МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛЮВАННЯ В ЕНЕРГЕТИЦІ
ІМ. Г.Є. ПУХОВА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ХАЙДУРОВ Владислав Володимирович

УДК 517.9 : 536.212

ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОДИ ТА ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ОСНОВНИХ КЛАСІВ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
Галузь знань – математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

В.В. Хайдуров

Науковий керівник – Головня Борис Петрович,
доктор технічних наук, професор

Київ – 2019 р.

АНОТАЦІЯ

Хайдуров В.В. Методи та програмні засоби реалізації моделей основних класів обернених задач теплопровідності. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України.

Дисертаційна робота присвячена розробці та модифікації існуючих методів та алгоритмів розв'язування лінійних та нелінійних обернених задач теплопровідності (ОЗТ) різної природи. Розроблено методику отримання чисельного розв'язку основних класів ОЗТ. Основним напрямом роботи є зменшення кількості обчислень, яка необхідна для знаходження глобального мінімуму квадратичного функціонала, який використовується в обернених задачах даного роду, а також зменшення кількості ітерацій для отримання шуканого розв'язку відповідної ОЗТ. Експериментально обґрунтований вибір методу найшвидшого спуску під час мінімізації квадратичного функціонала в класичній постановці ОЗТ. Побудовано методологію задання початкового наближення для побудови ітераційного процесу пошуку чисельного розв'язку основних класів ОЗТ. Отримані та реалізовані прикладні моделі теплоенергетики з використанням програмних пакетів MATLAB та COMSOL Multiphysics.

Наукова новизна роботи полягає в застосуванні інтерполяційного підходу для пошуку чисельного рішення різних класів нелінійних ОЗТ при знаходженні глобального мінімуму квадратичного функціонала модифікаціями методу Ньютона в матриці Гессе з метою зменшення обчислювальних витрат і зменшення часу на пошук розв'язків відповідних ОЗТ. Отримано прикладну модель протікання процесу теплообміну в замкнутій системі з дзеркальними і дифузійними поверхнями для вимірювання поверхневої густини теплового потоку на поверхні тепловідведення з метою розробки еталонних вимірювальних приладів і здійснення калібрування теплових сенсорів.

Практичне значення роботи полягає в тому, що отримані методи вирішення різних класів ОЗТ (лінійних і нелінійних) дають можливість отримувати шукані їх чисельні рішення значно швидше, ніж традиційні методи. Прикладні технічні моделі активно використовуються для моделювання різних фізико-технічних процесів, які зводяться до вирішення багатовимірних ОЗТ.

Практична цінність отриманих результатів визначається тим, що запропоновані методи дають змогу досить швидко визначати невідомі параметри теплових процесів у твердих тілах, які математично описуються у вигляді ОЗТ. Метод побудови наближення у вигляді рядів Фур’є при розв’язанні як лінійних так і нелінійних ОЗТ дає можливість отримати шуканий чисельний розв’язок задач у 3–10 разів швидше, у порівнянні з класичною процедурою пошуку розв’язку задач. Експериментально показано, що метод найшвидшого спуску є найраціональнішим для розв’язування лінійних багатовимірних ОЗТ.

Розроблений комплекс програм дає можливість розв’язувати прикладні фізико-технічні завдання, які можуть бути зведені до розв’язування ОЗТ. Основні результати дисертаційної роботи використані в дослідженні теплообміну у вимірювальній камері з радіаційним способом формування теплового потоку з метою калібрування засобів вимірювання шляхом оцінки однорідності розподілу поверхневої густини теплового потоку на теплосприймальній поверхні випромінювача при Інституті технічної теплофізики НАН України. Спрощені моделі дисертаційного дослідження активно використовуються під час проведення лабораторних занять із профільних технічних дисциплін «Математичне моделювання складних систем», «Теорія керування» та «Методи обчислень» у ПВНЗ «Київський міжнародний університет», а також для написання кваліфікаційних та магістерських робіт із технічних спеціальностей.

Ключові слова: обернена задача теплопровідності (ОЗТ), оптимізація квадратичного функціонала, ітераційна процедура, багатовимірні ОЗТ.

ABSTRACT

Haydurov V.V. Methods and software implementation of the model main class of inverse heat conduction problems. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Dissertation for the degree of a candidate of technical sciences (Doctor of Philosophy) on the specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods.

The dissertation is devoted to the development and updating of existing methods and algorithms for solving linear and nonlinear inverse heat conduction problems (IHCP) of different nature. A method for obtaining a numerical solution for the basic classes of IHCP has been developed. The main direction of work is to reduce the number of computations needed to find the global minimum of a quadratic function used in inverse tasks of this kind, as well as to reduce the number of iterations to obtain the desired solution of the corresponding IHCP. Experimentally validated choice of the method of the fastest descent during minimization of the quadratic functional in the classical formulation of IHCP. A methodology for determining the initial approximation for constructing an iterative process for finding a numerical solution for the basic classes of IHCP has been constructed. Applied models of thermal power engineering have been obtained and implemented using software packages MATLAB and COMSOL Multiphysics.

The scientific novelty of the work is to apply an interpolation approach to find a numerical solution of different classes of nonlinear IHCP while finding the global minimum of quadratic functional modifications of the Newton method in the Hesse matrix in order to reduce the computational cost and reduce the time to search for solutions of the corresponding IHCP, as well as in the development and implementation of the program. Applied three-dimensional model of the process of heat transfer in a closed system with mirror and diffusive surfaces for measuring the surface density and a flood stream on the surface of heat removal in order to develop a standard and carry out the calibration of sensors.

The practical value of the work lies in the fact that the methods of solving various classes of IHCP (linear and nonlinear) give the opportunity to obtain the desired numerical solutions much faster than traditional methods, as well as applied technical models are actively used to simulate various physical and technological processes, which are reduced to solving multidimensional IHCP.

The practical value of the obtained results is determined by the fact that the proposed methods make it possible to effectively determine the unknown parameters of thermal processes in solids, which are mathematically described in the form of IHCP. The method of constructing an approximation in the form of a Fourier series during the solution of both linear and nonlinear IHCP makes it possible to obtain the desired numerical solution of problems 3–10 times faster, in comparison with the classical procedure for finding a solution to problems. It has been experimentally shown that the fastest descent method is the most rational for solving linear IHCP.

The developed complex of programs makes it possible to solve the applied physical and technical problems, which can be reduced to the resolution of IHCP. The main results of the dissertation work are used in the study of heat transfer in the measuring chamber with the radiation method of forming the heat flow, in which the calibration of the measuring means is carried out, by assessing the homogeneity of the distribution of the surface density of the heat flux on the heat-receiving surface of the radiator when reproducing a unit of high-intensity measurement at the Institute of Technical Thermophysics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Simplified models of the dissertation research are actively used during laboratory lessons on specialized technical disciplines "Mathematical modeling of complex systems", "Theory of management" and "Methods of calculations" at Kyiv International University, as well as for writing qualification and master's work in technical specialties.

Key words: inverse heat conduction problem (IHCP), optimization of a quadratic functional, iterative procedure, multidimensional IHCP.

Список праць, в яких опубліковано основні наукові результати дисертаційного дослідження

1. Бабак В.П., Ковтун С.І., Хайдуров В.В., Щербак Л.М. Моделювання процесу теплообміну в замкненій системі з дзеркальними та дифузними поверхнями. *Збірник наукових праць «Наукоємні технології». Технічні науки.* Київ, 2018. №2 (38) С. 245–254.

2. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Деякі швидкісні методи розв’язку нелінійних обернених задач теплопровідності. *Збірник наукових праць Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Прикладна математика. Інформатика. Технічні науки.* Черкаси, 2017. №1–2. С. 71–90.

3. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Метод знаходження чисельного розв’язку оберненої двовимірної задачі теплопровідності. *Збірник наукових праць Державного технологічного університету. Технічні науки*. Черкаси, 2015. №2. С. 49–56.

4. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Эффективные методы решения нелинейных обратных задач теплопроводности. *Збірник наукових праць Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Прикладна математика. Інформатика. Технічні науки.* Черкаси, 2014. №2. С. 87–98.

5. Хайдуров В.В. Багатосітковий метод вирішення нелінійних обернених задач електро- та теплоенергетики. *Збірник наукових праць «Моделювання та інформаційні технології». Технічні науки*. Київ. Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова, 2018. №83. С. 117–124.

6. Хайдуров В.В. Ефективні методи розв’язку точкових обернених задач теплопровідності. *Збірник наукових праць «Молодий вчений». Технічні науки.* Суми, 2016. №6 (33). С. 87–98.

7. Хайдуров В.В. Моделирование прикладных обратных задач теплопроводности по вычислению коэффициента теплопроводности. *Збірник наукових праць «Моделювання та інформаційні технології». Технічні науки*. Київ, 2017. №81. С. 69–77.

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертаційного дослідження

1. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Ефективні методи розв'язку нелінійних обернених задач теплопровідності. Відновлення коефіцієнта теплопровідності. *«Молода наука. Прогресивні технологічні процеси, технологічне оснащення»* : матеріали Міжнародної науково-технічної Internet-конференції студентів і молодих вчених, м. Краматорськ, (30 березня), 2017 р. Краматорськ, 2017. С. 101–105.

2. Хайдуров В.В. Використання методу Фур'є для знаходження чисельного розв'язку багатовимірних обернених задач теплопровідності. *«Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем»* : тези доповідей I Всеукраїнської науково-технічної конференції, м. Дніпропетровськ, 3–5 листопада, 2015 р. Дніпропетровськ, 2015. С. 256–261.

3. Хайдуров В.В. Деякі питання обернених задач теплопровідності. *«Роль фізики в розвитку міждисциплінарних наукових і навчальних напрямків» (PhysIST–2016)* : матеріали Міжнародної заочної мультимедійної (інтернет) конференції, м. Одеса, 2–5 травня 2016 р. Одеса, 2016. С. 24.

4. Хайдуров В.В. Знаходження оптимальних температур електричних нагрівачів промислової печі. *«Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я» (MicroCAD–2018)* : матеріали XXVI Міжнародної науково-практичної конференції, м. Харків, 16–18 травня 2018 р. Харків, 2018. С. 261.

5. Хайдуров В.В. Знаходження чисельного розв'язку нелінійних обернених задач теплопровідності. Відновлення коефіцієнта теплопровідності. *«Актуальні наукові дослідження у сучасному світі». Технічні науки* : збірник наукових праць, м. Переяслав-Хмельницький, 26–27 березня 2017 р. Переяслав-Хмельницький, 2017. С. 115–120.

6. Хайдуров В.В. Метод анализа работы теплового оборудования. *«Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси» (ІІРТК-2018)* : збірник

матеріалів XXI Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 22–23 травня 2018 р. Київ, 2018. С. 191–193.

7. Хайдуров В.В. Модифицированные методы решения нелинейных задач теплопроводности. *«Актуальні наукові дослідження у сучасному світі»* : матеріали VI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Переяслав-Хмельницький, 26–27 жовтня 2015 р. Переяслав-Хмельницький, 2015. С. 74–82.

Список публікацій, які додатково відображають наукові результати дисертаційного дослідження

1. Petrov A., Chernyakov Yu., Steblyanko P., Demichev K., Haydurov V. Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. *Технічні науки.* Харків, 2018. №4/7 (94). С. 25–33.

2. Хайдуров В.В. Знаходження чисельного розв’язку деяких точкових обернених задач теплопровідності. *«Сучасна наука: проблеми та перспективи»* : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 13–14 жовтня 2015 р. Київ, 2015. С. 26–30.

ЗМІСТ РОБОТИ

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Основні скорочення

ГУ – гранична умова;
ГХ – геометричні характеристики;
ОЗТ – обернена задача теплопровідності;
ПЗТ – пряма задача теплопровідності;
ПУ – початкова умова;
САР – система алгебраїчних рівнянь;
СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь;
ТФХ – теплові фізичні характеристики.

Фізичні величини

a, k – коефіцієнт температуропровідності;
C – коефіцієнт тепловіддачі;
ρ – густина тіла;
h_x, h_y – крок по просторових координатах x та y відповідно;
T – розподіл температури (температурне поле), яке є розв’язком ОЗТ;
∇ – вектор-градієнт;
Δ, ∇^2 – оператор Лапласа;
x, y, z – декартові просторові координати;
t, τ – час у рівнянні теплопровідності;
t_{fin} – кінцевий час обрахунку у рівнянні теплопровідності;
$\Delta t, \Delta\tau$ – крок по часу, інтервал часу в рівнянні теплопровідності;
T_{init} – початковий розподіл температури;
T_{fin} – розподіл температури у момент часу t_{fin} (τ_{fin});
T_{actual} – наперед задана температура в конкретній ОЗТ;
D – розрахункова область об’єкта;
∂D – границя області об’єкта;
∂D_D – границя області об’єкта, на якій задано умову Дирихле;
∂D_N – границя області об’єкта, на якій задано умову Неймана;

Математичні величини

β – множник у методі предиктор-коректор;
h_k – крок у модифікованому методі Ньютона на k-ій ітерації;
J – матриця Якобі, якобіан;
H – матриця Гессе, гессіан, матриця других похідних;
H^{-1} – обернена матриця до матриця Гессе;
θ – вектор шуканих параметрів у ОЗТ;
L – диференціальний оператор;
$\|\cdot\|$ – норма вектора.

ВСТУП

Актуальність теми. Моделювання й ідентифікація теплових процесів в елементах турбомашин, котельних установках, двигунах внутрішнього згоряння, агрегатах кольорової металургії [38; 119–121; 123; 124; 127; 152] є одними з найважливіших промислових науково-технічних завдань сьогодення. Всі ці завдання зводяться до розв’язування обернених задач теплопровідності (ОЗТ). Останніми десятиліттями бурхливо розвивалась методика розв’язування ОЗТ та здійснювалась розробка швидкісних методів та алгоритмів розв’язування основних класів багатовимірних нелінійних ОЗТ [10–15; 20–22; 32; 58; 61; 63–66; 70–72; 113; 126]. Більшість таких задач можуть бути розв’язані лише з використанням сучасних обчислювальних машин. Такі задачі мають низку проблем: коректність постановки, стійкість чисельних методів розв’язування, значний процесорний час пошуку розв’язків різних класів ОЗТ [109; 113; 119; 120].

Тривалий час такі задачі вважались некоректно поставленими. І тільки після того, як академік А.М. Тихонов увів поняття умовної коректності, з’явилась можливість розв’язувати такі задачі [135–137]. Це зумовило розвиток теорії розв’язності ОЗТ, що сприяло потужному прогресу теплофізичних досліджень, отриманню актуальних результатів при розв’язанні науково-технічних проблем, виникненню інтернет-ресурсів та наукових шкіл (http://www.mth.msu.edu/ipnet, http://www.me.ua.edu/inverse), які працюють в даному напрямку та міжнародних наукових журналів (*Inverse Problems, Inverse Problems in Science and Engineering*). Було запропоновано велику кількість методів розв’язування ОЗТ: аналітичних і чисельних, детермінованих й стохастичних, а також були запропоновані методи регуляризації розв’язку, методи штучної гіперболізації тощо [119; 120; 133; 138]. Вагомий внесок у розвиток теорії розв’язності ОЗТ вклали В.А. Барсуков, В.М. Голощапов, Б.С. Елькін, В.А. Іванов, А.М. Тихонов, А.О. Костіков, О.В. Котульський, Н.А. Кошева, Н.М. Курська, П.Г. Круковський, Т.В. Лоцман, Ю.М. Мацевитий, Т.М. Парамонова, С. Chang,

M. Engel, K. Grysa, A. Qian, A. Wroblewska та інші [13; 21; 22; 38; 53; 113; 119-122; 135–137].

Дисертаційна робота присвячена створенню нових та модифікації існуючих методів розв’язування основних класів лінійних та нелінійних ОЗТ, а також створенню програмного комплексу моделювання ОЗТ.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відповідності до індивідуального плану аспіранта та в рамках досліджень, які проводились у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара за державною науково-дослідною темою «Розробка методик розв’язку фундаментальних задач міцності та руйнування кусково-однорідних тіл, скомпонованих з інтелектуальних матеріалів» (державний реєстраційний номер 0115U002393).

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є створення та модифікація сучасних методів розв’язування лінійних і нелінійних ОЗТ, моделей реальних процесів, які призводять до пошуку розв’язків ОЗТ, а також їхня програмна реалізація у відомих прикладних програмних пакетах.

Для досягнення мети необхідно виконати такі завдання:

- модифікувати існуючі методи багатовимірної оптимізації з метою підвищення точності розрахунків для знаходження чисельних розв’язків різних класів лінійних та нелінійних багатовимірних ОЗТ;
- розробити комплекс програм для знаходження чисельних розв’язків основних класів багатовимірних ОЗТ;
- зменшити загальну кількість обчислень, що необхідна для розв’язування нелінійних багатовимірних ОЗТ шляхом уведення процедури інтерполяції поверхнями другого порядку для мінімізації квадратичного функціонала ОЗТ. Це призводить до зменшення кількості викликів процедури розв’язування прямої задачі теплопровідності (ПЗТ), яка неодноразово викликається при розв’язуванні конкретної, зокрема, нелінійної ОЗТ;
- здійснити порівняльний аналіз отриманих методів розв’язування лінійних і нелінійних багатовимірних ОЗТ за критерієм збіжності методів та за

критерієм загальної кількості викликів процедури розв'язування ПЗТ, розробивши для цього прикладний програмний комплекс.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є процеси теплообміну та обернені математичні моделі поширення процесів теплообміну.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є обчислювальні методи розв'язування прикладних обернених задач теплопровідності та моделі реальних теплових процесів, які зводяться до пошуку чисельного розв'язку лінійних та нелінійних обернених задач теплопровідності.

Методи дослідження базуються на використанні апарату чисельних методів розв'язування основних задач математичної фізики (методи дискретизації диференціальних рівнянь другого порядку, методи розв'язування систем алгебраїчних рівнянь, багатосіткові методи розв'язування задач математичної фізики, методи скінченних різниць і скінченних елементів), методів оптимізації (чисельні методи пошуку глобального екстремуму функцій багатьох змінних, методи пошуку глобального екстремуму функціонала) та методи моделювання (розробка комплексу програм розв'язування ОЗТ).

Наукова новизна отриманих результатів полягає в розробці методів та програмних засобів знаходження чисельного розв'язку багатовимірних (як лінійних, так і нелінійних) ОЗТ, а також у модифікації існуючих чисельних методів розв'язування ОЗТ, у яких суттєво зменшена загальна кількість обчислень, що необхідна для розв'язання ОЗТ. У роботі програмно реалізовано отримані методи розв'язування ОЗТ у середовищі MATLAB з використанням методів скінченних різниць і скінченних елементів.

Уперше:

- запропоновано інтерполяційний метод знаходження глобального мінімуму квадратичного функціонала в класичній постановці ОЗТ отриманими модифікаціями класичного методу Ньютона в матриці Гессе, що привело до зменшення обчислювальних затрат на пошук розв'язків ОЗТ у 3–10 разів;
- розроблено прикладну математичну модель протікання процесу теплообміну в замкненій системі з дифузійними поверхнями для вимірювання густини

теплового потоку на поверхні тепловідводу з метою розробки вимірювального еталону та можливості здійснення калібрування сенсорів.

Удосконалено:

- методи пошуку чисельного розв’язку різних класів багатовимірних ОЗТ модифікаціями класичного методу Ньютона. Отримані в роботі методи дають змогу отримати чисельні розв’язки основних класів ОЗТ з відносною помилкою розрахунків до $O(10^{-11})$;
- метод побудови початкового наближення для ітераційного процесу знаходження глобального мінімуму квадратичного функціонала в класичній постановці багатовимірної (лінійної та нелінійної) ОЗТ за допомогою розкладу в ряди та методу лінеаризації, що дозволило отримати якісні наближення до шуканих параметрів різних класів ОЗТ.

Набули подальшого розвитку:

- методи пошуку чисельних розв’язків прикладних науково-технічних задач, які зводяться до нелінійних ОЗТ з використанням розроблених методів багатовимірної оптимізації зі змінним кроком;
- багатосіткові методи знаходження розв’язку різних класів фізико-технічних завдань, які зводяться до ОЗТ ідентифікації внутрішніх джерел тепла методом скінченних елементів.

Практична цінність отриманих результатів полягає в тому, що запропоновані методи розв’язування ОЗТ дають змогу досить ефективно визначати невідомі параметри теплових фізичних процесів у твердих тілах, які математично описуються за допомогою обернених задач. Розроблена методика побудови початкового наближення у вигляді ряду Фур’є для знаходження розв’язку основних класів ОЗТ, яка дає можливість отримати шуканий чисельний розв’язок задач у 3–10 разів швидше, ніж класична процедура пошуку розв’язку таких задач. Експериментально встановлено, що метод найшвидшого спуску є найраціональнішим для розв’язування лінійних ОЗТ.

У роботі застосовані інтерполяційні методи для знаходження глобального мінімуму квадратичного функціонала в ОЗТ. У результаті застосування інтерполяційних методів, зменшено кількість обчислень для пошуку розв'язку нелінійних ОЗТ відновлення початкової умови (ПУ), граничних умов (ГУ), температур внутрішніх джерел тепла та коефіцієнта температуропровідності. Інтерполяційні методи були використані для пошуку мішаних частинних похідних другого порядку в класичному методі Ньютона в процедурі мінімізації квадратичного функціонала ОЗТ. Крім того, використання змінного кроку в серіях методу Ньютона та його модифікаціях, які отримані в роботі, дає змогу досить швидко отримати шуканий чисельний розв'язок ОЗТ з високою точністю. Запропоновані моделі ОЗТ дають змогу аналізувати роботу різних теплових процесів на підприємствах.

Розроблений комплекс програм дозволяє розв'язувати прикладні промислові задачі, що зводяться до розв'язування ОЗТ. Основні результати дисертаційної роботи використані в дослідженні процесу теплообміну у вимірювальній камері з радіаційним способом формування теплового потоку, у якій проводять калібрування засобів вимірювання за допомогою оцінки однорідності розподілу поверхневої густини теплового потоку на теплосприймальній поверхні випромінювача для відтворювання одиниці вимірювання високої інтенсивності при Інституті технічної теплофізики НАН України. Спрощені моделі дисертаційного дослідження активно використовуються під час проведення лабораторних занять із профільних технічних дисциплін (математичне моделювання складних систем, теорія керування та методи обчислень) у ПВНЗ «Київський міжнародний університет», а також для написання кваліфікаційних і магістерських робіт студентами технічних спеціальностей.

Впровадження результатів роботи. Основні результати дисертаційної роботи використані при дослідженні теплообміну у вимірювальній камері з радіаційним способом формування теплового потоку, в якій проводять калібрування засобів вимірювання, шляхом оцінки однорідності розподілу поверхневої густини теплового потоку на теплосприймальній поверхні випромінювача при відтворюванні одиниці вимірювання високої інтенсивності при Інституті технічної теплофізики НАН України. Спрощені моделі дисертаційного дослідження активно використовуються під час проведення лабораторних занять із профільних технічних дисциплін «Математичне моделювання складних систем», «Теорія керування» та «Методи обчислень» у ПВНЗ «Київський міжнародний університет», а також для написання кваліфікаційних та магістерських робіт із технічних спеціальностей (додаток Е).

Особистий внесок здобувача. Дисертація є самостійно виконаною завершеною роботою. Наукові положення та пропозиції, представлені в дослідженні та запропоновані до захисту, отримані автором особисто.

Апробація результатів роботи. Основні методи, моделі, ідеї, положення і результати досліджень доповідались, обговорювались та отримали позитивну оцінку на таких конференціях:

- XXI Міжнародна науково-практична конференція «Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси» (Київ, НАУ, 22–23 травня 2018 р.);
- Інтернет-конференція «Актуальні наукові дослідження у сучасному світі» (Переяслав-Хмельницький, 26–27 березня 2017 р.);
- Міжнародна науково-технічна Internet-конференція студентів і молодих вчених «Молода наука. Прогресивні технологічні процеси, технологічне оснащення» (Краматорськ, ДДМА, 30 березня 2017 р.);
- XXVI Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я» (Харків, НТУ ХПІ, 16–18 травня 2018 р.);
- Міжнародна заочна мультимедійна конференція «Роль фізики в розвитку міждисциплінарних наукових і навчальних напрямків» (Одеса, 2–5 травня 2016 р.);
- І Всеукраїнська науково-технічна конференція «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем» (Дніпропетровськ, 3–5 листопада 2015 р.);
- Міжнародна науково-практична конференція «Сучасна наука: проблеми та перспективи». Серія: Технічні науки (Київ, 13–14 жовтня 2015 р.);

- VI Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Актуальні наукові дослідження у сучасному світі» (Переяслав-Хмельницький, 26–27 жовтня 2015р.).

У повному обсязі робота доповідалась і обговорювалась на наукових семінарах кафедри комп'ютерних наук та системного аналізу Черкаського державного технологічного університету, на наукових семінарах кафедри прикладної математики та інформатики Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького та на наукових семінарах кафедри комп'ютерних наук факультету інформаційних технологій Київського міжнародного університету.

Основний зміст роботи. ***У вступі*** дисертаційної роботи обґрунтована актуальність теми, сформульована мета, вказані об'єкт та предмет дослідження, а також досліджена проблематика коректності методів знаходження чисельного розв'язку ОЗТ.

Перший розділ містить аналіз попередніх досліджень за даним напрямом. У ньому описані основні типи ОЗТ, які залежать від конкретних наукових технічних завдань. Даний розділ містить відомості про сучасні методи та алгоритми розв'язування ОЗТ відновлення початкової умови (ПУ), відновлення граничних умов (ГУ), відновлення коефіцієнта теплопровідності та методи розв'язування внутрішніх геометричних ОЗТ. У ньому висвітлені недоліки та переваги вже існуючих методів та алгоритмів. При знаходженні чисельного розв'язку основних класів ОЗТ відомими методами піднімаються актуальні питання, які стосуються коректності постановки ОЗТ та підвищення швидкості збіжності цих чисельних методів.

Другий розділ містить розроблені методи прискорення знаходження чисельного розв'язку різних класів багатовимірних ОЗТ. У цьому розділі описаний метод побудови наближення до ПУ за допомогою використання розкладів у ряд Фур'є для лінійних і нелінійних ОЗТ. Для лінійних ОЗТ експериментально обґрунтований вибір методу найшвидшого спуску, який застосовується для мінімізації квадратичного функціонала в ОЗТ. Для нелінійних ОЗТ експериментально обґрунтований вибір модифікацій класичного методу Ньютона для розв'язування задач умовної оптимізації з обмеженнями у вигляді диференціальних рівнянь. У цьому розділі отримано також низку модифікацій класичного методу Ньютона, які спрямовані на підвищення порядку точності та зменшення загальної кількості обчислень, які необхідні для знаходження чисельного розв'язку ОЗТ певного класу.

Третій розділ містить основні результати моделювання обернених (лінійних і нелінійних) задач теплопровідності пошуку ПУ, ГУ та коефіцієнта теплопровідності. У ньому для лінійних ОЗТ експериментально обґрунтований вибір методу найшвидшого спуску для мінімізації квадратичного функціонала ОЗТ. Також у ньому для пошуку чисельного розв'язку нелінійних ОЗТ обрано отримані в попередньому розділі модифікації класичного методу Ньютона. Крім того, для прискорення збіжності ітераційного процесу, тобто для зменшення кількості ітерацій, проведено інтерполяцію багатовимірною поверхнею другого порядку для обчислення мішаних чисельних похідних у матриці Гессе.

Четвертий розділ містить прикладні моделі теплових промислових процесів, які зводяться до знаходження чисельного розв'язку багатовимірних лінійних та нелінійних ОЗТ. Практична частина четвертого розділу демонструє ефективність методів, розроблених у другому розділі, а також ефективність застосування багатосіткових методів під час розв'язку ПЗТ, які неодноразово вирішуються для отримання чисельного розв'язку відповідної ОЗТ.

Публікації. Основний зміст дисертаційної роботи відображено у 16 наукових публікаціях. З них 8 статей у науково-фахових виданнях та збірниках в галузі технічних наук України (1 – у виданнях, включених у міжнародні наукометричні бази), 1 стаття іноземною мовою, яка включена до міжнародних наукометричних баз, у т. ч. Scopus та 8 тез доповідей – у Міжнародних та Всеукраїнських конференціях.

РОЗДІЛ 1
АНАЛІЗ ПРОБЛЕМАТИКИ, МЕТОДІВ ТА АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

1.1. Проблематика сучасних обернених задач теплопровідності

Експериментальні методи дослідження теплофізичних процесів та їх систем є найбільш достовірним джерелом інформації про тепловий стан об'єкта. Особливого значення теорія й практика розв'язування обернених задач теплопровідності набувають у наш час, коли в силу обставин що склалися, об'єкти енергетики, промисловості, транспорту, господарства, комунікацій, будівель та споруд відпрацювали свій плановий ресурс і потребують уникнення техногенних катастроф, а саме потребують термінового оновлення, модернізації і реконструкції [119; 134; 150]. Першим кроком реалізації програми реконструкції перерахованих вище об'єктів є діагностика їхнього технічного стану і визначення залишкового ресурсу, тобто часу, протягом якого даний об'єкт може надійно і ефективно працювати, не ставлячи під загрозу життя людей і навколишнє середовище [102; 103; 114]. Проведення діагностики для безпосереднього визначення параметрів, які керують надійною роботою об'єкта, ускладнене, а часто просто неможливе [113]. Тому, зазвичай, ці параметри знаходять та аналізують за результатами непрямих вимірювань, що є прерогативою обернених задач. Тому в основі діагностики технічного стану лежать теорія й практика розв'язування обернених задач теплопровідності (ОЗТ), а це вимагає подальших досліджень та розробки методів вирішення завдань, які зводяться до розв'язування подібних задач, а також створенню ефективних програмних продуктів для розв'язування лінійних та нелінійних багатовимірних ОЗТ. Ці дослідження вимагають значних зусиль для підготовки висококваліфікованих кадрів, що не завжди «під силу» вищим навчальним закладам з традиційним програмним навчанням.

До основних проблем вирішення прикладних ОЗТ можна віднести такі: час розв'язку систем алгебраїчних рівнянь (САР) дискретного представлення рівняння теплопровідності, об’єм обчислень для оптимізації квадратичного функціонала в класичній постановці ОЗТ (кількість обчислень на 1 ітерацію), стійкість та збіжність методів оптимізації [98–101; 113; 119; 151].

Об’єм обчислень методів оптимізації квадратичного функціонала

При виборі методу оптимізації не завжди доцільно орієнтуватись на кількість ітерацій, яка необхідна для знаходження наближеного глобального мінімуму заданого функціонала в ОЗТ. Експериментально показано, що при знаходженні розв’язків лінійних ОЗТ нераціонально використовувати метод Ньютона, оскільки застосування даного методу знайде розв’язок поставленої задачі, використавши для цього значні обчислювальні ресурси комп’ютера [100]. Для лінійних задач доцільно використовувати градієнті методи, які знайдуть розв’язок ОЗТ, затративши при цьому менше обчислювальних ресурсів, ніж методи, подібні до класичного методу Ньютона [110; 119].

Стійкість та збіжність методів оптимізації

При розв’язуванні нелінійних ОЗТ практика показує, що одними з найкращих методів оптимізації квадратичного функціонала, який міститься у постановках нелінійних ОЗТ, є метод Ньютона та його модифікації [22; 64; 109]. Слід зазначити, що при розв’язуванні різних класів ОЗТ трапляється так, що класичний метод Ньютона розбігається. Звісно ж, що це залежить від вибору початкового наближення для побудови ітераційного процесу оптимізації, а також від кроку у методі Ньютона, який доводиться регулювати на кожній ітерації методу [113].

Точність методу оптимізації

Критерій точності обраного методу оптимізації є досить важливим фактором. Відомо, що класичний метод Ньютона має другий порядок точності. Також відомо, що серія методів Ньютона найкраще справляється з оптимізацією нелінійності, які присутні у промислових ОЗТ. У роботі запропонована методика підвищення точності обрахунків класичного методу Ньютона за рахунок введення предиктор-коректора та введення змінного кроку в модифікаціях класичного методу Ньютона, завдяки підвищенню точності інтегрування, а також завдяки здійсненню процедури інтерполювання поверхнями другого порядку для шуканих параметрів основних класів ОЗТ [98; 101; 143].

1.2. Коректність постановки обернених задач теплопровідності

При вирішенні ОЗТ дуже важливим, можна сказати, основним (визначальним) питанням є коректність їх постановки. Для дослідження обернених задач та ОЗТ використовують операторне рівняння першого роду [106–109; 109; 113; 115–117; 119; 128; 129; 131 та ін.]:

$$BX = Y, X \in \Omega_X, Y \in \Omega_Y, \tag{1.1}$$

у якому X та Y означають відповідно шукані й спостережувані характеристики певного об’єкта, які належать метричним просторам Ω_X та Ω_Y відповідно. Оператор B діє з Ω_X на Ω_Y, формалізуючи сукупність операцій, які визначені відповідною математичною моделлю.

