоні негаусових завад. Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. Кам’янець-Подільський, 2017. Вип. 16. С. 104–113.

154. Пилипенко Н. В. Методы и приборы нестационарной теплометрии на основе решения обратных задач теплопроводности. Санкт-Петербург, 2011. 180 с.

155. Подлесный Н. И., Рассоха А. А., Левков С. П. Специальные методы идентификации, проектирования и живучесть систем управления. Москва, Высшая школа, 1990. 446 с.

156. Половко А. М., Бутусов П. Н. Matlab для студентов. Санкт-Петербург, 2005. 320 с.

157. Положаєнко С. А. Моделі розподілених систем із запізнюючим аргументом. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2017. № 7(1–2). С. 74–80.

158. Понеділок В. В., Іванюк В. А. Чисельне диференціювання таблично заданих функцій. *Праці V Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів», присвяченої пам'яті професора Ю.П. Кунченка: тези доповідей*. Черкаси, 2015. С.196.

159. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. Москва, 1976. 448 с.

160. Пупков К. А., Шмыкова Н. А. Анализ и расчет нелинейных систем с помощью функциональных степенных рядов. Москва, 1989. 150 с.

161. Пухов Г. Е., Хатиашвили Ц. С. Критерии и методы идентификации объектов. Київ, 1979. 271 с.

162. Райбман Н. С., Капитоненко В. В., Овсепян Ф. А. и др. Дисперсионная идентификация. Москва, 1981. 336 с.

163. Рапопорт Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. Москва, 2005. 292 с.

164. Рапопорт Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. Москва, 2003. 299 с.

165. Рассудов Л. Н., Мядзель В. Н. Электроприводы с распределенными параметрами механических элементов. Ленинград, 1987. 143 с.

166. Салыга В. И. Автоматизированные системы управления технологическими процессами. Идентификация и оптимальное управление. Харків, 1976. 179 с.

167. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва, 1989. 616 с.

168. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. Москва, 2001. 319 с.

169. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. Москва, 2003. 784 с.

170. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. Москва, 2005. 320 с.

171. Самойленко В. Г., Конет І. М. Рівняння математичної фізики: навч. посіб. Київ, 2014, 283 с

172. Семенов А. Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В. Идентификация объектов управления: Учебн. пособие. Пенза, 2003. 211 с.

173. Сергиенко И. В., Задирака В. К., Бабич М. Д., Березовский А. И., Бесараб П. Н., Людвиченко В. А. Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с заданными значениями характеристик качества. *Кибернетика и систем. анализ*. 2006. 42, № 5. С. 33–41.

174. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Стоян В. А., Благовещенская Т. Ю., Богаенко В. А. О программно-аналитическом моделировании задач динамики систем с распределенными параметрами. *Кибернетика и систем. анализ*. 2005. 41, № 2. С. 35–55.

175. Сидоров Д. Н. Методы анализа интегральных динамических моделей. Теория и приложения. Иркутск, 2013. 293 с.

176. Сидоров Д. Н. Моделирование нелинейных нестационарных динамических систем рядами Вольтерра: идентификация и приложения. *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2000. Т. 3. № 1(5). С. 182–194.

177. Сизиков В. С. Математические методы обработки результатов измерений. 2001. 240 с.

178. Сизиков В. С. Устойчивые методы обработки результатов измерений. Учебное пособие. Санкт-Петербург, 1999. 240 с.

179. Сизиков В. С., Смирнов А. В., Федоров Б. А. Численное решение сингулярного интегрального уравнения Абеля обобщенным методом квадратур. Изв. вузов. Матем., 2004, № 8. С. 62–70.

180. Ситник О. О. Деякі алгоритми розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри І-го роду у задачі відновлення сигналів. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*, Вип. 13, 2016. С. 139–149.

181. Ситник О. О., Палагін В. В., Протасов С. Ю., Ключка К. М. Применение итерационных алгоритмов в задачах исследования динамики измерительных преобразователей на основе интегральных моделей. *Scientific achievements 2015: The International Scientific Association «Science & Genesis»*, P. 163–171.

182. Ситник О. О., Протасов С. Ю., Федорчук В. А. Інтегральні макромоделі динамічних об'єктів. *Мат. та комп'ютер. моделювання. Сер. Техн. науки*. 2013. Вип. 8. С. 98–109.

183. Скопецкий В. В., Стоян В. А., Зваридчук В. Б. К построению интегральных моделей распределенных пространственно временных процессов. *Проблемы управления и информатики*. 2006. №1–2. С. 171–183.

184. Скопецкий В. В., Стоян В. А., Зваридчук В. Б. К построению интегральных моделей распределенных пространственно-временных процессов. *Пробл. упр. и информатики*. 2006. № 1–2. С. 171–183.

185. Скопецький В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. Київ, 2002. 361 с.

186. Скопецький, В. В., Стоян В. А., Зваридчук В. Б. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. Київ, 2008. 316 с.

187. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. Москва, 1983. 312 с.

188. Солодуша С. В. К идентификации ядер Вольтерры в нестационарных интегральных моделях динамических систем. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія : Технічні науки*. 2017. № 15. С. 222–228.

189. Солодуша С. В. Моделирование систем автоматического управления на основе полиномов Вольтерра. *Моделирование и анализ информационных систем*. 2012. Т. 19. № 1. С. 60–68.

190. Солодуша С. В. Численное моделирование динамики теплообмена модифицированным квадратичным полиномом Вольтерры. *Вычислительные технологии*. 2013. Т. 18. № 2. С. 84–94.

191. Сперанский В. А. Инструментальные средства построения моделей нелинейных систем в виде рядов Вольтерра в частотной области. *Вестник НТУ ХПИ*. 2013. Вып. 5 (68). С. 200–214.

192. Стенин В. А. Оценка численных свойств схемы дискретизации при моделировании теплопроводности методом переменных состояния. *Вестник САФУ. Сер: Естеств. науки*. 2016. № 2. С. 126–132.

193. Стоян В. А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ, ВПЦ «Київський університет». 2011, 319 с.

194. Стоян В. А. Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами. Київ, 2004. 184 с.

195. Таланчук П. М., Рущенко В. Т. Основы теории и проектирования измерительных приборов. Киев : Вища школа, 1989. 454 с.

196. Таланчук П. М., Фомин М. Н. Математические модели первичных измерительных преобразователей для измерения парциальных давлений. *Химическая технология*. No 6. 1983. С. 35–39.

197. Теория автоматического управления *: учебник для вузов* / под ред. А. В. Нетушила. Москва, 1976. 400 с.

198. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва, 1986. 288 с.

199. Тихончук С. Т. Регуляризованные алгоритмы дифференцирования зашумленных сигналов в реальном масштабе времени. *Электронное моделирование*. 1991. № 1. С. 48–51.

200. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Понеділок В. В. Ідентифікація моделей нелінійних елементів інфокомунікаційних систем у формі функціональних рядів Вольтерри. *НІСТ`2019. Міжнародна науково-*

практична конференція «Наукоємні технології в інфокомунікаціях». Харків, 2019. С. 132–133.

201. Федорчук В. А. Комп’ютерне моделювання електроприводу з розподіленою ланкою лінійного типу. Київ, 2005. Вип. 31. С. 69–75.

202. Федорчук В. А. Моделирование типовых распределенных звеньев механической системы буровой установки. *Электрон. моделирование*. 2010. Т. 32, № 3. С. 95–110.

203. Федорчук В. А. Структурне моделювання нелінійних розподілених ланок механічної системи бурової установки. *Мат. та комп'ют. моделювання. Сер. Техн. науки*. 2008. Вип. 1. С. 188–196.

204. Федорчук В. А., Верлань А. А., Махович А. И. Интегральные модели переходных процессов в электрических цепях, содержащих звенья с распределенными параметрами. *Энергия ва ресурс тежаш муаммолари (махсус нашр)*. Тошкент. 2014. № 4. С. 67–74.

205. Федорчук В. А., Дячук О. А. Еквівалентування математичних моделей динамічних систем. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки.* Кам’янець-Подільський, 2009. Вип. 2. С. 155–164.

206. Федорчук В. А., Іванюк В. А. Апроксимація трансцендентних передатних функцій гіперболічного типу ланцюговими дробами. *Вестник Херсонского национального технического univeристета*. Херсон, 2007. Вып. 2(28). С. 353–358.

207. Федорчук В. А., Іванюк В. А. Побудова ланцюгово-дробових апроксимаційних моделей об’єктів з розподіленими параметрами на прикладі бурової установки. *МОДЕЛИРОВАНИЕ-2008 : сб. трудов*. Київ, 2008. Том 1. С. 364–371.

208. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Бойко Ю. Д. Алгоритм приближения передаточных функций цепными дробями. *Электронное моделирование*. 2007. Т. 29. № 3. С. 93–100.

209. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Верлань Д. А. Інтегральні рівняння в задачах математичного моделювання : *навчальний посібник*. Кам'янець-Подільський, 2014. 144 с.

210. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Дячук О. А. Представление и реализация динамических моделей в среде Matlab. *Моделювання та інформаційні технології*. Київ, 2007. Вип. 40. С. 71–77.

211. Федорчук В. А., Махович О. І. Дослідження динаміки нестаціонарних теплових процесів із симетричними граничними умовами методом перерізів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : технічні науки*. Кам'янець-Подільський, 2014. Вип. 10. С. 182–191.

212. Федорчук В. А., Махович О. І. Моделювання нестаціонарного теплового процесу в необмеженому порожнистому циліндрі з несиметричними граничними умовами першого роду. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : фізико-математичні науки.* Кам'янець-Подільський, 2014. Вип. 11. С. 143–151.

213. Федорчук В. А., Махович О. І. Особливості використання інтегральних моделей при дослідженні електроприводу з розподіленою механічною ланкою. Кам'янець-Подільський, 2014. Вип. 11. С. 156–162.

214. Федоткин И. М., Бурляй И. Ю., Рюмшин Н. А. Математическое моделирование технологических процессов: Методы математического моделирования и решения процессных задач. Київ, 2002. 408 с.

215. Федоткин И. М., Бурляй И. Ю., Рюмшин Н. А., Бурляй Ю. И. Математическое моделирование технологических процессов: *Тепловые процессы, плавление, замораживание, теплопроводность, регулярный режим*. Київ, 2004. 388 с.

216. Фрайден Дж. Современные датчики. Справочник. Москва, 2005. 592 с.

217. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщение к вопросам приближенного анализа. Москва, 1956. 203 с.

218. Цибизова Т. Ю. Адаптивный алгоритм идентификации нелинейных систем рядами Вольтерра. *Фундаментальные исследования*. 2016. № 10(1). С. 102–106.

219. Черных И. В. Simulink: среда создания инженерных приложений. Москва, 2003. 496 с.

220. Черных И. В. Моделирование электротехнических устройств в Matlab, SimPowerSystems и Simulink. Москва, 2008. 288 с.

221. Чичкарёв Е. А. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов. Москва, ALT Linux, 2012. 384 с.

222. Шевчук В. П. Расчет динамических погрешностей интелектуальных измерительных систем. Москва, 2008. 288 с.

223. Шевяков А. А., Яковлева Р. В. Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами. Москва, 1986. 208 с.

224. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Москва, 1975. 683 с.

225. Apartsin A. S., Solodusha S. V. Mathematical Simulation of Linear Dynamic Systems by Volterra Series. *Engineering Simulation*. 2000. Vol. 17. № 2. P. 143–153.

226. Apartsyn A. S., Solodusha S. V., Spiryaev V. A. Modeling of nonlinear dynamic systems with Volterra polynomials: elements of theory and applications. *International Journal of Energy Optimization and Engineering*. 2013. Vol. 2, No. 4. P. 16–43.

227. Billings S. A. Identification of nonlinear system – a servey. *IEEE Proc.*, 1980. 127. N 6. P. 272–285.

228. Billings S. A., Fakhouri S. J. Identification of nonlinear system using the Wiener model. *Electron. Lett*, 1977. 13. N 17. P. 501–504.

229. Borys A. Nonlinear Aspects of Telecommunications: Discrete Volterra Series and Nonlinear Echo Cancellation. Florida, USA, 2000. 300 p.

230. Boyd S., Chua L. O., Desoer C. A. Analytical foundations of Volterra series. *IMA Journ of Mathematical Control and Information*. 1984. Vol. 1, No. 3. P. 243–284.

231. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to theory and applications. Cambridge, 2017. 387 p.

232. Brunner H., *van der Houwen P. J.* The numerical solution of Volterra equations. Amsterdam: North–Holland, 1986. 588 p.

233. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of Haet in Solids (Oxford Science Publications). Oxford University Press, 1986. 520 p.

234. Claycomb J. R. Mathematical Methods for Physics: Using MATLAB and Maple. *Mercury Learning & Information*, 2018. 820 p.

235. Doyle F. J., Pearson R. K., Ogunnaike B. A. Identification and control using Volterra models. Germany, 2002. P. 314.

236. Doyle Francis J., Babatunde A. Ogunnaike, Ronald K. Pearson. Nonlinear model-based control using second-order Volterra models. *Automatica* 31.5 (1995): 697–714.

237. Doyle Francis J., Ronald K. Pearson, Babatunde A. Ogunnaike. Identification and control using Volterra models. London: Springer, 2002. 314 P.

238. Fedorchuk V. A., Makhovych O. I. Using of reversible structural models for modelling objects with distributed parameters. *Proceeding of the international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-2013*. SOFIA, BULGARIA, 2014. P. 495–504.

239. Fraden J. Handbook of modern sensors. AIP Press/Springer Verlag, 2004. 589 p.

240. Geng F. Z., Cui M. G. Analytical Approximation to Solutions of Singularly Perturbed Boundary Value Problems. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*. 2010. Vol. 33. № 2. P. 221–232.

241. George A. Anastassiou, Iuliana F. Iatan. Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple. *Springer*, 2013. 580 p.

242. Harman Thomas L. Advanced engineering mathematics with MATLAB. Pacific Grove: Calif, 2000. 750 p.

243. Helie T. Volterra Series and State Transformation for Real-Time Simulations of Audio Circuits Including Saturations: Application to the Moog Ladder Filter. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, vol. 18, no. 4, 2010, P. 747–759.