Повертаючись до операторного рівняння (1.1), зазначимо, що при розв’язуванні ОЗТ параметр X є шуканим вектором стану (включає в себе вектор поля температур та вектор параметрів, які індентифікуються), а Y – спостережувана величина, яка отримується вимірювальними приладам [113].

Умови коректності, відомі як *умови коректності за Адамаром*. Їх формулюють так [119].

1. Умова *існування* розв’язку. Для $\forall Y \in \Omega_Y$ $\exists X \in \Omega_X$, такий, для якого виконується рівність $BX = Y$.

2. Умова *єдиності* розв’язку. Якщо $BX_1 = BX_2$, то $X_1 = X_2$.

3. Умова *стійкості* розв’язку: неперервна залежність X від Y.

Перші дві умови визначають існування оператора B^{-1}. Третя умова можлива лише за його неперервності. Невиконання хоча б однієї з цих умов свідчить про некоректність постановки задачі. Розв'зуванням таких задач довго не займалися, вважаючи їх за Адамаром позбавленими фізичного сенсу. Тому багато досліджень в різних областях науки і техніки вимагають необхідності розв'язувати некоректно поставлені задачі, а отже, вимагають розвитку теорії розв'язності (відповідних методів та алгоритмів) цих завдань, а також програмних засобів [113; 119].

Не зупиняючись детально на прикладах некоректних задач (їх багато приведено в літературі, наприклад в роботах [107; 109; 112]), зупинемость на деяких з них, а саме на тих, які мають прямий зв'язок із ОЗТ.

Типовою некоректною задачею є відображення множини неперервних на відрізку [c; d] функцій $Y(z)$ на множину неперервних на відрізку [a; b] функцій $X(\tau)$. Отже, відображення, обернене до поставленого, розв'язується за допомогою рівняння Фредгольма першого роду [119]:

$$BX = \int_a^b K(z,\tau)\, X(\tau)\, d\tau = Y(z),\ c \le z \le d\,. \tag{1.2}$$

Некоректність задачі випливає з необмеженості оператора B^{-1} (порушується третя умова коректності за Адамаром). Крім того, іноді порушується перша умова – це рівняння (1.2) розв'язується не для будь-якої функції $Y(z)$.

Серед некоректно поставлених задач наведена задача посідає особливе місце, оскільки до розв'язування рівняння Фредгольма можуть бути зведені багато задач математичної фізики, в тому числі деякі обернені задачі теплопровідності, а також інші завдання (завдання аналітичного продовження функції на всю область за умови, що вона відома в певній її частині).

До важливих некоректно поставлених задач відносять також такі: визначення похідної (диференціала) функції, заданої наближено; обернена задача Дирихле для хвильового рівняння; обернена задача гравіметрії та багато інших (наприклад, [119]).

Обернені задачі теплопровідності також відносяться до некоректно поставлених задач.

Некоректність постановки ОЗТ зазвичай полягає в порушенні третьої умови коректності за Адамаром, тобто в тому, що малим змінам вхідних параметрів *Y* можуть відповідати як завгодно великі відхилення вектора *X*, який ідентифікується. Це обумовлено специфікою ОЗТ, в яких порушується причинно-наслідковий зв'язок, а саме: в теплових процесах температурне поле об'єкта представляє собою наслідок, породжений умовами однозначності, які є причинними характеристиками, а розв'язок ОЗТ вимагає визначення цих характеристик за їх відомим наслідком [111]. Хоч часто говорять про нестійкість розв'язків обернених задач теплопровідності, необхідно аналізувати всі три умови коректності: існування, єдиності та стійкості розв'язку.

Отже, обернені задачі теплопровідності в класичній постановці є некоректними. Для їх розв'язування необхідні спеціальні підходи (методи та алгоритми), такі ж, як і для будь-яких некоректних задач в цілому. Умови коректності за А.М. Тихоновим відіграють найважливішу роль для визначення шляхів розв'язування ОЗТ [119; 120; 135–137]:

1) якщо $X_0 \in \Omega_X$ – множина можливих розв'язків (1.1), то точний розв'язок цього рівняння існує й належить деякій множині $X_0' \in X_0$, тобто $Y' \in BX_0'$;

2) цей розв'язок єдиний на множині X_0' для будь-яких *Y*;

3) розв'язок *X* неперервно залежить від *Y*, тобто малим варіаціям *Y*, які не виводять розв'язок із класу X_0', відповідають малим змінам параметрів *X*.

Перші дві умови є умовами оборотності оператора B^{-1} на множині X_0'. Третя умова показує, що оператор B^{-1} неперервний на множині BX_0', на якій некоректна задача стає коректно поставленою. Вона називається *множиною (класом) коректності* [135]. Легко помітити, що умови коректності за Адамаром та Тихоновим збігаються, якщо $X_0 = X_0'$ та $BX_0 = BX_0'$.

1.3. Класифікація задач у залежності від технічних завдань

Бурхливий розвиток теорії й практики розв'язування ОЗТ в останні роки зумовили різнобій у термінології, яка використовується різними дослідниками для характеристики обернених задач, які ними розв'язані. Хоча необхідність в єдиній класифікації ОЗТ давно назріла, але вона до нині відсутня.

Розглянемо класифікації ОЗТ, які описані в різних джерелах. Одна з таких класифікацій була дана в [119]. Відповідно до цієї класифікації задачі теплопровідності поділяються на прямі, обернені, інверсні і індуктивні. При цьому в оберненій задачі ідентифікуються граничні умови, в інверсній – теплофізичні характеристики (ТФХ), а в індуктивних – виконується уточнення математичної моделі. Дана класифікація володіє простотою (кожна задача характеризується одним терміном), однак наявність у ній близьких за змістом визначень «обернена» та «інверсна» перекладаються, наприклад, англійською мовою одним словом «inverse». Крім того, поза увагою цієї класифікації виявляються задачі та завдання, в яких визначається геометрія теплового об'єкта та інвертується час (тобто визначається температурне поле в моменти часу, що передують заданому).

Розбиття ОЗТ на завдання першого і другого класів (відповідно, інвертування часу та ідентифікація граничних умов (ГУ)), прийняте у роботі [109], не враховує ті задачі та завдання, в яких визначаються геометричні фізичні характеристики (ГФХ), де геометрія та математична модель уточнюються.

У [113] пропонується поділяти ОЗТ відповідно до причинних характеристик процесів, які розглядаються: граничні ОЗТ (коли ідентифікуються ГУ), коефіцієнтні ОЗТ (коли визначаються коефіцієнти рівнянь), ретроспективні ОЗТ (коли виконується інвертування часу) та геометричні ОЗТ (коли визначаються геометричні параметри об'єкта). У такій класифікації не враховані завдання, які пов'язані з відновленням структури рівнянь, що входять до математичної моделі, а широко поширений термін «коефіцієнтний» не дуже вдалий, оскільки, як граничні ОЗТ теж можуть бути віднесені до коефіцієнтних, оскільки в них визначаються коефіцієнти рівнянь ГУ (наприклад, коефіцієнти тепловіддачі).

ОЗТ поділяються за трьома ознаками. Перша ознака – сторона явища (якісна і кількісна). До якісних належать завдання відновлення математичної моделі, до кількісних – всі інші завдання ОЗТ. Друга ознака – частина математичної моделі, до якої входить шукана величина (рівняння теплопровідності, граничні й початкові умови тощо).

Оскільки основною причиною некоректності ОЗТ є нестійкість їх розв’зків, яка проявляється у тому, що малі зміни вхідних величин можуть викликати як завгодно великі відхилення параметрів, які ідентифікуються, логічним є усунення причин таких відхилень – зміна вхідних величин. Якщо нестаціонарність явища, тобто зміна температури в часі, усуненню не підлягає, то похибка вимірювання є фактором, на який можна й потрібно впливати. Тому часто проводять згладжування помилок вимірювання. Якщо таке згладжування здійснювати непродумано і формально (наприклад, за допомогою методу найменших квадратів), то разом зі зменшенням похибки вимірювань можуть зникнути характерні особливості вхідної інформації. Тому питання вибору методу / алгоритму згладжування набуває першочергового значення. Як показали результати досліджень, необхідно обирати методи та алгоритми розв’язування ОЗТ, які призводить до позитивного ефекту. Тобто потрібно користуватися такими методами й алгоритмами, які випливають із методу регуляризації Тихонова з урахуванням другої похідної у регуляризаторі [135], або методом згладжування кубічними сплайнами [30–32].

1.4. Методи розв’язування обернених задач теплопровідності

Процес розв’язування ОЗТ можна розбити на кілька етапів. Розглядаючи ОЗТ з точки зору основних аспектів, отримання оптимальних оцінок та зміст етапів можна розкрити так [119].

I етап: вибір оптимальної математичної моделі з найзручнішою (з точки зору подальшої алгоритмізації) залежністю вхідних й вихідних параметрів.

Сюди ж відноситься зміна форми математичної моделі, до якої іноді вдаються при розв'язанні різних класів нелінійних багатовимірних ОЗТ.

II етап: вибір виду постановки ОЗТ та шляхи її розв'язування.

III етап: вибір оптимального вектора вимірювань, включаючи згладжування та інші форми попередньої обробки експериментальної інформації.

IV етап: вибір можливого методу або алгоритму розв'язування, виходячи з виду математичної моделі ОЗТ, ступеня некоректності її постановки, що є в розпорядженні дослідника обчислювальних засобів та математичного забезпечення до них.

V етап: вибір критерію оптимальності, цільового функціонала, його норми, методу пошуку параметрів регуляризації, порядку стабілізуючого функціонала, методу мінімізації цільового функціонала.

VI етап: складання оптимального алгоритму розв'язування ОЗТ, який враховує обраний метод, критерій оптимальності, необхідну точність та найкоротший шлях отримання стійких розв'язків.

VII етап: вибір оптимальних обчислювальних процедур та реалізація відповідного алгоритму.

VIII етап: аналіз отриманих розв'язків, включаючи попередню обробку результатів (апроксимацію, згладжування тощо).

Процес отримання розв'язку ОЗТ не обов'язково включає всі перераховані етапи або всі дії кожного етапу. Це залежить від використовуваного методу. Будь-який метод може бути використаний на різних етапах, а при розв'язанні однієї задачі, зазвичай, використовується кілька методів. Для того щоб обрати оптимальний метод дослідження, необхідно мати уявлення про все різноманіття існуючих методів, які повинні бути чітко систематизовані. Існують різні класифікації методів розв'язування основних класів ОЗТ.

Цілком аргументованою є багатопланова класифікація методів за окремими ознаками, яка має досить універсальний характер [119; 139]. Відповідно до робіт [1–6; 7; 9; 16–18; 20; 23–37; 39–43; 48; 51–58; 67–70; 75–87; 90–92; 152], методи розв'язування задач математичної фізики можна розділити традиційно на аналітичні та чисельні, точні та наближені, детерміновані й стохастичні [94; 96; 97]. При цьому аналітичні методи, тобто методи, що дозволяють знайти розв'язок у вигляді аналітичної залежності, можуть бути точними та наближеними.

Чисельні методи дозволяють отримати значення функції для заданих конкретних значень аргументу. Вони завжди наближені, оскільки припускають заміну вихідних, як правило, складних рівнянь більш простими, зручними для реалізації обчислень. Такі методи завжди пов'язані з поняттям похибки.

До аналітичних методів розв'язування обернених задач можуть бути віднесені методи, в яких застосовуються розклади в ряди [89; 109; 132], метод поділу змінних, методи, які використовують інтегральні перетворення та формули Дюамеля [119], графоаналітичні методи тощо.

Можливості аналітичних методів обмежені. Вони можуть бути застосовані для отримання розв'язків ОЗТ у тілах геометрично простої форми. У дослідженні теплових процесів тіл складної геометричної форми ці методи мають великі труднощі, яких часто не можна уникнути. У зв'язку з цим широко застосовують в інженерній практиці чисельні методи розв'язування ОЗТ, з яких найуніверсальнішим й розвиненим є метод кінцевих різниць (метод сіток). Однак, застосовуючи цей метод, слід пам'ятати, що зменшення кроку апроксимації призводить до збільшення точності отриманого розв'язку прямих задач. Тому ОЗТ можуть викликати нестійкість розв'язків [135].

Нижче пропонується класифікація методів та алгоритмів розв'язування ОЗТ, в основі якої лежать такі принципи [119].

1. Детермінований підхід розв'язування ОЗТ відрізняється від стохастичного.

2. Некоректні задачі можна розв'язувати або, приводячи їх до умовно-коректних, або, використовуючи регуляризацію розв'язків некоректних задач.

3. Різниця між екстремальними та неекстремальними постановками ОЗТ потребує різних методів розв'язування відповідно до цих постановок.

Отже, по-перше, методи розв’язування ОЗТ можуть бути поділені на детерміновані, що включають прийоми та оперують інформацією, яка носить певний детермінований характер, імовірнісні або стохастичні, які спираються на положення теорії ймовірностей і використовують випадкову (стохастичну) інформацію. По-друге, в класифікації методів необхідно врахувати відмінності між умовно-регулярними методами і методами регуляризації. І, нарешті, по-третє, через принципову різницю між способами реалізації методів, їх можна поділити на екстремальні і неекстремальні (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

Класифікація методів регуляризації для знаходження чисельного розв’язку конкретної ОЗТ

Клас методів	**Детерміновані методи**	**Стохастичні методи**
Умовно-регулярні:		
Екстремальні	➢ методи підбору; ➢ методи Лаврентьєва; ➢ метод квазірозв’язку; ➢ метод квазіобернення; ➢ ітераційні методи; ➢ градієнтні методи; ➢ методи найшвидшого спуску; ➢ метод спряжених градієнтів; ➢ інші методи.	➢ метод найменших квадратів; ➢ метод фільтрації: ✓ неперервний фільтр Кальмана; ✓ дискретний оптимальний фільтр; ✓ ітераційний фільтр; ✓ усічений фільтр; ✓ адаптивний фільтр; ➢ інші методи.
Неекстремальні	➢ метод обернення математичної моделі; ➢ метод обернення для розв’язування прямої задачі; ➢ метод штучної гіперболізації рівняння теплопровідності; ➢ метод послідовних інтервалів; ➢ метод Сперроу; ➢ метод інтегральних характеристик; ➢ методи розкладання в ряди; ➢ інші методи.	➢ рекурентні статистичні методи; ➢ метод Монте-Карло ➢ інші методи.
Методи регуляризації	➢ метод регуляризації Тихонова; ➢ метод нев’язки; ➢ метод узагальненої нев’язки; ➢ регулярні ітераційні методи; ➢ інші методи	➢ метод максимальної правдоподібності; ➢ метод максимуму апостеріорної ймовірності; ➢ метод Байєса; ➢ регуляризований метод найменших квадратів; ➢ фільтр Вінера; ➢ інші методи

У прикладній математиці, зазвичай, неекстремальні методи називають прямими методами. По-перше, досить складно пояснити, чому неітераційні методи або методи, засновані на зведенні вихідної задачі до розв’язування САР, називаються прямими. По-друге, поділивши методи розв’язування ОЗТ на прямі та методи регуляризації [16; 45; 55; 56; 71; 74; 78; 80; 133; 135; 137], мимоволі протиставляється термін «прямі методи» терміну «обернені методи», які часто використовуються зовсім в іншому сенсі. По-третє, введення до класифікації прямих методів природно передбачає наявність у ній непрямих або обернених методів, роль яких не можуть відігравати методи регуляризації. По-четверте, з’являється певна невизначеність у класифікації розв’язуваних завдань (прямі й обернені завдання) і методів дослідження. І, нарешті, по-п’яте, розбиття методів на екстремальні і неекстремальні зручне і, головне, виправдане, оскільки визначає відразу: сутність методу, його роботу з вихідною інформацією та його алгоритмом, який знаходить глобальний екстремум цільового функціонала.

Наведена класифікація не виключає, а навпаки, передбачає поділ методів на аналітичні та чисельні й наближені, однак перші ознаки є найвизначальнішими для методів розв’язування ОЗТ.

До умовно-регулярних методів віднесені методи, в яких некоректно поставлена задача зводиться до умовно-коректної шляхом накладення обмежень (умов) на шукані розв’язки або вихідну математичну модель, що звужує множину можливих розв’язків задачі до класу коректності (наприклад, до компакту). Таке звуження може відбуватись у результаті апріорних відомостей щодо шуканої функції (її гладкості, неперервності, знаковизначеності тощо) або завдяки заміні оператора теплопровідності близьким йому, але відповідним коректній постановці задачі. До цих методів належать такі детерміновані методи, як метод квазірозв’язку Іванова [107], метод Лаврентьєва [117], метод підбору в інтерпретації Тихонова [115–117; 135], метод квазіобернення тощо [138].

До умовно-регулярних методів також можна віднести методи зміни математичної моделі та розв’язків прямих задач. Ці методи дозволяють отримувати розв’язки в явному аналітичному вигляді або зводять розв’язування задачі до розв’язування САР [15; 19; 21; 25; 40; 46–48], що не викликає принципових труднощів. Для реалізації такого підходу часто використовують додаткові прийоми та методи (послідовних інтервалів [113], узагальнений метод послідовних інтервалів Сперроу тощо). До цієї ж групи належать методи, які базуються на розкладанні експериментальних базисних функцій у нескінченні ряди за похідними; методи, які використовують інтегральні характеристики експериментальних функцій; метод електричного моделювання та багато інших.

Стохастичні умовно-регулярні методи, що вимагають накладення обмежень на апріорну та / або апостеріорну інформацію, є методи Монте-Карло, оптимальної динамічної фільтрації тощо [113; 120].

У методах регуляризації клас допустимих розв’язків задачі не звужується заздалегідь до компактної множини. У них на шукану функції накладаються певні умови (наприклад, умова її гладкості), які забезпечують стійкість отримуваних розв’язків до малих змін вихідних даних. Підхід до розв’язування ОЗТ за допомогою методів регуляризації є найбільш загальним, універсальним, що дозволяє отримати досить ефективні розв’язки некоректних задач, які мають регулярні властивості.

Класична регуляризація або регуляризація за Тихоновим опирається на загальну теорію регуляризації, розроблену А.М. Тихоновим [135], та передбачає побудову регуляризуючого методу / алгоритму, що дозволяє отримати стійкі розв’язки некоректно поставлених задач. До цих методів належать метод мінімізації згладжування функціонала Тихонова, метод нев’язки й узагальнений метод нев’язки [111; 113], різні ітераційні методи [120], методи, які використовують сплайн-інтерполяцію тощо.

Особливе місце в методах регуляризації посідає так звана «природна регуляризація», при реалізації якої стійкість отримуваних розв’язків досягається за рахунок накладання умов на параметри обчислювальних методів та / або алгоритмів (кроки аргументів, кількість членів апроксимуючого многочлена, кількість ітерацій тощо). Ці умови визначають межі регулярності розглянутих методів. При цьому не потрібно змінювати вихідну постановку задачі, а розрахункові методи й алгоритми мають відносну простоту, що природно спричинило широке їхнє поширення.

Методи статистичної регуляризації [120; 135–137] засновані на загальній теорії регуляризації Тихонова і методах статистичної обробки інформації, причому відомості про шукані параметри задаються розподілом ймовірностей.

Принципова відмінність екстремальних і неекстремальних методів полягає в способі використання опорних величин, якими вимірюються температури T^*. В екстремальних методах T^* порівнюються з обчисленими значеннями температури T. Нев'язка між T^* та T є керуючим елементом у процедурі пошуку розв'язку та важливим параметром багатьох методів регуляризації. У неекстремальних методах T^* підставляється в математичну модель або у вираз аналітично отриманий розв'язанням прямої задачі. При цьому T фактично ототожнюється з T^*, тобто нев'язка між ними приймається рівною нулю. Розв'язування зводиться до одноразового розв'язування рівняння або системи рівнянь, іноді із залученням ітераційних процедур урахування нелінійності, тоді як основою екстремальних методів є пошук мінімуму нев'язки, в процесі якого багаторазово здійснюється математичне моделювання спостережуваного в експерименті процесу теплопровідності.

Перераховані методи застосовуються для розв'язування всіх видів ОЗТ. Ідентифікація граничних умов (граничні ОЗТ) здійснюється за допомогою аналітичних і чисельних, в тому числі стохастичних методів [70]. Це ж можна сказати і про розв'язування внутрішніх ОЗТ [88]. Через меншу актуальність даних задач, спектр методів, використаних для розв'язування геометричних і ретроспективних обернених задач [109; 130], значно вужчий. Для розв'язування модельних ОЗТ, що відносяться до структурної ідентифікації, застосовують методи теорії планування експерименту.

1.4.1. Дискретизація

Заміна нескінченно малих відхилень змінних у математичній моделі їх кінцевими аналогами лежить в основі чисельних методів моделювання [21; 22; 28; 63]. У методі кінцевих елементів неперервна область розбивається на елементи, для яких рішення може бути знайдено порівняно просто. Метод добре адаптований до розв'язування нелінійних задач в геометричних об'єктах складної форми, а також до врахування різного роду розривів й інших особливостей. Однак для успішного застосування методу скінченних елементів необхідні розвинена програма автоматизованої розбивки геометричної області на трикутники (тріангуляція), великий обсяг пам'яті та висока швидкодія процесора [113; 119].

Метод граничних елементів заснований на використанні фундаментальних рішень крайових задач [8; 34; 49–51; 57; 59; 69; 79]. Він вимагає дискретизації та чисельного визначення значень температури тільки в граничній зоні розрахункової області, яка розбивається на кінцеві елементи. Всередині області метод описується інтегральним рівнянням. Він передбачає здійснення диференційно-різницевої апроксимації, в результаті якої рівняння з частинними похідними перетворюється в систему звичайних диференціальних рівнянь, після чого використовується один з аналітичних або чисельних методів її розв'язування.

Найзручнішим для технічної реалізації є метод кінцевих різниць [2; 113; 119; 120]. Цей метод також називають методом сіток, який заснований на наближеній апроксимації основного диференціального рівняння та відповідних граничних і початкових умов різницевими рівняннями, в результаті чого моделювання зводиться до розв'язування системи алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо рівняння теплопровідності загального виду [148]:

$$\rho\left(T\left(x,y,t\right)\right)C\left(T\left(x,y,t\right)\right)\frac{\partial T}{\partial t}= \\ =\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(T\left(x,y,t\right)\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a\left(T\left(x,y,t\right)\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right). \qquad (1.3)$$

Для рівняння (1.3) запишемо його дискретний представлення, використавши для цього метод скінченних (кінцевих) різниць (МКР).

Похідні першого порядку за просторовими координатами для будь-якого моменту часу, використовуючи центральну різницеву схему, виглядають [148]:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(i,j)} = \frac{T_{i+0.5,j} - T_{i-0.5,j}}{\Delta x}, \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{(i,j)} = \frac{T_{i,j+0.5} - T_{i,j-0.5}}{\Delta y}. \tag{1.4}$$

Враховуючи (1.4), вирази для лівої частини рівняння (1.3) такі:

$$\begin{aligned} \left.\left[a\left(T\left(x,y,t\right)\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right]\right|_{(i,j)} &= a\left(T_{i,j}\right)\frac{T_{i+0.5,j} - T_{i-0.5,j}}{\Delta x} = a_{i,j}\frac{T_{i+0.5,j} - T_{i-0.5,j}}{\Delta x}, \\ \left.\left[a\left(T\left(x,y,t\right)\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right]\right|_{(i,j)} &= a\left(T_{i,j}\right)\frac{T_{i,j+0.5} - T_{i,j-0.5}}{\Delta y} = a_{i,j}\frac{T_{i,j+0.5} - T_{i,j-0.5}}{\Delta y}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Використавши записи (1.5), можна записати різницеву схему для доданків лівої частини рівняння (1.3). Матимемо:

$$\begin{aligned} \left.\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(T\left(x,y,t\right)\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right]\right|_{(i,j)} &= \frac{a_{i+0.5,j}\dfrac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} - a_{i-0.5,j}\dfrac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} = \\ &= a_{i+0.5,j}\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x^2} - a_{i-0.5,j}\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \\ \left.\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(a\left(T\left(x,y,t\right)\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]\right|_{(i,j)} &= a_{i,j+0.5}\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y^2} - a_{i,j-0.5}\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

З урахуванням (1.6) можна записати класичну неявну різницеву схему для рівняння (1.3). Вона набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^{(k+1)}C_{i,j}^{(k+1)}\frac{T_{i,j}^{(k+1)} - T_{i,j}^{(k)}}{\Delta\tau} &= a_{i+0.5,j}^{(k+1)}\frac{T_{i+1,j}^{(k+1)} - T_{i,j}^{(k+1)}}{\Delta x^2} - a_{i-0.5,j}^{(k+1)}\frac{T_{i,j}^{(k+1)} - T_{i-1,j}^{(k+1)}}{\Delta x^2} + \\ &+ a_{i,j+0.5}^{(k+1)}\frac{T_{i,j+1}^{(k+1)} - T_{i,j}^{(k+1)}}{\Delta y^2} - a_{i,j-0.5}^{(k+1)}\frac{T_{i,j}^{(k+1)} - T_{i,j-1}^{(k+1)}}{\Delta y^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Слід відмітити, що в (1.7) використана 5-точкова різницева схема. У даної різницевої схеми є суттєвий недолік. Цей недолік проявляється в тому, що при знаходження чотирьох значень на новому шарі за часом, використовуються дані про одну точку з попереднього шару за часом. Різницева схема є стійкою, але не дає необхідної точності обчислень за рахунок затухання.

Для підвищення точності розрахунків, використовується схема підвищеної точності. Вона базується на різницевій схемі Кранка-Ніколсона [148]:

$$\rho_{i,j}^{(k+1)} C_{i,j}^{(k+1)} \frac{T_{i,j}^{(k+1)} - T_{i,j}^{(k)}}{\Delta \tau} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} a_{i+0.5,j}^{(k+1)} \dfrac{T_{i+1,j}^{(k+1)} - T_{i,j}^{(k+1)}}{\Delta x^2} - a_{i-0.5,j}^{(k+1)} \dfrac{T_{i,j}^{(k+1)} - T_{i-1,j}^{(k+1)}}{\Delta x^2} + \\ + a_{i,j+0.5}^{(k+1)} \dfrac{T_{i,j+1}^{(k+1)} - T_{i,j}^{(k+1)}}{\Delta y^2} - a_{i,j-0.5}^{(k+1)} \dfrac{T_{i,j}^{(k+1)} - T_{i,j-1}^{(k+1)}}{\Delta y^2} + \\ + a_{i+0.5,j}^{(k)} \dfrac{T_{i+1,j}^{(k)} - T_{i,j}^{(k)}}{\Delta x^2} - a_{i-0.5,j}^{(k)} \dfrac{T_{i,j}^{(k)} - T_{i-1,j}^{(k)}}{\Delta x^2} + \\ + a_{i,j+0.5}^{(k)} \dfrac{T_{i,j+1}^{(k)} - T_{i,j}^{(k)}}{\Delta y^2} - a_{i,j-0.5}^{(k)} \dfrac{T_{i,j}^{(k)} - T_{i,j-1}^{(k)}}{\Delta y^2} \end{array} \right). \tag{1.8}$$

З рівняння (1.8) видно, що воно містить множники виду $a_{i\pm 0.5,j}$ та $a_{i,j\pm 0.5}$. Дані множники, як варіант, можна наближено замінити такими формулами:

$$\begin{array}{l} a_{i+0.5,j}^{(k+1)} \approx \dfrac{1}{2}\left(a_{i+1,j}^{(k+1)} + a_{i,j}^{(k+1)}\right);\ a_{i-0.5,j}^{(k+1)} \approx \dfrac{1}{2}\left(a_{i-1,j}^{(k+1)} + a_{i,j}^{(k+1)}\right); \\ a_{i,j-0.5}^{(k+1)} \approx \dfrac{1}{2}\left(a_{i,j-1}^{(k+1)} + a_{i,j}^{(k+1)}\right);\ a_{i,j+1}^{(k+1)} \approx \dfrac{1}{2}\left(a_{i,j+1}^{(k+1)} + a_{i,j}^{(k+1)}\right). \end{array} \tag{1.9}$$

Після такої заміни в (1.9), розв’язуємо поставлену пряму нелінійну ПЗТ, використовуючи різницеву схему, яка містить 8 точок: 4 на новому (шуканому шарі) і 4 на старому (відомому шарі). Але отримана система рівнянь є нелінійною. Для її реалізації можна використовувати лінеаризацію за Ньютоном з подальшим застосуванням класичних ітераційних методів розв’язування лінійних рівнянь (наприклад, метод спряжених чи біспряжених градієнтів). Перейдемо до процесу лінеаризації доданків нелінійного рівняння теплопровідності. Для здійснення процедури лінеаризації функцій враховуємо:

$$\left\| T_{i,j}^{(m+1)} - T_{i,j}^{(m)} \right\| < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Тоді будемо мати

$$a_{i,j}^{(m+1)} \approx a_{i,j}^{(m)} + a'^{(m)}_{i,j}\left(T_{i,j}^{(m+1)} - T_{i,j}^{(m)}\right). \tag{1.11}$$

Нехай нам потрібно знайти розподіл температури в момент часу (k+1). Процедура отримання цього шару буде виконана ітеративно. Для отримання цього розподілу температури на шарі (k+1), використовується ітераційний процес (1.8) на основі (1.10), з урахуванням (1.9). У результаті отримаємо таку ітераційну формулу:

$$\frac{T_{i,j}^{(m+1)}-T_{i,j}^{(k)}}{\Delta\tau}=\frac{1}{4\rho_{i,j}^{(m)}C_{i,j}^{(m)}}\times$$
$$\times\left(\begin{aligned}&\left(a_{i+1,j}^{(m)}+a_{i,j}^{(m)}\right)\frac{T_{i+1,j}^{(m+1)}-T_{i,j}^{(m+1)}}{\Delta x^2}-\left(a_{i-1,j}^{(m)}+a_{i,j}^{(m)}\right)\frac{T_{i,j}^{(m+1)}-T_{i-1,j}^{(m+1)}}{\Delta x^2}+\\&+\left(a_{i,j+1}^{(m)}+a_{i,j}^{(m)}\right)\frac{T_{i,j+1}^{(m+1)}-T_{i,j}^{(m+1)}}{\Delta y^2}-\left(a_{i,j-1}^{(m)}+a_{i,j}^{(m)}\right)\frac{T_{i,j}^{(m+1)}-T_{i,j-1}^{(m+1)}}{\Delta y^2}+\\&+\left(a_{i+1,j}^{(k)}+a_{i,j}^{(k)}\right)\frac{T_{i+1,j}^{(k)}-T_{i,j}^{(k)}}{\Delta x^2}-\left(a_{i-1,j}^{(k)}+a_{i,j}^{(k)}\right)\frac{T_{i,j}^{(k)}-T_{i-1,j}^{(k)}}{\Delta x^2}+\\&+\left(a_{i,j+1}^{(k)}+a_{i,j}^{(k)}\right)\frac{T_{i,j+1}^{(k)}-T_{i,j}^{(k)}}{\Delta y^2}-\left(a_{i,j-1}^{(k)}+a_{i,j}^{(k)}\right)\frac{T_{i,j}^{(k)}-T_{i,j-1}^{(k)}}{\Delta y^2}\end{aligned}\right). \tag{1.12}$$

Після того, як виконалась умова (1.10), отриманий розв'язок (1.12) $T_{i,j}^{(m+1)}$ приймається шуканим $T_{i,j}^{(k+1)}$. Початок ітераційного процесу забезпечує початкова умова для рівняння (1.3). Тобто для шуканого значень на новому часовому шарі береться розподіл температури з попереднього часового шару (вже відомі значення – $T_{i,j}^{(k)}$). Викладена вище методика не є прямою лінеаризацією, але такий підхід часто використовується при розв'язуванні нелінійних рівнянь математичної фізики в цілому.

Повернемось до рівняння (1.3):

$$\rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Різницева схема Кранка-Ніколсона для даного рівняння має вигляд:

$$\frac{\rho\left(T_{i,j}^{k+1}\right)C\left(T_{i,j}^{k+1}\right)+\rho\left(T_{i,j}^{k}\right)C\left(T_{i,j}^{k}\right)}{2}\frac{T_{i,j}^{k+1}-T_{i,j}^{k}}{\partial\tau}=$$
$$=0.5\left(\frac{a\left(T_{i+1,j}^{k+1}\right)+a\left(T_{i,j}^{k+1}\right)}{2}\frac{T_{i+1,j}^{k+1}-T_{i,j}^{k+1}}{hx^2}-\frac{a\left(T_{i,j}^{k+1}\right)+a\left(T_{i-1,j}^{k+1}\right)}{2}\frac{T_{i,j}^{k+1}-T_{i-1,j}^{k+1}}{hx^2}\right)+$$
$$+0.5\left(\frac{a\left(T_{i+1,j}^{k}\right)+a\left(T_{i,j}^{k}\right)}{2}\frac{T_{i+1,j}^{k}-T_{i,j}^{k}}{hx^2}-\frac{a\left(T_{i,j}^{k}\right)+a\left(T_{i-1,j}^{k}\right)}{2}\frac{T_{i,j}^{k}-T_{i-1,j}^{k}}{hx^2}\right)+ \qquad (1.13)$$
$$+0.5\left(\frac{a\left(T_{i,j+1}^{k+1}\right)+a\left(T_{i,j}^{k+1}\right)}{2}\frac{T_{i,j+1}^{k+1}-T_{i,j}^{k+1}}{hy^2}-\frac{a\left(T_{i,j}^{k+1}\right)+a\left(T_{i,j-1}^{k+1}\right)}{2}\frac{T_{i,j}^{k+1}-T_{i,j-1}^{k+1}}{hy^2}\right)+$$
$$+0.5\left(\frac{a\left(T_{i,j+1}^{k}\right)+a\left(T_{i,j}^{k}\right)}{2}\frac{T_{i,j+1}^{k}-T_{i,j}^{k}}{hy^2}-\frac{a\left(T_{i,j}^{k}\right)+a\left(T_{i,j-1}^{k}\right)}{2}\frac{T_{i,j}^{k}-T_{i,j-1}^{k}}{hy^2}\right).$$

Ліву частину рівняння (1.13) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\rho\left(T_{i,j}^{k+1}\right)C\left(T_{i,j}^{k+1}\right)+\rho\left(T_{i,j}^{k}\right)C\left(T_{i,j}^{k}\right)}{2}\frac{T_{i,j}^{k+1}-T_{i,j}^{k}}{h\tau}=$$
$$=\frac{\rho\left(T_{i,j}^{k+1}\right)C\left(T_{i,j}^{k+1}\right)T_{i,j}^{k+1}+\rho\left(T_{i,j}^{k}\right)C\left(T_{i,j}^{k}\right)T_{i,j}^{k+1}}{2h\tau}-$$
$$-\frac{\rho\left(T_{i,j}^{k+1}\right)C\left(T_{i,j}^{k+1}\right)T_{i,j}^{k}+\rho\left(T_{i,j}^{k}\right)C\left(T_{i,j}^{k}\right)T_{i,j}^{k}}{2h\tau}= \qquad (1.14)$$
$$=\frac{\rho\left(T_{i,j}^{k+1}\right)C\left(T_{i,j}^{k+1}\right)T_{i,j}^{k+1}}{2h\tau}+\frac{\rho\left(T_{i,j}^{k}\right)C\left(T_{i,j}^{k}\right)}{2h\tau}T_{i,j}^{k+1}-$$
$$-\frac{\rho\left(T_{i,j}^{k+1}\right)C\left(T_{i,j}^{k+1}\right)T_{i,j}^{k}}{2h\tau}-\frac{\rho\left(T_{i,j}^{k}\right)C\left(T_{i,j}^{k}\right)}{2h\tau}T_{i,j}^{k}.$$

У (1.14) потрібно провести лінеаризацію для першого та третього доданку правої частини. Лінеаризація методом Ньютона для будь-якої функції $f\left(x\right)$ здійснюється за такою формулою:

$$f\left(x^{k+1}\right)=f\left(x^{k}\right)+\left(x^{k+1}-x^{k+1}\right)\frac{df}{dx}\left(x^{k}\right). \qquad (1.15)$$

Нехай $\rho\left(T\right)=\sum a_i^{\rho}T^i$ та $C\left(T\right)=\sum a_i^{c}T^i$. Тоді матимемо:

$$\begin{gathered}\rho_{i,j}^{k+1}C_{i,j}^{k+1}T_{i,j}^{k+1}=\rho_{i,j}^{k}C_{i,j}^{k}T_{i,j}^{k}+\left(T_{i,j}^{k+1}-T_{i,j}^{k}\right)\left(\left(\rho'^{k}_{i,j}C_{i,j}^{k}+\rho_{i,j}^{k}C'^{k}_{i,j}\right)T_{i,j}^{k}+\rho_{i,j}^{k}C_{i,j}^{k}\right),\\ a_{i+1,j}^{k+1}T_{i+1,j}^{k+1}=a_{i+1,j}^{k}T_{i+1,j}^{k}+\left(T_{i+1,j}^{k+1}-T_{i+1,j}^{k}\right)\left(a_{i+1,j}^{k+1}+a'^{k+1}_{i+1,j}\right),\\ \left(a_{i+1,j}^{k+1}+a_{i,j}^{k+1}\right)T_{i,j}^{k+1}=\left(a_{i+1,j}^{k}+a_{i,j}^{k}\right)T_{i,j}^{k}+\left(T_{i,j}^{k+1}-T_{i,j}^{k}\right)\left(a_{i+1,j}^{k+1}+a_{i,j}^{k+1}+a'^{k+1}_{i+1,j}+a'^{k+1}_{i,j}\right).\end{gathered}\tag{1.16}$$

З урахуванням (1.16), отримаємо вираз для першого нелінійного доданку правої частини у рівняння (1.14).

$$\begin{gathered}\rho\left(T_{i,j}^{k+1}\right)C\left(T_{i,j}^{k+1}\right)T_{i,j}^{k+1}=\left(\sum_{l=0}^{n}a_l^{\rho}\left(T_{i,j}^{k+1}\right)^l\right)\left(\sum_{m=0}^{n}a_m^{\rho}\left(T_{i,j}^{k+1}\right)^m\right)T_{i,j}^{k+1}=\\ =\left(\sum_{l=0}^{n}a_l^{\rho}\left(T_{i,j}^{k}\right)^l\right)\left(\sum_{m=0}^{n}a_m^{\rho}\left(T_{i,j}^{k}\right)^m\right)T_{i,j}^{k}+\left(T_{i,j}^{k+1}-T_{i,j}^{k}\right)\times\\ \times\left[\left(\sum_{l=1}^{n}la_l^{\rho}\left(T_{i,j}^{k}\right)^{l-1}\right)\left(\sum_{m=0}^{n}a_m^{\rho}\left(T_{i,j}^{k}\right)^m\right)T_{i,j}^{k}+\left(\sum_{l=0}^{n}a_l^{\rho}\left(T_{i,j}^{k}\right)^l\right)\left(\sum_{m=1}^{n}ma_m^{\rho}\left(T_{i,j}^{k}\right)^{m-1}\right)T_{i,j}^{k}+\right.\\ \left.+\left(\sum_{l=0}^{n}a_l^{\rho}\left(T_{i,j}^{k}\right)^l\right)\left(\sum_{m=0}^{n}a_m^{\rho}\left(T_{i,j}^{k}\right)^m\right)T_{i,j}^{k}\right].\end{gathered}\tag{1.17}$$

Аналогічно до (1.17), лінеаризація проводиться для будь-якої функції з ціллю побудови ефективного ітераційного процесу для розв’язування рівняння (1.3).

1.4.2. Методи знаходження мінімуму функціонала

Як вже було зазначено, серед реальних фізико-технічних задач існують такі, які зводяться до мінімізації деякої функції чи функціонала. Часто виникають ситуації, у яких потрібно знайти глобальний мінімум недиференційованих функцій. Практика показує, що одними з найкращих методів пошуку глобального екстремуму недиференціовних функцій є методи ройового інтелекту. Звісно ж, ці методи мають ряд переваг та недоліків відносно класичних детермінованих чисельних методів безумовної оптимізації.

Основною перевагою методів ройового інтелекту є та, що вони не вимагають знаходження похідних функцій чи функціоналів. До недоліків можна віднести низьку точність алгоритмів та досить повільну збіжність, якщо цільова функція досить багато невідомих параметрів (більше 100).

Методи та алгоритми ройового інтелекту

Нині існує безліч різних багатоагентних стохастичних алгоритмів оптимізації. Одним з найбільш вивчених серед них є ройовий алгоритм або Particle Swarm Optimization (PSO), розроблений Кеннеді і Еберхарт в 1995 році. Ідея даного алгоритму взята із соціальної поведінки деяких видів тварин, наприклад, зграй птахів чи інших тварин. Дослідження показали ефективність алгоритму і доцільність його застосування при вирішенні задач як умовної, так і безумовної оптимізації функцій дійсних змінних невеликої розмірності.

Постійно пропонуються нові модифікації алгоритму для покращення його продуктивності або для розширення кола вирішуваних завдань (наприклад, одна з перших модифікацій була пов’язана з ідеєю рішення однокритеріальних завдань безумовної оптимізації з бінарними змінними за допомогою PSO).

У зв’язку з тим, що знаходження розв’язку всіх ОЗТ, які розглядаються у даній роботі, займає досить довий час (кількість невідомих параметрів квадратичного функціонала досить велика), доцільно перейти до розгляду одного із найвідоміших методів оптимізації – класичного методу Ньютона.

Класичний метод Ньютона та умови його збіжності

Послідовність точок $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$, будується методом Ньютона, виходячи з наступних міркувань. Нехай функція $f(x)$ опукла і двічі диференційована на $\mathbb{R}^n$, причому матриця $f''(x)$ невироджена на $\mathbb{R}^n$. Тоді для точки $x^{(k)}$ має місце подання [105; 126]:

$$f(x) - f\left(x^{(k)}\right) = \left\langle f'\left(x^{(k)}\right), x - x^{(k)}\right\rangle +$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle f''\left(x^{(k)}\right)\left(x - x^{(k)}\right), x - x^{(k)}\right\rangle + o\left(\left\|x - x^{(k)}\right\|^2\right).$$

Для визначення наступної точки $x^{(k+1)}$ ітераційного процесу методу Ньютона мінімізується функція $f_k(x)$, яка є квадратичною частиною приросту $f(x)-f(x^{(k)})$:

$$f_k(x)=\left\langle f'(x^{(k)}),x-x^{(k)}\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle f''(x^{(k)})(x-x^{(k)}),x-x^{(k)}\right\rangle.$$

Покажемо, що ця функція є опуклою. Неважко перевірити, що матриця других похідних функції $f_k(x)$ співпадає з відповідною матрицею функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$, тобто $f_k''(x)=f''(x^{(k)})$. Оскільки за умовою $f(x)$ опукла функція, то згідно критерію опуклості матриця $f''(x)$ є невід'ємно визначеною. Отже за цим критерієм і функція $f_k(x)$ є також опуклою. Розглянемо тепер задачу мінімізації опуклої функції $f_k(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Як відомо, така задача має єдину точку мінімуму, а необхідна й достатня умова оптимальності для неї має вигляд [105]:

$$f_k'(x)=f'(x^{(k)})+f''(x^{(k)})(x-x^{(k)})=O_n.$$

Розв'язавши отриману систему лінійних рівнянь у матричному вигляді та поклавши знайдену точку мінімуму за $x^{(k+1)}$, будемо мати:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\left(f''(x^{(k)})\right)^{-1}f'(x^{(k)}). \tag{1.18}$$

Співвідношення (1.18) визначає ітераційний процес методу Ньютона в його класичній формі. Якщо елементи матриці $\left(f''(x^{(k)})\right)^{-1}$ позначити через $\varphi_{ij}(x^{(k)}),i,j=\overline{1,n},$ то (1.18) можна записати у координатній формі:

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi_{ij}(x^{(k)})\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_j}\right),\quad j=\overline{1,n}. \tag{1.19}$$

Умови збіжності методу Ньютона визначає наступна теорема.

Теорема 1.1. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна, сильно опукла з константою $m>0$ на $\mathbb{R}^n$, її матриця других похідних задовольняє умову Ліпшіця [105]:

$$\|f''(x)-f''(y)\|\le K\|x-y\|$$

для будь-яких $x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^n$, де $K>0$, і початкова точка $x^{(0)}$ така, що

$$f'\left(x^{(0)}\right)\le\frac{8m^2}{K}.$$

Тоді послідовність точок $\left\{x^{(k)}\right\}$, яка генерується методом (1.19), збігається до точки мінімуму x^* з квадратичною швидкістю:

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|\le\frac{4mq^{2^k}}{K},$$

де $0<q<1$.

Аналіз рекурентного співвідношення (1.18) і умов теореми 1.1 показує, що основними недоліками методу Ньютона є:

- обчислення на кожному кроці матриці $f''(x)$ та знаходження оберненої до неї матриці;

- метод може бути розбіжним, якщо цільова функція не є сильно опуклою і початкове наближення знаходиться досить далеко від точки мінімуму.

Тому використання класичного методу Ньютона на практиці не завжди доцільне. Для подолання наведених недоліків розроблені численні модифікації цього методу, які спрямовані на збереження високої швидкості збіжності та зменшення трудомісткості й послаблення вимог до вибору початкового наближення.

Узагальнений метод Ньютона

Розглянемо метод Ньютона, в якому рекурентне співвідношення має вигляд:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k \left(f''\left(x^{(k)}\right)\right)^{-1} f'\left(x^{(k)}\right), \tag{1.20}$$

де $h_k > 0$.

Цей метод називають *узагальненим методом Ньютона* або *методом Ньютона з регулюванням кроку* [105]. Параметр h_k в (1.20) обирається як і в градієнтних методах, так щоб забезпечити спадання цільової функції на кожній ітерації. Найбільш поширеними є два способи вибору величини h_k. Перший з них пов'язаний із вибором параметра h_k, який задовольняє нерівність:

$$f\left(x^{(k)} + h_k p^{(k)}\right) - f\left(x^{(k)}\right) \le \varepsilon h_k \left\langle f'\left(x^{(k)}\right), p^{(k)}\right\rangle, \tag{1.21}$$

де

$p^{(k)} = -\left(f''\left(x^{(k)}\right)\right)^{-1} f'\left(x^{(k)}\right)$ – напрямок спуску;

$\varepsilon \in \left(0; 1/2\right)$ – деяке число.

Якщо нерівність (1.21) виконується при $h_k = 1$, то величина кроку дорівнює одиниці і відбувається наступна ітерація. Якщо нерівність не виконується при $h_k = 1$, то крок зменшується, наприклад, за правилом $h_k = \lambda h_k$, $\lambda \in \left(0;1\right)$ доти, поки умова (1.21) не виконається.

Другий спосіб визначення кроку h_k полягає в мінімізації функції

$$F\left(h\right) = f\left(x^{(k)} - h\left(f''\left(x^{(k)}\right)\right)^{-1} f'\left(x^{(k)}\right)\right)$$

за $h > 0$, тобто h_k задовольняє умові

$$f\left(x^{(k)} + h_k p^{(k)}\right) = \min_{h>0} f\left(x^{(k)} + h p^{(k)}\right), \tag{1.22}$$

де

$$p^{(k)} = -\left(f''\left(x^{(k)}\right)\right)^{-1} f'\left(x^{(k)}\right).$$

Збіжність методу Ньютона з регулюванням кроку за способами (1.21), (1.22) визначається наступною теоремою.

Теорема 1.2. *Нехай функція* $f(x)$ *двічі неперервно диференційовна, сильно опукла на* R^n *та її матриця других похідних задовольняє умову Ліпшиця* [105]*:*

$$\left\| f''(x) - f''(y) \right\| \le K \left\| x - y \right\|$$

для будь-яких $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$, *де* $K > 0$.

Тоді послідовність точок $\left\{ x^{(k)} \right\}$, яка генерується методом (1.20) з вибором кроку за правилами (1.21) або (1.22), незалежно від початкового наближення $x^{(0)}$ збігається до точки мінімуму x^* з квадратичною швидкістю:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^* \right\| \le \frac{K}{m} \left\| x^{(k)} - x^* \right\|^2,$$

де m – оцінка найменшого власного числа матриці $f''(x)$.

Модифікації узагальненого методу Ньютона

Для подолання трудомісткості методів Ньютона в багатьох його модифікаціях матриця $f''(x)$ заміняється на кожному кроці ітераційного процесу деякими наближеними аналогами. Найбільш простий підхід полягає в тому, щоб лише в початковій точці обчислити матрицю Гессе, знайти до неї обернену й на всіх інших ітераціях замість матриці $\left(f''\left(x^{(k)} \right) \right)^{-1}$ використовувати матрицю $\left(f''\left(x^{(0)} \right) \right)^{-1}$. Тоді модифікований метод Ньютона з регулюванням кроку має вигляд [105]:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k \left(f''\left(x^{(0)} \right) \right)^{-1} f'\left(x^{(k)} \right). \tag{1.23}$$

Очевидно, якщо матриця $f''(x)$ в (1.23) додатно визначена, то ітераційний процес є однією з модифікацій градієнтного методу і збігається незалежно від початкового наближення з швидкістю геометричної прогресії.

1.4.3. Недоліки відомих методів розв’язування задач

Відомі методи мінімізації квадратичного функціоналу в класичній постановці ОЗТ мають низку недоліків, які присутні при знаходженні чисельних розв’язків багатовимірних нелінійних ОЗТ. Першим недоліком, з яким зустрічаємось під час розв’язування таких – час збіжності методів для отримання шуканого чисельного розв’язку конкретної ОЗТ. Другим – кількість викликів процедури отримання чисельного розв’язку однієї прямої задачі теплопровідності, яка неодноразово викликається в процесі розв’язування конкретної задачі, зокрема, нелінійної ОЗТ [98–101; 140–149].

Час роботи відомих алгоритмів

Відомо, що чисельний розв’язок лінійних задач теплопровідності отримується значно швидше, ніж нелінійних задач, оскільки дискретне представлення лінійних задач вимагає розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), а для нелінійних – нелінійної систем алгебраїчних рівнянь (САР). Звідси випливає, що для суттєвого зменшення часу пошуку чисельного розв’язку конкретної ОЗТ необхідно прискорити час розв’язку ПЗТ.

Кількість викликів функцій на одну ітерацію

Для лінійних та нелінійних багатовимірних ОЗТ кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ на одну ітерацію під час застосування градієнтних методів однакова. Кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ пропорційна загальній кількості внутрішніх вузлів сітки, на якій розв’язується поставлена ОЗТ. Із ростом розмірності задачі росте кількість викликів процедури ПЗТ. Якщо двовимірна задача розв’язується на сітці 34х34 (з граничними вузлами), то кількість викликів процедури розв’язку ПЗТ 32^2. Якщо ж цю саму двовимірну задачу розв’язувати на сітці 66x66 (з граничними вузлами), то кількість викликів процедури розв’язку ПЗТ дорівнює 64^2 [101].

Висновки до першого розділу

У розділі описані актуальні питання, які виникають при розв’язування ОЗТ в сучасному світі. Розділ містить сучасні класифікації ОЗТ та опис основних проблем при знаходженні їх чисельних розв’язків. Згідно огляду літератури, слід зазначити, що для всіх класів ОЗТ основним питанням є питання коректності постановки задачі та вибір методів регуляризації для основних класів ОЗТ. У розділі також міститься інформація про основні методи й алгоритми пошуку як чисельних розв’язків ОЗТ, так і аналітичних розв’язків деяких ОЗТ. Сучасні багатовимірні ОЗТ мають низку проблем, основні з яких наведені нижче.

Вибір методу розв’язку системи алгебраїчних рівнянь. Для знаходження чисельного розв’язку ОЗТ, потрібно неодноразово викликати процедуру розв’язування відповідних для неї ПЗТ. Вона зводиться до розв’язку САР. Тому вибір методу розв’язку системи рівнянь обумовлений трьома критеріями: час його роботи та швидкість його збіжності, економія пам’яті.

Вибір методу мінімізації функціонала. Чисельний розв’язок ОЗТ – це значення шуканих параметрів, за яких досягається глобальний мінімум квадратичного функціонала для цієї ОЗТ. До методів оптимізації ставляться практично ті ж основні умови, що й для методів розв’язку САР, а саме: економія пам’яті, швидкість збіжності та час його роботи.

Дискретизація рівняння теплопровідності. Найчастіше дискретизацію рівняння теплопровідності проводять методом кінцевих різниць (метод сіток) та кінцевих елементів. Метод сіток досить легко програмується, але має ряд недоліків порівняно з методом кінцевих елементів. Останній метод добре адаптований до нелінійних задач, а також для задач з об’єктами складної геометричної форми.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

Багато важливих питань теплообміну зводяться до розв’язання обернених задач теплопровідності [98–101; 140–148]. Очевидно, що для розв’язання нестаціонарної класичної задачі теплообміну потрібно знати початкові умови, крайові умови, фізичні параметри середовища тощо. Маючи всі необхідні величини, можна розрахувати температурне поле в досліджуваній області. Така задача називається прямою. Можлива й інша ситуація. Відоме температурне поле, але не відомі значення певних визначальних параметрів, які характеризують конкретне середовище, в якому протікає технічний тепловий процес [101]. У цьому випадку потрібно за температурним полем та відомими значеннями частини визначальних параметрів відновити значення невизначених параметрів середовища. Такі задачі є оберненими, наприклад, у нестаціонарній задачі потрібно за температурним полем, виміряним через певний час після початку експерименту, знайти початкові умови або за стаціонарним температурним полем потрібно знайти відсутні граничні умови.

Досвід показує, що ОЗТ є дуже ресурсоємними задачами, їх розв’язування вимагає великої обчислювальної потужності й значного процесорного часу [44]. Даний розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню можливих шляхів прискорення процедури отримання розв’язків ОЗТ.

2.1. Постановка оберненої задачі теплопровідності

Нехай в області $D\times[0,\tau],\, D\subset\mathbb{R}^n$ задано рівняння теплопровідності [98–101; 140–148]:

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\left(k\nabla T\right). \tag{2.1}$$

Повний розв’язок задачі теплопровідності містить такі дані:

- значення температури в усіх внутрішніх точках розрахункової області задачі, тобто $\forall x \in D,\ \forall t \in [0,\tau]$ відомий розподіл $T(x,t)$. Це означає, що відомі розподіли в початковий момент часу:

$$T_{init}(x) = T(x,0) \tag{2.2}$$

та кінцевий момент часу

$$T_{fin}(x) = T(x,\tau); \tag{2.3}$$

- граничні умови:

$$\partial D = \partial D_D + \partial D_N,\ x \in \partial D_D : T = T(x,\tau);\ x \in \partial D_N:\ \partial T \big/ \partial \vec{n} = p(x,\tau), \tag{2.4}$$

де

∂D – границя розрахункової області;

∂D_D – це частина границі (можливо, порожня), на якій задана умова першого роду (умова Дирихле);

∂D_N – частина границі, на якій задана умова другого роду (умова Неймана);

$\vec{n}$ – нормаль до границі розрахункової області задачі;

- залежність параметрів задачі від координат та температури:

$$\rho = \rho(x,T),\ C = C(x,T),\ k = k(x,T), \tag{2.5}$$

де

ρ – густина тіла;

C – питома теплоємність тіла;

k – коефіцієнт температуропровідності.

Враховуючи вказані вище дані про повний розв’язок задачі теплопровідності, можна сформулювати пряму задачу для рівняння теплопровідності в області $D \times [0,\tau]$. Дано рівняння (2.1), початковий розподіл температури (2.2), граничні умови (2.4), залежності параметрів від координат і температури (2.5). Потрібно знайти кінцевий розподіл температури (2.3) і, як проміжний результат, значення температури в усіх внутрішніх точках розрахункової області для рівняння (2.1) при $\forall t \in [0, \tau]$. ОЗТ вважається розв'язаною, якщо знайдено такий початковий розподіл температури $\overline{T_{init}}(x) = \overline{T}(x, 0)$, що розв'язок прямої задачі з використанням початкової умови цього розподілу $T\left(\overline{T_{init}}\right)$ збігається з потрібним кінцевим розподілом T_{fin}.

Отже, потрібно знайти початковий розподіл температури $\overline{T_{init}}$ такий, що

$$J\left(\overline{T_{init}}\right) = \left\| T\left(\overline{T_{init}}\right) - T_{fin} \right\| \to \min . \tag{2.6}$$

Нормою у функціоналі (2.6) використовується норма L_2, тобто

$$\|x\| = \sqrt{\int_D x^2 dD}$$

або, у дискретному випадку

$$\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2} .$$

Очевидно, що для заданого початкового розподілу $\overline{T_{init}}$ значення $T\left(\overline{T_{init}}\right)$ отримується в результаті розв'язування диференціального рівняння (2.1). Для скорочення записів уведемо для рівняння (2.1) позначення:

$$L(T, \theta) = 0 . \tag{2.7}$$

У (2.7) підкреслюється, що розв'язок отримано з використанням шуканого параметра $L(T, \theta) = 0$, в нашому випадку з початковою умовою $\theta = T(x, 0) = T_{init}(x)$.

Можна сказати, що диференціальне рівняння (2.7) є обмеженням для (2.6). Тобто, враховуючи сучасну класифікацію оптимізаційних задач, маємо справу із задачею пошуку глобального мінімуму функціонала (2.6) з обмеженням у вигляді диференціального рівняння (2.7).

Задачі пошуку екстремуму з обмеженнями записуються з використанням множників Лагранжа, тобто задача ставиться у вигляді задачі на безумовний екстремум:

$$\int\limits_D \left(T(\theta) - T_{fin}\right)^2 dD + \lambda L(T,\theta) \to \min,$$

тому потрібно знайти початковий розподіл температури $\theta = \overline{T_{init}}$ такий, що розподіл $T(\theta)$ дає мінімум функціоналові:

$$J(\theta) = \int\limits_D \left(T(\theta) - T_{fin}\right)^2 dD \to \min, \tag{2.8}$$

причому для довільних початкових умов $\theta = \overline{T_{init}}$ значення $T(\theta)$ у (2.8) знаходиться в результаті розв’язування диференціального рівняння (2.7).

Другою задачею в роботі є задача ідентифікації граничної умови. Нехай задано рівняння (2.1), початковий розподіл температури (2.2), кінцевий розподіл температури (2.3), граничні умови на частині границі у вигляді (2.4), залежності параметрів від координат та температури (2.5). Треба знайти граничні умови (2.4) на тій частині границі розрахункової області, на якій вони не задані (невідомі) і, як проміжний результат, значення температури в усіх внутрішніх точках області. ОЗТ вважається розв’язаною, якщо знайдено такий розподіл температури або температурний потік на границі області, що розв’язок прямої задачі з використанням знайдених граничних умов – розподілу $T\left(\theta_{bound}\right)$ збігається з потрібним кінцевим розподілом T_{fin}.

Аналогічно, третя задача в роботі є задачею ідентифікації коефіцієнта температуропровідності. Нехай задано рівняння (2.1), початковий розподіл температури (2.2), кінцевий розподіл температури (2.3), граничні умови на частині границі у вигляді (2.4), розподіл густини та питомої теплоємності тіла, які залежать від координат і температури (2.5). Треба знайти розподіл значень коефіцієнта температуропровідності в (2.5) і, як проміжний результат, значення температури в усіх внутрішніх точках розрахункової області. ОЗТ вважається розв’язаною, якщо знайдено такий розподіл значень коефіцієнта температуропровідності, що розв’язок прямої задачі з використанням у якості знайдених граничних умов цього розподілу $T\left(\theta_{cond}\right)$ співпадає з потрібним кінцевим розподілом T_{fin}.

2.2. Методика розв’язування задач умовної оптимізації

Як було зазначено раніше, загальна постановка ОЗТ передбачає знаходження екстремуму функціонала за умови обмеження у вигляді диференціальних рівнянь – диференціальних рівнянь математичної фізики. Перед розв’занням ОЗТ опишемо методи розв’язування задач з обмеженнями.

Нехай задано просту задачу на умовний екстремум. Знайти:

$$x_0, y_0 : F\left(x_0, y_0\right) \to \max \tag{2.9}$$

при умові

$$L\left(x_0, y_0\right) = 0. \tag{2.10}$$

Запропонуємо розв’язання задачі (2.9)–(2.10) різними способами.

Перший спосіб. Якщо умову (2.10) можна перетворити до вигляду:

$$y = \varphi\left(x\right), \tag{2.11}$$

тоді підставимо її у вираз (2.9). У результаті цих перетворень отримується задача мінімізації функції від однієї змінної. Її можна сформулювати так: знайти:

$$x_0 : F\left(x_0, \varphi\left(x_0\right)\right) \to \max. \tag{2.12}$$

Тоді розв’язком поставленої задачі (2.9)–(2.10) є рівняння:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0\right) + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dx}\left(x_0\right) = 0. \tag{2.13}$$

Отже, одне обмеження знижує кількість незалежних змінних в (2.9) на одиницю. Але в більшості реальних науково-технічних задачах умову (2.10) неможливо розв’язати відносно *y*. Тому опишемо другий спосіб процедури пошуку екстремуму функції з обмеженням у вигляді рівнянь.

Другий спосіб. Знайдемо $\partial\varphi/\partial x$ як похідну неявної функції

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial L/\partial x}{\partial L/\partial y}.$$

Тоді вираз (2.13) перепишеться у такому вигляді:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial L/\partial x}{\partial L/\partial y}(x_0,y_0)=0. \tag{2.14}$$

Тепер опишемо третій спосіб розв’язування поставленої задачі.

Третій спосіб. Перепишемо (2.13) в такому вигляді:

$$\begin{gathered}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)+\frac{\partial F}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0)=0\right\}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}(x_0,y_0)=0\right\}=\\=\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)dy=0\right\}.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Із виразу (2.10) очевидно випливає вираз:

$$dL(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial L}{\partial x}dx+\frac{\partial L}{\partial y}dy\right)(x_0,y_0)=\frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0)dy=0. \tag{2.16}$$

Обчислимо (2.15)+λ(2.16). В результаті цього матимемо:

$$\begin{gathered}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)dy=0\right\}+\lambda\left\{\frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0)dy=0\right\}=\\=\left\{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)+\lambda\frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0)\right\}dx+\left\{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)+\lambda\frac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0)\right\}dy=0.\end{gathered}$$

Прирости *dx* та *dy* довільні. Тому повинні дорівнювати нулю вирази в дужках. Знайдемо λ так, щоб

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \qquad (2.17)$$

Тоді отримуємо вираз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0) = 0. \qquad (2.18)$$

Очевидно, що вирази (2.17) та (2.18) є умовами екстремуму функції:

$$F(x, y) + \lambda L(x, y).$$

Отже, отримали множники Лагранжа.

Слід зазначити, що всі три описані вище способи є рівносильними. При розв'язуванні задач на умовний екстремум можна користуватись будь-яким із них. Тепер розглянемо приклади. Знайти максимум функції:

$$\max F(x, y) = xy \qquad (2.19)$$

за умови:

$$L(x, y) = x^3 + y^3 - 2 = 0. \qquad (2.20)$$

Перший спосіб. Із виразу (2.20) випливає

$$y = \varphi(x) = \left(2 - x^3\right)^{1/3}.$$

Підставляємо отриманий вираз у вираз (2.19). Отримуємо таку задачу: знайти $\max F(x) = x\left(2 - x^3\right)^{1/3}$. Звідси за необхідною умовою існування екстремуму:

$$F' = \left(2 - x^3\right)^{1/3} + x\frac{1}{3}\frac{\left(-3x^2\right)}{\left(2 - x^3\right)^{2/3}} = 2\frac{1 - x^3}{\left(2 - x^3\right)^{2/3}} = 0 \to x = 1. \qquad (2.21)$$

Це означає, що максимум функції $y = \left(2 - x^3\right)^{1/3} = 1$ знайдено при $x = 1$, тобто значення функції $F(x, y)$ дорівнює також одиниці.

Слід звернути увагу на те, що якщо розглядати функцію $F(x) = x\varphi(x)$, де $\varphi(x) = \left(2 - x^3\right)^{1/3}$, то у виразі (2.21)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x) = \left(2 - x^3\right)^{1/3}, \ \frac{\partial F}{\partial \varphi} = x \text{ та } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{3}\frac{\left(-3x^2\right)}{\left(2 - x^3\right)^{2/3}},$$

то отримуємо повну відповідність з виразом (2.13).

Другий спосіб. У першому способі вважалось, що обмеження $L(x, y) = 0$ може бути представлене у вигляді $y = \varphi(x)$. Тоді можна виключити одну змінну задачі. Тепер вважаємо, що розв'язати це обмеження відносно y неможливо, як раніше, тому маємо

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{\left(-3x^2\right)}{\left(2 - x^3\right)^{2/3}}.$$

Знайдемо похідну останього виразу як похідну неявно заданої функції:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial L/\partial x}{\partial L/\partial y}.$$

У нас $L(x, y) = x^3 + y^3 - 2$. Тоді

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3x^2, \ \frac{\partial L}{\partial y} = 3y^2.$$

Ураховуючи те, що $\partial F/\partial x = y$ та $\partial F/\partial y = x$ вираз (2.18)

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial L/\partial x}{\partial L/\partial y} = 0$$

набуде вигляду

$$y - x\frac{3x^2}{3y^2} = 0.$$

Звідси отримуємо $y^3 = x^3$ або $y = x$. Підставляючи це співвідношення до виразу (2.20), отримуємо $3x^3 = 3$ або $x = y = 1$.