244. Isermann R., Munchhof M. Identification of Dynamic Systems. *An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, 2011. 711 p.

245. Ivaniuk V., Fedorchuk V. Application of correlation method for identification of models of the linear dynamic systems with distributed. *Danish Scientific Journal*, 2019. № 28 (3). P. 45–53.

246. Ivaniuk V., Ponedilok V. Method of restoration of input signals of nonlinear dynamic object with destributed parameters. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2018. Вип. 18. С. 65–73.

247. Ivanyuk V. A. Method of inverse operator for the recover input signal. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам'янець-Подільський, 2018. Вип. 17. С. 63–70.

248. Ivanyuk V. A., Fedorchuk V. A. Vector-matrix method of numerical implementation of the polynomial integral Volterra operators. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2019. Вип. 20. С. 40–50.

249. Ivanyuk V. A., Halmuhamedova F. A. Recovering dynamic distortions on output of channel transmitted continuous signals. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам'янець-Подільський, 2012. Вип. 7. С. 55–60.

250. Ivanyuk V., Ponedilok V. The identification of nonlinear dynamical systems as integrated Volterra series based on deterministic signals. *Proceedings of the 5 th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-2015*. Sofia, Bulgaria, 2016. P. 230–238.

251. Ivanyuk V., Ponedilok V., Sterten Jo Regularization methods for differentiating noise signals. *Proceedings of 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET), Lviv-Slavske, Ukraine, February* 20 – 24, 2018. P. 295–300.

252. Ivanyuk V., Ponedilok V., Sterten Jo. Solving inverse problems of dynamics of non linear objects based on the Volterra series. *Computational problems of electrical engineering*, Vol. 6, No. 1, 2016. Lviv, 2016. P. 9–16.

253. Jeffreys H., Jeffreys B. Methods of Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1999. 718 p.

254. Jim Ledin. Embedded Control System in C/C++: An Introduction for Software Develipers Using Matlab. San Francisco, 2004. 252 p.

255. King R. E., Paraskevopoulos P. N. Parametric identification of discrete-time SISO systems. Int. J. Contr. 1979. 30, N 6. P. 1023–1029.

256. Kress R. Linear Integral Equations. 3 rd ed. 2014, XVI, 412 p.

257. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. 10th edition. John Wiley & Sons, Inc., 2010. 1280 p.

258. Layer Edward, Krzysztof Tomczyk. Measurements, Modelling and Simulation of Dynamic Systems. Springer, 2009. 168 p.

259. Liu Y. On Model Reduction of Distributed Parameter Models. Stockholm, 2002. 148 p.

260. Mahadevan N., Hoo K. A. Wavelet-based model reduction of distributed parameter systems. *Chemical Engineering Science*. V. 55. Issue 19, October 2000. P. 4271–4290.

261. Mathews J. H., Fink K. D. Numerical Methods Using Matlab. Mathews Prentice Hall, 1999. 662 p.

262. Miller K. S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: John Wiley and Sons. 1993. 366 p.

263. Nelles O. Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks. Springer Verlag, 2001. 784 P.

264. Ogunnaike B. A., Willis H. R. Process dynamics, modeling, and control. Vol. 1. New York: Oxford University Press, 1994.

265. Pearson R. K., Ogunnaike B. A., Doyle F. J. Identification of structurally constrained second-order Volterra models. *IEEE Trans. on Signal Processing*. 1996. Vol. 44, № 11. P. 2837–2846.

266. Pearson Ronald K., Babatunde A. Ogunnaike. Nonlinear process identification. *Nonlinear process control*. 1997. P. 11–109.

267. Phan Jack. MATLAB – C# for Engineers Createspace. *Independent Publishing Platform*, 2010. 322 p.

268. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of Integral Equations. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1998. 796 p.

269. Ponedilok V. V. Regularization Method of Restoration of Input Signals of Nonlinear Dynamic Objects that Determined by Integro-Power Volterra Series. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць*. Кам'янець-Подільський, 2018. Вип. 17. P. 133–140.

270. Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. Journal of computational physics, 60(2), 1985, pp.187–207.

271. Rugh W. J. Nonlinear System Theory: the Volterra/Wiener Approach. Johns Hopkins University Press. London, 1981.

272. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 976 p.

273. Solodusha S. V. Modeling Heat Exchangers by Quadratic Volterra Polynomials. *Automation and Remote Control*. 2014. Vol. 75. № 1. P. 87–94.

274. Solodusha S. V., Yaparova N. M. Numerical Solving an Inverse Boundary Value Problem of Heat Conduction Using Volterra Equations of the First Kind. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 18. № 3. P. 267–274.

275. Steinhaus S. Comparison of mathematical programs for data analysis. Edition 4.42. München / Germany, 2008. 59 p.

276. Sytnyk O. O. Analytical method of forming integrated dynamic models and their software implementation. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*, Вип.7, 2012. С. 191–196.

277. Tabatabaian M. COMSOL for Engineers (Multiphysics Modeling). *Mercury Learning & Information*, 2014. 254 p.

278. Tadeusz S. Nakasone Y., Yoshimoto S. Engineering Analysis with ANSYS Software. *Butterworth-Heinemann*, 2007. 480 p.

279. Verlan A. A. An Approach to the Precision Parametric Reduction of Mathematical Models. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.* Кам'янець-Подільський, 2016. Вип. 14. С. 26-35.

280. Yaparova N. M. Numerical methods for solving a boundary value inverse heat conduction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2014. Vol. 22. № 5. P. 832–847.

281. Zadeh L. A. On the Identification Problem. Tranc. IRE, ser. PGGT, 1965. v. 3, №4. P. 421–435.

ДОДАТКИ

Додаток А. Дослідження моделей вимірювальних перетворювачів

Елементи автоматизації вибору форм математичних моделей.

Розвиток вимірювальних пристроїв та систем і комп’ютеризованих засобів їх підтримки започаткував створення комп’ютерно-інтегрованих систем, в яких поєднуються технології вимірювання, обробки та передачі інформації, вироблення сигналів керування, контролю і діагностики об’єктів керування. Розвиток комп’ютерно-інтегрованих систем обумовлює необхідність вибору ефективних математичних та комп’ютерних моделей, від форм яких залежить можливість роботи систем із забезпечення режимів реального часу за обмежених обчислювальних ресурсів [48, 113]. Це обумовлює актуальність задачі вибору еквівалентних математичних моделей для використання їх у комп’ютеризованих системах.

Найбільш близьким до практичних оцінок методів та алгоритмів числової реалізації математичних моделей є метод обчислювальних експериментів, який дозволяє дослідити властивості об’єкта або явища шляхом розв’язування задачі за допомогою комп’ютерної техніки. Багаторазове проведення числових експериментів для різних наборів вхідних даних дозволяє дослідити роль та вплив різних факторів на протікання того чи іншого процесу або поведінку об’єкта. Результати обчислювальних експериментів дають змогу правильно планувати відповідні натурні експерименти, скорочувати терміни проєктно-конструкторських робіт щодо розробки комп’ютерно-інтегрованих систем та знизити затрати матеріалів та енергоресурсів [38, 48, 112].

Динамічні властивості складних вимірювальних комплексів можна оцінити за динамікою вимірювальних перетворювачів, як складових елементів таких систем [26, 33, 62, 216, 222, 239]. Розглянемо методику дослідження форм математичних моделей вимірювальних перетворювачів, яку можна буде перенести на моделі об'єктів із розподіленими параметрами.

Моделі вимірювальних перетворювачів із зосередженими параметрами.

Базовою математичною моделлю вимірювальних перетворювачів, які є лінійними стаціонарними динамічними об'єктами із зосередженими параметрами, є диференціальні рівняння із постійними коефіцієнтами [26, 38, 62, 216]:

$$a_n \frac{d^n Q}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dQ}{dt} + a_0 Q = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f,$$

де Q – вихідний сигнал, f – вхідний сигнал, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, b_m, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ – сталі.

Залежно від порядку диференціального рівняння вимірювальні перетворювачі можна поділити на перетворювачі першого, другого або вищого порядків [26, 62, 216].

Розглянемо перетворювачі першого та другого порядків і представимо початкову диференціальну модель у вигляді еквівалентних інтегральних моделей.

Вимірювальні перетворювачі першого порядку. Диференціальні рівняння першого порядку дозволяють описати поведінку перетворювачів, які містять один енергонакопичувальний елемент. Рівняння мають загальний вигляд:

$$a \frac{dQ(t)}{dt} + bQ(t) = f(t), \tag{A.1}$$

де a та b – параметри, $Q(t)$ – покази вимірювального перетворювача, $f(t)$ – вимірюване значення. Прикладами можуть виступати вимірювальні перетворювачі температури, вологості газу, швидкості потоку [26, 62, 112, 216]. Базові математичні моделі таких перетворювачів наведено в таблиці А.1.

Шляхом еквівалентних перетворень рівняння (А.1) отримано моделі в таких формах: передатна функція, оператор Вольтерри, рівняння Вольтерри другого роду [30, 47, 112, 209], які наведені в таблиці *А.2*, де також подано загальний вигляд перехідної характеристики вимірювального перетворювача.

Таблиця А.1

Моделі вимірювальних перетворювачів (ВП)

ВП	Диференціальна модель	Позначення
ВП температури	$C\dfrac{dQ_m(t)}{dt}+AQ_m(t)=kQ(t),$ $Q_m(0)=Q_0.$	$Q_m(t)$ — покази ВП; C — коефіцієнт питомої теплоємності; A — коефіцієнт тепловіддачі термопари; $Q(t)$ — вимірювана температура.
ВП вологості газу	$\dfrac{d\varphi_Г(t)}{dt}+\dfrac{1}{\lambda_0}\varphi_Г(t)=\dfrac{1}{\lambda_0}\varphi_и(t),$ $\varphi_Г(0)=\varphi_{г0}.$	$\varphi_Г(t)$ — покази ВП; λ_0 — коефіцієнт, що характеризує умови виміру; $\varphi_и(t)$ — вимірюване значення вологості газу.
ВП швидкості потоку	$J\dfrac{d\omega(t)}{dt}+z_0\omega(t)=c_0V(t),$ $\omega(0)=\omega_0.$	$\omega(t)$ — швидкість обертання ротора; J — момент інерції ротора ВП; z_0 — коефіцієнт в'язкого тертя; c_0 — стала, яка залежить від параметрів ВП; $V(t)$ — вимірювана швидкість потоку.
ВП прискорення	$m\dfrac{d^2x_0''(t)}{dt^2}+k_1\dfrac{dx_0'(t)}{dt}+$ $+c_1x_0(t)=ma_л(t),$ $x_0(0)=x_0,\ x_0'(0)=x_0'.$	$x_0''(t),\ x_0'(t),\ x_0(t),$ — відносне прискорення, швидкість, переміщення інерційної маси; m — інерційна маса прибору; k_1 — коефіцієнт демпфування; c_1 — жорсткість пружного елементу; $a_л(t)$ — вимірюване прискорення об'єкта.

<u>Вимірювальні перетворювачі другого порядку</u>. Диференціальні рівняння другого порядку дозволяють описати поведінку датчиків з двома енергонакопичувальними елементами:

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+a\frac{dQ(t)}{dt}+bQ(t)=f(t), \tag{А.2}$$

де *a* та *b* – параметри моделі, *Q*(*t*) – покази вимірювального перетворювача, *f*(*t*) – вимірюване значення. Наприклад таким об’єктом є ВП прискорення (акселерометр), до складу якого входить маса і пружина [26, 62, 216] (таблиця А.1).

В таблиці А.3 подано побудовані еквівалентні до рівняння (А.2) моделі в таких формах: передатна функція, оператор Вольтерри, рівняння Вольтерри другого роду [30, 47, 112, 209].

Таблиця А.2

Моделі вимірювальних перетворювачів першого порядку

Вид моделі	Модель
$Q(t)$ — шукана функція; a, b — сталі коефіцієнти; $f(t)$ — вхідний вплив; $Q_0(t)$ — початкове значення.	
Диференціальне рівняння	$a\frac{dQ(t)}{dt}+bQ(t)=f(t),\ Q(0)=Q_0.$
Передатна функція	$Q(p)=\frac{1}{ap+b}f(p)+a\frac{1}{ap+b}Q_0L_p\{\delta(t)\}$
Оператор Вольтерри	$Q(t)=\frac{1}{a}\int_0^t e^{-\frac{b}{a}(t-s)}f(s)ds+e^{-\frac{b}{a}t}Q_0$
Рівняння Вольтерри другого роду	$y(t)+\frac{b}{a}\int_0^t y(s)ds=\frac{1}{a}f(t)-\frac{b}{a}Q_0,\ Q=\int_0^t y(s)ds+Q_0$
Перехідна характеристика	$Q(t)=\frac{1}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{a}t}\right)+e^{-\frac{b}{a}t}Q_0$

Таблиця А.3

Моделі вимірювальних перетворювачів другого порядку

Вид моделі	Модель
$Q(t)$ — шукана функція; a, b — сталі коефіцієнти; $f(t)$ — вхідний вплив; $Q_0(t)$ — початкове значення.	
Диференціальне рівняння	$\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+a\frac{dQ(t)}{dt}+bQ(t)=f(t),$ $Q(0)=Q_0,\ \frac{dQ(0)}{dt}=Q_1,\ 4b>a^2$
Передатна функція	$Q(p)=\frac{1}{p^2+ap+b}f(p)+$ $+\frac{p}{p^2+ap+b}Q_1L_p\{\delta(t)\}+\frac{1}{p^2+ap+b}(1+a)Q_0L_p\{\delta(t)\}$
Оператор Вольтерри	$Q(t)=\frac{2}{\omega}\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\sin\omega(t-s)f(s)ds+$ $+Q_0e^{\alpha t}\left(\cos\omega t-\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)+\frac{1}{\omega}Q_1e^{\alpha t}\sin\omega t,$ $\alpha=-\frac{a}{2},\ \omega=\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2},\ 4b>a^2$
Рівняння Вольтерри другого роду	$y(t)+\int_0^t\left(a+b(t-s)\right)y(s)ds=f(t)-(bt+a)Q_1-bQ_0,$ $Q=\int_0^t(t-s)y(s)ds+tQ_1+Q_0$
Перехідна характеристика	$Q(t)=\frac{1}{b}\left(1-e^{\alpha t}\left(\cos(t\omega)-\frac{\alpha}{\omega}\sin(tw)\right)\right)+$ $+e^{\alpha t}\left(\cos(t\omega)+\frac{\alpha}{\omega}\sin(tw)\right)Q_0+$ $+\frac{1}{\omega}e^{\alpha t}\sin(tw)(Q_1+aQ_0),$ $\alpha=-\frac{a}{2},\ \omega=\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2},\ 4b>a^2$

Планування експериментів.