Різниця з попереднім способом полягає у тому, що спочатку вилучили одну змінну і, тим самим, позбулись обмеження. Потім розв'язувалась задача на безумовний екстремум функції від однієї змінної.

У другому способі не можна позбутися від однієї змінної. Це означає, що обмеження залишається в задачі. Із обмеження знаходиться похідна однієї змінної за іншою як похідна неявної функції. Знайшовши цю похідну, підставляємо її в цільову функцію та використовуємо результат для вираження однієї змінної через другу. Остаточні значення змінних знаходяться з обмеження задачі. Тобто цим способом розв'язується система.

Третій спосіб. Множники Лагранжа є зручною формалізацією другого способу – вилучаються неформальні дії представлення однієї змінної через іншу з подальшою пістановкою результату до цільової функції.

Задачі з обмеженнями у вигляді диференціальних рівнянь

Нехай задано задачу. Знайти

$$\max F(x, y) = xy. \tag{2.22}$$

Умову $L(x, y) = x + y - 2 = 0$ або те ж $y = 2 - x$ запишемо у вигляді диференціального рівняння. Враховуючи $y' = -1,\ y'' = 0,$ матимемо

$$y'' - y = x - 2.$$

Граничні умови мають вигляд:

$$y(-2) = -4,\ \ y(2) = 0.$$

Аналогічно, вважаємо що аналітичний розв'язок задачі знайти неможливо.

Тут знову ж розв'язується задача: знайти $\max\limits_{x} F(x, y) = xy$. Раніше виконувалась підстановка аналітичного виразу $y = y(x)$. Тепер доведеться розв'язувати диференціальне рівняння, запам'ятовувати результат та за заданим значененям x знаходити y. Екстремум буде знаходитись чисельно, наприклад, методом Ньютона.

Диференціальні рівняння, які залежать від параметру

Потрібно знайти параметр диференціального рівняння a такий, що визначений інтеграл від розв'язку цього рівняння має екстремальне значення:

$$a : F(a) = \int_0^1 y(x,a)dx \to extremum.$$

Нехай розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y(x,a) = ax(1-x)(a-x) = a\left(x - x^2\right)(a-x) =$$
$$= a\left(ax - ax^2 - x^2 + x^3\right) = a\left(x^3 - x^2(a+1) + ax\right).$$

Тоді

$$\int_0^1 a\left(x^3 - x^2(a+1) + ax\right)dx = \frac{a}{4} - \frac{a^2 + a}{3} + \frac{a^2}{2} = a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - a\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{a^2}{6} - \frac{a}{12}.$$

Екстремум: $\frac{2a}{6} - \frac{1}{12} = 0 \to a = \frac{1}{4}.$

Візьмемо довільне рівняння, яке має вказаний розв'язок. Граничні умови мають вигляд: $y(0,a) = y(1,a) = 0$. Тоді

$$y' = a\left(3x^2 - 2x(a+1) + a\right),\ y'' = a\left(6x - 2(a+1)\right).$$

Отже

$$xy'' - y' - \frac{3y}{x} = a\left(x\left(6x - 2\left(a+1\right)\right) - \left(3x^2 - 2x\left(a+1\right) + a\right) - \frac{3}{x}\left(x^3 - x^2\left(a+1\right) + ax\right) \right) =$$

$$= a\left(6x^2 - 2x\left(a+1\right) - 3x^2 + 2x\left(a+1\right) - a - 3x^2 + 3x\left(a+1\right) - 3a\right) =$$

$$= a\left(x^2\left(6-3-3\right) + x\left(-2\left(a+1\right) + 2\left(a+1\right) + 3\left(a+1\right)\right) - a - 3a\right) =$$

$$= a\left(3x\left(a+1\right) - 4a\right) = 3xa\left(a+1\right) - 4a^2.$$

У результаті отримуємо диференціальне рівняння, яке залежить від параметра:

$$xy'' - y' - \frac{3y}{x} - 3xa\left(a+1\right) + 4a^2 = 0.$$

Остаточне формулювання оптимізаційної задачі. Знайти таке значення параметра a, за якого:

$$a : F\left(a\right) = \int_0^1 y(x,a)dx \to extremum, \tag{2.23}$$

де $y\left(x,a\right)$ – розв’язок диференціального рівняння:

$$xy'' - y' - \frac{3y}{x} - 5xa\left(a+1\right) + 4a^2 = 0, \text{ причому } \forall a \;\; y(0,a) = y\left(1,a\right) = 0. \tag{2.24}$$

Методика розв’язування методом Ньютона

Замість (2.24) розв’язуємо рівняння:

$$\varphi\left(a\right) = \frac{dF}{da} = 0. \tag{2.25}$$

Здійснюємо лінеаризацію (2.25) методом Ньютона:

$$\varphi\left(a_{i+1}\right) = \varphi\left(a_i + \Delta a_i\right) = \varphi\left(a_i\right) + \Delta a_i \frac{d\varphi}{da}\left(a_i\right) = \frac{dF}{da}\left(a_i\right) + \Delta a_i \frac{d^2F}{da^2}\left(a_i\right) = 0.$$

Звідси отримуємо:

$$\Delta a_i = -\left(\frac{dF}{da}(a_i) \bigg/ \frac{d^2F}{da^2}(a_i) \right),$$

$$a_{i+1} = a_i + \Delta a_i.$$

Похідні розраховуються так:

$$\frac{dF}{da}(a_i) = \frac{F(a_i) - F(a_{i-1})}{\Delta a_{i-1}},$$

$$\frac{d^2F}{da^2}(a_i) = \frac{2}{\Delta a_{i-1} + \Delta a_{i-2}} \left(\frac{F(a_i) - F(a_{i-1})}{\Delta a_{i-1}} - \frac{F(a_{i-1}) - F(a_{i-2})}{\Delta a_{i-2}} \right).$$

Тепер перейдемо до розв’язування екстремальної задачі з обмеженням у вигляді диференціального рівняння від двох параметрів.

Залежність від двох параметрів

Задачу на екстремум від двох параметрів можна сформулювати так: знайти

$$a,b : F(a,b) = \int_0^1 y(x,a,b)dx \to extremum, \tag{2.26}$$

де $y(x,a,b)$ – розв’язок диференціального рівняння:

$$L(y,a,b) = 0. \tag{2.27}$$

Методика розв’язування методом Ньютона

Замість (2.27) розв’язуємо систему рівнянь такого виду:

$$\begin{aligned} \varphi_1(a,b) &= \frac{dF}{da} = 0, \\ \varphi_2(a,b) &= \frac{dF}{db} = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Далі проводимо лінеаризацію системи (2.28) за методом Ньютона так:

$$\varphi_1\left(a_{i+1},b_{i+1}\right)=\varphi_1\left(a_i+\Delta a_i,b_i+\Delta b_i\right)=\varphi_1\left(a_i,b_i\right)+\Delta a_i\frac{\partial\varphi_1}{\partial a}\left(a_i,b_{i,}\right)+\Delta b_i\frac{\partial\varphi_1}{\partial b}\left(a_i,b_i\right)=$$

$$=\frac{\partial F}{\partial a}\left(a_i,b_i\right)+\Delta a_i\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}\left(a_i,b_i\right)+\Delta b_i\frac{\partial^2 F}{\partial a\partial b}\left(a_i,b_i\right)=0.$$

Аналогічно для другого рівняння (2.28) маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial b}\left(a_i,b_i\right)+\Delta a_i\frac{\partial^2 F}{\partial b\partial a}\left(a_i,b_i\right)+\Delta b_i\frac{\partial^2 F}{\partial b^2}\left(a_i,b_i\right)=0.$$

Тепер маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\Delta a_i\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}\left(a_i,b_i\right)+\Delta b_i\frac{\partial^2 F}{\partial a\partial b}\left(a_i,b_i\right)=-\frac{\partial F}{\partial a}\left(a_i,b_i\right),\\
&\Delta a_i\frac{d^2 F}{\partial b\partial a}\left(a_i,b_i\right)+\Delta b_i\frac{\partial^2 F}{\partial b^2}\left(a_i,b_i\right)=-\frac{\partial F}{\partial b}\left(a_i,b_i\right).
\end{aligned}$$

Отриману систему можна записати в матричному вигляді так:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 F}{da^2}(a_i,b_i) & \frac{\partial^2 F}{\partial a\partial b}(a_i,b_i)\\ \frac{\partial^2 F}{\partial b\partial a}(a_i,b_i) & \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}(a_i,b_i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta a_i\\ \Delta b_i\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial a}(a_i,b_i)\\ \frac{\partial F}{\partial b}(a_i,b_i)\end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо

$$\begin{pmatrix}\Delta a_i\\ \Delta b_i\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}(a_i,b_i) & \frac{\partial^2 F}{\partial a\partial b}(a_i,b_i)\\ \frac{\partial^2 F}{\partial b\partial a}(a_i,b_i) & \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}(a_i,b_i)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial a}(a_i,b_i)\\ \frac{\partial F}{\partial b}(a_i,b_i)\end{pmatrix}.$$

Врахувуємо, що

$$\begin{aligned}
a_{i+1}&=a_i+\Delta a_i,\\
b_{i+1}&=b_i+\Delta b_i.
\end{aligned}$$

Похідні першого та другого порядків за шуканими параметрами такі:

$$\frac{\partial F}{\partial a}\left(a_i,b_i\right)=\frac{F\left(a_i,b_i\right)-F\left(a_{i-1},b_i\right)}{\Delta a_{i-1}},\ \frac{\partial F}{\partial b}\left(a_i,b_i\right)=\frac{F\left(a_i,b_i\right)-F\left(a_i,b_{i-1}\right)}{\Delta b_{i-1}},$$

$$\frac{d^2F}{da^2}\left(a_i,b_i\right)=\frac{2}{\Delta a_{i-1}+\Delta a_{i-2}}\left(\frac{F\left(a_i,b_i\right)-F\left(a_{i-1},b_i\right)}{\Delta a_{i-1}}-\frac{F\left(a_{i-1},b_i\right)-F\left(a_{i-2},b_i\right)}{\Delta a_{i-2}}\right),$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial a\partial b}\left(a_i,b_i\right)=\frac{1}{\Delta a_{i-1}}\left(\frac{F\left(a_i,b_i\right)-F\left(a_i,b_{i-1}\right)}{\Delta b_{i-1}}-\frac{F\left(a_{i-1},b_i\right)-F\left(a_{i-1},b_{i-1}\right)}{\Delta b_{i-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta a_{i-1}\Delta b_{i-1}}\Big(F\left(a_i,b_i\right)-\big(F\left(a_i,b_{i-1}\right)+F\left(a_{i-1},b_i\right)\big)+F\left(a_{i-1},b_{i-1}\right)\Big),$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial b^2}\left(a_i,b_i\right)=\frac{2}{\Delta b_{i-1}+\Delta b_{i-2}}\left(\frac{F\left(a_i,b_i\right)-F\left(a_i,b_{i-1}\right)}{\Delta b_{i-1}}-\frac{F\left(a_i,b_{i-1}\right)-F\left(a_i,b_{i-2}\right)}{\Delta b_{i-2}}\right),$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial b\partial a}\left(a_i,b_i\right)=\frac{1}{\Delta b_{i-1}}\left(\frac{F\left(a_i,b_i\right)-F\left(a_{i-1},b_i\right)}{\Delta a_{i-1}}-\frac{F\left(a_i,b_{i-1}\right)-F\left(a_{i-1},b_{i-1}\right)}{\Delta a_{i-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta a_{i-1}\Delta b_{i-1}}\Big(F\left(a_i,b_i\right)-\big(F\left(a_{i-1},b_i\right)+F\left(a_i,b_{i-1}\right)\big)+F\left(a_{i-1},b_{i-1}\right)\Big).$$

З останніх перетворень видно, що мішані похідні збігаються, тобто матриця Гессе є симетричною. Для розрахунку всіх похідних потрібно мати набір із шести значень: $F\left(a_i,b_i\right)$, $F\left(a_{i-1},b_i\right)$, $F\left(a_{i-2},b_i\right)$, $F\left(a_i,b_{i-1}\right)$, $F\left(a_{i-1},b_{i-1}\right)$, $F\left(a_i,b_{i-2}\right)$. На новому ітераційному кроці потрібно мати набір із шести значень: $F\left(a_{i+1},b_{i+1}\right)$, $F\left(a_i,b_{i+1}\right)$, $F\left(a_{i-1},b_{i+1}\right)$, $F\left(a_{i+1},b_i\right)$, $F\left(a_i,b_i\right)$, $F\left(a_{i+1},b_{i-1}\right)$.

2.3. Ефективні методи розв'язування обернених задач

Чисельні розв'язки розглянутих у роботі задач отримані методами скінченних різниць та скінченних елементів [101]. Будемо мінімізувати функціонал (2.8) вирішуючи систему рівнянь:

$$\left\{\frac{\partial J}{\partial\left(\theta_i\right)}=0\right\},i=\overline{1,N}, \tag{2.29}$$

де

θ_i – шукане значення температури в *i*-му вузлі розрахункової сітки;

N – загальна кількість вузлів, у яких потрібно знайти значення температури.

Система (2.29) вирішується методом Ньютона та його модифікаціями.

Тоді завдання оптимізації можна поставити в такий спосіб. Серед існуючих чисельних методів оптимізації типу Ньютона обрати найбільш ефективні для знаходження розв'язків ОЗТ та скоротити в них кількість викликів процедури розв'язування ПЗТ.

Приклад. Нехай $f(x) \to \min, x \in R$. Застосуємо спочатку до задачі безумовної оптимізації метод найшвидшого спуску. За напрям спуску можна обрати рух вздовж антиградієнта, наприклад, так [98–101; 105; 140–148]:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k f'\left(x^{(k)}\right),\ h_k > 0, k = 0,1,2,\dots .$$

Задача полягає у тому, щоб знайти на кожному кроці таке значення h_k, що мінімізує функцію при певному значенні $x^{(k)}$, яке взяте з попередньої ітерації. Пошук такого значення h_k може бути реалізований за допомогою будь-яких методів одновимірної безумовної оптимізації. Значення параметра $h_k \in R^1$ береться із умови мінімуму функції $f(x)$ за напрямом руху антиградієнта:

$$f\left(x^{(k)} - h_k \cdot \nabla f\left(x^{(k)}\right)\right) = \min f\left(x^{(k)} - h \cdot \nabla f\left(x^{(k)}\right)\right),\ h > 0.$$

Враховуючи стратегію пошуку глобального мінімуму в одновимірному випадку, можна записати ітераційну формулу для пошуку глобального мінімуму функціонала типу (2.8):

$$J\left(T_{init}^{(k)} - h_k \cdot \nabla J\left(T_{init}^{(k)}\right)\right) = \min J\left(T_{init}^{(k)} - h \cdot \nabla J\left(T_{init}^{(k)}\right)\right),\ h > 0.$$

Отже, використовуючи наближення до початкової умови, його можна уточнити, використовуючи метод найшвидшого спуску.

Модифікації класичного методу Ньютона. Методи цього типу замінюють процедуру розв’язання нелінійної системи рівнянь виду $F_i\left(\vec{x}\right)=F_i\left(x_1,...,x_n\right)=0$ процедурою пошуку розв’язку послідовності систем алгебраїчних рівнянь виду:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\left(\vec{x}^k\right) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\left(\vec{x}^k\right) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}\left(\vec{x}^k\right) & ... & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\left(\vec{x}^k\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1}-x_1^k \\ ... \\ x_n^{k+1}-x_n^k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_1\left(\vec{x}^k\right) \\ ... \\ F_n\left(\vec{x}^k\right) \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Нагадаємо, що потрібно знайти розв’язок системи виду (2.29), де невідомими параметрами є значення початкової умови у вузлах розрахункової сітки. Отже, матрицею системи (2.30) буде гессіан вихідної системи, тобто матриця, яка складається з других похідних рівнянь системи:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J_1}{\partial T_{init_1}^2}\left(T_{init}^k\right) & ... & \frac{\partial^2 J_1}{\partial T_{init_1}\partial T_{init_n}}\left(T_{init}^k\right) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 J_n}{\partial T_{init_n}\partial T_{init_1}}\left(T_{init}^k\right) & ... & \frac{\partial^2 J_n}{\partial T_{init_n}^2}\left(T_{init}^k\right) \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Оскільки для розрахунку гессіана в (2.31) здійснюється диференціювання роз’язку за початковою умовою, то, в загальному випадку, знайти похідну аналітично у подібних задачах просто неможливо. Її потрібно знаходити чисельно з використанням урізаного ряду Тейлора. Для чисельного пошуку другої похідної необхідно мати значення диференційованої функції в трьох точках, а для пошуку мішаної похідної – в чотирьох точках.

Розглянемо простий випадок. Нехай потрібно розв’язати нелінійне рівняння виду $F\left(x\right)=0$. Класичний метод Ньютона, яким розв’язується це рівняння, має такий вигляд:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{F\left(x_k\right)}{F'\left(x_k\right)}. \tag{2.32}$$

Підвищити точність методу (2.32) можна за рахунок такого підходу. Нехай потрібно розв'язати диференціальне рівняння виду $y' = f(x)$. Інтегруючи обидві його частини, отримаємо вираз:

$$\left\{ \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \right\} = \left\{ y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \right\} = \left\{ y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx \right\}. \quad (2.33)$$

Очевидно, що процедура знаходження інтеграла тісно пов'язана з точністю обрахунків. Використовуючи формулу правих прямокутників, рівняння (2.33) можна переписати в такому вигляді:

$$\begin{gathered} \left\{ y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx \right\} = \left\{ y_{k+1} = y_k + h y'(x_k) \right\} = \\ = \left\{ y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) y'(x_k) \right\}. \end{gathered} \quad (2.34)$$

Дані перетворення зводяться до класичного методу Ньютона, якщо в (2.34) взяти $y_{k+1} = 0$ та розв'язати рівняння відносно x_{k+1}. Відомо, що точність одного ітераційного кроку методу ламаних $O\left(h^2\right)$. Аналогічну точність обчислень має й класичний метод Ньютона. Підвищити точність одного кроку при розв'язуванні рівняння можна, використовуючи метод предиктор-коректор. При застосуванні методу трапецій для знаходження інтеграла будемо мати:

$$\begin{gathered} \left\{ y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx \right\} = \left\{ y_{k+1} = y_k + 0.5h\left(y'(x_k) + y'(x_{k+1}) \right) \right\}, \\ \left\{ y_{k+1} = y_k + 0.5(x_{k+1} - x_k)\left(y'(x_k) + y'(x_{k+1}) \right) \right\}. \end{gathered} \quad (2.35)$$

У виразі (2.35) значення $y'(x_{k+1})$ невідоме. Для нього проводиться оцінка. Оцінку можна здійснювати з використанням методу ламаних так:

$$z = x_k - \beta \frac{y_k}{y_k'}, \quad (2.36)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2y_k}{y'(x_k) + y'(z)}.$$

Найпопулярнішою варіацією (2.36) є використання $\beta = 1$. Також можна запропонувати методи, в яких у правилі трапецій беруть не середнє арифметичне значень на кінцях, а среднє геометричне. У результаті отримаємо:

$$\left\{ y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx \right\} = \left\{ y_{k+1} = y_k + h\frac{\left(y'(x_k)y'(x_{k+1})\right)}{0.5\left(y'(x_k) + y'(x_{k+1})\right)} \right\}. \tag{2.37}$$

Аналогічно проводиться оцінка невідомого значення в (2.37) для $y'(x_{k+1})$. У результаті маємо:

$$z = x_k - \beta\frac{y_k}{y'_k}, \; x_{k+1} = x_k - y_k\frac{\left(y'(x_k) + y'(z)\right)}{2y'(x_k)y'(z)}. \tag{2.38}$$

Ще один варіант, який відповідає правилу середніх, можна записати так:

$$\begin{gathered} \left\{ y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx \right\} = \left\{ y_{k+1} = y_k + hy'\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right\} = \\ = \left\{ y_{k+1} = y_k + \left(x_{k+1} - x_k\right)y'\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right\}. \end{gathered} \tag{2.39}$$

У (2.39) міститься множник, який як і в попередніх виразах потребує проведення оцінки. У результаті будемо мати:

$$z = x_k - \beta\frac{y_k}{y'_k}, \; x_{k+1} = x_k - \frac{y_k}{y'\left(\frac{x_k + z}{2}\right)}. \tag{2.40}$$

Очевидно, що останній метод має третій порядок точності обчислень.

Розв’язуючи основні класи ОЗТ, як було раніше зазначено, похідні функціонала за кожним його параметром потрібно обраховувати чисельно, оскільки розв’язок подібних задач може бути отриманий тільки чисельно, тобто у вигляді таблиць значень. Перед записом формул описаних вище методів (2.36), (2.38) та (2.40) запишемо класичний метод Ньютона для поставленої ОЗТ.

$$\begin{aligned} G^k \Delta\theta^k &= -R^k, \\ \theta^{k+1} &= \theta^k + \Delta\theta^k \end{aligned}, \tag{2.41}$$

де

$G = \left(G_{ij}\right) = \left(\partial^2 J / \partial\theta_i \partial\theta_j\right)$	– матриця Гессе;
$\Delta\theta = \left(\Delta\theta_1, ..., \Delta\theta_n\right)^T$	– вектор-стовпчик приростів параметрів;
$R = \left(R_1, ..., R_n\right)^T = \left(\partial J/\partial\theta_1, ..., \partial J/\partial\theta_n\right)^T$	– вектор-стовпчик похідних цільового функціонала.

Використання методів (2.36), (2.38) та (2.40) для модификації методу (2.32) веде до таких методів. Нагадаємо, що розв’язується ОЗТ, яка зводиться до знаходження мінімуму функціонала типу (2.8). У даному випадку формули методу (2.36) для мінімізації функціонала записуються так:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - 2 \cdot \left(H\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) + H\left(\bar{z}\right)\right)^{-1} J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Аналогічно, формули методу (2.39) розв’зування нелінійної ОЗТ такі:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right), \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - \frac{1}{2} \cdot \left(H\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) \cdot H\left(\bar{z}\right)\right)^{-1} \left(H\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) + H\left(\bar{z}\right)\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Формули методу (2.40) для поставленої задачі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \bar{\theta}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\bar{\theta}^{(k)}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right), \\ \bar{\theta}^{(k+1)} &= \bar{\theta}^{(k)} - H^{-1}\left(\frac{\bar{\theta}^{(k)} + \bar{z}}{2}\right) J\left(\bar{\theta}^{(k)}\right). \end{aligned} \tag{2.44}$$

де

$\overline{\theta}^{(k)}$ – вектор невідомих задачі на *k*-ій ітерації;

H – матриця Гессе.

Слід зазначити, що метод (2.44) має третій порядок точності.

Для прискорення роботи методів (2.42), (2.43) та (2.44) на нелінійних ОЗТ в цілому, використовують метод найшвидшого спуску для знаходження вектора $\overline{\theta}^{(k+1)}$. Тоді формулювання методу (2.42) остаточно записується так:

$$\begin{gathered}
J\left(\overline{\theta}^{(k)}-\beta_k\cdot\nabla J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)\right)=\min J\left(\overline{\theta}^{(k)}-\beta\cdot\nabla J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)\right),\ \beta>0,\\
\overline{z}=\overline{\theta}^{(k)}-\beta\cdot H^{-1}\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right),\\
J\left(\overline{z}-h_k\cdot\nabla J\left(\overline{z}\right)\right)=\min J\left(\overline{z}-h\cdot\nabla J\left(\overline{z}\right)\right),\ h>0,\\
\overline{\theta}^{(k+1)}=\overline{\theta}^{(k)}-2h_k\cdot\left(H\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)+H\left(\overline{z}\right)\right)^{-1}J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right).
\end{gathered}\tag{2.45}$$

Аналогічно формулювання методу (2.43) остаточно записується у вигляді:

$$\begin{gathered}
J\left(\overline{\theta}^{(k)}-\beta_k\cdot\nabla J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)\right)=\min J\left(\overline{\theta}^{(k)}-\beta\cdot\nabla J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)\right),\ \beta>0,\\
\overline{z}=\overline{\theta}^{(k)}-\beta\cdot H^{-1}\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right).\\
J\left(\overline{z}-h_k\cdot\nabla J\left(\overline{z}\right)\right)=\min J\left(\overline{z}-h\cdot\nabla J\left(\overline{z}\right)\right),\ h>0,\\
\overline{\theta}^{(k+1)}=\overline{\theta}^{(k)}-\frac{h_k}{2}\cdot\left(H\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)\cdot H\left(\overline{z}\right)\right)^{-1}\left(H\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)+H\left(\overline{z}\right)\right)J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right).
\end{gathered}\tag{2.46}$$

Формулювання методу (2.44) до поставленої ОЗТ матиме такий вигляд:

$$\begin{gathered}
J\left(\overline{\theta}^{(k)}-\beta_k\cdot\nabla J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)\right)=\min J\left(\overline{\theta}^{(k)}-\beta\cdot\nabla J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)\right),\ \beta>0,\\
\overline{z}=\overline{\theta}^{(k)}-\beta\cdot H^{-1}\left(\overline{\theta}^{(k)}\right)J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right),\\
J\left(\overline{z}-h_k\cdot\nabla J\left(\overline{z}\right)\right)=\min J\left(\overline{z}-h\cdot\nabla J\left(\overline{z}\right)\right),\ h>0,\\
\overline{\theta}^{(k+1)}=\overline{\theta}^{(k)}-h_kH^{-1}\left(\left(\overline{\theta}^{(k)}+\overline{z}\right)\big/2\right)J\left(\overline{\theta}^{(k)}\right).
\end{gathered}\tag{2.47}$$

Очевидно, що при знаходженні розв'язку ОЗТ класичним методом Ньютона, потрібно знайти градієнт функціонала (2.8). Для цього треба знайти чисельні розв'язки $2n$ ПЗТ, де n – кількість параметрів. При обчисленні кожного недіагонального елемента матриці Гессе потрібно розв'язати ще $4n$ ПЗТ. Ураховуючи симетричність матриці Гессе, кількість розв'язків ПЗТ на один крок ітерації класичного методу Ньютона така [98–101; 140–148]:

$$N_f = 1 + 4\left(1 + 2 + \ldots + n\right) + 2n = 1 + 2n\left(n+1\right) + 2n = 2n^2 + 4n + 1.$$

Очевидно, що кількість викликів процедури розв'язування ПЗТ на один ітераційний крок розв'язування ОЗТ класичним методом Ньютона має квадратичну залежність. У такому разі тут можливі прискорення. Один із найефективніших шляхів прискорення є проведення процедури інтерполювання.

Інтерполяційний метод для розрахунку елементів гессіана

Відомо, що всі частинні похідні другого порядку в гессіані обраховуються лише чисельно для нелінійних ОЗТ. Розглянемо функцію двох змінних $F\left(x, y\right)$, для якої необхідно знайти глобальний мінімум у просторі $\mathbb{R}^2$. Тобто задача ставиться так:

$$F\left(x, y\right) \to \min, \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.48}$$

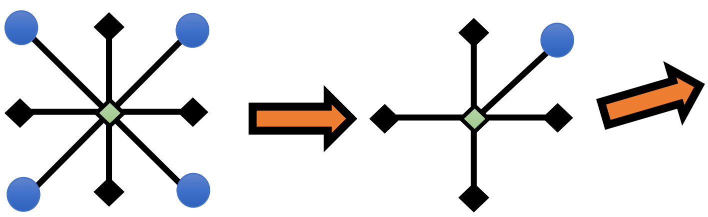
Класичний метод Ньютона для задачі (2.48) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) \end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

Запишемо похідні першого та другого порядків, які обчислюються в (2.49) чисельно з використанням різницевого методу:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)=\left(F\left(x^{(k)}+\Delta x,y^{(k)}\right)-F\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)\right)\Big/\Delta x,\\
\frac{\partial F}{\partial y}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)=\left(F\left(x^{(k)},y^{(k)}+\Delta y\right)-F\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)\right)\Big/\Delta y,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)=\frac{F\left(x^{(k)}-\Delta x,y^{(k)}\right)-2F\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)+F\left(x^{(k)}+\Delta x,y^{(k)}\right)}{(\Delta x)^2},\\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)=\frac{F\left(x^{(k)},y^{(k)}-\Delta y\right)-2F\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)+F\left(x^{(k)},y^{(k)}+\Delta y\right)}{(\Delta y)^2},\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)=\frac{F\left(x^{(k)}+\Delta x,y^{(k)}+\Delta y\right)+F\left(x^{(k)}-\Delta x,y^{(k)}-\Delta y\right)}{4\Delta x\Delta y}-\\
-\frac{F\left(x^{(k)}-\Delta x,y^{(k)}+\Delta y\right)+F\left(x^{(k)}+\Delta x,y^{(k)}-\Delta y\right)}{4\Delta x\Delta y}.
\end{gathered}
\tag{2.50}
$$

Отже, для розрахунку нової пари чисел $\left(x^{(k+1)},y^{(k+1)}\right)$ потрібно мати 8 точок, окрім центральної точки $\left(x^{(k)},y^{(k)}\right)$, з яких 4 точки необхідні для обчислення мішаних других похідних – для елементів гессіану, які не стоять на головній його діагоналі. Головною ідеєю застосування методу інтерполяції є отримання пари чисел $\left(x^{(k+1)},y^{(k+1)}\right)$ з використанням 6 точок, на яких будується поверхня другого порядку. Схема ідеї інтерполювання має вигляд:



$$
\begin{gathered}
f(x,y)=a_1x^2+a_2y^2+a_3xy+\\
+a_4x+a_5y+a_6
\end{gathered}
$$

$$
f''_{xx}=2a_1,\ f''_{yy}=2a_2,\ \boldsymbol{f''_{xy}=a_3}.
$$

Для прикладу візьмемо точку $(1;1)$, в якій потрібно знайти частинну похідну функції $F(x,y)$, яка має такий вигляд: $F(x,y)=\cos\left(\left(y^2+1\right)/(xy+4)\right)$.

Знайдемо мішану похідну другого порядку трьома способами: чисельно за допомогою останньої формули в (2.50), чисельно з використанням інтерполяції та аналітично (для перевірки та аналізу результатів).