Для вибору кращої форми математичної моделі з точки зору обчислювальної ефективності пропонується планувати визначений ряд обчислювальних експериментів із наступним аналізом їх результатів. Розглянемо даний підхід на прикладі дослідження форм динамічних моделей вимірювальних пристроїв (таблиця *А.2* та таблиця А.3).

Планування експериментів здійснюється шляхом формування плану експерименту, який заноситься в таблицю (приклади: таблиця А.6, таблиця А.7). Кожний рядок таблиці характеризує один експеримент. Перших чотири стовпці (після №) визначають параметри експериментів: `x` – множина різних вхідних впливів; `h` – множина різних кроків дискретизації числової реалізації; `y0` – множина різних значень початкових значень; `a` – множина різних значень параметрів моделі. Для дослідження моделей вимірювальних перетворювачів першого порядку визначено 5 різних значень вхідних впливів, 3 змінних значення кроку дискретизації, 3 значення початкових умов, 3 різні значення параметрів моделі. Для дослідження моделей вимірювальних перетворювачів другого порядку визначено 5 різних значень вхідних впливів, 3 змінних значення кроку моделювання, 7 значень початкових умов, 3 різні значення параметрів моделі. Усі значення змінних параметрів запланованих експериментів представлено у таблиці А.4 та таблиці А.5 для вимірюваних перетворювачів першого та другого порядків відповідно.

На перетині рядка та стовпця ставиться позначка, яка характеризує який параметр застосовується (таблиця А.6, таблиця А.7). Друга частина таблиці містить характеристику виставлених вимог до моделей (таблиця А.4, таблиця А.5): `maxD` – множина (вектор) різних значень максимальної абсолютної похибки; `intD` – множина (вектор) різних значень інтегральної похибки; `Time` – множина (вектор) різних значень часу виконання задачі. Відповідно до встановленої вимоги для кожного експерименту (в кожному рядку) вказується кількість балів, які нараховуються, якщо модель задовольняє відповідну вимогу.

Таблиця А.4

Параметри експериментів для дослідження моделей вимірювальних перетворювачів першого порядку

Змінні параметри експериментів

Вхідний вплив ($x(t)$)

№	1	2	3	4	5
Значення	$1(t)$	$1(t)$ + 1% шуму	$1(t)$ + 10% шуму	$1(t)$ + 20% шуму	$1(t)$ + 10% синусиїдального шуму

Крок моделювання (h)

№	1	2	3
Значення	0.01	0.1	0.5

Початкова умова (y_0)

№	1	2	3
Значення	0	10	100

Параметр моделі (a)

№	1	2	3
Значення	0.01	0.1	1

Вимоги до моделей

Максимальна абсолютна похибка (`maxD` – M_{Δ})

№	1	2	3	4	5
Значення	0.5	0.2	0.1	0.05	0.01

Інтегральна абсолютна похибка (`intD` – I_{Δ})

№	1	2	3	4	5
Значення	10	1	0.5	0.1	0.01

Час моделювання (Time)

№	1	2	3	4	5
Значення	10	2	1	0.5	0.1

Таблиця А.5

Параметри експериментів для дослідження моделей вимірювальних перетворювачів другого порядку

<table>
<tr><td colspan="8">Змінні параметри експериментів</td></tr>
<tr><td colspan="8">Вхідний вплив ($x(t)$)</td></tr>
<tr><td>№</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td>Значення</td><td>$1(t)$</td><td>$1(t)$ + 1% шуму</td><td>$1(t)$ + 10% шуму</td><td>$1(t)$ + 20% шуму</td><td colspan="3">$1(t)$ + 10% синусиїдального шуму</td></tr>
<tr><td colspan="8">Крок моделювання (h)</td></tr>
<tr><td>№</td><td colspan="2">1</td><td colspan="3">2</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td>Значення</td><td colspan="2">0.01</td><td colspan="3">0.1</td><td colspan="2">0.5</td></tr>
<tr><td colspan="8">Початкова умова (y_0)</td></tr>
<tr><td>№</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Значення</td><td>[0;0]</td><td>[0;10]</td><td>[0;100]</td><td>[10;0]</td><td>[100;0]</td><td>[10;10]</td><td>[100;100]</td></tr>
<tr><td colspan="8">Параметр моделі (a)</td></tr>
<tr><td>№</td><td colspan="2">1</td><td colspan="3">2</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td>Значення</td><td colspan="2">0.01</td><td colspan="3">0.1</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="8">Вимоги до моделей</td></tr>
<tr><td colspan="8">Максимальна абсолютна похибка (maxD – M_Δ)</td></tr>
<tr><td>№</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td>Значення</td><td>0.5</td><td>0.2</td><td>0.1</td><td>0.05</td><td colspan="3">0.01</td></tr>
<tr><td colspan="8">Інтегральна абсолютна похибка (intD – I_Δ)</td></tr>
<tr><td>№</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td>Значення</td><td>10</td><td>1</td><td>0.5</td><td>0.1</td><td colspan="3">0.01</td></tr>
<tr><td colspan="8">Час моделювання (Time)</td></tr>
<tr><td>№</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td>Значення</td><td>10</td><td>2</td><td>1</td><td>0.5</td><td colspan="3">0.1</td></tr>
</table>

Таблиця А.6

План експериментів дослідження якості моделей вимірювальних перетворювачів першого порядку (скорочено)

№	Змінні параметри експериментів														Результати успішності експериментів														
	Вхідний вплив					Крок			Поч. умови			Пар-ри			Макс. абс. похибка					Інт. абс. похибка					Макс. час				
	x					*h*			y_0			*a*			MaxD					IntD					Time				
	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	*					*			*			*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	*					*			*				*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	*					*			*					*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	*					*				*		*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	*					*				*			*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	*					*				*				*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	*					*					*	*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	*					*					*		*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	*					*					*			*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	*						*		*			*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
63			*			*					*			*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
64			*				*		*			*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
65			*				*		*				*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
66			*				*		*					*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
67			*				*			*		*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
68			*				*			*			*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
69			*				*			*				*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
70			*				*				*	*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
71			*				*				*		*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
72			*				*				*			*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
126					*		*				*			*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
127					*			*	*			*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
128					*			*	*				*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
129					*			*	*					*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
130					*			*		*		*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
131					*			*		*			*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
132					*			*		*				*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
133					*			*			*	*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
134					*			*			*		*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
135					*			*			*			*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблиця А.7

План експериментів дослідження якості моделей вимірювальних перетворювачів другого порядку (скорочено)

№	Змінні параметри експериментів																	Результати успішності експериментів														
	Вхідний вплив					Крок			Поч. умови							Пар-ри			Макс. абс. похибка					Інт. абс. похибка					Макс. час				
	x					h			Q0							a			MaxD					IntD					Time				
	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	*					*			*							*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	*					*			*								*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	*					*			*									*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	*					*				*						*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	*					*				*							*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	*					*				*								*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	*					*					*					*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	*					*					*						*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	*					*					*							*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	*					*						*				*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
153			*				*			*								*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
154			*				*				*					*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
155			*				*				*						*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
156			*				*				*							*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
157			*				*					*				*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
158			*				*					*					*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
159			*				*					*						*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
160			*				*						*			*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
161			*				*						*				*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
162			*				*						*					*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
306					*			*				*						*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
307					*			*					*			*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
308					*			*					*				*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
309					*			*					*					*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
310					*			*						*		*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
311					*			*						*			*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
312					*			*						*				*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
313					*			*							*	*			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
314					*			*							*		*		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
315					*			*							*			*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Загалом, плани проведення експериментів містять відповідно 135 експериментів для моделей першого порядку та 315 різних експериментів для моделей другого порядку. Результатом проведення експериментів є реєстрація позитивності кожного експерименту та нараховування відповідного балу. Кожен експеримент оцінюється за 5 різними вимогами. Тобто, максимальний бал, який можна набрати для кожному виду вимоги рівний 675 для моделей першого порядку та 1575 для моделей другого порядку. Кінцеві результати експериментів подаються у вигляді агрегованих показників (таблиці А.8, А.9, А.10, А.11). Форма математичної моделі та алгоритм її числової реалізації вважаються кращими, якщо сумарна кількість набраних балів є найбільшою.

Обчислювальні експерименти.

Обчислювальні експерименти проведено в середовищі Matlab, причому числова реалізація моделей виконувалась різними засобами [112, 113]. Для реалізації математичних моделей у диференціальній формі застосовувались різні числові методи на основі наступних засобів:

ode (Euler) – метод Ейлера (власна реалізація, метод Рунге-Кутти 1-го порядку, сталий крок інтегрування);

ode23 (Bogacki-Shampine) – метод Богацького-Шампена (засіб середовища Matlab, метод Рунге-Кутти 2-3 порядку, змінний крок інтегрування);

ode45 (Dormand-Prince) – метод Дормана-Принса (засіб середовища Matlab, метод Рунге-Кутти 4-5 порядку, змінний крок інтегрування).

Числова реалізація передатних функцій здійснювалась у середовищі Simulink на основі програм-розв'язувачів для сталого кроку інтегрування:

ode1 (Euler) – метод Ейлера (засіб Simulink, метод Рунге-Кутти 1-го порядку, змінний крок інтегрування);

ode2 (Heun) – метод Хойна (засіб Simulink, метод Рунге-Кутти 2-го порядку, змінний крок інтегрування);

ode3 (Bogacki-Shampine) – метод Богацького-Шампена (засіб Simulink, метод Рунге-Кутти 3-го порядку, змінний крок інтегрування);

ode4 (Runge-Kutta) – метод Рунге-Кутти 4-го порядку (засіб Simulink, змінний крок інтегрування);

ode5 (Dormand-Prince) – метод Дормана-Принса (засіб Simulink, метод Рунге-Кутти 5-го порядку, змінний крок інтегрування).

Для числової реалізації інтегральних моделей середовище Matlab не містить стандартних засобів, тому для реалізації оператора Вольтерри створено засоби на основі квадратурних методів в середовищі Matlab:

VO (Left) – метод лівих прямокутників (власна реалізація, сталий крок інтегрування);

VO1 (Trapezoidal) – метод трапецій (власна реалізація, аналог метода Рунге-Кутти 1-го порядку точності, сталий крок інтегрування).

Для числової реалізації інтегрального рівняння Вольтерри другого роду в середовищі Matlab розроблено такі засоби:

VIE (Left) – метод лівих прямокутників (власна реалізація, сталий крок інтегрування);

VIE1 (Trapezoidal) – метод трапецій (власна реалізація, аналог метода Рунге-Кутти 1-го порядку точності, сталий крок інтегрування).

Результати проведення експериментів. Таблиця А.8 та таблиця А.9 містять агреговані результати серії експериментів над моделями вимірювальних перетворювачів першого порядку, відповідно абсолютне та відносне значення. Аналогічні результати серії обчислювальних експериментів над моделями вимірювальних перетворювачів другого порядку подані в таблиці А.10 та таблиці А.11.

Обчислювальні експерименти показують, що в ряді випадків, розв’язки на основі диференціальних рівнянь співпадають із розв’язками, отриманими за допомогою моделей в інтегральній формі. Також є випадки, коли розв’язки отримані за допомогою інтегральних моделей є точнішими ніж розв’язки, отримані на основі диференціальних моделей. Зокрема, розв’язки для випадків, коли $a \ll h$, отримані на основі моделей у формі диференціальних рівнянь та передатних функцій є розбіжними. У цьому випадку доцільно застосовувати змінний крок інтегрування, де свою ефективність показали програмні засоби для розв’язування диференціальних рівнянь ode23 та ode45, але вони, на відміну від інтегральних моделей, потребують набагато більше апаратних ресурсів та часу.