<u>*Перший спосіб*</u>. Значення приростів $\Delta x = 0{,}01;\ \Delta y = 0{,}01.$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(1;1) = \frac{F(1+0{,}01;1+0{,}01) + F(1-0{,}01;1-0{,}01)}{4\cdot 0{,}01\cdot 0{,}01} -$$
$$-\frac{F(1-0{,}01;1+0{,}01) + F(1+0{,}01;1-0{,}01)}{4\cdot 0{,}01\cdot 0{,}01} \approx 0{,}036.$$

<u>*Другий спосіб*</u>. Інтерполяційна поверхня другого порядку від двох просторових змінних має такий вигляд:

$$F_{\text{interp}}(x,y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6.$$

Для однозначного визначення шести коефіцієнтів рівняння поверхні необхідно мати координати шести точок. Нехай дано шість точок з координатами $(1;1)$, $(1+0{,}01;1)$, $(1-0{,}01;1)$, $(1;1+0{,}01)$, $(1;1-0{,}01)$, $(1+0{,}01;1+0{,}01)$. Складемо систему лінійних аглебраїчних рівнянь (СЛАР) у матричній формі, яка має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \\ x_6^2 & y_6^2 & x_6y_6 & x_6 & y_6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x_1,y_1) \\ F(x_2,y_2) \\ F(x_3,y_3) \\ F(x_4,y_4) \\ F(x_5,y_5) \\ F(x_6,y_6) \end{pmatrix}.$$

Підставивши 6 точок та розв’язавши СЛАР, отримаємо значення коефіцієнта $a_3 \approx 0{,}036.$

<u>*Третій спосіб*</u>. Знайдемо аналітично для перевірки мішану похідну другого порядку для функції $F(x,y)$.

$$F_x'(x,y) = -\frac{xy+4-y(x+y)}{(xy+4)^2}\sin\left(\frac{x+y}{xy+4}\right) = \frac{y^2-4}{(xy+4)^2}\sin\left(\frac{x+y}{xy+4}\right).$$

$$F''_{yx} = F''_{xy} = \frac{2y(xy+4)^2 - 2x(xy+4)(y^2-4)}{(xy+4)^4}\sin\left(\frac{x+y}{xy+4}\right) +$$

$$+\frac{y^2-4}{(xy+4)^2}\,\frac{xy+4-x(x+y)}{(xy+4)^2}\cos\left(\frac{x+y}{xy+4}\right) =$$

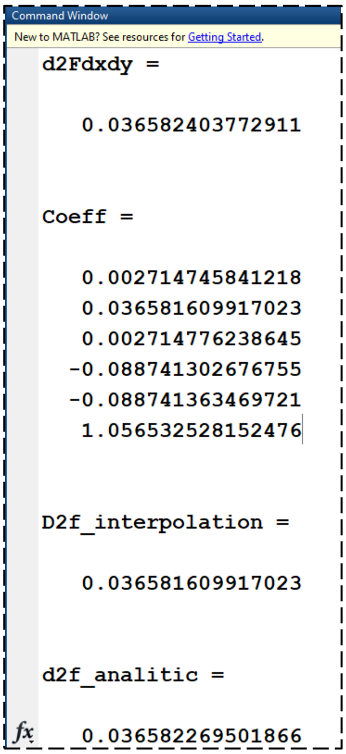
$$= \frac{2y(xy+4)-2x(y^2-4)}{(xy+4)^3}\sin\left(\frac{x+y}{xy+4}\right) + \frac{(y^2-4)(4-x^2)}{(xy+4)^4}\cos\left(\frac{x+y}{xy+4}\right) =$$

$$= \frac{8(x+y)}{(xy+4)^3}\sin\left(\frac{x+y}{xy+4}\right) + \frac{(y^2-4)(4-x^2)}{(xy+4)^4}\cos\left(\frac{x+y}{xy+4}\right).$$

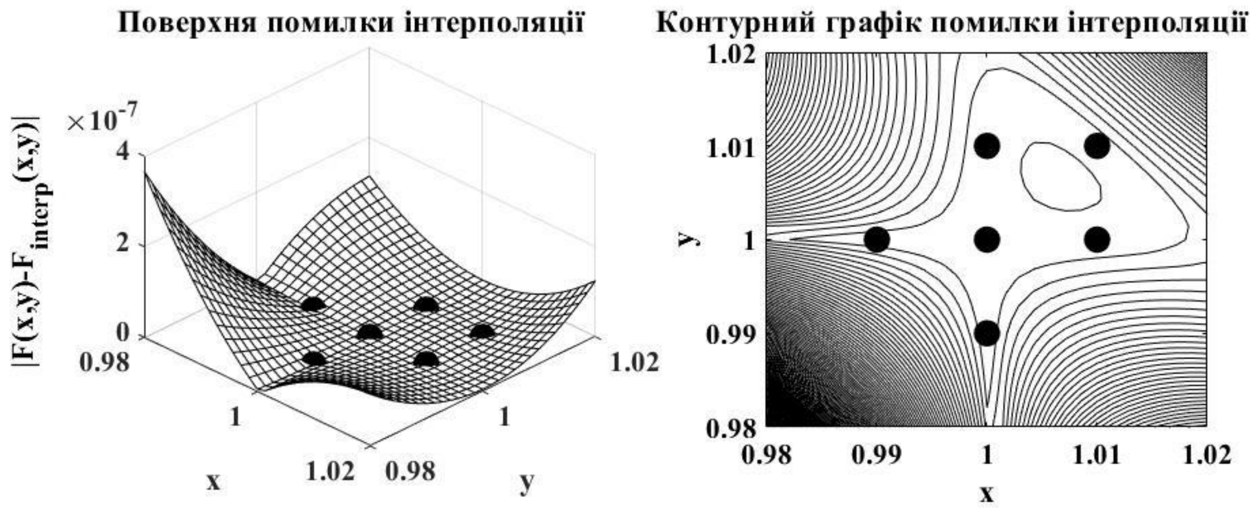
Отже, отримали результат $F''_{yx}(1;1) = F''_{xy}(1;1) \approx 0{,}036.$

Для перевірки отриманих розрахунків можна створити програмний код:

```
function test
clc;

x = 1; y = 1;
dx = 1e-2; dy = 1e-2;

d2Fdxdy = (F(x+dx,y+dy)+F(x-dx,y-dy)-F(x-dx,y+dy)-
F(x+dx,y-dy))/(4*dx*dy)

Points = [x y; x+dx y; x-dx y; x y+dy; x y-dy; x+dx
y+dy];
Px = Points(:,1);
Py = Points(:,2);
A = [Px.^2 Px.*Py Py.^2 Px Py ones(numel(Px),1)];
B = F(Px,Py);
Coeff = A\B
D2f_interpolation = Coeff(2)
d2f_analitic = d2F(x,y)

function z = F(x,y)
z = cos((x+y)./(x.*y+4));

function z = d2F(x,y)
z = 8*(x+y)/(x*y+4)^3*sin((x+y)/(x*y+4))+(y^2-4)*(4-
x^2)/(x*y+4)^4*cos((x+y)/(x*y+4));
```



Тепер здійснимо візуалізацію поверхні помилки при інтерполюванні для знаходження мішаної похідної другого порядку в гессіані.



Такий підхід дає можливість ефективно розв’язувати багатовимірні нелінійні ОЗТ. На кожній ітерації ОЗТ для двовимірних досліджуваних об’єктів при знаходженні елементів гессіану, використовуються лише 6 точок із 9.

При дослідженні теплових процесів, які зводяться до аналізу тривимірних об’єктів поверхня друго порядку матиме вигляд:

$$F_{\text{interp}}(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}.$$

Для прикладу візьмемо функцію $F(x,y,z)=\sin\left(yz-xy+z^2\right)$.

Знайдемо всі частинні похідні другого порядку для даної функції:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-y\cos\left(yz-xy+z^2\right),\ \frac{\partial F}{\partial y}=(z-x)\cos\left(yz-xy+z^2\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=(y+2z)\cos\left(yz-xy+z^2\right).$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-y^2\sin\left(yz-xy+z^2\right),\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-(z-x)^2\sin\left(yz-xy+z^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=2\cos\left(yz-xy+z^2\right)-(y+2z)^2\sin\left(yz-xy+z^2\right).$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-\cos\left(yz-xy+z^2\right)+y(z-x)\sin\left(yz-xy+z^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=y(y+2z)\sin\left(yz-xy+z^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=\cos\left(yz-xy+z^2\right)-(z-x)(y+2z)\sin\left(yz-xy+z^2\right),$$

Для обчислення мішаних похідних другого порядку створено такий програмний код:

```
function test
clc; close all;
x = 1; y = 2; z = 3;
dx = 1e-5; dy = 1e-5;  dz = 1e-5;
Points = [x y z;
          x+dx y z;
          x-dx y z;
          x y+dy z;
          x y-dy z;
          x y z+dz;
          x y z-dz;
          x+dx y+dy z;
          x-dx y z-dz;
          x y+dy z+dz];
Px = Points(:,1);
Py = Points(:,2);
Pz = Points(:,3);
A = [Px.^2 Py.^2 Pz.^2 Px.*Py Px.*Pz Py.*Pz Px Py
Pz ones(numel(Px),1)];
B = F(Px,Py,Pz);
Coeff = A\B
dF2_dx2 = dF2dx2(x,y,z); a1 = 2*Coeff(1);
dF2_dy2 = dF2dy2(x,y,z); a2 = 2*Coeff(2);
dF2_dz2 = dF2dz2(x,y,z); a3 = 2*Coeff(3);
dF2_dxdy = dF2dxdy(x,y,z); a4 = Coeff(4);
dF2_dxdz = dF2dxdz(x,y,z); a5 = Coeff(5);
dF2_dydz = dF2dydz(x,y,z); a6 = Coeff(6);
```

```
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
  -0.008405571967908
  -0.125382512173234
   0.007735467129779
   0.067223835978105
  -0.058153888576711
  -0.218480889456857
   0.218497422087300
   0.873974756633894
  -1.533985523373895

dF2dx2  =  -1.68066815;
a1 =  -1.68104884.
dF2dy2  =  -1.68066815;
a2 =  -1.68111439.
dF2dz2  = -25.07579679;
a3 = -25.07650243.
dF2dxdy =   0.77322137;
a4 =   0.77354671.
dF2dxdz =   6.72267259;
a5 =   6.72238360.
dF2dydz =  -5.81522581;
a6 =  -5.81538886.
fx >>
```

```
function z = F(x,y,z)
z = sin(y.*z - x.*y + z.^2);

function z = dF2dx2(x,y,z)
z = -y^2*sin(y*z - x*y + z^2);

function z = dF2dy2(x,y,z)
z = -(z-x)^2*sin(y*z - x*y + z^2);

function z = dF2dz2(x,y,z)
z = 2*cos(y*z - x*y + z^2) - (y+2*z)^2*sin(y*z - x*y + z^2) ;

function z = dF2dxdy(x,y,z)
z = -cos(y*z - x*y + z^2) + y*(z-x)*sin(y*z - x*y + z^2);

function z = dF2dxdz(x,y,z)
z = y*(y+2*z)*sin(y*z - x*y + z^2);

function z = dF2dydz(x,y,z)
z = cos(y*z - x*y + z^2) - (z-x)*(y+2*z)*sin(y*z - x*y + z^2);
```

За результатами розрахунків бачимо, що для знаходження всіх чисельних похідних необхідно використовувати 27 точок. Для побудови поверхні інтерполювання використано лише 10 точок. Тому значення мішаних похідних можна розраховувати для багатовимірних ОЗТ з використанням методу інтерполяції. Слід також відмітити, що 6/9 > 10/27. У такому випадку з ростом розмірності задачі необхідно змешнувати значення приростів змінних при побудові поверхні інтерполювання для знаходженні елементів гессіану.

Для *n*-вимірного випадку рівняння інтерполяційної поверхні в короткій формі має такий вигляд:

$$F_{\mathrm{interp}}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\left(a_{i,j}\, x_i x_j\right).$$

Інтерполювання поверхнями другого порядку дає низку переваг, особливо з ростом розмірності ОЗТ. Слід зазначити, що інтерполювання доцільно застосовувати для нелінійних ОЗТ.

2.4. Метод Фур'є для побудови початкових наближень

Розглянемо просту пряму задачу теплопровідності в однорідному стержні довжиною L, яка описується параболічним рівнянням виду [наприклад, 100]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ x \in [0;L], t \in \left[0, t_f\right]. \tag{2.51}$$

Початкові умови мають вигляд:

$$T(x,0) = \theta(x). \tag{2.52}$$

Граничні умови для (2.51) можуть бути довільними. Прикладом граничних умов візьмемо умови Дирихле, які мають вигляд:

$$T(0,t) = 0,\ T(L,t) = 1. \tag{2.53}$$

Розв'язавши пряму задачу (2.51)–(2.53), знаходиться розподіл температури у момент часу t_f:

$$T\left(x, t_f\right) = \Theta\left(x\right). \tag{2.54}$$

Тоді обернена задача формулюється наступним чином: знаючи рівняння (2.51), граничні умови (2.52) та кінцевий розподіл температури (2.54), відновити початковий розподіл температури (2.53).

Запишемо для поставленої задачі одну з найпопулярніших математичних класичних постановок. Знайти розподіл $\theta(x)$ такий, що

$$J\left(\theta\left(x\right)\right)=\int_0^L\left(T\left(\theta,x,t_f\right)-\Theta\left(x\right)\right)^2dx\rightarrow\min, \tag{2.55}$$

де $T\left(\theta,x,t_f\right)$ температурне поле, яке є розв'язком задачі при шуканому $\theta(x)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\\ x\in[0;L],\ t\in\left[0,t_f\right],\\ T\left(x,0\right)=\theta\left(x\right).\end{gathered} \tag{2.56}$$

Граничними умовами задачі (2.55) при (2.56) є умови виду (2.53). Фактично задача (2.55)–(2.56) є задачею мінімізації з обмеженням у вигляді диференціальних рівнянь. Задача мінімізації розв'язується у дискретній формі. На відрізку $[0;L]$ вводяться n вузлів x_i, $i=\overline{1,n}$. Отже, для розв'язання задачі (2.55) необхідно знайти значення $\theta_i=\theta(x_i)=T(x_i,0)$, $i=\overline{1,n}$ в цих вузлах, тобто розв'язок залежить від n параметрів.

Відомий розв'язок ПЗТ (2.56) у фіксований момент часу розкладається в ряд Фур'є. Потрібно знайти розподіл температури у початковий момент часу. Загальний розв'язок однорідної нестаціонарної задачі теплопровідності можна представити у вигляді:

$$T\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{-k^2t}\sin\left(kx\right).$$

Очевидно, що в початковий момент часу, умова подається у вигляді:

$$T\left(x,0\right)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\left(kx\right).$$

Уведемо позначення:

$$D_k=C_k e^{-k^2t}.$$

Тоді у будь-який фіксований момент часу розв'язок можна представити так:

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin(kx).$$

Отриманий експериментальним шляхом розподіл температури розкладається в ряд та знаходяться невідомі D_k. Оскільки момент часу відомий, то з виразу $D_k = C_k e^{-k^2 t}$ легко знаходяться невідомі значення C_k, тим самим знаходиться наближення до початкової умови. Дане наближення є урізаним рядом. Загальний розв'язок будь-якого диференціального рівняння представляється у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Описаний метод базується на тому факті, що розв'язок рівняння теплопровідності у певний момент часу t_f можна розкласти у ряд Фур'є, взявши лише кілька членів цього розкладу. Після процесу розкладу в ряд проводиться процес уточнення наближення. Спочатку, опишемо нижче метод для одновимірного випадку.

Спочатку буде розглянуто стандартну пряму одновимірну задачу теплопровідності в однорідному середовищі, яка має вид (2.51)–(2.53). Далі до рівняння теплопровідності застосовується метод розділення змінних [100]. Якщо $L = \pi$, то розв'язок цього рівняння з нульовими граничними умовами першого роду буде мати такий вигляд:

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t} \sin(kx). \qquad (2.57)$$

Задачу (2.51)–(2.53), зробивши заміну змінних у рівнянні теплопровідності, завжди можна звести до задачі з граничними умовами зі значеннями 0 та 1. У даному випадку розв'язок задачі (2.57) в момент часу t_f можна буде записати так [100]:

$$T\left(x,t_f\right)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{-k^2 t_f}\sin\left(kx\right)+\frac{x}{\pi}. \qquad (2.58)$$

Використавши ряд Фур'є, отримується загальний розв'язок задачі (2.51)–(2.53) з граничними умовами $T\left(0,t\right)=0$, $T\left(\pi,t\right)=1$. Тоді початкову задачі з урахуванням (2.58) можна записати у вигляді:

$$T\left(x,0\right)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\left(kx\right)+\frac{x}{\pi}. \qquad (2.59)$$

Оскільки потрібно знайти початкову умову (2.59) оберненої задачі (2.55), (2.51), (2.54), (2.53), то константи C_k отримуються розкладом у ряд розв'язку прямої задачі теплопровідності в момент часу t_f. Значення $T\left(x,t_f\right)$ в реальних технічних задачах можуть бути отримані лише експериментально. Очевидно, що в (2.59) береться кілька членів розкладу початкової умови в ряд. У будь-якому випадку отримано якісне наближення до початкової умови. Візьмемо в (2.59) N перших доданків. Тоді матимемо

$$T\left(x,0\right)\approx\sum_{k=1}^{N}C_k\sin\left(kx\right)+\frac{x}{\pi}. \qquad (2.60)$$

Вираз (2.60) є лише наближенням до початкової умови. У зв'язку з цим вводиться функція помилки $f_{err}\left(x\right)$. Тоді будемо мати:

$$T\left(x,0\right)=\sum_{k=1}^{N}C_k\sin\left(kx\right)+\frac{x}{\pi}+f_{err}\left(x\right). \qquad (2.61)$$

У (2.61) значення $C_k, k=\overline{1,N}$ відомі, то розв'язок поставленої ОЗТ полягає в знаходженні $f_{err}\left(x\right)$. Для розв'язання задачі використовується той же функціонал (2.55). Сам процес мінімізації (2.55) буде вже здійснюватись методом найшвидшого спуску для отриманого наближення до початкової умови. Завдяки такому підходу суттєво зменшується кількість викликів функції розв'язування ПЗТ. Для застосування цього інструменту знаходиться чисельно градієнт функціонала (2.55). Перші похідні за невідомими аргументами функціонала, враховуючи, що він залежить від невідомої функції поправки, обчислюються з використанням (2.61). Для знаходження мінімуму функціонала виконується рух у напрямі антиградієнта. Довжину кроку визначається будь-яким методом одновимірної безумовної оптимізації, наприклад, тим самим методом Ньютона.

У двовимірній оберненій задачі теплопровідності ситуація та сама. Розв’язок двовимірного рівняння теплопровідності представляється у вигляді суми загального розв’язку відповідного однорідного рівняння та деякого частинного розв’язку неоднорідного рівняння. Розв’язок неоднорідного рівняння знаходиться будь-яким чисельним методом.

Нехай в рівнянні

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = k\left(\frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2}\right) \tag{2.62}$$

розв’язок знаходиться в області $\Omega : \left[0; L_x\right] \times \left[0; L_y\right]$. На границях розрахункової області задані, наприклад, нульові умови першого роду. Застосовуючи метод розділення змінних для (2.62), шуканий розв’язок знаходиться у вигляді $T\left(x, y, \tau\right) = F_1\left(x\right) F_2\left(y\right) F_3\left(t\right)$. Тоді отримується система рівнянь:

$$\begin{cases} F_1\left(x\right) = \overline{C_1} \cos \lambda_1 x + \overline{C_2} \sin \lambda_1 x, \\ F_2\left(y\right) = \overline{C_3} \cos \lambda_2 y + \overline{C_4} \sin \lambda_2 y, \\ F_3\left(t\right) = \overline{C_5} e^{-\lambda^2 t},\ \lambda^2 = k\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right). \end{cases}$$

Використавши граничні умови, загальний розв’язок однорідної задачі є:

$$\begin{gathered} F_3\left(t\right) = e^{-k\left(\left(\frac{\pi n}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L_y}\right)^2\right)t}, \\ T\left(x, y, t\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi n x}{L_x} \sin \frac{\pi m y}{L_y} F_3\left(t\right). \end{gathered} \tag{2.63}$$

Далі процедура аналогічна одновимірному випадку. Тепер вже функція помилки буде мати вигляд $f_{err}\left(x, y\right)$. Перенумерувавши всі невідомі параметри, можна записати похідні за невідомими аргументами функціонала (2.55), які обчислюються з використанням (2.63).

Описаний метод тестувався на низці лінійних та нелінійих ОЗТ. Слід зазначити, що описаний метод також ефективний на задачах, у яких граничні умови змінюються в часі. Для прикладу розглянемо кілька різних ОЗТ.

Перша задача. Знайти глобальний мінімум функціонала:

$$J\left(\theta(x,y)\right)=\int_0^1\int_0^1\left(T\left(\theta,x,y,t_f\right)-\Theta\left(x,y\right)\right)^2 dxdy\to\min, \tag{2.64}$$

за умови:

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\left(x,y\right)\in[0;1]^2,t\in\left[0,t_f\right],t_f=0.1,\\ T(x,y,0)=\theta(x,y),\end{gathered} \tag{2.65}$$

де функція

$\theta(x,y)$ – невідома функція;

$T\left(\theta,x,t_f\right)$ – шуканий розв’язок задачі;

$\Theta\left(x,y\right)$ – заданий розподіл температури у момент часу t_f.

Граничні умови задачі мають такий вигляд:

$$\begin{gathered}T(x,0,t)=0.5\sin(\pi x),\ T(x,1,t)=0.5\sin(2\pi x),\\ T(0,y,t)=0.5\sin(2\pi y),\ T(1,y,t)=0.5\sin(\pi y).\end{gathered} \tag{2.66}$$

У задачі (2.64)–(2.66) відомий розподіл $T(x,y,t_f)$, який зображено на рис. 2.1.

Очевидно, що задача є некоректно поставленою. Розв’язок задачі будемо шукати вищеописаними методами. На рис. 2.1 та рис. 2.2. показані результати роботи методу на двох вищерозглянутих задачах.

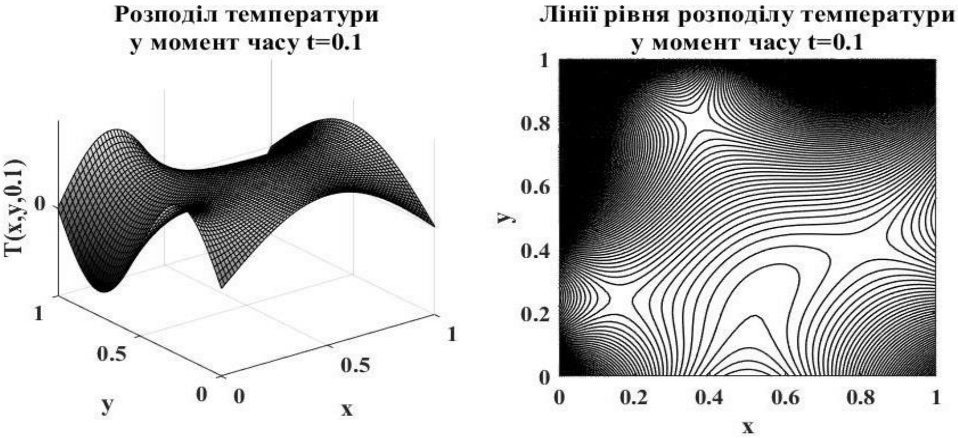


Рис. 2.1 – Кінцевий розподіл температури задачі (2.64)–(2.66):
зліва – температурне поле; справа – графік ліній рівня температурного поля

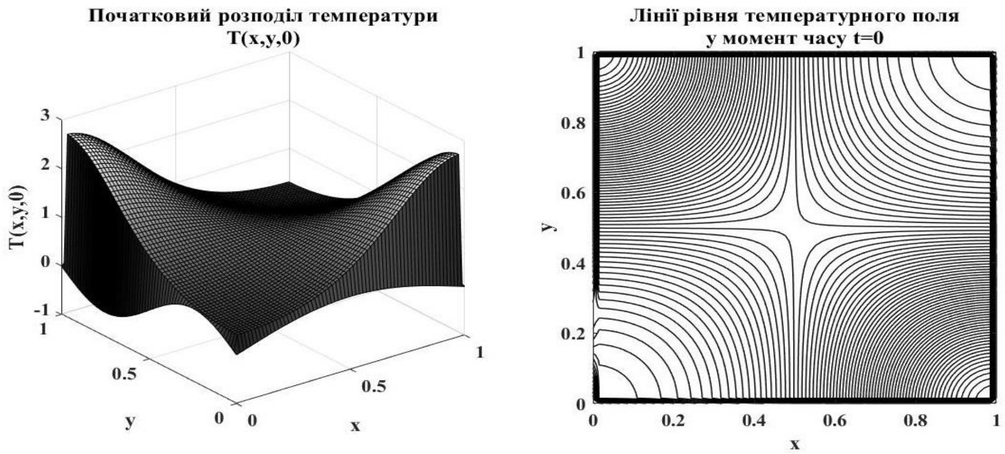


Рис. 2.2 – Відновлена початкова умова задачі:
зліва – температурне поле; справа – графік ліній рівня температурного поля

Нижче на рисунках 2.3 та 2.4 показані основні результати збіжності методів розв’язування поставленої задачі (2.64)–(2.66).

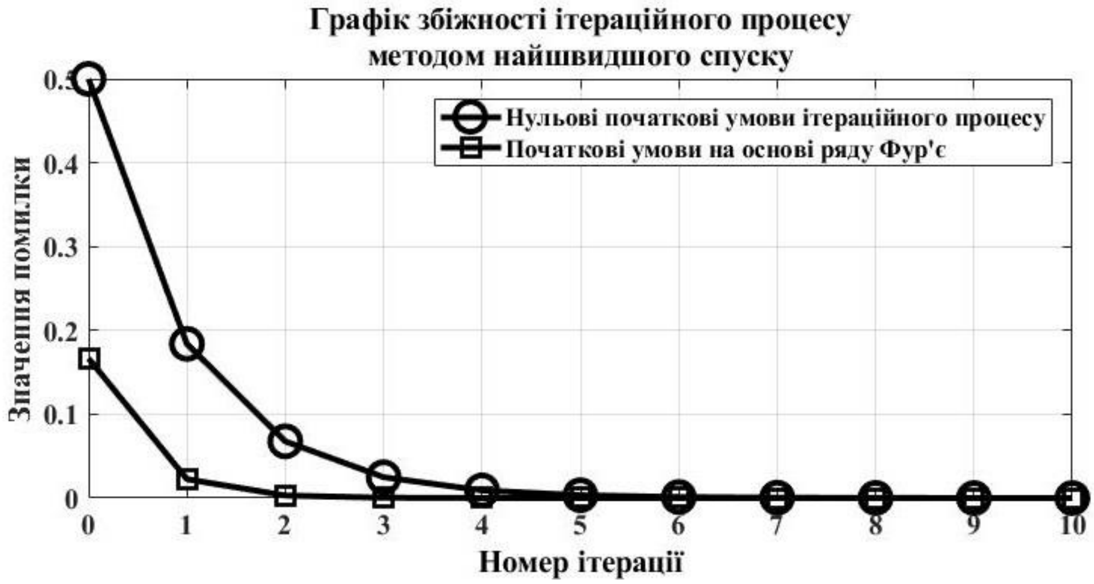


Рис. 2.3 – Порівняння збіжності методу з нульовим наближенням до початкової умови
та з початковою умовою на основі ряду Фур’є. Точність обрахунків 1Е-09

Побудова наближення до шуканої початкової умови дає можливість в 4 рази швидше отримати чисельний розв’язок задачі (2.64)–(2.66) з точністю обрахунків 1E-09. Початкове наближення зменшило кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ майже в 3,5 раза.

Нижче наведено графік поверхні помилки знайденого розв’язку задачі.

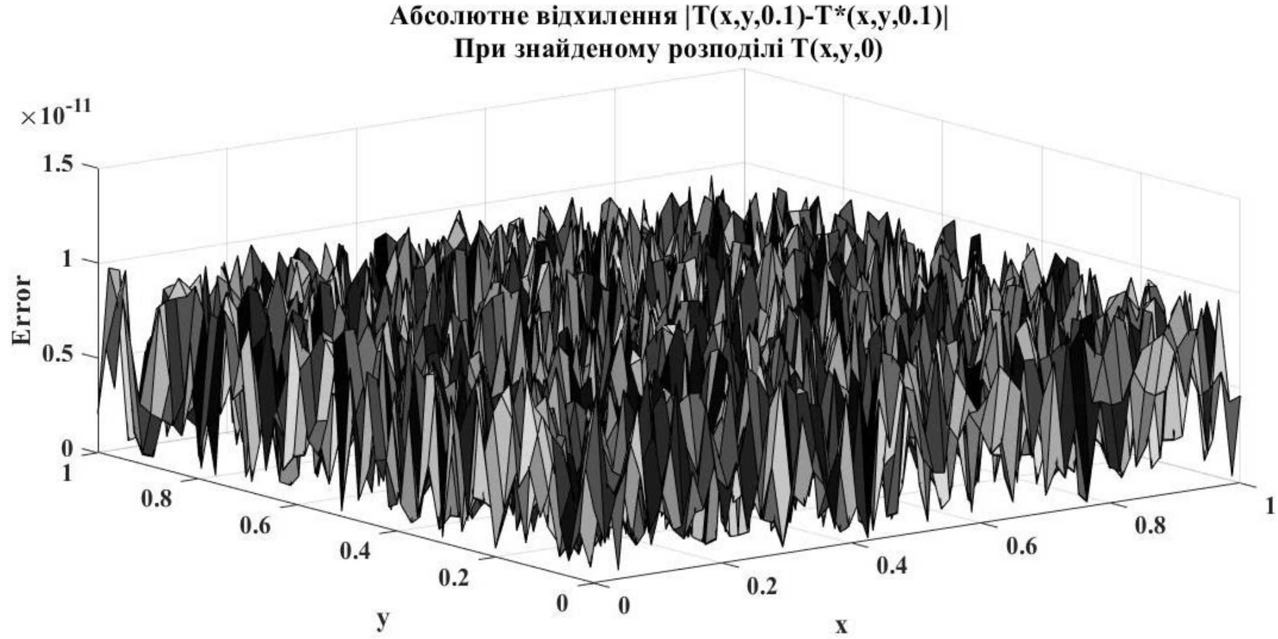


Рис. 2.4 – Абсолютне відхилення заданого температурного поля відносно розрахованого при знайденій початковій умові

Тестування отриманих методів здійснювалось на низці задач, у тому числі нелінійних. Математичний опис деяких нелінійних ОЗТ наведено нижче.

Задача 1. Знайти температурне поле у початковий момент часу для нелінійного рівняння теплопровідності:

$$
\begin{gathered}
\rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right),\\
(x,y)\in[0;1]^2,\ t\in[0;0{,}02],\ \ a(T)=T^2+0{,}1.\\
\rho(T)=1+0{,}15T+0{,}25T^2,\ \ C(T)=0{,}25T^2-0{,}01T+0{,}15.\\
T(x,0,t)=0{,}5e^{\sin\left(\pi(0,5-x)+0,5\pi\right)},\ \ T(x,1,t)=0{,}5e^{\sin\left(\pi(0,5-x)-0,5\pi\right)},\\
T(0,y,t)=0{,}5e^{\sin\left(\pi(0,5-y)+0,5\pi\right)},\ \ T(1,y,t)=0{,}5e^{\sin\left(\pi(0,5-y)-0,5\pi\right)}.
\end{gathered}
\tag{2.67}
$$

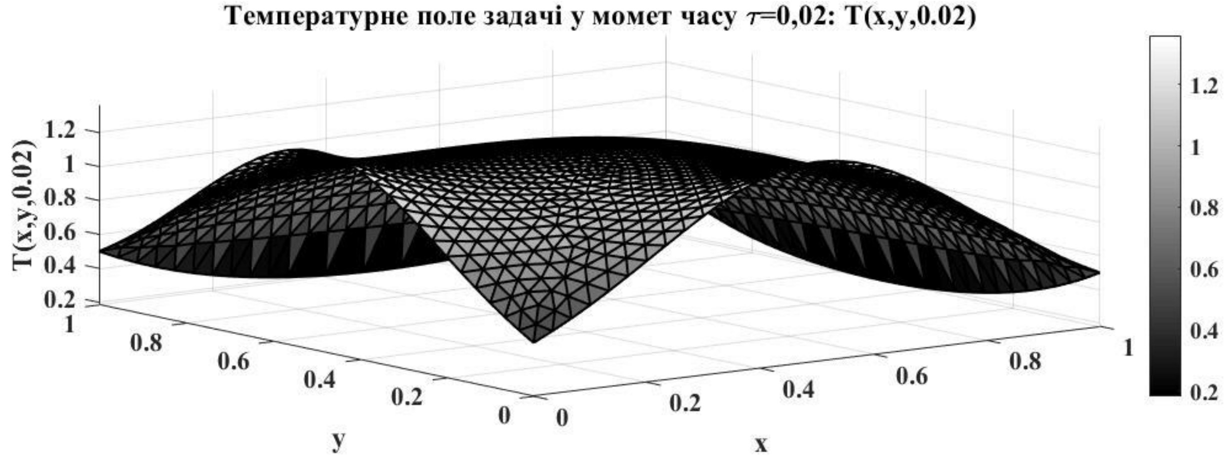


Рис. 2.5 – Температурне поле задачі в момент часу $t = 0{,}2$

На рис. 2.6 показано знайдений розподіл температури задачі (2.67).