Таблиця А.8

Агрегований результат серії експериментів для моделей першого порядку (абсолютна кількість)

Вид моделі	Спосіб програмної реалізації	Засіб (метод)	Кількість позитивно проведених експериментів			
			Max Δ	∑Δ	*t*	Середнє значення
Диференціальне рівняння	Власна реалізація	ode (Euler)	128	190	675	331,00
	Реалізація Matlab	ode23 (Bogacki-Shampine)	523	432	570	508,33
		ode45 (Dormand-Prince)	534	454	572	520,00
Передатна функція	Реалізація Simulink	ode1 (Euler)	238	80	664	327,33
		ode2 (Heun)	306	136	594	345,33
		ode3 (Bogacki-Shampine)	347	154	597	366,00
		ode4 (Runge-Kutta)	357	159	599	371,67
		ode5 (Dormand-Prince)	359	165	592	372,00
Оператор Вольтерри	Власна реалізація	VO (Left)	192	149	634	325,00
		VO1 (Trapezoidal)	302	227	630	386,33
Рівняння Вольтерри II роду	Власна реалізація	VIE (Left)	126	191	675	330,67
		VIE1 (Trapezoidal)	262	298	661	407,00

Таблиця А.9

Агрегований результат серії експериментів для моделей першого порядку (відносне значення)

Вид моделі	Спосіб програмної реалізації	Засіб (метод)	% позитивно пройдених експериментів			
			Max Δ	∑Δ	*t*	Середнє значення
Диференціальне рівняння	Власна реалізація	ode (Euler)	18,96	28,15	100,00	49,04
	Реалізація Matlab	ode23 (Bogacki-Shampine)	77,48	64,00	84,44	75,31
		ode45 (Dormand-Prince)	79,11	67,26	84,74	77,04
Передатна функція	Реалізація Simulink	ode1 (Euler)	35,26	11,85	98,37	48,49
		ode2 (Heun)	45,33	20,15	88,00	51,16
		ode3 (Bogacki-Shampine)	51,41	22,81	88,44	54,22
		ode4 (Runge-Kutta)	52,89	23,56	88,74	55,06
		ode5 (Dormand-Prince)	53,19	24,44	87,70	55,11
Оператор Вольтерри	Власна реалізація	VO (Left)	28,44	22,07	93,93	48,15
		VO1 (Trapezoidal)	44,74	33,63	93,33	57,23
Рівняння Вольтерри II роду	Власна реалізація	VIE (Left)	18,67	28,30	100,00	48,99
		VIE1 (Trapezoidal)	38,81	44,15	97,93	60,30

Таблиця А.10

Агрегований результат серії експериментів для моделей другого порядку (абсолютна кількість)

Вид моделі	Спосіб програмної реалізації	Засіб (метод)	Кількість позитивно проведених експериментів			
			Max Δ	∑Δ	*t*	Середнє значення
Диференціальне рівняння	Власна реалізація	ode (Euler)	167	177	1575	639,67
	Реалізація Matlab	ode23 (Bogacki-Shampine)	815	762	1355	977,33
		ode45 (Dormand-Prince)	1017	840	1355	1070,67
Передатна функція	Реалізація Simulink	ode1 (Euler)	572	521	1553	882,00
		ode2 (Heun)	1022	885	1553	1153,33
		ode3 (Bogacki-Shampine)	1237	1019	1548	1268,00
		ode4 (Runge-Kutta)	1266	1057	1554	1292,33
		ode5 (Dormand-Prince)	1268	1072	1513	1284,33
Оператор Вольтерри	Власна реалізація	VO (Left)	915	787	1470	1057,33
		VO1 (Trapezoidal)	1130	978	1470	1192,67
Рівняння Вольтерри другого роду	Власна реалізація	VIE (Left)	368	344	1565	759,00
		VIE1 (Trapezoidal)	775	704	1506	995,00

Таблиця А.11

Агрегований результат серії експериментів для моделей другого порядку (відносне значення)

Вид моделі	Спосіб програмної реалізації	Засіб (метод)	% позитивно пройдених експериментів			
			Max Δ	∑Δ	*t*	Середнє значення
Диференціальне рівняння	Власна реалізація	ode (Euler)	10,60	11,24	100,00	40,61
	Реалізація Matlab	ode23 (Bogacki-Shampine)	51,75	48,38	86,03	62,05
		ode45 (Dormand-Prince)	64,57	53,33	86,03	67,98
Передатна функція	Реалізація Simulink	ode1 (Euler)	36,32	33,08	98,60	56,00
		ode2 (Heun)	64,89	56,19	98,60	73,23
		ode3 (Bogacki-Shampine)	78,54	64,70	98,29	80,51
		ode4 (Runge-Kutta)	80,38	67,11	98,67	82,05
		ode5 (Dormand-Prince)	80,51	68,06	96,06	81,54
Оператор Вольтерри	Власна реалізація	VO (Left)	58,10	49,97	93,33	67,13
		VO1 (Trapezoidal)	71,75	62,10	93,33	75,72
Рівняння Вольтерри другого роду	Власна реалізація	VIE (Left)	23,37	21,84	99,37	48,19
		VIE1 (Trapezoidal)	49,21	44,70	95,62	63,17

Загалом, вибір кращої форми математичної моделі необхідно здійснювати на основі аналізу результатів великої кількості обчислювальних експериментів з різними змінними параметрами, причому вибір параметрів експериментів необхідно здійснювати із врахуванням фізичних властивостей конкретних об’єктів, середовища в якому вони будуть функціонувати та характеристик апаратної частини комп’ютерно-інтегрованої системи (розміри пам’яті, розрядність, швидкість обчислень тощо).

В оцінці форм математичних моделей доцільно застосовувати алгоритми однакового рівня точності (наприклад, Рунге-Кутти 1-го порядку, якому є аналогом метод трапецій) та однакові параметри моделі і крок моделювання (змінний чи сталий). Оцінка наведених похибок проведених обчислювальних експериментів для однакових вихідних даних (диференціальне рівняння – ode (Euler), передатна функція – ode1 (Euler), оператор Вольтерри – VO1 (Trapezoidal), рівняння Вольтерри II роду – VIE1 (Trapezoidal)) показала, що найвищу точність мають розв’язки, які отримані на основі застосування моделей у формі інтегральних операторів Вольтерри.

Для підвищення точності числової реалізації моделей можна застосовувати змінний крок та збільшити кількість точок дискретизації, застосовувати методи Рунге-Кутти вищих порядків. Але ці дії необхідно робити із врахуванням технічних вимог до комп’ютерно-інтегрованих систем. У використанні інтегральних моделей варто застосовувати методи зведення їх ядер до виродженого вигляду, що дозволить забезпечити вимоги щодо швидкодії.

Отже, проведене дослідження показало, що у комп’ютерній реалізації аналітично еквівалентні форми динамічних моделей є не рівноцінними, оскільки вони реалізуються за допомогою різних обчислювальних схем. Зіставлення декількох видів математичних моделей одного і того ж об’єкта дозволяє вибрати ту чи іншу модель, відповідно до встановлених вимог її використання, за умови найбільш ефективної числової реалізації.

Розв'язування «обернених» задач дослідження динамічних моделей вимірювальних перетворювачів.

Перетворювачі першого порядку. Розглядається задача відновлення сигналу на вході вимірювального перетворювача. Дана задача є класичним прикладом некоректно визначеної задачі, яка приводить до нестійкого розв'язку. Проблема полягає в тому, що вхідні дані ($y(t)$) задані наближено.

На основі моделей представлених в таблиці А.2 отримано моделі, які дозволяють розв'язувати обернені задачі (таблиця А.12), в яких $y(t)$ є вхідним впливом, а $x(t)$ — шуканою функцією. Всі моделі наведені за умови $y_0(t)=0$. На основі звичайного диференціального рівняння у випадку прямої задачі, отримано диференціальний оператор, задача обчислення значень якого відноситься до класу некоректних в класичному сенсі. Отримана передатна функція не може бути реалізована безпосередньо, оскільки порядок чисельника більший за порядок знаменника. Математична модель у формі оператора Вольтерри, у випадку прямої задачі, перетворюється в рівняння Вольтерри I роду, задача числової реалізації якого є некоректною задачею у випадку не точного задання вхідних впливів. Рівняння Вольтерри II роду трансформується в оператор Вольтерри та рівняння Вольтерри I роду, чисельна реалізація яких також є некоректною задачею.

Перетворювачі другого порядку. Аналогічно до випадку дослідження перетворювачів першого порядку на основі моделей представлених в таблиці А.3 отримано моделі для відновлення вхідного сигналу на вході перетворювачів другого порядку (таблиця А.13). Всі моделі наведені при умові, що $y_0(t)=[0;0]$.

Таблиця А.12

Моделі вимірювальних перетворювачів першого порядку для відновлення вхідного сигналу

Вид моделі	Модель
$y(t)$ — вхідний вплив; a, b — сталі коефіцієнти; $x(t)$ — шукана функція.	
Диференціальний оператор	$x(t)=a\dfrac{dy(t)}{dt}+by(t)$
Операторне рівняння	$X(p)=\dfrac{ap+b}{1}Y(p)$
Рівняння Вольтерри першого роду	$\dfrac{1}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{b}{a}(t-s)}x(s)ds=y(t)$
Оператор Вольтерри і рівняння Вольтерри першого роду	$x(t)=aq(t)+b\int\limits_0^t q(s)ds,\ \int\limits_0^t q(s)ds=y(t)$

Таблиця А.13

Моделі вимірювальних перетворювачів другого порядку для відновлення вхідного сигналу

Вид моделі	Модель
$y(t)$ — вхідний вплив; a, b — сталі коефіцієнти; $x(t)$ — шукана функція.	
Диференціальний оператор	$x(t)=\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+a\dfrac{dy(t)}{dt}+by(t)$
Операторне рівняння	$X(p)=\dfrac{p^2+ap+b}{1}Y(p)$
Рівняння Вольтерри першого роду	$\dfrac{1}{\omega}\int\limits_0^t e^{\sigma(t-s)}\sin\omega(t-s)x(s)ds=y(t),$ $\sigma=-\dfrac{a}{2},\ \omega=\dfrac{1}{2}\sqrt{4b-a^2},\ 4b>a^2$
Оператор Вольтерри і рівняння Вольтерри першого роду	$x(t)=q(t)+\int\limits_0^t\big(a+b(t-s)\big)q(s)ds,$ $\int\limits_0^t(t-s)q(s)ds=y(t)$

Метод регуляризації інтегральних моделей.

Для отримання стійких розв’язків подані моделі перетворено на основі застосовування запропонованого диференціального регуляризаційного оператора (розділ 5). Отримані моделі подано в таблицях А.14 та А.15.

Таблиця А.14

Регуляризаційні моделі вимірювальних перетворювачів першого порядку для відновлення вхідного сигналу

Вид моделі	Модель
1	2
$y(t)$ — вхідний вплив; a, b — сталі коефіцієнти; $x(t)$ — шукана функція.	
Диференціальний оператор	$\alpha x(t)+x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t),$ $\alpha\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t),$ $\alpha\frac{dx(t)}{dt}+\alpha x(t)+x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t),$ $\alpha^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t),$ $\alpha^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha x(t)+x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t),$ $\alpha^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t),$ $\alpha^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dx(t)}{dt}+\alpha x(t)+x(t)=a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$
Операторне рівняння	$X(s)=\frac{as+b}{1}Y(s),$ $X(s)=\frac{as+b}{\alpha s+1}Y(s),$ $X(s)=\frac{as+b}{\alpha s+\alpha+1}Y(s),$

Продовження таблиці А.14

1	2
	$X\left(s\right)=\dfrac{as+b}{\alpha^2s^2+1}Y\left(s\right)$, $X\left(s\right)=\dfrac{as+b}{\alpha^2s^2+\alpha+1}Y\left(s\right)$, $X\left(s\right)=\dfrac{as+b}{\alpha^2s^2+\alpha s+1}Y\left(s\right)$, $X\left(s\right)=\dfrac{as+b}{\alpha^2s^2+\alpha s+\alpha+1}Y\left(s\right)$
Рівняння Вольтерри першого роду	$\alpha x\left(t\right)+\dfrac{1}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{b}{a}\left(t-\tau\right)}x\left(\tau\right)d\tau=y\left(t\right)$, $\alpha\dfrac{dx\left(t\right)}{dt}+\dfrac{1}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{b}{a}\left(t-\tau\right)}x\left(\tau\right)d\tau=y\left(t\right)$, $\alpha\dfrac{dx\left(t\right)}{dt}+\alpha x\left(t\right)+\dfrac{1}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{b}{a}\left(t-\tau\right)}x\left(\tau\right)d\tau=y\left(t\right)$, $\alpha^2\dfrac{d^2x\left(t\right)}{dt^2}+\dfrac{1}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{b}{a}\left(t-\tau\right)}x\left(\tau\right)d\tau=y\left(t\right)$, $\alpha^2\dfrac{d^2x\left(t\right)}{dt^2}+\alpha x\left(t\right)+\dfrac{1}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{b}{a}\left(t-\tau\right)}x\left(\tau\right)d\tau=y\left(t\right)$, $\alpha^2\dfrac{d^2x\left(t\right)}{dt^2}+\alpha\dfrac{dx\left(t\right)}{dt}+\dfrac{1}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{b}{a}\left(t-\tau\right)}x\left(\tau\right)d\tau=y\left(t\right)$, $\alpha^2\dfrac{d^2x\left(t\right)}{dt^2}+\alpha\dfrac{dx\left(t\right)}{dt}+\alpha x\left(t\right)+\dfrac{1}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{b}{a}\left(t-\tau\right)}x\left(\tau\right)d\tau=y\left(t\right)$

Продовження таблиці А.14

1	2
Оператор Вольтерри і рівняння Вольтерри першого роду	$x(t)=aq(t)+b\int_0^t q(\tau)d\tau$, $\alpha q(t)+\int_0^t q(\tau)d\tau=y(t)$, $\alpha\frac{dq(t)}{dt}+\int_0^t q(\tau)d\tau=y(t)$, $\alpha\frac{dq(t)}{dt}+\alpha q(t)+\int_0^t q(\tau)d\tau=y(t)$, $\alpha^2\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\int_0^t q(\tau)d\tau=y(t)$, $\alpha^2\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\alpha q(t)+\int_0^t q(\tau)d\tau=y(t)$, $\alpha^2\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dq(t)}{dt}+\int_0^t q(\tau)d\tau=y(t)$

Таблиця А.15

Регуляризаційні моделі вимірювальних перетворювачів другого порядку для відновлення вхідного сигналу

Вид моделі	Модель
1	2
$y(t)$ — вхідний вплив; a, b — сталі коефіцієнти; $x(t)$ — шукана функція.	
Диференціальний оператор	$\alpha x(t)+x(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$, $\alpha\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$, $\alpha\frac{dx(t)}{dt}+\alpha x(t)+x(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$, $\alpha^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$, $\alpha^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha x(t)+x(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$

Продовження таблиці А.15

1	2
	$\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$, $\alpha^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dx(t)}{dt}+\alpha x(t)+x(t)=$ $=\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)$
Операторне рівняння	$X(s)=\frac{s^2+as+b}{1}Y(s)$, $X(s)=\frac{s^2+as+b}{\alpha s+1}Y(s)$, $X(s)=\frac{s^2+as+b}{\alpha s+\alpha+1}Y(s)$, $X(s)=\frac{s^2+as+b}{\alpha^2s^2+1}Y(s)$, $X(s)=\frac{s^2+as+b}{\alpha^2s^2+\alpha+1}Y(s)$, $X(s)=\frac{s^2+as+b}{\alpha^2s^2+\alpha s+1}Y(s)$, $X(s)=\frac{s^2+as+b}{\alpha^2s^2+\alpha s+\alpha+1}Y(s)$
Рівняння Вольтерри першого роду	$\alpha x(t)+$ $+\int_0^t e^{\sigma(t-\tau)}\left(\cos\omega(\tau-t)-\frac{\sigma}{\omega}\sin\omega(\tau-t)\right)x(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt}$, $\alpha\frac{dx(t)}{dt}+$ $+\int_0^t e^{\sigma(t-\tau)}\left(\cos\omega(\tau-t)-\frac{\sigma}{\omega}\sin\omega(\tau-t)\right)x(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt}$, $\alpha\frac{dx(t)}{dt}+\alpha x(t)+$ $+\int_0^t e^{\sigma(t-\tau)}\left(\cos\omega(\tau-t)-\frac{\sigma}{\omega}\sin\omega(\tau-t)\right)x(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt}$, $\alpha^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+$ $+\int_0^t e^{\sigma(t-\tau)}\left(\cos\omega(\tau-t)-\frac{\sigma}{\omega}\sin\omega(\tau-t)\right)x(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt}$,