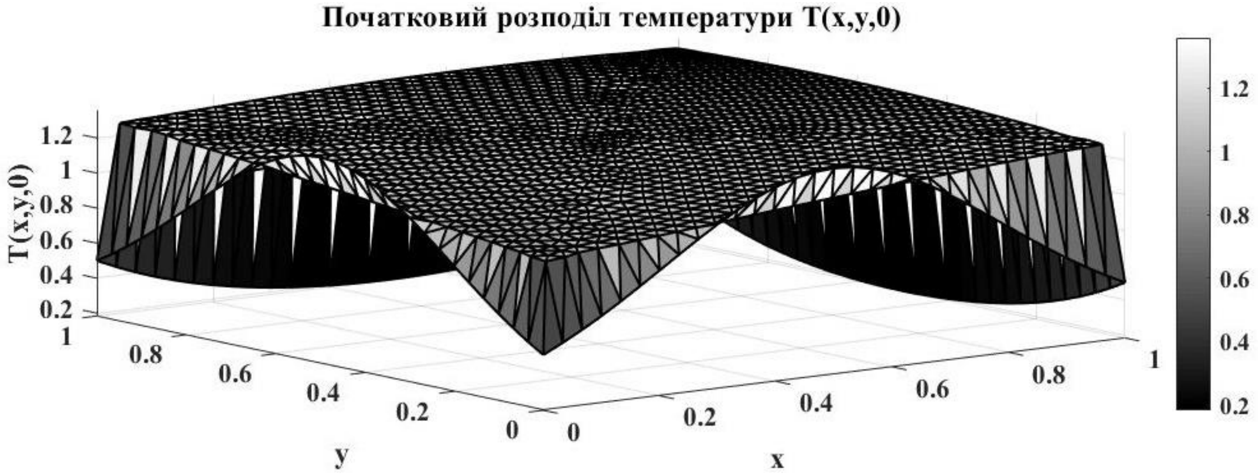


Рис. 2.6 – Температурне поле у початковий момент часу

Задача 2. Знайти початковий розподіл температури для нелінійного рівняння теплопровідності:

$$\rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right),$$

$$(x,y)\in[0;1]^2,\ t\in[0;0{,}02],\ a(T)=T^2+0{,}1.$$

$$\rho(T)=\frac{1+T+2T^2}{10},\ C(T)=0{,}5+(0{,}1-T)^2, \tag{2.68}$$

$$T(x,0,t)=0{,}5e^{\sin(\pi(0,5-x)+0,5\pi)},\ T(x,1,t)=0{,}5e^{\sin(\pi(0,5-x)-0,5\pi)},$$

$$T(0,y,t)=0{,}5e^{\sin(\pi(0,5-y)+0,5\pi)},\ T(1,y,t)=0{,}5e^{\sin(\pi(0,5-y)-0,5\pi)}.$$

Температурне поле задачі (2.68) в момент часу t = 0,02 наведено на рис. 2.7.

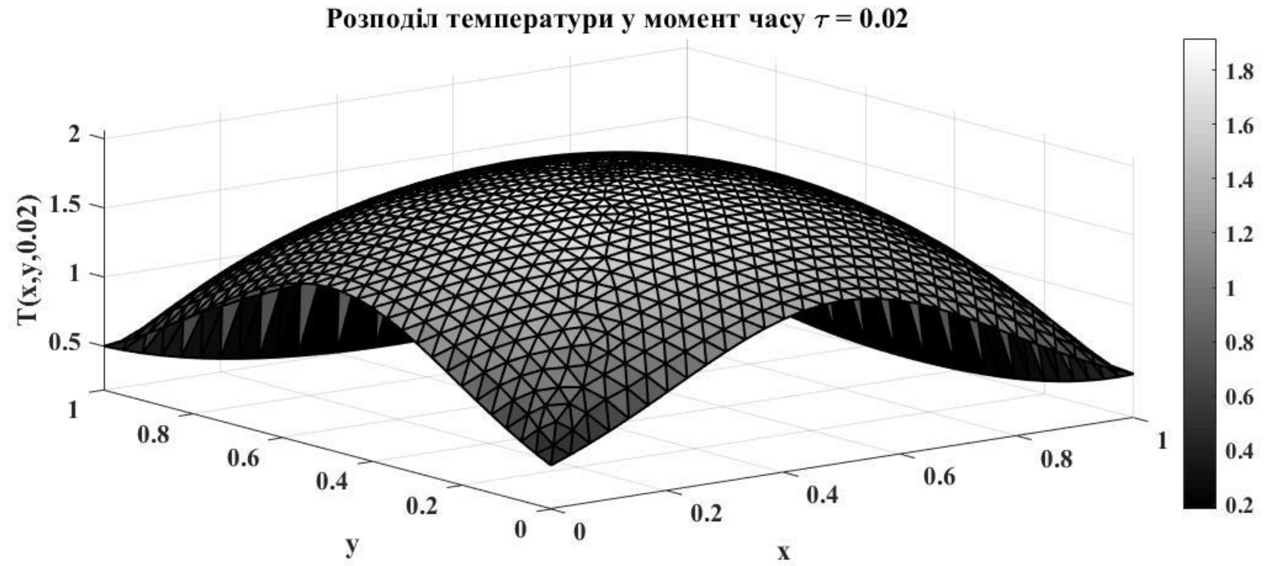


Рис. 2.7 – Температурне поле у фіксований момент часу $t = 0{,}02$

Відновлений розподіл температури задачі (2.68) наведено на рис.2.8.

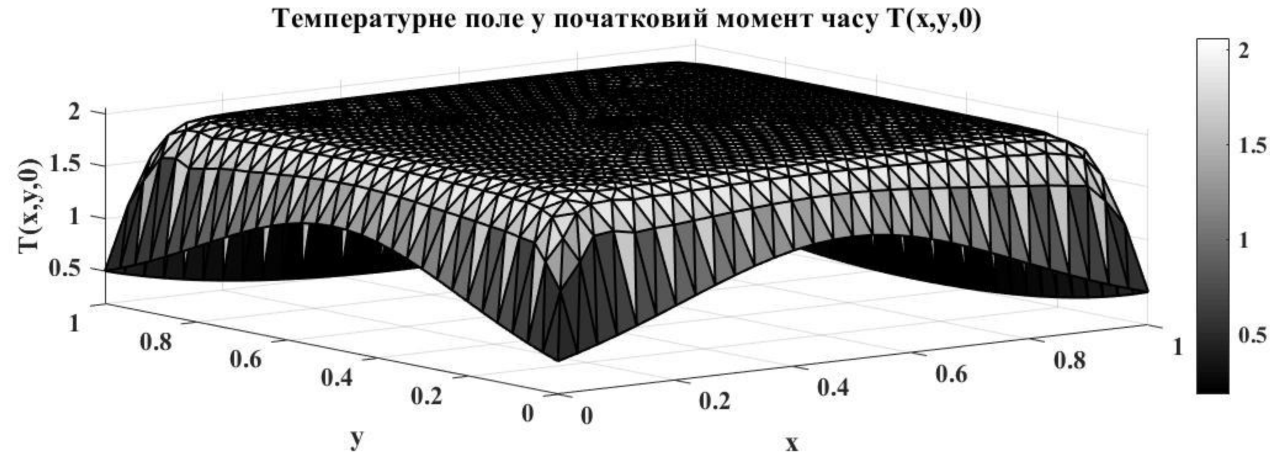


Рис. 2.8 – Відновлений розподіл температури у початковий момент часу

Таблиці 2.1 та 2.2 містять основні результати збіжності отриманих методів на сітках з різними характеристиками.

Таблиця 2.1

Результати роботи методів на тріангуляції з 1241 вузлом, 2360 елементами (120 з яких є граничними) без застосування методу Фур'є. Точність $eps = 10^{-11}$

	Задача 1 (2.67)	Задача 2 (2.68)
Метод найшвидшого спуску	350 ітерацій / 10718750 викликів функції ПЗТ (100%)	387 итераций / 9660100 викликів функції ПЗТ (100%)
Класичний метод Ньютона	15 ітерацій / 56,53%	18 ітерацій / 74,98%
Перша модифікація методу Ньютона (2.45)	7 ітерацій / 26,43%	7 ітерацій / 30,05%
Друга модифікація методу Ньютона (2.46)	8 ітерацій / 30,18%	6 ітерацій / 26,07%

Третя модифікація методу Ньютона (2.47)	5 ітерацій / 18,78%	6 ітерацій / 25,81%

Тепер покажемо в табличному вигляді результати всіх методів, перед використанням яких було застосовано процедуру побудови якісного наближення до початкової умови задач (2.67) та (2.68) на основі методу Фур'є. Під час побудови початкової умови в розглянутих задачах були використані 4 члена розкладу в ряд.

Таблиця 2.2

Результати роботи методів на тріангуляції з 4841 вузлом, 9440 елементами (240 з яких є граничними) без застосування методу Фур'є. Точність $eps = 10^{-11}$

	Задача 1 (2.51)	Задача 2 (2.52)
Метод найшвидшого спуску	193 ітерації / 1821805 викликів функції ПЗТ (100%)	298 ітерацій / 3656021 викликів функції ПЗТ (100%)
Класичний метод Ньютона	12 ітерацій / 55,12%	16 ітерацій / 61,51%
Перша модифікація методу Ньютона (2.45)	7 ітерацій / 17,32%	9 ітерацій / 21,34%
Друга модифікація методу Ньютона (2.46)	9 ітерацій / 16,35%	7 ітерацій / 12,32%
Третя модифікація методу Ньютона (2.47)	5 ітерацій / 8,85%	6 ітерацій / 10,82%

Тестування двох класичних методів (методу Ньютона та методу найшвидшого спуску) і трьох разроблених методів (2.45), (2.46) и (2.47) було проведено на низці нелінійних ОЗТ, зокрема, на задачах (2.67) й (2.68). Задачі розв'язувались на різних тріангуляціях. Всі отримані результати розрахунків методів без побудови наближення до початкової умови (таблиці 2.1–2.2). Вплив побудови початкового наближення для знаходження параметрів різних класів ОЗТ на лінійних та нелійних ОЗТ наведено в третьому розділі. Точність обрахунків для всіх методів на різних сітках дорівнює $eps = 10^{-11}$. Експериментально показано, що для розв'язання описаних у розділі нелінійних ОЗТ найбільше викликів процедури розв'язування ПЗТ має метод нашвидшого спуску. Для кожної задачі загальна кількість викликів процедури розв'язування ПЗТ під час знаходження розв'язку даним методом бралась за 100%. Кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ, яка була отримані іншими методами (таблиці 2.1 та 2.2), перераховані відносно методу найшвидшого спуску.

Висновки до другого розділу

Розділ містить отримані модифікації основних актуальних чисельних методів розв’язування основних класів багатовимірних лінійних та нелінійних ОЗТ. Основна частина другого розділу присвячена модифікаціям класичних методів з ціллю зменшення кількості викликів процедури розв’язування ПЗТ для отримання чисельних розв’язків конкретних ОЗТ.

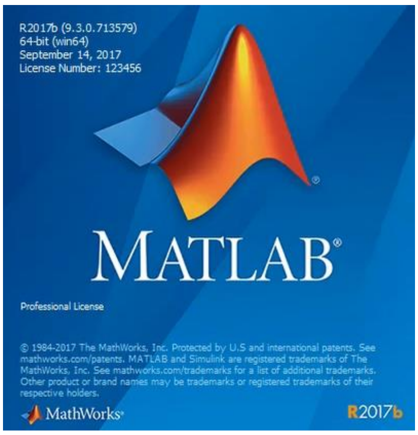
До основних практичних результатів, які отримані в розділі, відноситься метод інтерполяції поверхнями другого порядку, який активно використовується для наближених обчислень елементів матриці Гессе. Такий метод дає змогу зменшити кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ для отримання чисельного розв’язку однієї ОЗТ. Також у розділі отримані основні модифікації класичного методу Ньютона (2.45), (2.46) та (2.47) для мінімізації квадратичного функціоналу в класичній постановці основних класів ОЗТ. Методи (2.45)–(2.47) є стійкими при розв’язуванні ОЗТ завдяки введенню змінного кроку та методу предиктор-коректора. Найраціональнішими методами розв’язування нелінійних ОЗТ є модифікації методу Ньютона, а методами лінійних ОЗТ – метод найшвидшого спуску.

РОЗДІЛ 3
МОДЕЛЮВАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розділ містить тестування отриманих у попередньому розділі методів розв'язування ОЗТ, а також основні результати моделювання основних класів лінійних та нелінійних ОЗТ (ОЗТ ідентифікації ПУ, ГУ та коефіцієнта теплопровідності). Показана ефективність методів для ОЗТ за критерієм точності розрахунків, за критерієм кількості викликів процедури розв'язування ПЗТ та за критерієм загальної кількості ітерацій методів. Тестування лінійних ОЗТ здійснюється на основі методу найшвидшого спуску з попереднім розкладом у ряд Фур'є для задання початкового наближення. Нелінійні задачі тестуються на отриманих у другому розділі модифікаціях класичного методу Ньютона. Показана ефективність отриманих методів. У кінці розділу наведено аналіз отриманих результатів та порівняльний аналіз роботи методів за вказаними вище критеріями.

3.1. Вибір засобів моделювання

Головними критеріями вибору середовища розробки програм для моделювання основних класів обернених задач теплопровідності є швидкість обробки матричних обчислень, простота і доступність використання основних функцій обробки, а також представлення графічних результатів обчислень та створення геометрії реальних складних об'єктів, її покриття тріангуляцією.



Одним із найвідоміших прикладних програмних пакетів, який відповідає вказаним вище критеріям – це MATLAB. Написаний програмний код у MATLAB є зрозумілий та інтуїтивно простий. Один рядок програмного коду, який написаний у MATLAB, може бути замінений на кілька рядків програмного коду мовами програмування C/C++/C#, Java та іних (додаток А). Створення геометрії двовимірних об'єктів для дослідження теплових процесів можна здійснювати в PDETool середовища MATLAB. PDETool може розв'язувати прямі лінійні та нелінійні ОЗТ. Це є однією з основних перевах MATLAB.

Альтернативою для розв'язування основних класів прямих задач математичної фізики з використанням методу скінченних елементів є COMSOL Multiphysics. На відміну від MATLAB, за допомогою якого можна розв'язувати переважну більшість задач, які використовують математичний апарат, COMSOL працює лише з моделями, які описуються рівняннями математичної фізики.

Перевагою COMSOL є створення 1D, 2D та 3D геометрії досліджуваного об'єкта в режимі конструктора (додаток Б). Дане середовище має можливість збереження геометрії моделі – збереження тріангуляції розрахункової області об'єкта (вузли, елементи, граничні елементи та їхнє розташування в просторі).

Створена модель в COMSOL зберігається на жорсткий диск файлом, який має розширення «*.m». Це означає, що створену модель в COMSOL легко можна імпортувати в MATLAB. За необхідності розв'язок ПЗТ у COMSOL можна також імпортувати у MATLAB, який з легкістю можна відобразити в самому ж прикладному програмному пакеті MATLAB.

Отже, COMSOL використовується для створення моделі досліджуваного об'єкта разом із тріангуляцією, а MATLAB використовує створену в COMSOL геометрію для розв'зування ОЗТ з ціллю визначення теплофізичних характеристик процесу, який протікає в досліджуваному об'єкті.

3.2. Структура програмного комплексу

Розроблений комплекс програм складається з шести основних модулів, які наведено нижче (додаток В). Перші два модулі призначені для формування геометрії моделі, її збереження для подальшої роботи з нею в MATLAB.

Програмний код розв'язання ПЗТ методами скінченних різниць та скінченних елементів містяться в додатку А до дисертаційної роботи.

Модуль 1. Створення геометрії. Цей модуль викликається першим, оскільки саме він формує геометрію моделі конкретного теплового процесу. Модуль модуля містить фрагмент програмного коду для виклику середовища COMSOL з режимом конструктора для створення геометрії досліджуваного об'єкта користувачем.

Модуль 2. Збереження геометрії. Модуль викликається відразу ж після закінчення роботи з першим модулем, тобто тоді, коли вже геометрія об'єкта разом із тріангуляцією створена. Цей модуль містить програмний код для збереження усіх даних про геометрію розрахункової області у файл з розширенням «*.m» для подальшої роботи з нею в MATLAB.

Модуль 3. Формування та вибір класу ОЗТ. Даний модуль складається з трьох підмодулів, кожен з яких відповідає за розв'язування відповідного класу ОЗТ (ОЗТ ідентифікації ПУ, ОЗТ ідентифікації ГУ, ОЗТ ідентифікації коефіцієнта теплопровідності). Модуль містить програмний код для вибору та встановлення відомих теплофізичних характеристик досліджуваного об'єкта та здійснення пошуку невідомих його теплофізичних характеристик (в залежності від обраного класу ОЗТ).

Модуль 4. Розв'язування обраного класу ОЗТ. Даний модуль є основним, оскільки містить всі отримані в роботі методи розв'язування основних класів ОЗТ. Модуль, очевидно, за часом працює найдовше у порівнянні з іншими п'ятьма. Він знаходить розв'язок обраного класу (з трьох, які розглядаються в роботі). Знайдені теплофізичні характеристики теплового процесу досліджуваного об'єкта він передає до 5-го модуля.

Модуль 5. Обробка та візуалізація розв'язку обраного класу ОЗТ. Модуль здійснює візуалізацію граничної умови (або граничних умов), початкової умови, коефіцієнта температуропровідності, температурного поля досліджуваного об'єкта (в залежності від обраного класу ОЗТ), контурні графіки тощо.

Модуль 6. Аналіз розв'язку обраного класу ОЗТ. Модуль виводить результати збіжності отриманих у роботі методів розв'язку основних класів ОЗТ за критеріями точності, збіжності тощо. Отримані результати аналізу модуль подає в графічному та табличному представленнях.

Порядок виклику описаних вище модулів у програмному комплексі відповідає номеру відповідного модуля (від 1 до 6).

3.3. Задача ідентифікації початкової умови

Перша ОЗТ є лінійною та має таке математичне формулювання: знайти глобальний мінімум функціонала:

$$J\left(\theta(x,y)\right)=\int_0^1\int_0^1\left(T\left(\theta,x,y,t_f\right)-\Theta\left(x,y\right)\right)^2 dxdy\to\min, \tag{3.1}$$

де

$\theta=\theta\left(x,y\right)$ – початкова умова задачі;

$T\left(\theta,x,y,t_f\right)$ – розв'язок задачі, який залежить від шуканої початкової умови.

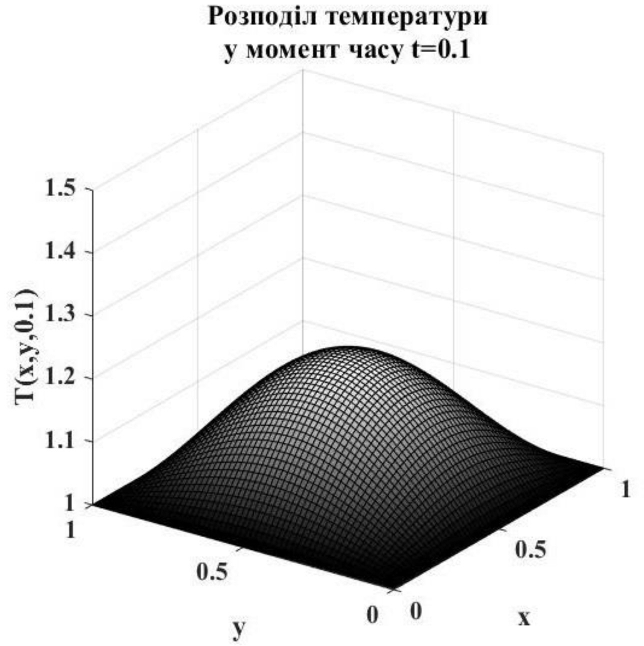
Обмеження для (3.1) має вигляд:

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},\\ \left(x,y\right)\in[0;1]^2,\ t\in\left[0,t_f\right],\ t_f=0{,}1.\\ T(x,y,0)=\theta(x,y).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Граничні умови для (3.2) мають такий вигляд:

$$T(x,0,t)=1,\ T(x,1,t)=1,\ T(0,y,t)=1,\ T(1,y,t)=1. \tag{3.3}$$

На рис. 3.1 показане температурне поле в момент часу t_f – $T\left(\theta,x,y,t_f\right)$.



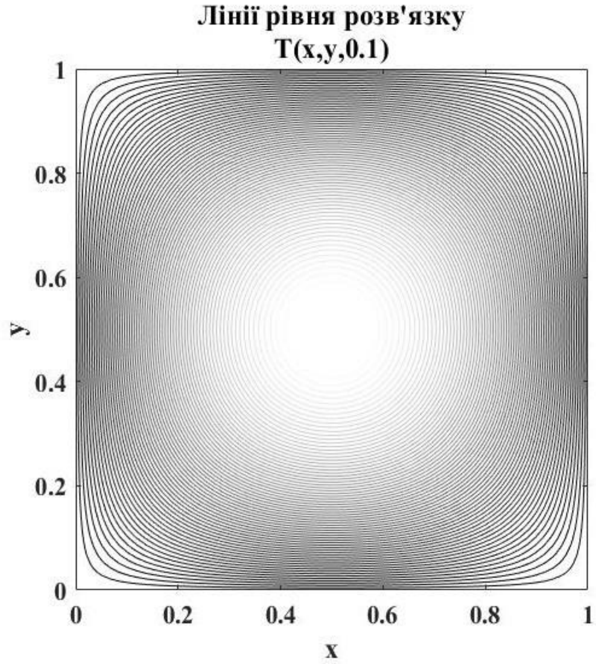


Рис. 3.1 – Розподіл температури задачі (3.1)–(3.3):
зліва – температурне поле; справа – графік ліній рівня температурного поля

У задачі (3.1)–(3.3) потрібно знайти такий розподіл температури $T(x,y,0)=\theta(x,y)$ в початковий момент часу, який дає глобальний мінімум функціоналу (3.1). Тобто, з урахуванням цього розподілу, розподіл у момент часу t_f – температурне поле $T\left(\theta,x,y,t_f\right)$ має бути в кожній точці розрахункової області максимально близьким до температурного поля $\Theta\left(x,y\right)$. Задача (3.1)–(3.3) є лінійною відносно обмеження, оскільки маємо справу з лінійною теплопровідністю.

У таблиці 3.1 наведено основні результати збіжності методу найшвидшого спуску з нульовим наближенням до початкової умови для пошуку розв’язку задачі (3.1)–(3.3). У таблиці 3.2 наведено основні результати збіжності методу найшвидшого спуску з використанням розкладу в ряд Фур’є для задачі (3.1)–(3.3). Для розв’язування задачі були взяті чотири члена розкладу в ряд Фур’є $\left(N=4\right)$. Розмір розрахункової сітки задачі складає 100x100 вузлів (з урахуванням внутрішніх). Задача розв’язана методом скінченних різниць. Застосування методу Фур’є для обержання наближення до початкової умови знову дає помітне зменшення кількості викликів процедури розв’язування ОЗТ.

Таблиця 3.1

Таблиця результатів роботи методу найшвидшого спуску на задачі (3.1)–(3.3) за критерієм помилки. Наближення до початкової умови нульові

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	4,25E-02	23	5,95E-06
9	2,29E-02	24	3,83E-06
10	1,53E-02	25	1,67E-06
11	8,24E-03	26	8,53E-07
12	4,35E-03	27	5,45E-07
13	2,11E-03	28	2,91E-07
14	1,19E-03	29	8,94E-08
15	6,97E-04	30	3,63E-08
16	3,23E-04	31	1,28E-08
17	1,48E-04	32	4,91E-09
18	7,33E-05	33	2,07E-09
19	4,42E-05	34	6,49E-10
20	2,26E-05	35	2,56E-10
21	1,32E-05	36	1,61E-10
22	7,80E-06	37	1,02E-10
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***12454***

Результати таблиці 3.1 свідчать про те, що метод найшвидшого спуску отримує розв'зок задачі (3.1)–(3.3) порівняно точно, до того ж, за невелику кількість ітерацій. Тепер покажемо ефективність застосування методу Фур'є для задання наближення початкової умови. Результати наведені у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Таблиця результатів роботи методу найшвидшого спуску на задачі (3.1)–(3.3) за критерієм помилки з використанням методу Фур'є (4 члена розкладу в ряд)

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	3,94E-02	19	1,33E-04
9	3,90E-02	20	4,22E-05
10	2,85E-02	21	1,56E-05
11	1,37E-02	22	5,31E-06
12	1,05E-02	23	2,03E-06
13	3,81E-03	24	6,97E-07
14	1,72E-03	25	7,00E-08
15	1,07E-03	26	1,02E-08
16	7,04E-04	27	6,08E-09
17	2,87E-04	28	1,56E-09
18	1,81E-04	29	2,88E-10
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***4341***

Результати таблиці 3.2 знову ж свідчать про те, що метод найшвидшого спуску з урахуванням методу Фур'є отримує розв'зок задачі (3.1)–(3.3) точніше, ніж з нульовим наближенням до початкової умови. З таблиць 3.1 та 3.2 видно, що кількість викликів функції розв'язування ПЗТ зменшено майже в три рази за рахунок розкладу в ряд. На рисунку 3.2 показано відновлений розподіл температурного поля у початковий момент часу $t = 0$.

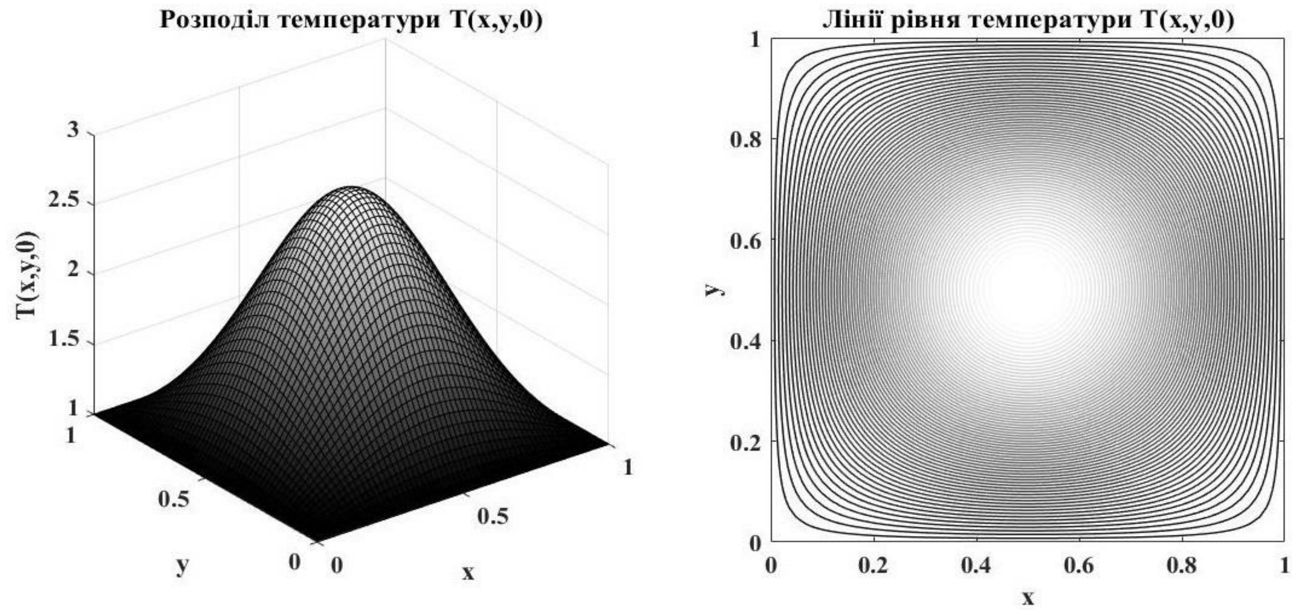


Рис. 3.2 – Відновлена початкова умова задачі: $T\left(x, y, 0\right) = \theta\left(x, y\right)$
зліва – температурне поле, справа – графік ліній рівня температурного поля

Рисунок 3.3 показує збіжність методу найшвидшого спуску для даної ОЗТ, а саме, раціональність застосування методу Фур'є для побудови якісного наближення до початкової умови задачі (3.1)–(3.3).

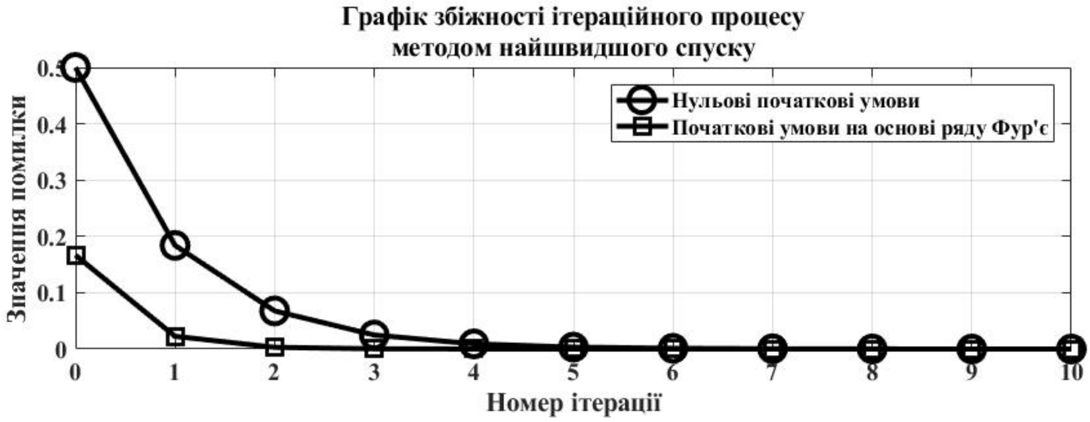


Рис. 3.3 – Порівняння збіжності методу найшвидшого спуску з нульовим наближенням до початкової умови та з наближенням до початкової умови у вигляді розкладу в ряд Фур'є

Задача (3.1)–(3.3) розв’язувалась на сітках із різними розмірностями. Вибір методу скінчених різниць для розв’язування поставленої ОЗТ обумовлений її лінійністю та геометрією розрахункової області елементарної форми – квадрат зі стороною 1, ліва нижня вершина якого лежить у початку прямокутної системи координат. На рис. 3.4 показана поверхня, яка є помилкою обчислень на 32-й (останній) ітерації методу найшвидшого спуску на ОЗТ (3.1)–(3.3) з урахувавнням методу Фур’є (4 члена розкладу в ряд Фур’є).

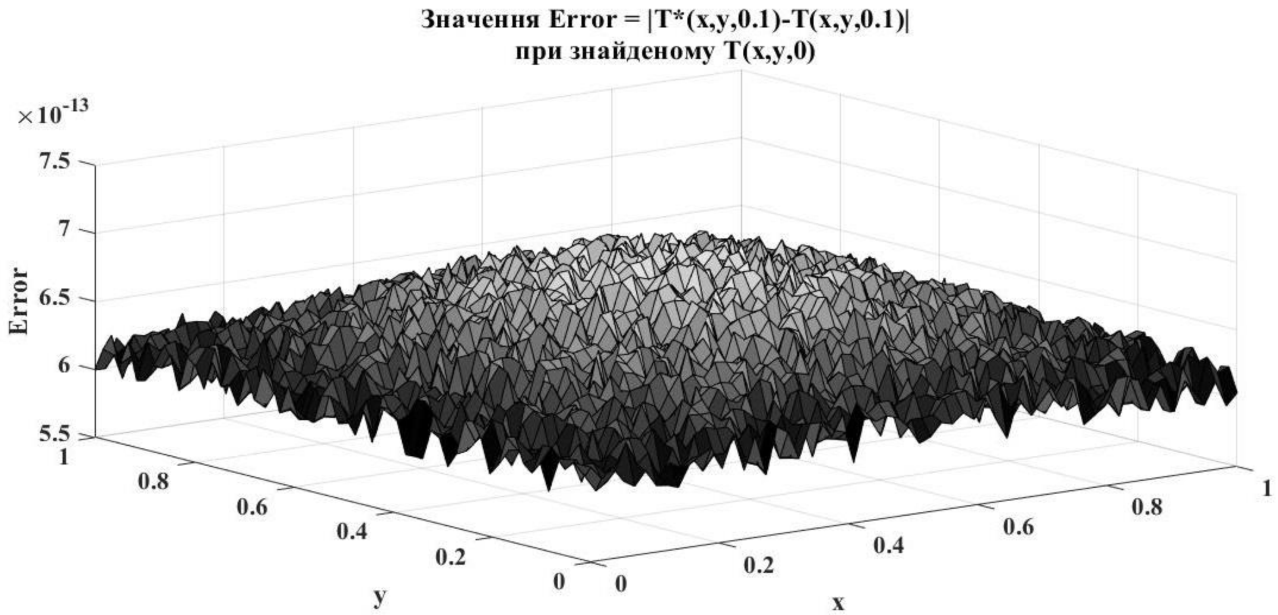


Рис. 3.4 – Абсолютне відхилення заданого температурного поля відносно розрахованого при знайденій початковій умові

Поверхня абсолютної помилки для даної та всіх наступних задач отримана за формулою: $\left|T - T^*\right|$, де T – розраховане температурне поле, яке є розв’язком оберненої задачі, T^* – відоме температурне, з яким здійснюється порівняння. Критерій збіжності методів на всіх задачах порівнюється за формулою для відносної помилки, яка має такий вигляд: $\max\limits_i \left(\left|T - T^*\right| / T^* \right)$, де i – номер вузла сітки, яка уведена для розрахункової області конкретної ОЗТ.