Продовження таблиці А.15

1	2
	$$\alpha^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha x(t)+$$ $$+\int_0^t e^{\sigma(t-\tau)}\left(\cos\omega(\tau-t)-\frac{\sigma}{\omega}\sin\omega(\tau-t)\right)x(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt},$$ $$\alpha^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dx(t)}{dt}+$$ $$+\int_0^t e^{\sigma(t-\tau)}\left(\cos\omega(\tau-t)-\frac{\sigma}{\omega}\sin\omega(\tau-t)\right)x(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt},$$ $$\alpha^2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dx(t)}{dt}+\alpha x(t)+$$ $$+\int_0^t e^{\sigma(t-\tau)}\left(\cos\omega(\tau-t)-\frac{\sigma}{\omega}\sin\omega(\tau-t)\right)x(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt},$$ $$\sigma=-\frac{a}{2},\ \omega=\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2},\ 4b>a^2$$
Оператор Вольтерри і рівняння Вольтерри першого роду	$$x(t)=q(t)+\int_0^t\left(a+b(t-\tau)\right)q(\tau)d\tau,$$ $$\alpha q(t)+\int_0^t q(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt},$$ $$\alpha\frac{dq(t)}{dt}+\int_0^t q(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt},$$ $$\alpha\frac{dq(t)}{dt}+\alpha q(t)+\int_0^t q(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt},$$ $$\alpha^2\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\int_0^t q(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt},$$ $$\alpha^2\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\alpha q(t)+\int_0^t q(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt},$$ $$\alpha^2\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dq(t)}{dt}+\int_0^t q(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt},$$ $$\alpha^2\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dq(t)}{dt}+\alpha q(t)+\int_0^t q(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt}.$$

Розглянемо можливості застосування даних моделей. Вказана регуляризація диференціальних операторів не дозволяє отримати точний відновлений вхідний сигнал. При застосуванні регуляризаційних моделей у формі передатних функцій розглядались моделі, в яких порядок знаменника не менший порядку чисельника. Проведені обчислювальні експерименти показали, що найкращими з точки зору точності відновлення сигналу є моделі в яких застосовується диференціальний регуляризатор першого та другого порядку, тобто оптимальна модель вимірювальних перетворювачів першого порядку має вигляд

$$X(s)=\frac{as+b}{\alpha^2 s^2+\alpha s+1}Y(s), \tag{A.3}$$

а модель вимірювальних перетворювачів другого порядку:

$$X(s)=\frac{s^2+as+b}{\alpha^2 s^2+\alpha s+1}Y(s). \tag{A.4}$$

На вхід системи подавався сигнал у вигляді одиничної функції, тобто сигнал відновлювався на основі перехідної характеристики базової моделі. На рис. А.1 зображено графіки відновленого сигналу за допомогою моделі (А.3), на рис. А.2 – за допомогою моделі (А.4). Величина шуму в початковому сигналі була задана в розмірі 1%, параметр регуляризації $\alpha=0.5$, крок моделювання – $h=0.01$.

Під час використання моделей у формі рівняння Вольтерри першого роду проведені обчислювальні експерименти показали, що оптимальними регуляризаційними моделями є моделі побудовані на основі диференціального регуляризаційного оператора першого порядку. Відповідно регуляризаційні моделі вимірювальних перетворювачів першого порядку набувають вигляду:

$$\alpha\frac{dx(t)}{dt}+\frac{1}{a}\int_0^t e^{-\frac{b}{a}(t-\tau)}x(\tau)d\tau=y(t), \tag{A.5}$$

а моделі вимірювальних перетворювачів другого порядку:

$$\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \int_0^t e^{\sigma(t-\tau)} \left(\cos\omega(\tau - t) - \frac{\sigma}{\omega} \sin\omega(\tau - t) \right) x(\tau) d\tau = \frac{dy(t)}{dt}. \qquad (A.6)$$

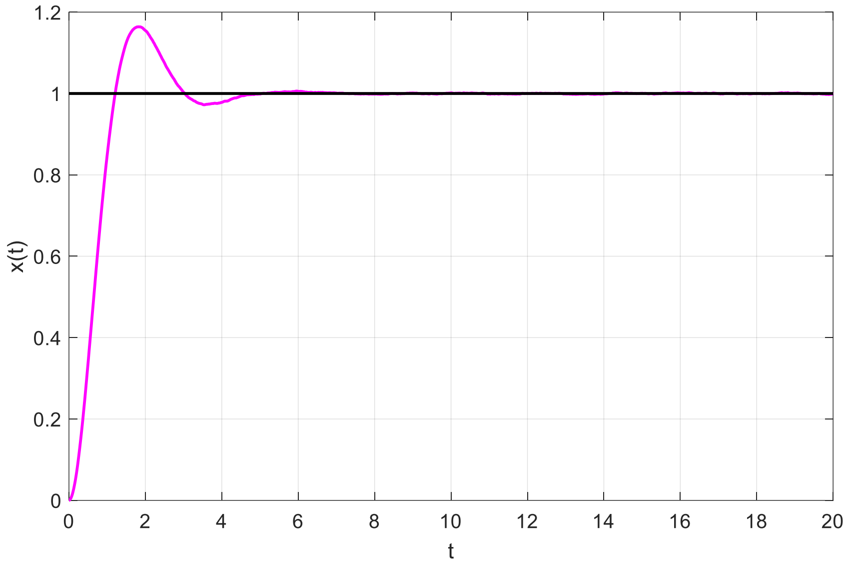


Рис. А.1. Графіки відновленого вхідного сигналу на основі перехідної характеристики базової моделі ВП першого порядку за допомогою передатних функцій (—— – наближений розв'язок, —— – точний розв'язок)

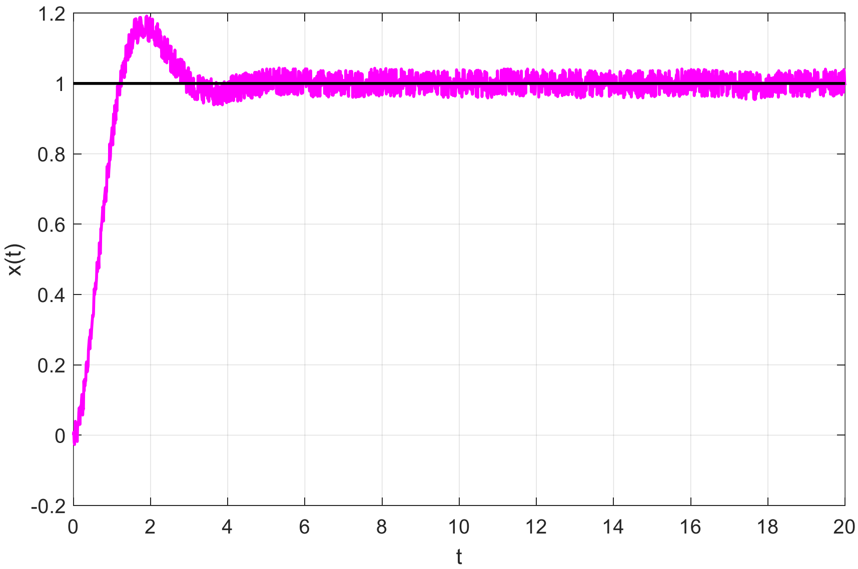


Рис. А.2. Графіки відновленого вхідного сигналу на основі перехідної характеристики базової моделі ВП другого порядку за допомогою передатних функцій (—— – наближений розв'язок, —— – точний розв'язок)

На рис. А.3 зображено графіки відновленого сигнал за допомогою моделі (А.5) на основі перехідної характеристики базової моделі, на рис. А.4 – за допомогою моделі (А.6). Величина похибки, як і для передатних функцій, задана в розмірі 1%, параметр регуляризації $\alpha = 0.5$, крок моделювання – $h = 0.01$.

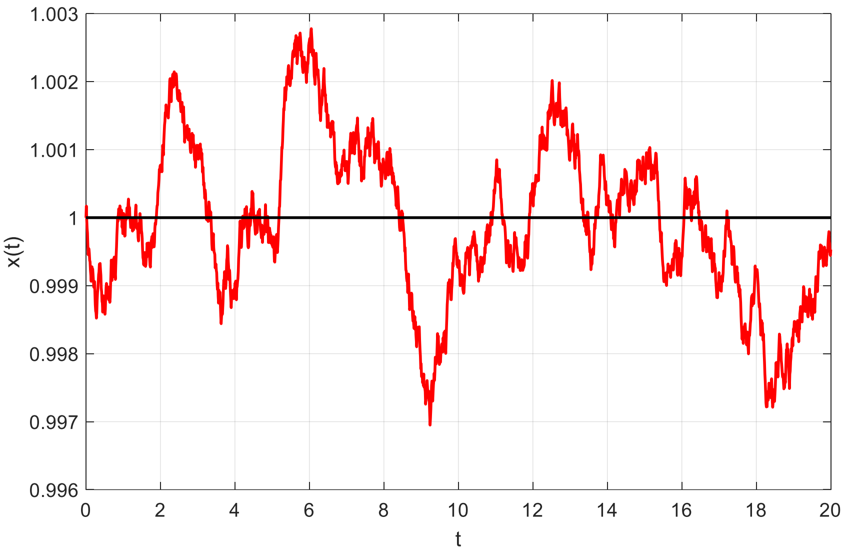


Рис. А.3. Графіки відновленого вхідного сигналу на основі перехідної характеристики базової моделі ВП першого порядку за допомогою інтегрального оператора (——— – наближений розв'язок, ——— – точний розв'язок)

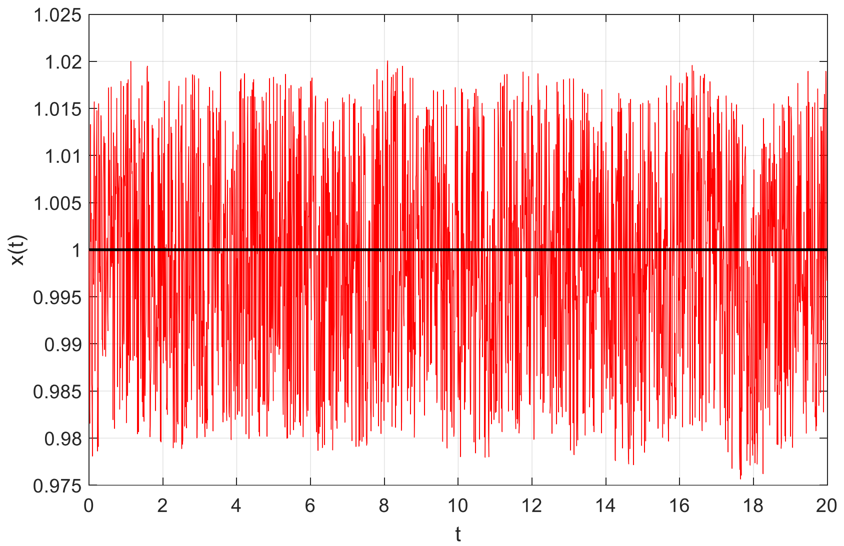


Рис. А.4. Графіки відновленого вхідного сигналу на основі перехідної характеристики базової моделі ВП другого порядку за допомогою інтегрального оператора (——— – наближений розв'язок, ——— – точний розв'язок)

У використанні оператора Вольтерри та рівняння Вольтерри першого роду, оптимальними регуляризаційними моделями є моделі побудовані на основі диференціального регуляризаційного оператора нульового та першого порядку. Моделі вимірювальних перетворювачів першого порядку набули вигляду

$$x(t)=aq(t)+b\int_0^t q(\tau)d\tau\,,\ \alpha\frac{dq(t)}{dt}+\alpha q(t)+\int_0^t q(\tau)d\tau=y(t), \qquad \text{(A.7)}$$

а моделі вимірювальних перетворювачів другого порядку:

$$x(t)=q(t)+\int_0^t\big(a+b(t-\tau)\big)q(\tau)d\tau\,,\ \alpha\frac{dq(t)}{dt}+\alpha q(t)+\int_0^t q(\tau)d\tau=\frac{dy(t)}{dt}. \qquad \text{(A.8)}$$

На рис. А.5 зображено відновлений сигнал на основі перехідної характеристики базової моделі за допомогою моделі (А.7), на рис. А.6 – за допомогою моделі (А.8). Величина похибки, як і в попередніх випадках, задана в розмірі 1%, параметр регуляризації $\alpha=0.5$, крок моделювання – $h=0.01$.

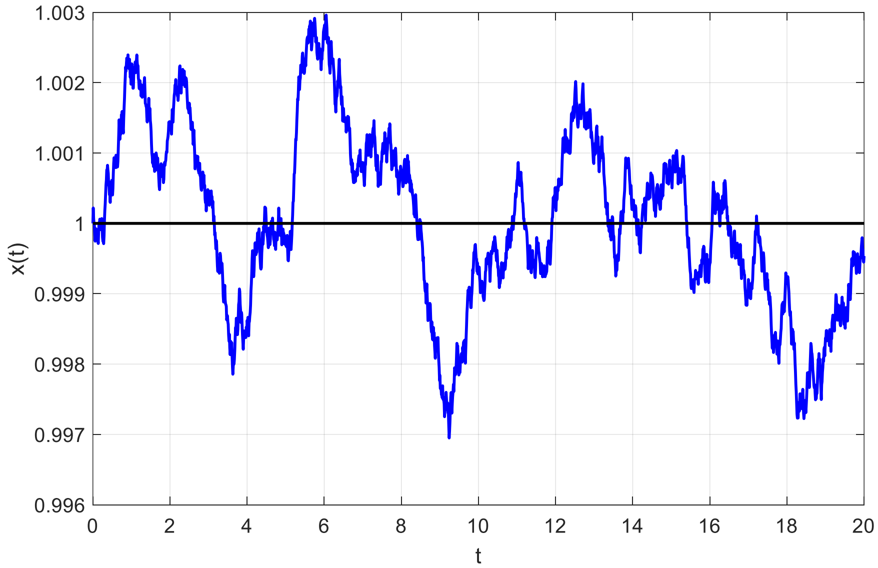


Рис. А.5. Графіки відновленого вхідного сигналу на основі перехідної характеристики базової моделі ВП першого порядку за допомогою інтегральних оператора та рівняння (——— – наближений розв'язок, ——— – точний розв'язок)

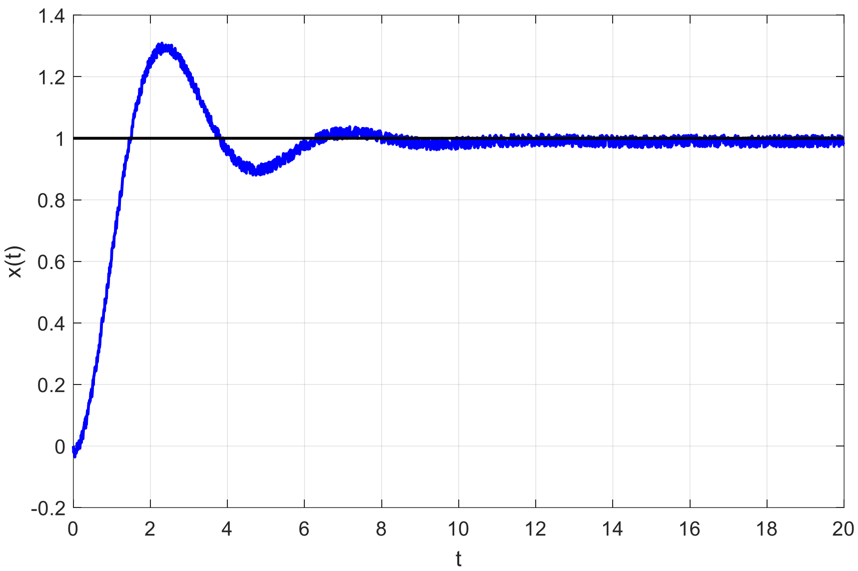


Рис. А.6. Графіки відновленого вхідного сигналу на основі перехідної характеристики базової моделі ВП другого порядку за допомогою інтегральних оператора та рівняння (——— – наближений розв’язок, ——— – точний розв’язок)

Отже, запропонований диференціальний регуляризаційний оператор дозволяє будувати математичні моделі, за допомогою яких можна відновлювати вхідний сигнал на вході вимірювальних перетворювачів. Вигляд регуляризаційного оператора є різним для кожного виду моделі. Причому, найбільшу точність вдається отримати на основі використання рівняння Вольтерри першого роду.

Додаток Б. Синтаксис функцій програмного комплексу

Модулі еквівалентних та апроксимаційних перетворень.

[W] = Approx_PDE_DRM_TF(delta,lambda,a,Delta)

```
% Побудова передатної функції теплового перетворювача заданого диференціальним рівнянням із частинними похідними на основі диференціально-різницевої моделі.
% Вхідні параметри:
% delta – товщина перетворювача теплового потоку;
% lambda – коефіцієнт теплопровідності;
% a – коефіцієнт температуропровідності;
% Delta – щільність розбиття.
% Вихідні параметри:
% W – передатна функція в символьному вигляді.
```

[num,den]=Approx_TITF_CF_FRTF(TITF,st,m);

```
% Побудова ланцюгово-дробової апроксимаційної моделі передатної функції поданої ірраціональною або трансцендентною передатною функцією;
% Вхідні параметри:
% TITF – передатна функція, яка задається в символьному вигляді;
% st – степінь апроксимуючого ланцюгового дробу;
% m – номер методу ланцюгово-дробової апроксимації:
% 1 – аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів;
% 2 – алгоритм побудови правильних С-дробів;
% 3 – QD-алгоритм побудови правильних С-дробів;
% 4 – алгоритм побудови g-дробів;
% 5 – алгоритм побудови приєднаних ланцюгових дробів.
% Вихідні параметри:
```

% num – вектор чисельника апроксимованої передатної функції;

% den – вектор знаменника апроксимованої передатної функції.

[num_a,den_a]=Approx_RFTF_CF_LDRFTF(num,den,st);

% Пониження степеня дробово-раціональної передатної функції на основі методу ланцюгових дробів.

% Вхідні параметри:

% num – вектор чисельника заданої передатної функції;

% den – вектор знаменника заданої передатної функції;

% st – степінь апроксимуючої передатної функції.

% Вихідні параметри:

% num_a – чисельник апроксимованої передатної функції;

% den_a – знаменник апроксимованої передатної функції.

[A]=Approx_FA_MNK_FT(X,F,n)

% Апроксимація функцій однієї, двох та трьох змінних у вигляді поліному шляхом аналітичного подання експериментальних даних на основі методу найменших квадратів.

% Вхідні параметри:

% X – векторно-матричне подання вхіних експериментальних даних;

% F – векторно-матричне подання результатів експериментів, якщо одновимірна функція – вектор, двовимірна – матриця, тривимірна – тривимірна структура;

% n – показник степеня апроксимаційного поліному.

% Вихідні параметри:

% A – векторно-матричне подання коефіцієнтів поліноміального наближення.

[A] = Approx_FA_EXP_FT(X,F,n)

% Апроксимація функцій однієї, двох та трьох змінних у вигляді поліному шляхом аналітичного подання експериментальних даних в експоненціальній формі.

% Вхідні параметри:

% X – векторно-матричне подання вхіних експериментальних даних;

% F – векторно-матричне подання результатів експериментів, якщо одновимірна функція – вектор, двовимірна – матриця, тривимірна – тривимірна структура;

% n – показник степеня апроксимаційної функції.

% Вихідні параметри:

% A – векторно-матричне подання коефіцієнтів поліноміального наближення.

[DF] = Diff_DF_IM_FT(X,F,n,m,k)

% Диференціювання функцій заданих у табличному вигляді на основі інтерполяційних методів чисельного диференціювання.

% Вхідні параметри:

% X – вектор значень аргументу;

% F – вектор значень функції;

% n – степінь похідної, n=1,2,3.

% m – метод диференціювання: 1 – несиметричні обернені; 2 – несиметричні прямі; 3 – симетричні;

% k – кількість точок диференціювання: k=2,3,4,5,7 точок.

% Вихідні параметри:

% DF – вектор значень диференційованої функції.

[DF] = Diff_DF_MNK_FT(X,F,n)

% Диференціювання функцій однієї, двох та трьох змінних шляхом аналітичного подання експериментальних даних у формі поліномів на основі методу найменших квадратів. У роботі цієї функції використовується **Approx_FA_MNK_FT**.

% Вхідні параметри:

% X – векторно-матричне подання аргументів;

% F – векторно-матричне подання значень функції, якщо одновимірна функція – вектор, двовимірна – матриця, тривимірна – тривимірна структура;

% n – показник степеня апроксимаційного поліному.

% Вихідні параметри:

% DF – векторно-матричне подання похідної вхідної функції.

[DF] = Diff_DF_EXP_FT(X,F,n)

% Диференціювання функцій однієї, двох та трьох змінних шляхом аналітичного подання експериментальних даних шляхом аналітичного подання експериментальних даних в експоненціальній формі. У роботі цієї функції використовується **Approx_FA_EXP_FT**.

% Вхідні параметри:

% X – векторно-матричне подання аргументів;

% F – векторно-матричне подання значень функції, якщо одновимірна функція – вектор, двовимірна – матриця, тривимірна – тривимірна структура;

% n – показник степеня апроксимаційної функції.

% Вихідні параметри:

% DF – векторно-матричне подання похідної вхідної функції.

[DF] = Diff_DF_Integr_FT(X,F,r)

% Диференціювання функцій на основі інтегрального методу шляхом застосування регуляризаційного оператора. На основі даної функції побудовано Simulink-блок **Diff_DF_Integr_FT**.

% Вхідні параметри:

% X – вектор вхідних аргументів;

% F – вектор значень функції;

% r – вектор [α,k1,k2] значень параметрів регуляризаційного оператора.

% Вихідні параметри:

% DF – вектор похідної вхідної функції.

[K]=Build_Kern_Volt_Sim(model,h,T,A,n)

% Побудова моделі у формі оператора Вольтерри динамічної системи побудованої в системі Simulink.

% Вхідні параметри:

% model – модель динамічної системи, яка побудована в Simulink, в імітаційній моделі мають обов’язково бути присутні блоки In та Out, за допомогою яких буде формуватись модель (задається у символьному вигляді – ім’я файлу моделі);

% h – крок моделювання;

% T – час моделювання;

% A – амплітуда одиничного стрибка;

% n – кількість ядер (n<4).

% Вихідні параметри:

% K – ядро інтегрального оператора у формі структури: K{..}, 1-й елемент – вектор, одновимірне ядро, 2-й елемент – матриця, двовимірне ядро, 3-й елемент – тривимірна структура, тривимірне ядро.

[K]=Build_Kern_Volt_Ode(FuncOde,y0,h,T,A,n)

% Побудова моделі у формі оператора Вольтерри динамічної системи на основі звичайного диференціального рівняння

% Вхідні параметри:

% FuncOde – права частина системи звичайних диференціальних рівнянь задачі Коші задана у вигляді користувацької функції, формат аналогічний до стандартних функцій Matlab – ode23, ode45 та ін.;

% y0 – вектор початкових умов;

% h – крок моделювання;

% T – час моделювання;

% A – амплітуда одиничного стрибка;

% n – кількість ядер (n<4).

% Вихідні параметри:

% K – ядро інтегрального оператора у формі структури: K{..}, 1-й елемент – вектор, одновимірне ядро, 2-й елемент – матриця, двовимірне ядро, 3-й елемент – тривимірна структура, тривимірне ядро.

[K]=Build_Kern_Volt_PdeHead(koef,ab,T0,h,hx,T,A,nx);

% Побудова моделі у формі оператора Вольтерри лінійної динамічної системи на основі одновимірного диференціального рівняння із частинними похідними параболічного типу.

% Вхідні параметри:

% koef – вектор коефіцієнтів моделі [lambda c ro], де lambda – коефіцієнт теплопровідності, c – коефіцієнт теплоємності, ro – густина;

% ab – вектор, який характеризує просторову координату [a b];

% T0 – вектор початкових умов;

% h – крок моделювання часової змінної;

% hx – крок моделювання просторової змінної;

% T – час моделювання;

% A – амплітуда одиничного стрибка;

% nx – вказується номер просторової координати, яка характеризує точку досліджуваного процесу.

% Вихідні параметри:

% K – ядро інтегрального оператора у формі вектора.

Модулі ідентифікації інтегральних динамічних моделей.

[K]=Ident_Kern_VinerHopf_NumExper(x,y,h);

% Ідентифікація ядра інтегрального оператора Вінера-Гопфа на основі результатів обчислювальних експериментів.

% Вхідні параметри:

% x – матриця вхідних даних експериментів;

% y – матриця результатів експериментів;

% h – крок зміни вхідного параметру.

% Вихідні параметри:

% K – ядро інтегрального оператора у формі вектора.

[K1]=Ident_Kern1_Volt_NumExper(t,y,A);

% Ідентифікація ядра однорідного інтегрального оператора Вольтерри першого степеня, на основі результатів обчислювальних експериментів.

% Вхідні параметри:

% t – векторне подання часової змінної;

% y – векторне подання результату експерименту;

% A – амплітуда вхідного сигналу.

% Вихідні параметри:

% K1 – ядро інтегрального оператора у формі вектора.

[K2]=Ident_Kern2_Volt_NumExper(t,Y2,A);

% Ідентифікація ядра однорідного інтегрального оператора Вольтерри другого степеня, на основі результатів обчислювальних експериментів.

% Вхідні параметри:

% t – векторне подання часової змінної;

% Y2 – матриця результатів експериментів;

% A – амплітуда вхідного сигналу.

% Вихідні параметри:

% K2 – ядро двовимірного інтегрального оператора у формі матриці.

[K3]=Ident_Kern3_Volt_NumExper(t,Y3,A);

% Ідентифікація ядра однорідного інтегрального оператора Вольтерри третього степеня, на основі результатів обчислювальних експериментів.

% Вхідні параметри:

% t – векторне подання часової змінної;

% Y3 – тривимірна структура результатів експериментів;

% A – амплітуда вхідного сигналу.

% Вихідні параметри:

% K3 – ядро тривимірного інтегрального оператора у формі тривимірної структури.

[K]=Ident_Kern_Volt_NumExper(t,func,A,n);

% Ідентифікація неоднорідного поліноміального інтегрального оператора Вольтерри.

% Вхідні параметри:

% t – векторне подання часової змінної;

% func – функція, яка характеризує досліджуваний об'єкт;

% A – амплітуда вхідного сигналу;

% n – характеристика шуканого оператора, можливі значення: 1, 2, 3, 12, 13, 23, 123;

% Вихідні параметри:

% K – ядро інтегрального оператора у формі структури: K{..}, 1-й елемент – вектор, одновимірне ядро, 2-й елемент – матриця, двовимірне ядро, 3-й елемент – тривимірна структура, тривимірне ядро.

[K]=Ident_Kern_AVolt_NumExper(t,func,A,n,delta);

% Ідентифікація неоднорідного поліноміального інтегрального оператора Вольтерри на основі адаптивного алгоритму.

% Вхідні параметри:

% t – векторне подання часової змінної;

% func – функція, яка характеризує досліджуваний об'єкт;

% A – амплітуда вхідного сигналу;

% n – характеристика шуканого оператора, можливі значення: 1, 2, 3, 12, 13, 23, 123;

% delta – точність моделі.