Наступна лінійна ОЗТ має таке математичне формулювання. Знайти глобальний мінімум функціонала виду:

$$J\left(\theta\left(\vec{x}\right)\right) = \int\limits_{\Omega} \left(T\left(\theta, \vec{x}, t_f\right) - \Theta\left(\vec{x}\right) \right)^2 d\vec{x} \to \min, \tag{3.4}$$

$$\vec{x}=\left(x_1,x_2\right),\ \Omega=\Omega_1\setminus\left(\Omega_2\cup\Omega_3\cup\Omega_4\cup\Omega_5\right),$$

$$\Omega_1=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|x_1^2+x_2^2\le 1\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1-0,5\right)^2+\left(x_2-0,5\right)^2\le 0,01\right\},$$

$$\Omega_3=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1+0,5\right)^2+\left(x_2-0,5\right)^2\le 0,01\right\},$$

$$\Omega_4=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1-0,5\right)^2+\left(x_2+0,5\right)^2\le 0,01\right\},$$

$$\Omega_5=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1+0,5\right)^2+\left(x_2+0,5\right)^2\le 0,01\right\}.$$

Обмеження для (3.4) мають такий вигляд:

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(\left(x_1+x_2\right)^4+1\right)\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left(\left(x_1+x_2\right)^4+1\right)\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)+\\ +T\sin\left(x_1x_2\right)e^{-x_1^2x_2^2}+x_1^2+x_2^2,t\in\left[0,t_f\right],t_f=0,1.\\ T\left(\vec{x},0\right)=\theta\left(\vec{x}\right),\end{gathered}\tag{3.5}$$

де функція

$\theta\left(\vec{x}\right)$ – невідома (шукана) функція;

$T\left(\theta,\vec{x},t_f\right)$ – розв’язок задачі для знайденої функції $\theta\left(\vec{x}\right)$;

$\Theta\left(\vec{x}\right)$ – заданий розподіл температури в момент часу t_f.

Граничні умови задачі (3.4)–(3.5) мають такий вигляд:

$$T\left(\vec{x},t\right)\Big|_{\Gamma_{inside}}=20,\ T\left(\vec{x},t\right)\Big|_{\Gamma_{outside}}=10,\tag{3.6}$$

Γ_{inside} – внутрішня границя розразункової області Ω;

$\Gamma_{outside}$ – зовнішня границя розразункової області Ω.

На рисунку 3.5 показано розрахункову область задачі (3.4)–(3.6). Область, яка зображена на рис. 3.5 – одиничне коло з центром у початку координат з вирізаними малими колами, радіус яких дорівнює 0,2, а центри знаходяться у точках з координатами $(-0,5;-0,5)$, $(-0,5;0,5)$, $(0,5;-0,5)$, $(0,5;0,5)$. Сітка представляє собою тріангуляцію, у якій загальна кількість вузлів дорівнює 1080, кількість елементів – 2010, кількість граничних елементів – 156. Поставлена задача розв’язана методом скінченних елементів.

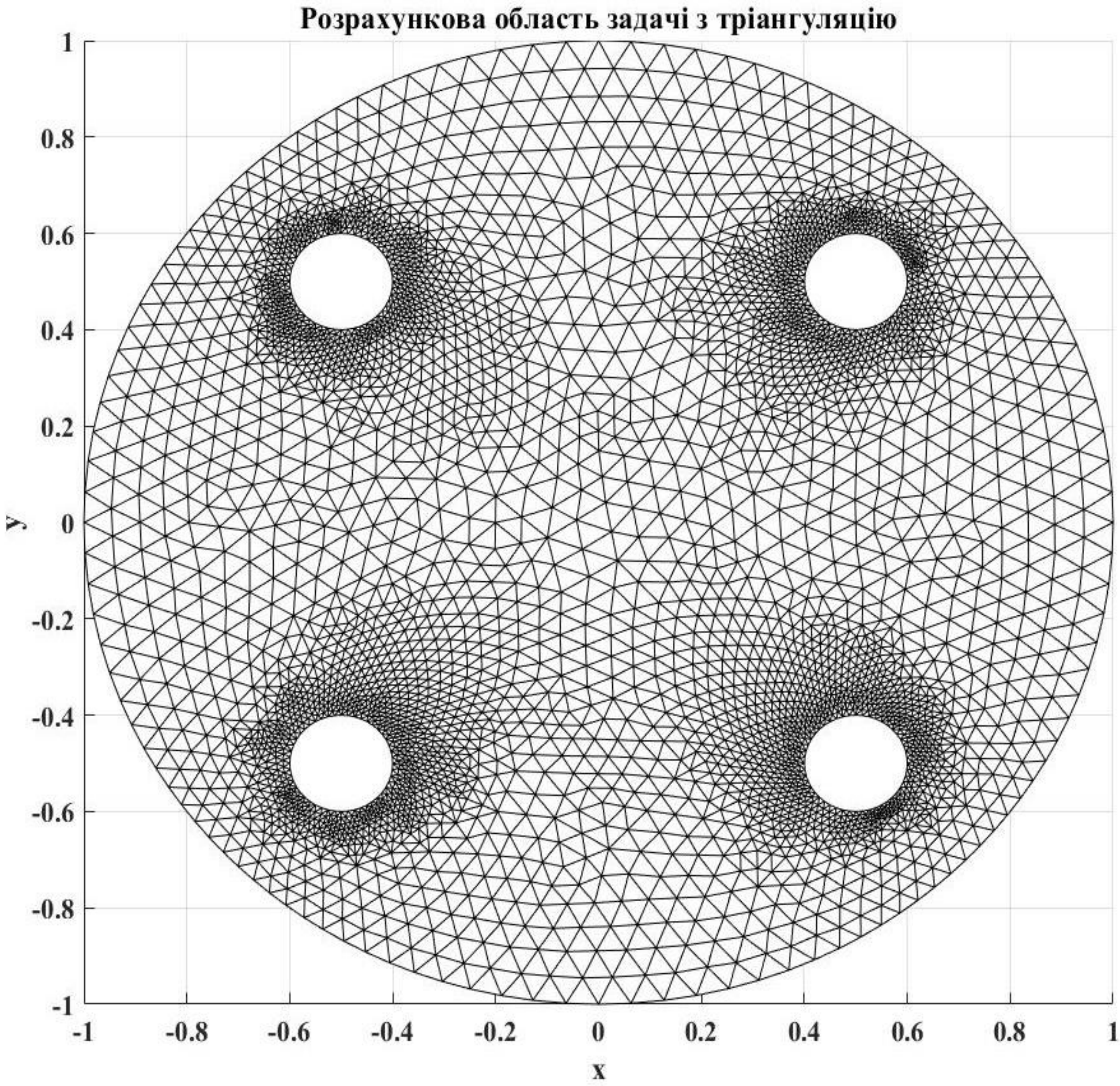


Рис.3.5 – Розрахункова область поставленої задачі

Задача (3.4)–(3.6) відрізняється від попередньої тим, що у ній є внутрішні граничні умови. Розрахункову сітку задачі можна отримати за допомогою прикладного програмного пакету MATLAB або COMSOL. Програмний пакет COMSOL має значно потужніші можливості для побудови двовимірних та тривимірних об’єктів складної геометричної форми.

Задача (3.4)–(3.6) також є лінійною, оскільки обмеження задачі – лінійне рівняння теплопровідності з граничними умовами 1-го роду.

На рис. 3.6 показаний розподіл температури розрахункової області в кінцевий момент часу, а саме, для t = 0,1.

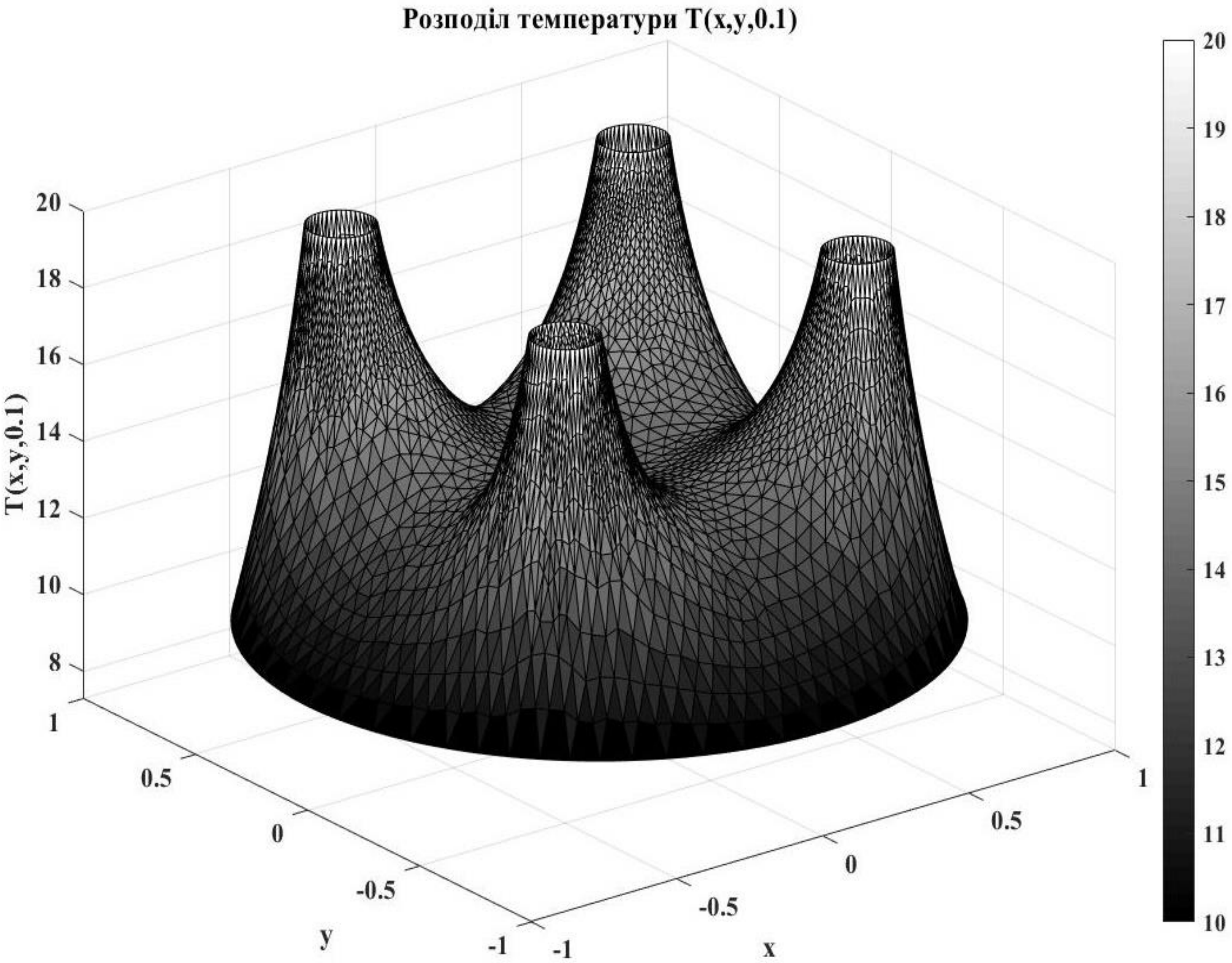


Рис.3.6 – Розподіл температури оберненої задачі (3.4)–(3.6)
у фіксований момент часу t = 0,1

Для повноти сприйняття розподілу розрахункового поля, яке зображене на рис. 3.6, на рис. 3.7 показано контурний графік температурного поля у момент часу $t_f = 0{,}1$.

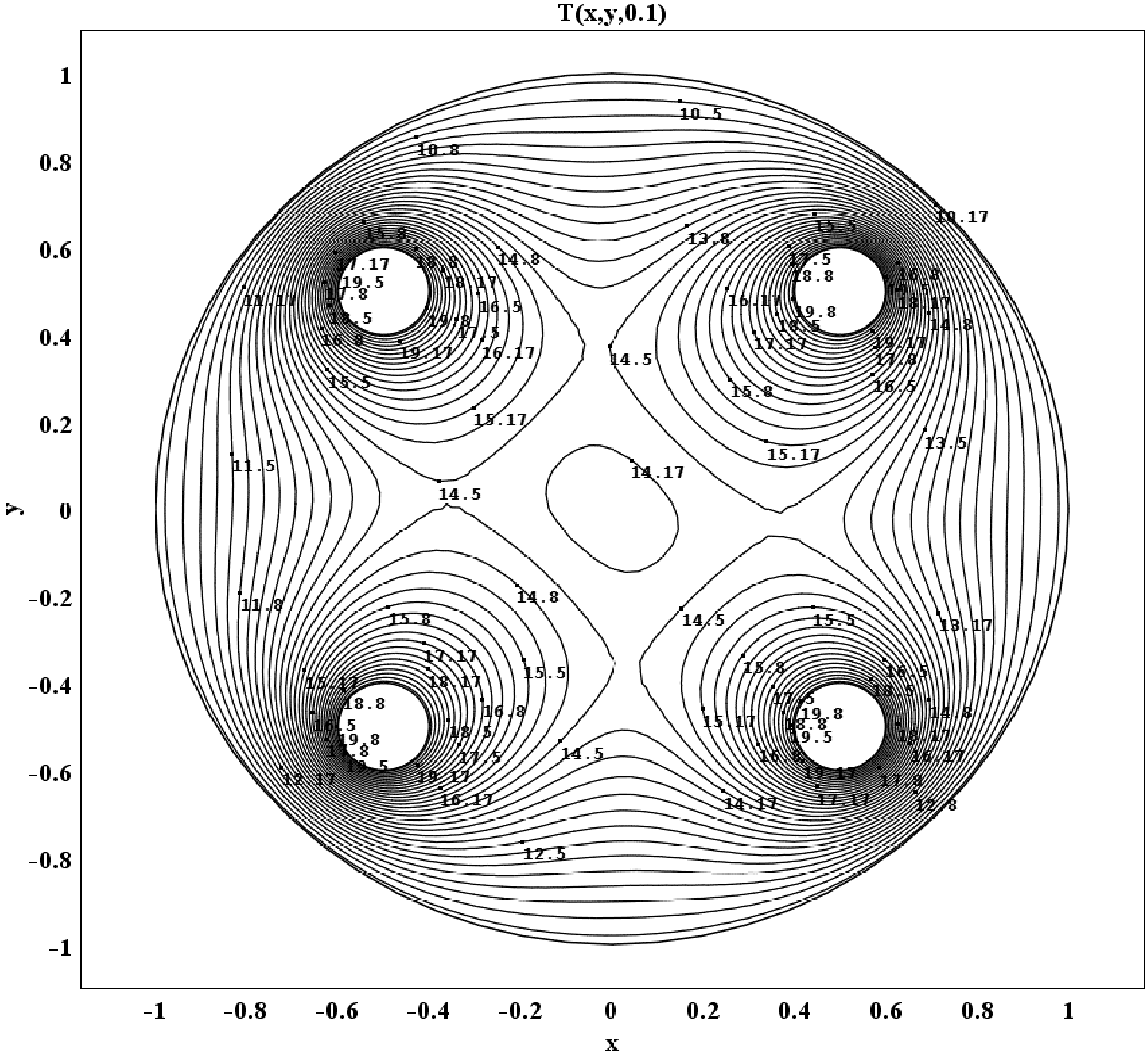


Рис. 3.7 – Графік ліній рівня температурного поля ОЗТ в момент часу $t_f = 0.1$

У таблицях 3.3 та 3.4 наведені основні результати збіжності методу найшвидшого спуску з нульовим наближенням до початкової умови для задачі (3.4)–(3.6) та з використанням методу Фур'є для наближення до початкової умови. Для розв'язування задачі знову були обрані чотири члена розкладу в ряд.

Таблиця 3.3

Таблиця результатів роботи методу найшвидшого спуску на задачі (3.4)–(3.6) за критерієм помилки з нульовим наближення до шуканої початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	7,73686922E-02	28	5,25002727E-07
9	3,72690141E-02	29	4,31978309E-07

10	1,77528799E-02	30	3,50696188E-07
11	9,19700228E-03	31	2,64578951E-07
12	6,34937962E-03	32	1,66106811E-07
13	3,14347751E-03	33	1,31522810E-07
14	1,62388767E-03	34	1,05086209E-07
15	1,04470569E-03	35	5,68856939E-08
16	5,24403920E-04	36	3,06744423E-08
17	2,41077820E-04	37	2,40076010E-08
18	1,58945138E-04	38	1,57001833E-08
19	7,65095193E-05	39	1,33627454E-08
20	3,85269404E-05	40	8,46742878E-09
21	1,77518552E-05	41	7,62458023E-09
22	9,78837385E-06	42	4,98187090E-09
23	6,56095166E-06	43	2,75192613E-09
24	3,80928847E-06	44	2,27383835E-09
25	2,47133761E-06	45	1,36393453E-09
26	1,70169488E-06	46	7,61504366E-10
27	9,47419108E-07	47	5,69433427E-10
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***15533***

Метод найшвидшого спуску зійшовся за 51 ітерацію. Точність обрахунків 1Е-11.

Таблиця 3.4

Таблиця результатів роботи методу найшвидшого спуску на задачі (3.4)–(3.6) за критерієм помилки з побудовою наближення до початкової умови, використовуючи метод Фур'є (4 члена розкладу в ряд)

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	6,04187722E-02	24	8,64074872E-06
9	3,87997640E-02	25	3,17195029E-06
10	2,12196030E-02	26	1,12994655E-06
11	6,83757573E-03	27	3,49349306E-07
12	4,64100057E-03	28	1,50249752E-07
13	2,80022918E-03	29	5,59701415E-08
14	1,49300944E-03	30	2,21908217E-08
15	1,05606596E-03	31	8,94703606E-09
16	5,97447598E-04	32	3,08068591E-09
17	3,34675611E-04	33	1,09407904E-09
18	1,75682501E-04	34	4,62287630E-10
19	9,02846438E-05	35	1,96867622E-10
20	7,32793093E-05	36	6,51033409E-11
21	4,38672961E-05	37	2,77245307E-11
22	2,65351129E-05	38	8,53539266E-12
23	1,56218192E-05	39	3,51464064E-12
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***5341***

Метод найшвидшого спуску зійшовся за 40 ітерацій. Точність обрахунків 1Е-12. Згідно значень у таблицях 3.3 та 3.4 помітне зменшення загальної кількості обчислень завдяки застосуванню методу Фур'є при побудові наближення до шуканої початкової умови. З таблиць 3.3 та 3.4 видно, що кількість викликів функції розв'язування ПЗТ також зменшено майже в три рази.

Розв'язком задачі (3.4)–(3.6) є розподіл температури у початковий момент часу. Він зображений на рис. 3.8. Контурний графік для отриманого розв'язку задачі (3.4)–(3.6) зображено на рис. 3.9.

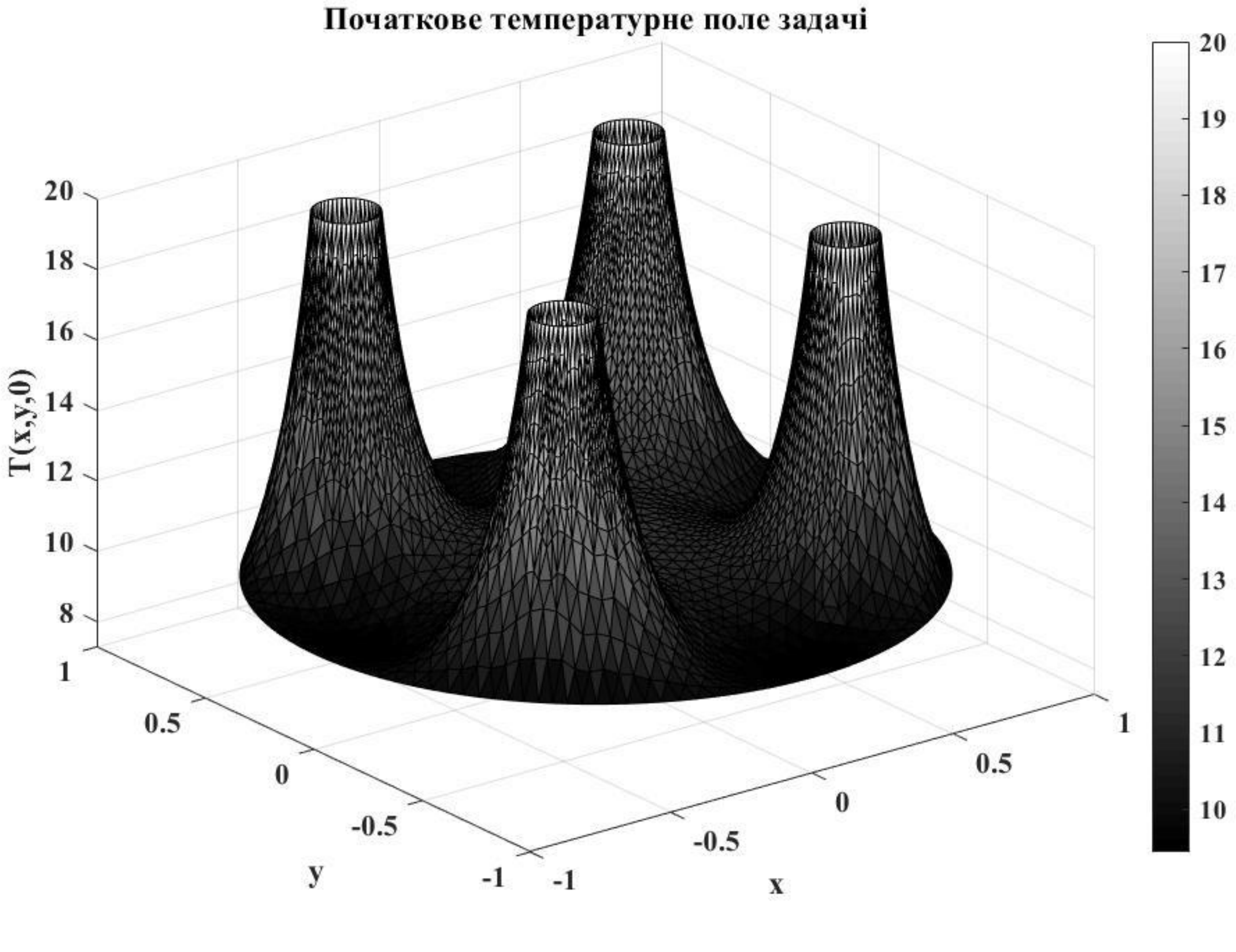


Рис.3.8 – Початковий розподіл температури, який є розв'язком задачі

Для задачі (3.4)–(3.6) перевірка розв'язку, який зображено на рис. 3.8, здійснювалась розв'язуванням прямої задачі (3.5)–(3.6) з урахуванням розподілу температури в початковий момент часу (рис. 3.8). Відносне відхилення розв'язку прямої задачі (3.5)–(3.6) від розподілу температури в момент часу $t = 0{,}1$, який заданий з аумовою ОЗТ і є критерієм точності обрахунків. Графік ліній рівня розв’язку задачі (3.4)–(3.6), який відповідає розподілу температури у момент часу t = 0 має такий вигляд:

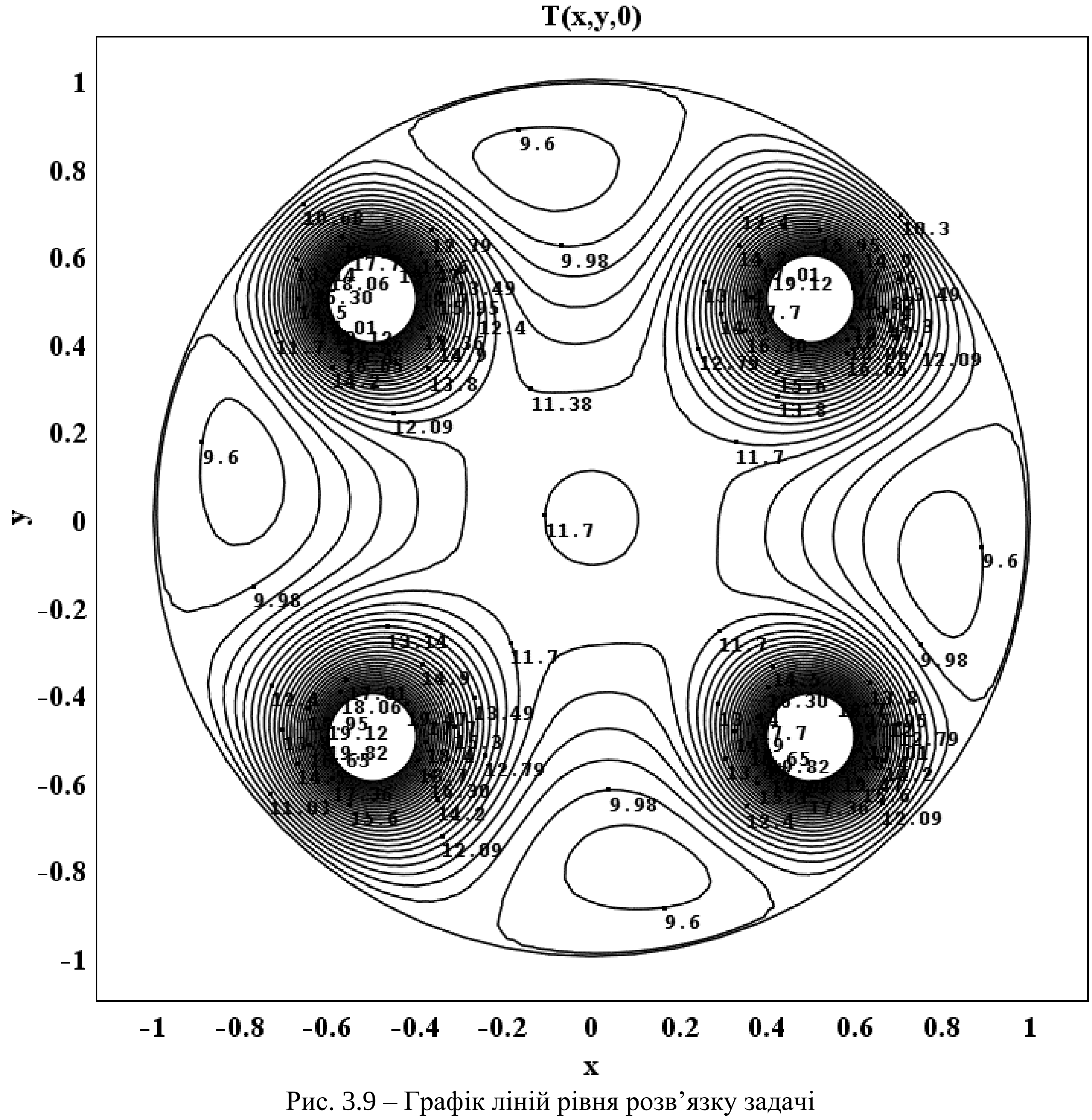


Рис. 3.9 – Графік ліній рівня розв’язку задачі

На рис. 3.10 показаний помітний виграш при застосуванні методу найшвидшого спуску разом із методом Фур’є для лінійної задачі (3.4)–(3.6), а також, нераціональність класичного методу Ньютона для розв’язання лінійних ОЗТ ідентифікації початкової умови.

Як було сказано у попередньому розділі, метод Ньютона використовує на кожній ітерації кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ, яка пропорційна квадрату кількості вузлів розрахункової сітки, якою покривається досліджуваний об’єкт.

Рис. 3.10 – Порівняльний аналіз методів за кількістю викликів процедури розв’язку ПЗТ

Слід зазначити, що класичний метод Ньютона вимагає у 2 рази більше кількості викликів процедури розв’язуванн ПЗТ для знаходження чисельного розв’язку поставленої задачі (3.4)–(3.6) у порівнянні з методом найшвидшого спуску з нульовими наближенням до шуканої початкової умови, яка є розв’язком задачі. Із рис. 3.10 помітно прослідковується ефективність методу Фур’є для побудови наближень до початкової умови.

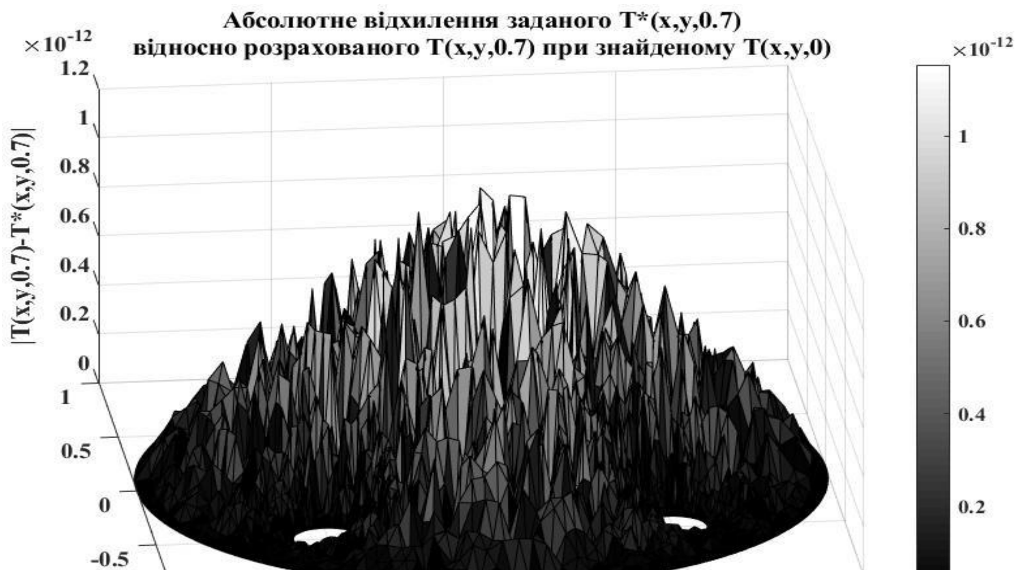


Рис. 3.11 – Абсолютне відхилення знайденого кінцевого розподілу температури, знайденого методом найшвидшого спуску, відносно заданого за умовою задачі

На рис. 3.11 видно ефективність методу найшвидшого спуску за критерієм точності обчислень, а саме точності знайденого розв’язку задачі (3.4)–(3.6).

Наступна лінійна ОЗТ має таке формулювання: знайти глобальний мінімум такого функціонала:

$$
\begin{gathered}
J\left(\theta\left(\vec{x}\right)\right)=\int\limits_{\Omega}\left(T\left(\theta,\vec{x},t_f\right)-\Theta\left(\vec{x}\right)\right)^2 d\vec{x}\to\min,\ \vec{x}=\left(x_1,x_2\right),\\
\Omega=\Omega_1\setminus\left(\Omega_2\cup\Omega_3\cup\Omega_4\cup\Omega_5\right),\ \Omega_1=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|x_1^2+x_2^2\le 1\right\},\\
\Omega_2=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1-0,5\right)^2+\left(x_2-0,5\right)^2\le 0,01\right\},\\
\Omega_3=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1+0,5\right)^2+\left(x_2-0,5\right)^2\le 0,01\right\},\\
\Omega_4=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1-0,5\right)^2+\left(x_2+0,5\right)^2\le 0,01\right\},\\
\Omega_5=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1+0,5\right)^2+\left(x_2+0,5\right)^2\le 0,01\right\}
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

при умові:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(x_1^2+x_1^2+1\right)\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left(x_1^2+x_1^2+1\right)\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)+\\
+Te^{-x_1^2+x_2^2}+x_1^2+x_2^2,t\in\left[0,t_f\right],t_f=0,7.\\
T\left(\vec{x},0\right)=\theta\left(\vec{x}\right),
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

де функція

$\theta\left(\vec{x}\right)$ – невідома функція (початковий розподіл температури в області);

$T\left(\theta,\vec{x},t_f\right)$ – шуканий розв’язок задачі з урахуванням початкової умови;

$\Theta\left(\vec{x}\right)$ – заданий розподіл температури у момент часу t_f.

Граничні умови задачі (3.7)–(3.8) мають такий вигляд:

$$
T\left(\vec{x},t\right)\Big|_{\Gamma_{inside}}=20,\ \frac{\partial T\left(\vec{x},t\right)}{\partial\vec{n}}\Bigg|_{\Gamma_{outside}}=0,
\tag{3.9}
$$

де $\vec{n}$ – нормаль до границі області (у даному випадку до зовнішньої).

На рис. 3.12 зображено розподіл температури $\Theta\left(\vec{x}\right)$ у розрахунковій області задачі. ОЗТ (3.7)–(3.9) є лінійною та розв’зується методом скінченних елементів, оскільки геометрія розрахункової області не є елементарною формою. Тому раціонально здійснювати тріангуляцію розрахункової області задачі та знаходити її розв’язок з використанням саме методу скінченних елементів.

Розрахункова область задачі (3.7)–(3.9) зображена на рисунку 3.12. Вона є одиничним колом з центром у початку координат, з якого вирізали малі кола, радіус яких дорівнює 0,2, а центри малих кіл знаходяться в точках з координатами $(-0{,}5;-0{,}5)$, $(-0{,}5;0{,}5)$, $(0{,}5;-0{,}5)$, $(0{,}5;0{,}5)$. Сітка, яка вкриває розрахункову область поставленої задачі є тріангуляцією, у якій загальна кількість вузлів складає 4179, кількість елементів – 8040, кількість граничних елементів – 312.