% Вихідні параметри:

% K – ядро інтегрального оператора у формі структури: K{..}, 1-й елемент – вектор, одновимірне ядро, 2-й елемент – матриця, двовимірне ядро, 3-й елемент – тривимірна структура, тривимірне ядро.

Модулі числової реалізації інтегральних моделей.

[y]=Solver_IE_Resolvent(Kern,f,t,n)

% Розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри другого роду методом резольвент.

% Вхідні параметри:

% Kern – ядро інтегрального рівняння задане в символьному вигляді;

% f – функція правої частини задана у символьному вигляді;

% t – вектор значень розбиття часової змінної;

% n – кількість членів ряду.

% Вихідні параметри:

% y – розв’язок рівняння у векторному вигляді.

[y]=Solver_IE_ResolventCF(Kern,f,t,n)

% Розв’язування інтегрального рівняння Вольтерри другого роду методом резольвент на основі ланцюгово-дробової апроксимації.

% Вхідні параметри:

% Kern – ядро інтегрального рівняння задане в символьному вигляді;

% f – функція правої частини задана у символьному вигляді;

% t – вектор значень розбиття часової змінної;

% n – кількість членів ланцюгового дробу.

% Вихідні параметри:

% y – розв’язок рівняння у векторному вигляді.

[Y]=Solver_IE_OperatCF(Kern,F,n)

% Розв’язування інтегрального рівняння Вольтерри другого роду операційним методом із застосуванням ланцюгово-дробової апроксимації, апроксимація застосовується у випадку, якщо немає стандартних засобів отримання оригіналу розв’язку.

% Вхідні параметри:

% Kern – зображення ядра інтегрального рівняння задане в символьному вигляді;

% F – зображення функції правої частини заданої у символьному вигляді;

% Вихідні параметри:

% Y – зображення розв’язку рівняння в символьному вигляді.

[y]=Solver_IE_Quad(Kern,f,t,m)

% Розв’язування інтегрального рівняння Вольтерри другого роду методом квадратур.

% Вхідні параметри:

% Kern – вектор ядра інтегрального рівняння;

% f – вектор функції правої частини;

% t – вектор розбиття часової змінної;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій;

% ‘s’ – метод Сімпсона.

% Вихідні параметри:

% y – вектор розв’язку рівняння.

[y]=Solver_SingIE_QuadG(Kern,f,h,m)

% Розв’язування інтегрального рівняння Вольтерри другого роду із сингулярним ядром методом квадратур із адаптивним підбором кроку.

% Вхідні параметри:

% Kern – ядро інтегрального рівняння задане в символьному вигляді;

% f – функції правої частини задана в символьному вигляді;

% h – вектор, який містить мінімальний та максимальний крок дискретизації;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій;

% ‘s’ – метод Сімпсона.

% Вихідні параметри:

% y – вектор розв’язку рівняння.

[y]=Solver_SysIE_Quad(Kern,f,t,m)

% Розв’язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду методом квадратур.

% Вхідні параметри:

% Kern – матриця ядр інтегральних рівнянь;

% f – матриця функцій правої частини;

% t – вектор розбиття часової змінної;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій;

% ‘s’ – метод Сімпсона.

% Вихідні параметри:

% y – матриця розв’язку рівнянь.

[y]=Solver_SysSingIE_QuadG(Kern,f,h,m)

% Розв’язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду із сингулярним ядром методом квадратур із адаптивним підбором кроку.

% Вхідні параметри:

% Kern – масив ядр інтегральних рівнянь заданий в символьному вигляді;

% f – масив функцій правої частини заданий в символьному вигляді;

% h – вектор, який містить мінімальний та максимальний крок дискретизації;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій;

% ‘s’ – метод Сімпсона.

% Вихідні параметри:

% y – матриця розв’язку рівнянь.

[y]=NumerImplem_Operator_Volt1(Kern,x,h,T,m)

```
% Числова реалізація однорідного оператора Вольтерри першого степеня.
% Вхідні параметри:
% Kern – ядро інтегрального оператора задане у вигляді вектора;
% x – вектор вхідного впливу;
% h – крок дискретизації;
% T – кінцевий крок моделювання;
% m – метод реалізації:
% ‘p’ – метод прямокутників;
% ‘t’ – метод трапецій;
% ‘s’ – метод Сімпсона.
% Вихідні параметри:
% y – вектор результату числової реалізації.
```

[y]=NumerImplem_Operator_Volt2(Kern,x,h,T,m)

```
% Числова реалізація однорідного оператора Вольтерри другого степеня.
% Вхідні параметри:
% Kern – ядро інтегрального оператора задане у вигляді матриці;
% x – вектор вхідного впливу;
% h – крок дискретизації;
% T – кінцевий крок моделювання;
% m – метод реалізації:
% ‘p’ – метод прямокутників;
% ‘t’ – метод трапецій;
% ‘s’ – метод Сімпсона.
% Вихідні параметри:
% y – вектор результату числової реалізації.
```

[y]=NumerImplem_Operator_Volt3(Kern,x,h,T,m)

% Числова реалізація однорідного оператора Вольтерри третього степеня.

% Вхідні параметри:

% Kern – ядро інтегрального оператора задане у вигляді тримірної структури;

% x – вектор вхідного впливу;

% h – крок дискретизації;

% T – кінцевий крок моделювання;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій;

% ‘s’ – метод Сімпсона.

% Вихідні параметри:

% y – вектор результату числової реалізації.

[y]=NumerImplem_Operator_Volt(Kern,x,h,T,m)

% Числова реалізація неоднорідного оператора Вольтерри третього степеня.

% Вхідні параметри:

% Kern – масив ядр першого, другого та третього порядку інтегрального оператора задані у вигляді вектора, матриці та тримірної структури;

% x – вектор вхідного впливу;

% h – крок дискретизації;

% T – кінцевий крок моделювання;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій;

% ‘s’ – метод Сімпсона.

% Вихідні параметри:

% y – вектор результату числової реалізації.

[y]=NumerImplem_Operator_Volt1_deg(alpha,beta,x,h,T,m)

% Числова реалізація однорідного оператора Вольтерри першого степеня із виродженим ядром.

% Вхідні параметри:

% alpha – елементи ядра інтегрального оператора незалежні від підінтегральної змінної задані у вигляді матриці;

% beta – елементи ядра інтегрального оператора залежні від підінтегральної змінної задані у вигляді матриці;

% x – вектор вхідного впливу;

% h – крок дискретизації;

% T – кінцевий крок моделювання;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій;

% ‘s’ – метод Сімпсона.

% Вихідні параметри:

% y – вектор результату числової реалізації.

[y]=NumerImplem_Operator_Volt2_deg(alpha,beta,x,h,T,m)

% Числова реалізація однорідного оператора Вольтерри другого степеня із виродженим ядром.

% Вхідні параметри:

% alpha – елементи ядра інтегрального оператора незалежні від підінтегральної змінної задані у вигляді матриці;

% beta – елементи ядра інтегрального оператора залежні від підінтегральної змінної задані у вигляді тривимірної структури;

% x – вектор вхідного впливу;

% h – крок дискретизації;

% T – кінцевий крок моделювання;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій;

% ‘s’ – метод Сімпсона.

% Вихідні параметри:

% y – вектор результату числової реалізації.

[y]=NumerImplem_Operator_Volt3_deg(alpha,beta,x,h,T,m)

% Числова реалізація однорідного оператора Вольтерри третього степеня із виродженим ядром.

% Вхідні параметри:

% alpha – елементи ядра інтегрального оператора незалежні від підінтегральної змінної задані у вигляді матриці;

% beta – елементи ядра інтегрального оператора залежні від підінтегральної змінної задані у вигляді чотиримірної структури;

% x – вектор вхідного впливу;

% h – крок дискретизації;

% T – кінцевий крок моделювання;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій;

% ‘s’ – метод Сімпсона.

% Вихідні параметри:

% y – вектор результату числової реалізації.

[y]=NumerImplem_Operator_Volt_deg(alpha,beta,x,h,T,m)

% Числова реалізація неоднорідного оператора Вольтерри третього степеня із виродженим ядром.

% Вхідні параметри:

% alpha – елементи ядра інтегрального оператора незалежні від підінтегральної змінної задані у вигляді масиву матриць;

% beta – елементи ядра інтегрального оператора залежні від підінтегральної змінної задані у вигляді масиву матриці, тривимірної та чотиримірної структури відповідно для визначення одновимірного, двовимірно та тривимірного ядра відповідно;

% x – вектор вхідного впливу;

% h – крок дискретизації;

% T – кінцевий крок моделювання;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій;

% ‘s’ – метод Сімпсона.

% Вихідні параметри:

% y – вектор результату числової реалізації.

Модулі для розв’язування обернених задач (відновлення сигналів).

[x]=Inv_IEVolt_Quad(Kern,y,h,T,m)

% Розв’язування інтегрального рівняння Вольтерри першого роду методом квадратур.

% Вхідні параметри:

% Kern – ядро інтегрального оператора задане у вигляді вектора;

% y – вектор вхідного впливу;

% h – крок дискретизації;

% T – кінцевий крок моделювання;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій.

% Вихідні параметри:

% x – вектор розв'язку.

[x]=Inv_IEVolt_QuadR(Kern,y,alpha,h,T,m)

% Розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри першого роду методом квадратур на основі регуляризації інтегрального рівняння диференціальним оператором.

% Вхідні параметри:

% Kern – ядро інтегрального оператора задане у вигляді вектора;

% y – вектор вхідного впливу;

% alpha – вектор параметрів регуляризації;

% h – крок дискретизації;

% T – кінцевий крок моделювання;

% m – метод реалізації:

% 'p' – метод прямокутників;

% 't' – метод трапецій.

% Вихідні параметри:

% x – вектор розв'язку.

[x]=Inv_IEVolt2_Quad(Kern,y,h,T,m,mn)

% Розв'язування поліноміального інтегрального рівняння Вольтерри першого роду другого степення методом квадратур.

% Вхідні параметри:

% Kern – масив ядр інтегрального оператора задані у вигляді вектора та матриці;

% y – вектор вхідного впливу;

% h – крок дискретизації;

% T – кінцевий крок моделювання;

% m – метод реалізації:

% 'p' – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій.

% mn – метод розв’язування нелінійного рівняння:

% ‘vz’ – метод власних значень;

% ‘cf’ – метод ланцюгових дробів;

% ‘nd’ – метод Ньютона (дотичних);

% ‘hd’ – метод хорд;

% ‘it’ – метод простої ітерації;

% Вихідні параметри:

% x – вектор розв’язку.

[x]=Inv_IEVolt2_QuadR(Kern,y,alpha,h,T,m,mn)

% Розв’язування поліноміального інтегрального рівняння Вольтерри першого роду другого степення методом квадратур на основі регуляризації інтегрального рівняння диференціальним оператором.

% Вхідні параметри:

% Kern – ядро інтегрального оператора задане у вигляді вектора;

% y – вектор вхідного впливу;

% alpha – вектор параметрів регуляризації;

% h – крок дискретизації;

% T – кінцевий крок моделювання;

% m – метод реалізації:

% ‘p’ – метод прямокутників;

% ‘t’ – метод трапецій.

% mn – метод розв’язування нелінійного рівняння:

% ‘vz’ – метод власних значень;

% ‘cf’ – метод ланцюгових дробів;

% ‘nd’ – метод Ньютона (дотичних);

% ‘hd’ – метод хорд;

% ‘it’ – метод простої ітерації;

% Вихідні параметри:

% x – вектор розв’язку.

Додаток В. Інформація про впровадження результатів дисертаційного дослідження

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор ТзОВ «МЕРЕЖА ЛАНЕТ»
____________________ Івасюк М.П.
«19» червня 2019 р.

АКТ

впровадження результатів дисертаційного дослідження Іванюка В.А.
на тему «Методи та засоби математичного моделювання
динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами на основі
одновимірних інтегральних моделей»
на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю
01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи»

Комісія в складі Остроухова Є.О., Баранова А.О., Власенка С.О. засвідчує, що результати дисертаційного дослідження Іванюка В.А. на тему «Методи та засоби математичного моделювання динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей» використані при проектуванні системи моніторингу температурних режимів роботи об'єктів інформаційно-обчислювальних систем, зокрема, комутаційного та магістрального обладнання комп'ютерних мереж.

Основною проблемою при контролі температурного режиму комунікаційного обладнання є інертність вимірювальної системи «чіп – температурний сенсор», внаслідок якої реакція на критичний температурний режим чіпу має запізнення (в межах 10 с), що не виключає можливість виходу його з ладу. Запропоновані Іванюком В. А. метод ідентифікації інтегральної моделі процесу теплопереносу, а також спосіб відновлення сигналу на вході вимірювальної системи (температури ядра чіпу) із використанням отриманої моделі дали змогу практично ліквідувати запізнення реакції вимірювальної системи і забезпечити своєчасне запобігання переходу обладнання в критичні температурні режими роботи.

Керівник відділу
інформаційних технологій ____________________ Є.О. Остроухов

Адміністратор системи ____________________ А.О. Баранов

Адміністратор системи ____________________ С.О. Власенко

Україна * Товариство «МЕРЕЖА ЛАНЕТ» код 40373986

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ТзОВ «Лагідком»

____

«04» червня 2019 р.

АКТ

впровадження результатів дисертаційного дослідження Іванюка В.А.
на тему «Методи та засоби математичного моделювання
динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами на основі
одновимірних інтегральних моделей»
на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю
01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи»

Цим Актом засвідчується, що результати дисертаційного дослідження Іванюка В.А. на тему «Методи та засоби математичного моделювання динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей» використані при проектуванні вимірювальних комплексів контролю температурних режимів чіпів комутаторів доступу та агрегації, що дозволило підвищити ефективність процесів контролю та керування інформаційно-телекомунікаційними системами.

Технічний директор ___________ М.М. Зубчик

Головний інженер ___________ І.П. Герасимчук

Адміністратор системи ___________ С.О. Ковальчук

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ДП ТзОВ «Імпульс»
ТРК «Імпульс ТБ»

_______________ Маланчук Б.А.

«21» травня 2019 р.

ДОВІДКА

про використання науково-практичної розробки
“Методика та комплекс програм для моделювання динамічних процесів в об’єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей (Objects with Disributed Parameters (ODP))”
Іванюка Віталія Анатолійовича

Науково-практична розробка “Методика та комплекс програм для моделювання динамічних процесів в об’єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей (Objects with Disributed Parameters (ODP))”, яка базується на результатах, отриманих в дисертаційній роботі Іванюка В.А. “Методи та засоби математичного моделювання динамічних процесів в об’єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей”, використовується в роботі відділу обслуговування та експлуатації мережі.

Розроблені автором методика та комплекс програм використані при проектуванні апаратно-програмних засобів автоматизованої підтримки комутаційного та магістрального обладнання інформаційно-комп’ютерних мереж.

Керівник відділу
обслуговування та експлуатації _______________ В.А. Чепурний

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КАМ'ЯНЕЦЬ-ПОДІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ОГІЄНКА
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300; тел.: (03849) 3-05-13, факс: (03849) 3-07-83, E-mail: post@kpnu.edu.ua
Web: http://www.kpnu.edu.ua код ЄДРПОУ 02125616

Від 17.05.2019 № 27/19

На № ________ від ________

ДОВІДКА
про впровадження результатів дисертаційного дослідження
"Методи та засоби математичного моделювання динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей"
на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук
зі спеціальності 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи
ІВАНЮКА ВІТАЛІЯ АНАТОЛІЙОВИЧА

Впровадження результатів дисертаційного дослідження Іванюка Віталія Анатолійовича здійснювалося в освітній процес Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка упродовж 2017-2019 рр.

Зважаючи на те, що для вирішення задач проектування, дослідження, обробки інформаційних сигналів виникає необхідність створення методів і засобів моделювання процесів, що протікають у технічних системах з розподіленими параметрами, з орієнтацією на їх ефективну комп'ютерну реалізацію, а також, враховуючи вимоги до підготовки фахівців зі спеціальності 122 Комп'ютерні науки за освітніми ступенями бакалавр та магістр, викладачі кафедр інформатики та математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка використовують в освітньому процесі результати дисертаційного дослідження В. А. Іванюка на тему «Методи та засоби математичного моделювання динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей» під час викладання навчальних дисциплін "Сучасні проблеми комп'ютерного моделювання", "Методи обчислень", "Математичне моделювання", "Комп'ютерне моделювання", "Математичні пакети прикладних програм", "Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики", "Диференціальні та інтегральні рівняння", "Сучасні комп'ютерні технології дослідження складних систем", "Комп'ютерний експеримент в наукових дослідженнях", "Сучасні телекомунікаційні системи" та при написанні курсових і дипломних робіт.

Також результати дисертаційної роботи В. А. Іванюка "Методи та засоби математичного моделювання динамічних процесів в об'єктах із розподіленими параметрами на основі одновимірних інтегральних моделей" успішно використовуються для вдосконалення теоретико-методологічного забезпечення освітнього процесу та при виконанні науково-дослідних робіт.

Результати впровадження матеріалів дисертаційного роботи В. А. Іванюка обговорено та схвалено на засіданні кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (протокол № 11 від 16 травня 2019 р.).

Проректор з наукової роботи,
доктор фізико-математичних наук, професор **І.М. Конет**

Додаток Г. Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Верлань А. Ф., Федорчук В. А., Іванюк В. А. Комп'ютерне моделювання в задачах динаміки електромеханічних систем : монографія. Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. Кам'янець-Подільський, 2010. 204 с. ISBN: 978-966-643-057-4

2. Божок А. М, Понеділок В. В., Іванюк В. А. Апаратно-орієнтований регуляризаційний метод диференціювання сигналів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2017. Вип. 16. С. 14–21. *(BASE, PKP Index, NSD)*

3. Верлань А. А., Іванюк В. А. Спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами на основі методу розщеплення. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2017. Т. 7, № 4. С. 285–290. *(Україніка Наукова, Російський індекс наукового цитування, Index Copernicus, Google Академія, EBSCO).*

4. Верлань А. Ф., Федорчук В. А., Іванюк В. А. Інтегральні моделі нестаціонарних задач теплопровідності на основі методу теплових потенціалів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2019. Вип. 19. С. 24–30. *(BASE, PKP Index, NSD)*

5. Иванюк В. А., Костьян Н. Л. Способ построения динамической модели линейного объекта по реакции на входное воздействие произвольной формы. *Электронное моделирование*. Київ, 2014. Т. 36. С. 113–119. *(Index Copernicus International, CrossRef, Ulrich's Periodicals Directory, Google Scholar, Cambridge Scientific Abstracts (CSA), Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, e-LIBRARY, ВІНІТІ РАН)*

6. Иванюк В. А., Костьян Н. Л., Махович А. И. Способы формирования передаточных функций приемника теплового потока. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2013. Вип. 8. С. 61–69. *(BASE, PKP Index, NSD)*

7. Іванюк В. А. Ланцюгово-дробовий метод розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри ІІ роду. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2012. Вип. 6. С. 88–97. *(BASE, PKP Index, NSD)*

8. Іванюк В. А. Моделювання процесу занурення буксируваних підводних об’єктів шляхом ланцюгово-дробової апроксимації передатних функцій. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2009. Вип. 2. С. 98–107. *(BASE, PKP Index, NSD)*

9. Іванюк В. А., Дячук О. А., Понеділок В. В. Метод обернених операторів відновлення сигналів на вході лінійних динамічних систем, що задані передатними функціями. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець- Подільський, 2017. Вип. 15. С. 62–67. *(BASE, PKP Index, NSD)*

10. Іванюк В. А., Корнєєв О. М. Розв’язування інтегральних рівнянь типу згортки за допомогою інтегральних перетворень. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2010. Вип. 4. С. 91–97. *(BASE, PKP Index, NSD)*

11. Іванюк В. А., Костьян Н. Л. Інтегральний метод розв’язування диференціальних рівнянь при моделюванні об’єктів із розподіленими параметрами. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2018. Вип. 18. С. 78–85.

12. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Аналітичне подання рядів Вольтерри на основі експериментальних даних. *Математичне та*

комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2014. Вип. 11. С. 43-50. *(BASE, PKP Index, NSD)*

13. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Побудова ядер інтегрального ряду Вольтерри методом апроксимації фігурою обертання. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2015. Вип. 12. С. 36–42. *(BASE, PKP Index, NSD)*

14. Іванюк В. А., Понеділок В. В., Грищук В. А. Комп’ютерна реалізація детермінованого способу ідентифікації інтегральних моделей нелінійних динамічних об’єктів. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2014. Вип. 10. С. 59–67. *(BASE, PKP Index, NSD)*

15. Іванюк В. А., Ситник О. О., Стертен Ю. Дослідження еквівалентних форм представлення динамічних моделей вимірювальних перетворювачів методом обчислювальних експериментів. *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: технічні науки*. Черкаси, 2018. № 1. С. 27–34. *(Index Copernicus International, Citefactor, Google Академія, Academic Recource Index, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat)*

16. Іванюк В. А., Тихоход В. О., Протасов С. О. Інтегральні моделі ірраціональних та трансцендентних ланок. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський, 2011. Вип. 5. С. 101–109. *(BASE, PKP Index, NSD)*

17. Іванюк В. А., Федорчук В. А. Адаптивний метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем інтегральними рядами Вольтерри. *Електронне моделювання*, 2019. Т. 41, № 3. С. 33–42. *(Index Copernicus International, CrossRef, Ulrich’s Periodicals Directory, Google Scholar, Cambridge Scientific Abstracts (CSA), Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, e-LIBRARY, ВІНІТІ РАН)*

18. Ivaniuk V., Fedorchuk V. Application of correlation method for identification of models of the linear dynamic systems with distributed. *Danish Scientific Journal*. 2019. № 28 (3). P. 45–53.

19. Ivaniuk V., Ponedilok V. Method of restoration of input signals of nonlinear dynamic object with destributed parameters. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2018. Вип. 18. С. 65–73. *(BASE, PKP Index, NSD)*

20. Ivanyuk V., Ponedilok V., Sterten Jo. Solving inverse problems of dynamics of non linear objects based on the Volterra series. *Computational problems of electrical engineering*, Vol. 6, No. 1. Lviv, 2016. P. 9–16.

21. Ivanyuk V. A. Method of inverse operator for the recover input signal. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2018. Вип. 17. С. 63–70. *(BASE, PKP Index, NSD)*

22. Ivanyuk V. A., Fedorchuk V. A. Vector-matrix method of numerical implementation of the polynomial integral Volterra operators. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2019. Вип. 20. С. 40–50. *(BASE, PKP Index, NSD)*

23. Ivanyuk V. A., Halmuhamedova F. A. Recovering dynamic distortions on output of channel transmitted continuous signals. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2012. Вип. 7. С. 55–60. *(BASE, PKP Index, NSD)*

Праці апробаційного характеру:

24. Верлань А. Ф., Федорчук В. А., Іванюк В. А. Реалізація ланцюгово-дробових наближень передатних функцій структурним методом. *Моделювання в електротехніці, електроніці і світлотехніці* : матеріали міжнародної науково-технічної конференції МЕЕС'10. Київ. 2010. С. 45–46.

25. Іванюк В. А. Метод відновлення сигналів на вході нелінійних динамічних об'єктів з розподіленими параметрами. *Моделювання-2018.* Київ, 2018. С. 154–157.

26. Іванюк В. А., Грищук В. А. Побудова апроксимаційних інтегральних моделей нелінійних динамічних об'єктів. *Сучасні проблеми*

математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : тези доповідей V міжнародної наукової конференції. Кам'янець-Подільський, 2012. С. 34–35.

27. Іванюк В. А., Корнєєв О. М. Використання ланцюгових дробів при розв'язанні інтегральних рівнянь типу згортки операційним методом. *Интегральные уравнения – 2009 – Integral equations – 2009* : сб. тезисов конф. Київ, 2009. С. 83–85.

28. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Алгоритм розв'язування обернених задач динаміки нелінійних об'єктів на основі рядів Вольтерри. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей. Кам'янець-Подільський, 2016. С. 81–83.

29. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Алгоритми моделювання нелінійних систем керування на основі інтегральних рівнянь. *Зб. тез науково-технічної конференції молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова*. Київ, 2016. С. 28.

30. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Ідентифікація нелінійних динамічних систем у вигляді інтегральних рядів Вольтерри на основі детермінованих моделей. *Моделювання* : тези XXXIII науково-технічної конференції. Київ, 2014. С. 14–15.

31. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Побудова ядер інтегрально ряду Вольтерри на основі методу апроксимації фігурою обертання. *Матеріали Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів».* Рівне, 2015. С.79.

32. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Чисельна реалізація інтегральних рядів Вольтерри. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей. Кам'янець-Подільський, 2014. С. 64–65.

33. Іванюк В. А., Стертен Ю. Дослідження обчислювальних особливостей форм динамічних моделей вимірювальних перетворювачів. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей. Кам'янець-Подільський, 2018. С. 30–31.

34. Іванюк В. А., Федорчук В. А. Адаптивний метод ідентифікації моделей у вигляді інтегральних рядів Вольтерри. *Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання 2019*. Івано-Франківськ, 2019. С. 103–106.

35. Понеділок В. В., Іванюк В. А. Чисельне диференціювання таблично заданих функцій. *Праці V Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів», присвяченої пам'яті професора Ю.П. Кунченка* : тези доповідей. Черкаси, 2015. С. 196.

36. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Понеділок В. В. Ідентифікація моделей нелінійних елементів інфокомунікаційних систем у формі функціональних рядів Вольтерри. *HICT`2019. Міжнародна науково-практична конференція «Наукоємні технології в інфокомунікаціях»*. Харків, 2019. С. 132–133.

37. Ivanyuk V., Ponedilok V. The identification of nonlinear dynamical systems as integrated Volterra series based on deterministic signals. *Proceedings of the 5 th international conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education ICAICTSEE-2015.* Sofia, Bulgaria : University of national and world economy, 2016. P. 230–238. *(ProQuest, EBSCOhost, Google Scholar).*

38. Ivanyuk V., Ponedilok V., Sterten Jo. Regularization methods for differentiating noise signals. *Proceedings of 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*, Lviv-Slavske, Ukraine, February 20–24, 2018. Lviv, 2018. P. 295–300. *(Scopus, Web Of Science, Google Академія).*

Праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

39. Іванюк В. А. Математичні пакети прикладних програм : навчальний посібник. Кам'янець-Подільський, 2015. 160 с.

40. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Верлань Д. А. Інтегральні рівняння в задачах математичного моделювання : навчальний посібник. Кам'янець-Подільський, 2014. 144 с.

41. Іванюк В. А. Розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду на основі методу ланцюгових дробів. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів : вип. 11, у 3 т. Кам'янець-Подільський, 2012. Т. 2. С. 30–31.

42. Іванюк В. А. Непараметрична ідентифікація передатних функцій теплових потоків. *Збірник наукових праць молодих вчених Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка*. Кам'янець-Подільський, 2016. Вип. 7. С. 131–132.

43. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Апроксимація функцій багатьох змінних методом найменших квадратів. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів : вип. 13, у 3 т. Кам'янець-Подільський, 2014. Т. 2. С. 48–49.

44. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Побудова моделей нелінійних динамічних систем заданих структурними схемами у випадку послідовних з'єднань на основі ряду Вольтерри. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів : вип. 15, у 3 т. Кам'янець-Подільський, 2016. Т. 2. С. 39–40.

45. Іванюк В. А., Понеділок В. В. Регуляризаційні динамічні оператори диференціювання зашумлених сигналів. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : вип. 16, у 3 т. Кам'янець-Подільський, 2018. Т. 2. С. 52-53.

46. Іванюк В. А., Понеділок В. В., Іванюк Т. М. Способи відновлення сигналів на вході лінійних динамічних систем заданих моделями у вигляді передатних функцій методом обернених операторів. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка* : зб. за підсумками звітної наукової, конференції викладачів, докторантів і аспірантів : вип. 16, у 3 т. Кам'янець-Подільський, 2017. Т. 2. С. 38–40.