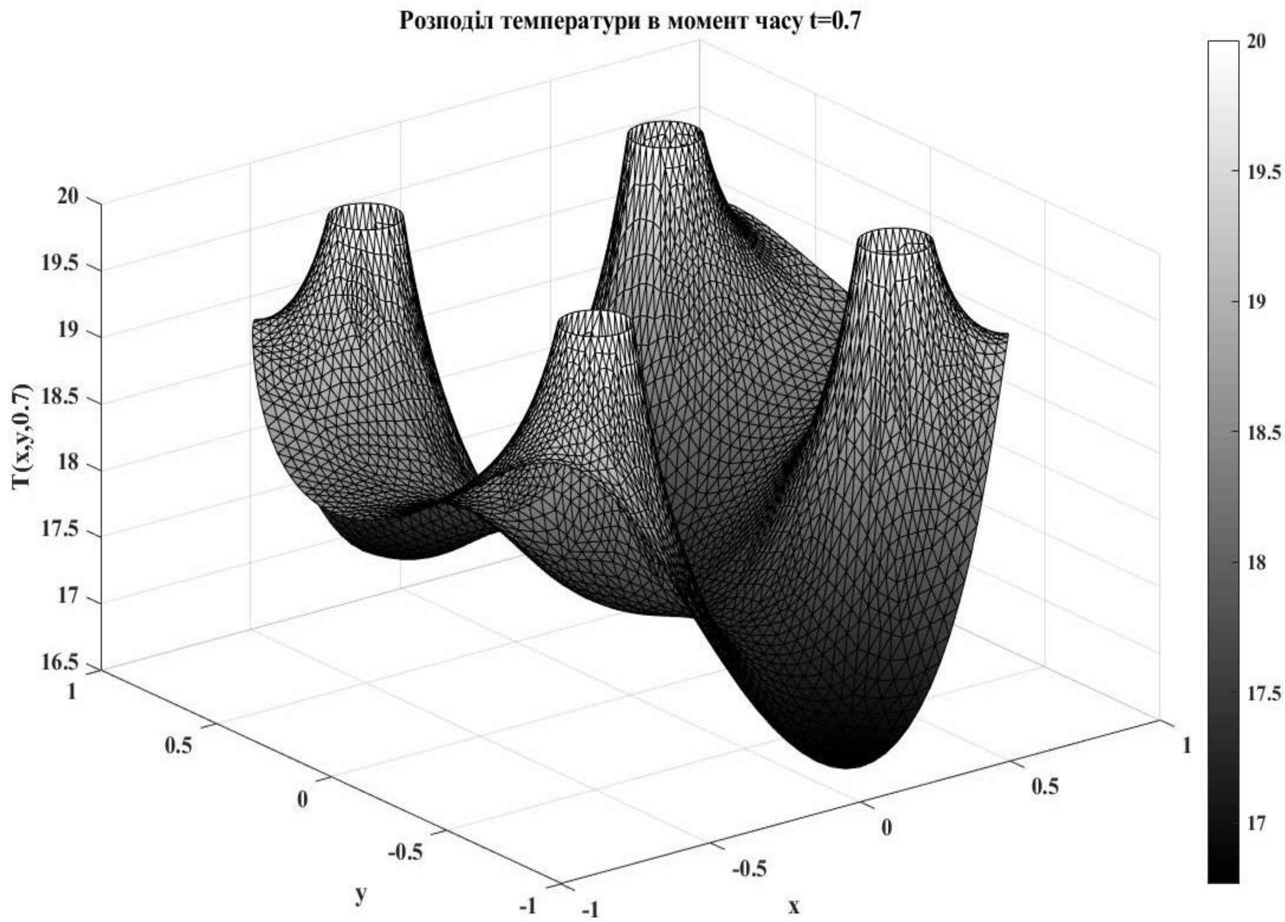


Рис. 3.12 – Розподіл температури у момент часу $t_f = 0.7$

На рис. 3.13 предствлено контурний графік для повноти сприйняття інформації про розподіл температури $\Theta\left(\vec{x}\right)$.

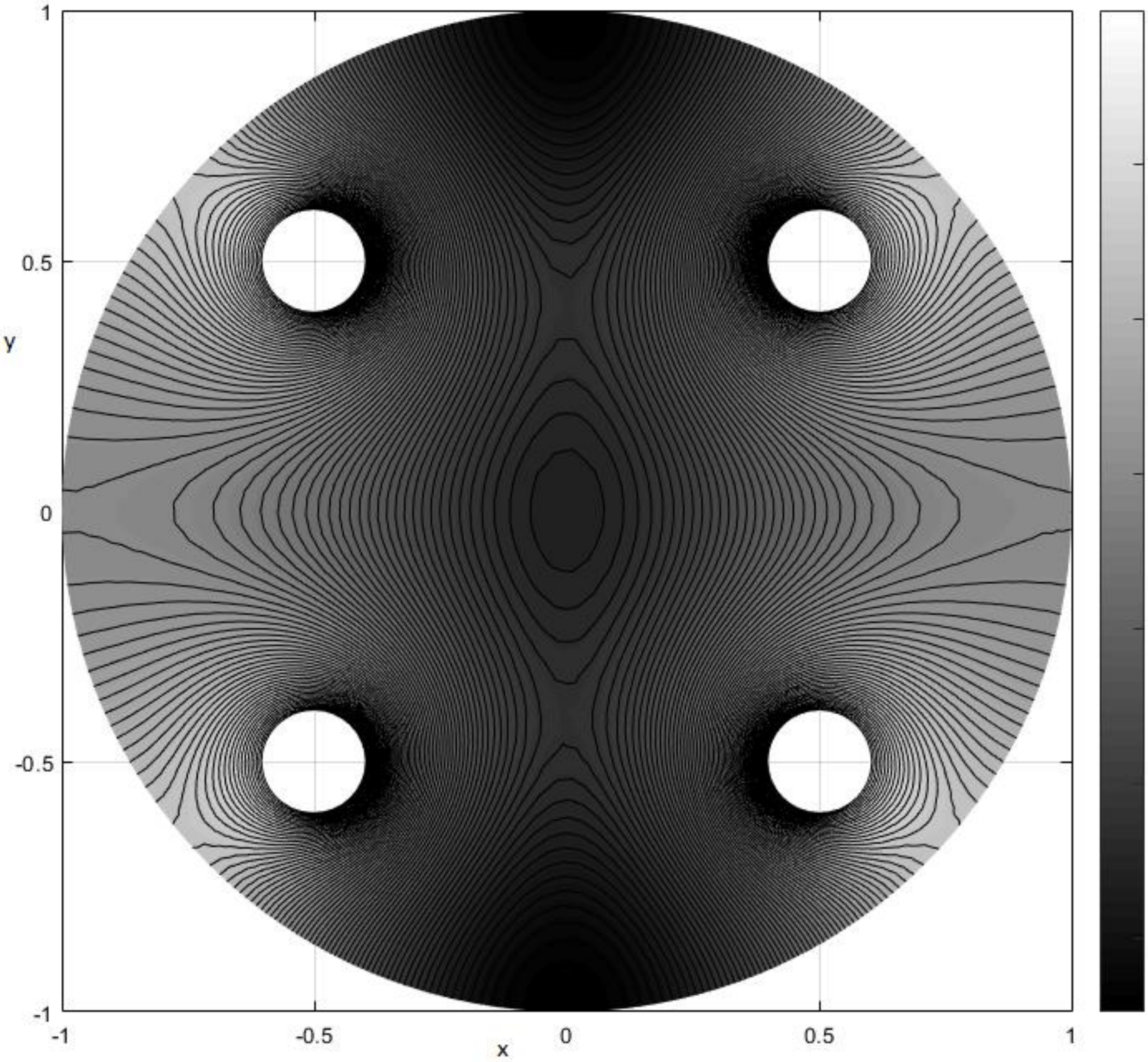


Рис. 3.13 – Графік ліній рівня температури у момент часу $t_f = 0.7$

У таблицях 3.5 та 3.6 наведено основні результати збіжності методу найшвидшого спуску з нульовим наближенням до початкової умови та з використанням методу Фур’є для наближення до початкової умови задачі (3.7)–(3.9). При розв’язуванні розглянутої задачі було взято чотири члена розкладу в ряд $\left(N = 4\right)$. Поставлена задача є лінійною, тому метод Ньютона знову ж не є раціональним вибором для знаходження глобального мінімуму квадратичного функціонала в (3.7).

Таблиця 3.5

Таблиця результатів роботи методу найшвидшого спуску на задачі (3.7)–(3.9) за критерієм похибки без побудови наближення до початкової умови на основі методу Фур'є

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	6,02241782E-02	28	4,81116315E-06
9	3,13687632E-02	29	2,97795518E-06
10	1,48198502E-02	30	1,58933213E-06
11	1,13578343E-02	31	1,12953842E-06
12	7,04685746E-03	32	7,06644383E-07
13	4,47729263E-03	33	3,65063905E-07
14	2,93454568E-03	34	2,79877369E-07
15	2,16240133E-03	35	1,33279990E-07
16	1,02257164E-03	36	6,99082771E-08
17	5,69234987E-04	37	5,21205567E-08
18	3,34901383E-04	38	4,46263834E-08
19	1,46423107E-04	39	2,33246971E-08
20	9,14092544E-05	40	1,13685517E-08
21	5,38050560E-05	41	7,02178276E-09
22	3,42110000E-05	42	3,71306332E-09
23	2,03012835E-05	43	1,96575716E-09
24	1,23837294E-05	44	1,11430619E-09
25	7,79780717E-06	45	7,64422836E-10
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***16435***

Загальна кількість ітерацій методу найшвидшого спуску для поставленої задачі (3.7)–(3.9) дорівнює 50. Точність обчислень 1E-11.

Таблиця 3.6

Таблиця результатів роботи методу найшвидшого спуску на задачі (3.7)–(3.9) за критерієм похибки з побудовою наближення до початкової умови на основі методу Фур'є (4 члена розкладу в ряд)

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	3,77142637E-02	24	6,96575135E-06
9	3,12535995E-02	25	2,37416195E-06
10	1,38231385E-02	26	1,02372266E-06
11	1,15260173E-02	27	3,51514166E-07
12	4,03590504E-03	28	1,16907083E-07
13	2,36552339E-03	29	3,61472829E-08
14	1,35844571E-03	30	1,38205124E-08
15	6,56978333E-04	31	4,51354709E-09

16	2,85306763E-04	32	1,51848516E-09
17	2,05781856E-04	33	6,29331868E-10
18	6,96032433E-05	34	2,30598250E-10
19	3,98956872E-05	35	8,62567467E-11
20	1,43894550E-05	36	2,80587395E-11
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***5874***

Загальна кількість ітерацій методу найшвидшого спуску для поставленої задачі (3.7)–(3.9) дорівнює 38. Точність обчислень 1E-11.

Знову ж, ефективність методу найшвидшого спуску у комбінації з методом Фур'є помітно проявляється на задачі (3.7)–(3.9). Це видно з результатів таблиць 3.6 та 3.7. Знайдений розподіл температури в момент часу $t = 0$ є розв'язком задачі (3.7)–(3.9). Він наведений на рис. 3.14.

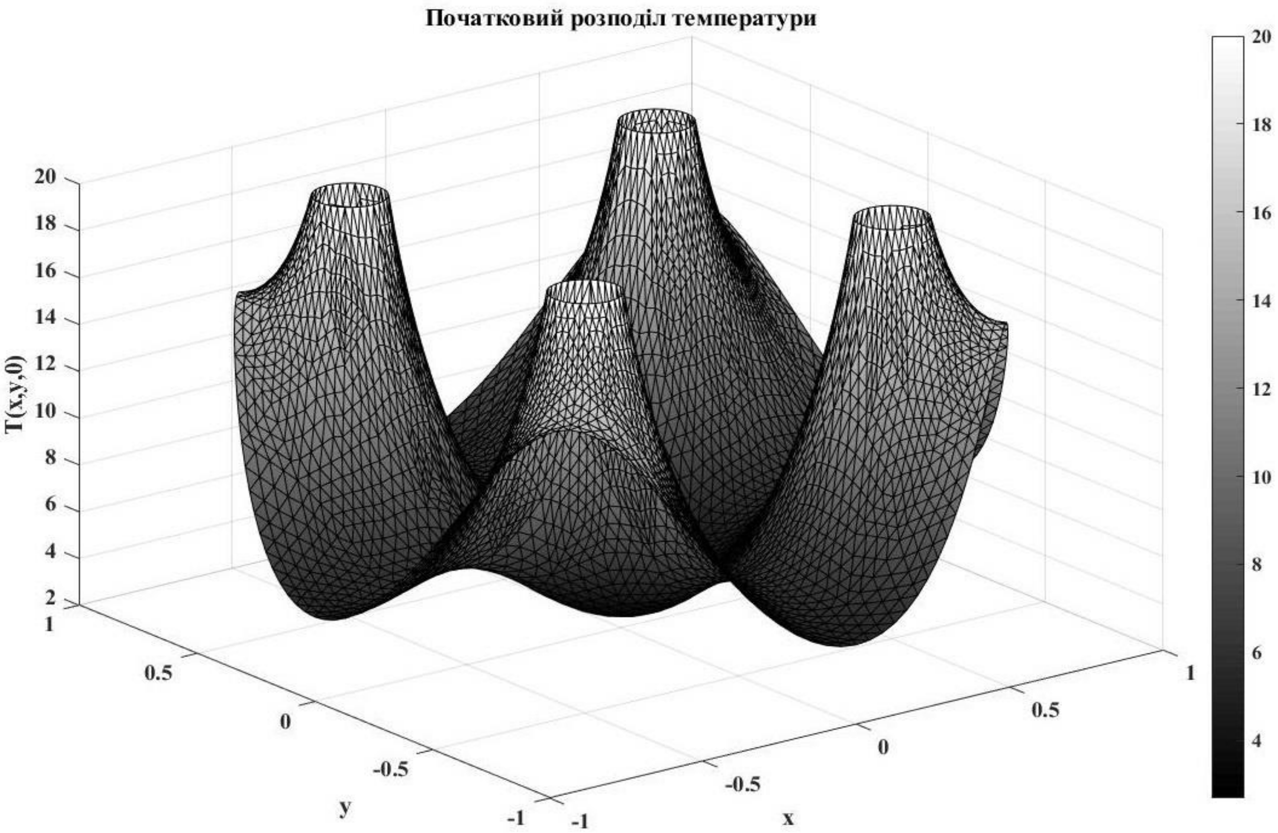


Рис. 3.14 – Шуканий початковий розподіл температури

Рисунок 3.15 містить статистику про результати роботи класичного методу Ньютона на задачі (3.7) – (3.9) з нульовим початковим наближенням до шуканої початкової, яка є розв'язком поставленої задачі та методу найшвидшого спуску з нульовим наближенням та наближенням з використанням методу Фур'є (розклад ряду в 4 члена) до початкової умови. Кількість викликів процедури розв'язку ПЗТ береться за 100% у методі Ньютона.

Рис. 3.15 – Порівняльний аналіз роботи методів за кількістю викликів процедури розв'язку ПЗТ

На рис. 3.16 показано помилку роботи методу найшвидшого спуску з заданням наближення до початкової умови на основі методу Фур'є – 4 члена розкладу в ряд Фур'є.

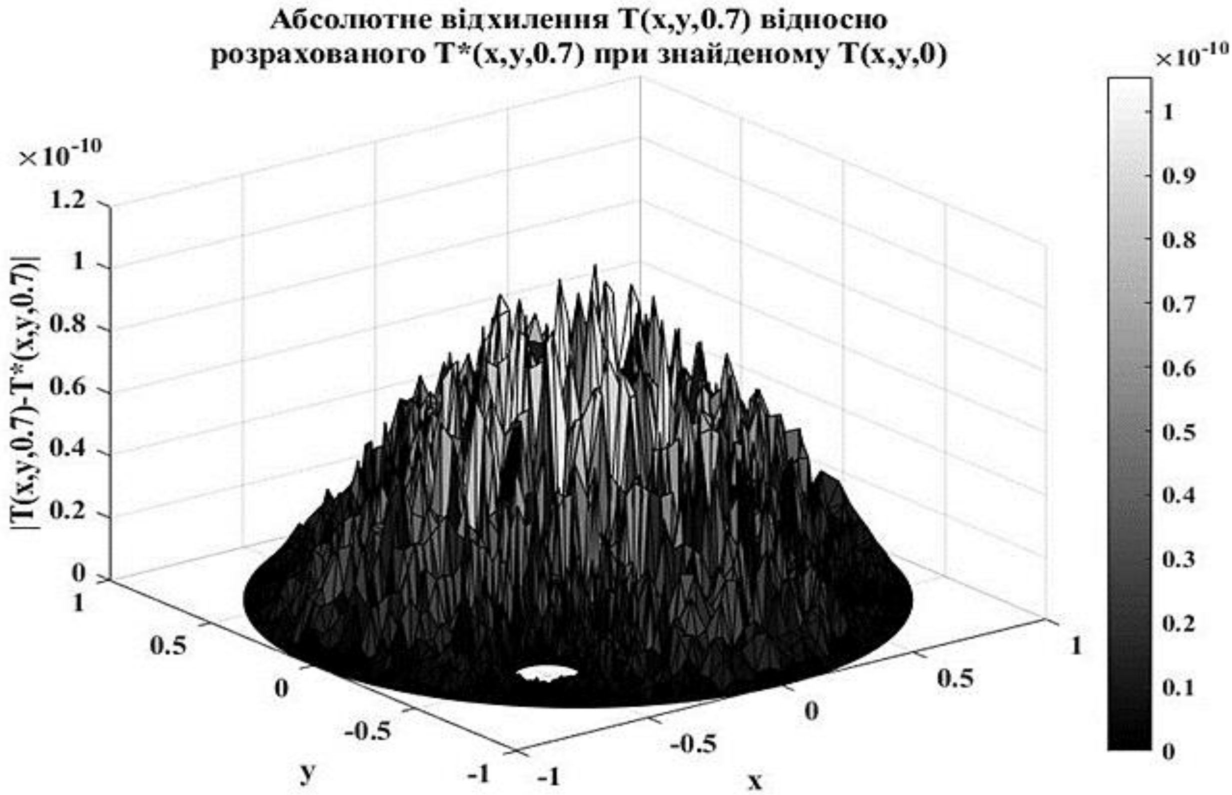


Рис. 3.16 – Абсолютне відхилення знайденого кінцевого розподілу температури, знайденого методом найшвидшого спуску, відносно заданого за умовою задачі

Наступна лінійна ОЗТ матє таке формулювання. Знайти глобальний мінімум функціонала:

$$J\left(\theta\left(\vec{x}\right)\right)=\int\limits_{\Omega}\left(T\left(\theta,\vec{x},t_f\right)-\Theta\left(\vec{x}\right)\right)^2 d\vec{x}\rightarrow\min,\ \vec{x}=\left(x_1,x_2\right),$$
$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2,\ \Omega_1=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1,x_2\right)\in\left[0;1\right]^2\right\},$$
$$\Omega_2=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|x_1^2+x_2^2\le 1\right\} \tag{3.10}$$

при умові:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(\frac{x_1x_2+2}{x_1^2+x_1^2+1}\right)\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left(\frac{x_1x_2+2}{x_1^2+x_1^2+1}\right)\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)+$$
$$+T\left(\sin\pi x_1+\sin\pi x_2\right)+\cos\left(x_1-x_2\right),$$
$$t\in\left[0,t_f\right],t_f=0,04.$$
$$T\left(\vec{x},0\right)=\theta\left(\vec{x}\right), \tag{3.11}$$

де функція

$\theta\left(\vec{x}\right)$ – невідома функція;

$T\left(\theta,\vec{x},t_f\right)$ – шуканий розв’язок задачі;

$\Theta\left(\vec{x}\right)$ – заданий розподіл температури у момент часу t_f.

Граничні умови задачі (3.10)–(3.11) мають наступний вигляд:

$$T\left(\vec{x},t\right)\Big|_{\Gamma_{inside}}=20,\ \frac{\partial T\left(\vec{x},t\right)}{\partial\vec{n}}\Bigg|_{\Gamma_{outside}}=10, \tag{3.12}$$

де $\vec{n}$ – нормаль до границі області (у даному випадку до зовнішньої).

Задача розв’язується методом скінченних елементів з використанням тріангуляції розрахункової області, яка розбита на трикутники: кількскть вузлів сітки – 3949, кількість трикутних елементів – 7680, кількість граничних елементів складає 216.

Розрахункова область поставленої заадчі представлнена на рис. 3.17.

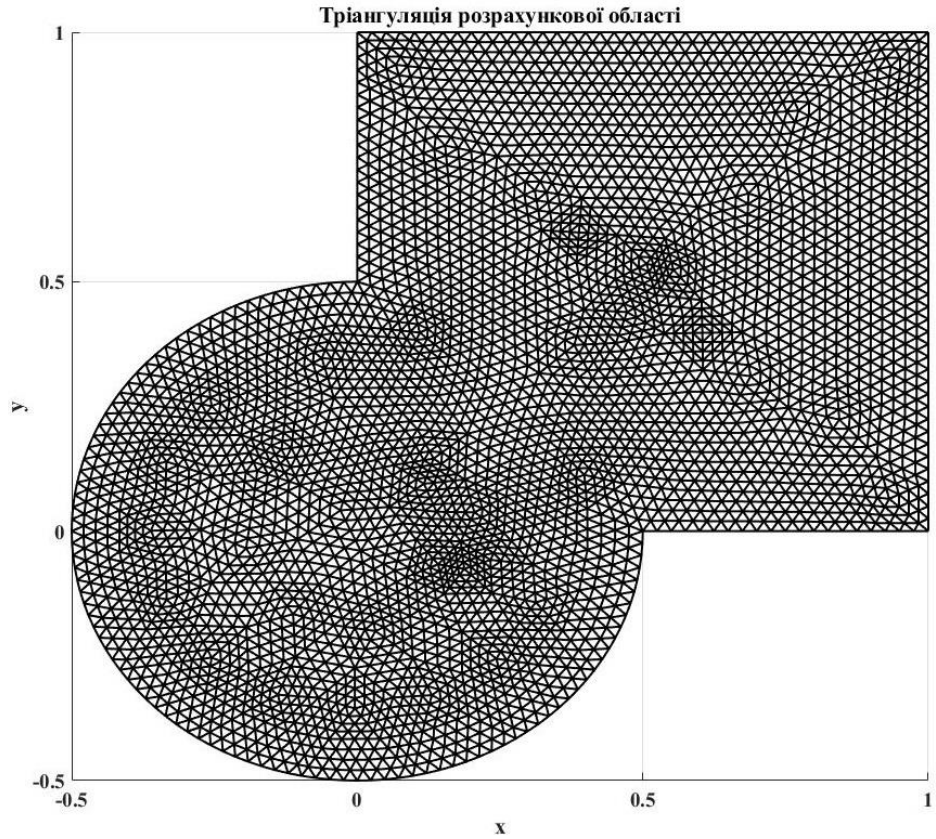


Рис. 3.17 – Розрахункова область задачі з тріангуляцією

На рис. 3.18 зображений розподжіл температури поставленої лінійної ОЗТ в момент часу t = 0.04.

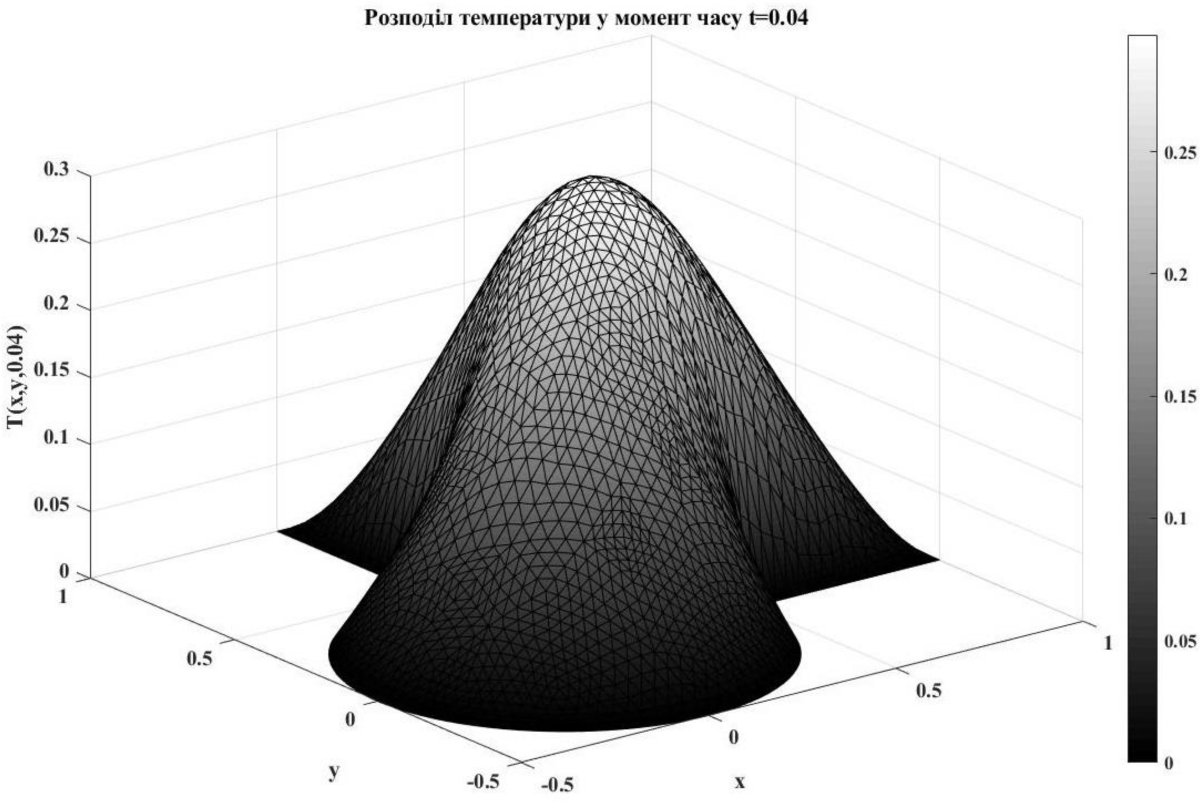


Рис. 3.18 – Температурне поле задачі у кінцевий момент часу (t = 0.04)

Дані таблиці 3.7 показують збіжність методу найшвидшого спуску задачі (3.10)–(3.12) з нульовим наближенням до початкової умови. Метод найшвидшого спуску зійшовся до шуканого розі'язку задачі за 35 ітерацій. Загальна кількість викликів процедури розв'язування ПЗТ склала 25112.

Таблиця 3.7

Таблиця результатів ефективності методу на вищерозглянутих задачах без побудови наближення до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	6,53788595E-02	21	2,01603927E-05
9	3,09006651E-02	22	1,32343152E-05
10	1,44509057E-02	23	5,51807580E-06
11	6,73425857E-03	24	2,49060811E-06
12	3,35146835E-03	25	1,64640922E-06
13	2,57646392E-03	26	6,64589868E-07
14	1,85471317E-03	27	3,14993335E-07
15	8,92095268E-04	28	1,57897472E-07
16	5,79564873E-04	29	6,78901984E-08
17	2,73623468E-04	30	4,11655953E-08
18	1,59897392E-04	31	2,03183598E-08
19	9,34855006E-05	32	8,54080093E-09
20	5,19164496E-05	33	4,41797159E-09
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***24875***

Таблиця 3.8 містить числові результати збіжності методу найшвидшого спуску із застосуванням методу Фур'є для задання початкового наближення у вигляді ряду. У розрахунках було взято чорири члена розкладу в ряд Фур'є.

Таблиця 3.8

Таблиця результатів ефективності методу на вищерозглянутих задачах з побудовою наближення до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	5,39150943E-03	17	1,55269738E-05
9	4,06288086E-03	18	3,39203474E-06
10	1,98856133E-03	19	8,54744404E-07
11	1,19360575E-03	20	2,04076479E-07
12	6,58607308E-04	21	5,45129791E-08
13	3,50405852E-04	22	1,22258337E-08
14	2,67558785E-04	23	3,36729643E-09
15	1,35251793E-04	24	7,95844633E-10
16	6,45060831E-05	25	1,77624329E-10
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***7222***

Поставлена задача (3.10)–(3.12) має аналітичничний розв'язок для перевірки отриманих результатів.

Аналітичний розв'язок задається у вигляді формули:

$$T\left(\vec{x},0\right)=\theta\left(\vec{x}\right)=3\sin\left(5\pi x_1 x_2\right).$$

Нижче на рис.3.20 показано знайдене температурне поле у початковий момент часу з накладанням аналітичного розв'зку задачі, який подано вище.

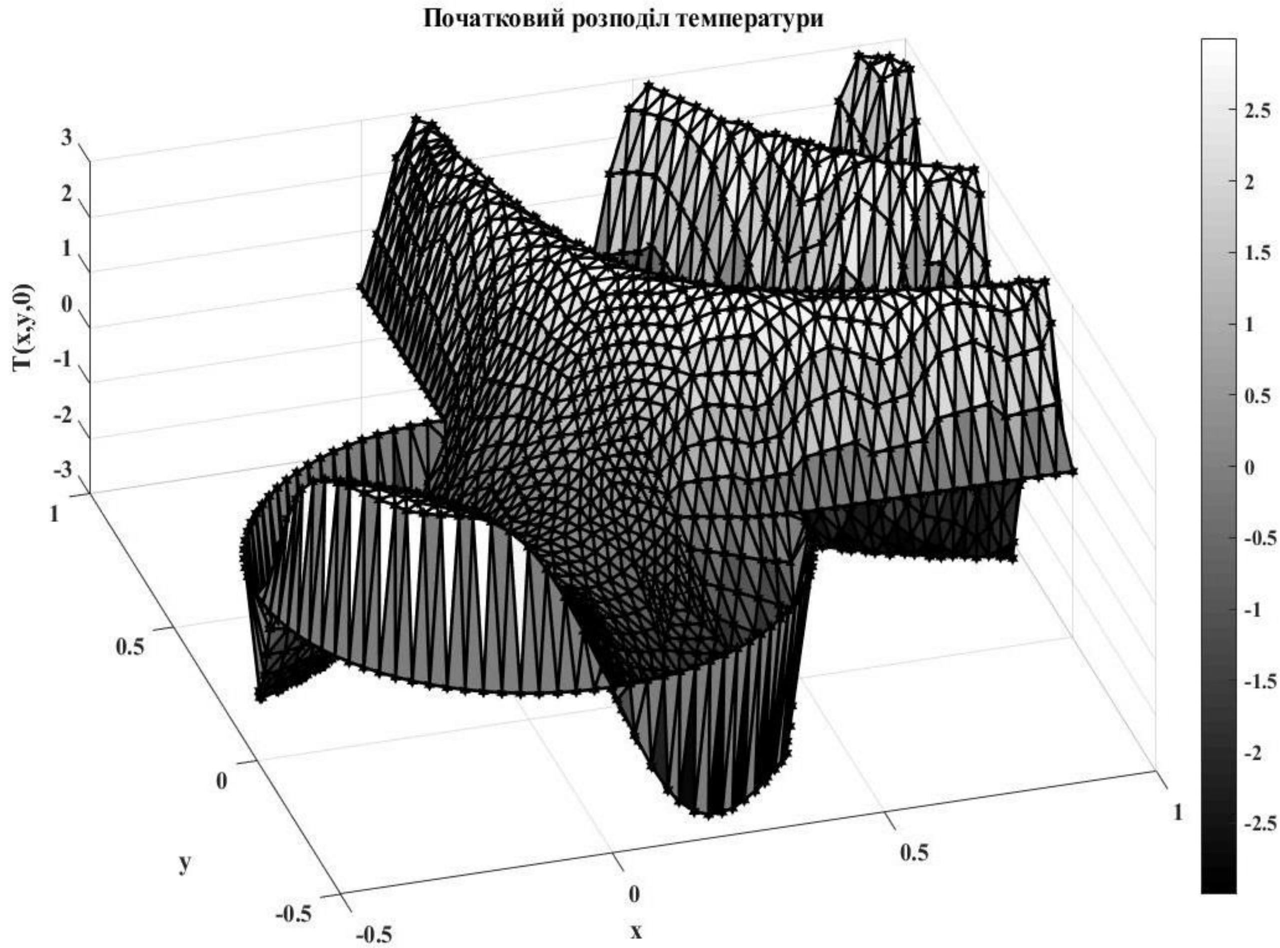


Рис. 3.20 – Знайдений початковий розподіл температури (t = 0)

Знайдений чисельний розв'язок задачі (3.10)–(3.12) порівняно з аналітичним виразом, який описує розподіл температури в початковий момент часу. Поставлена задача розв'язувалась на різних тріангуляціях. Відносна помилка обчислень на вище вказаній сітці склала 1Е-12.

Нижче показана абсолютна похибка між температурними полями, у фіксований момент часу, а саме, для t = 0,1.

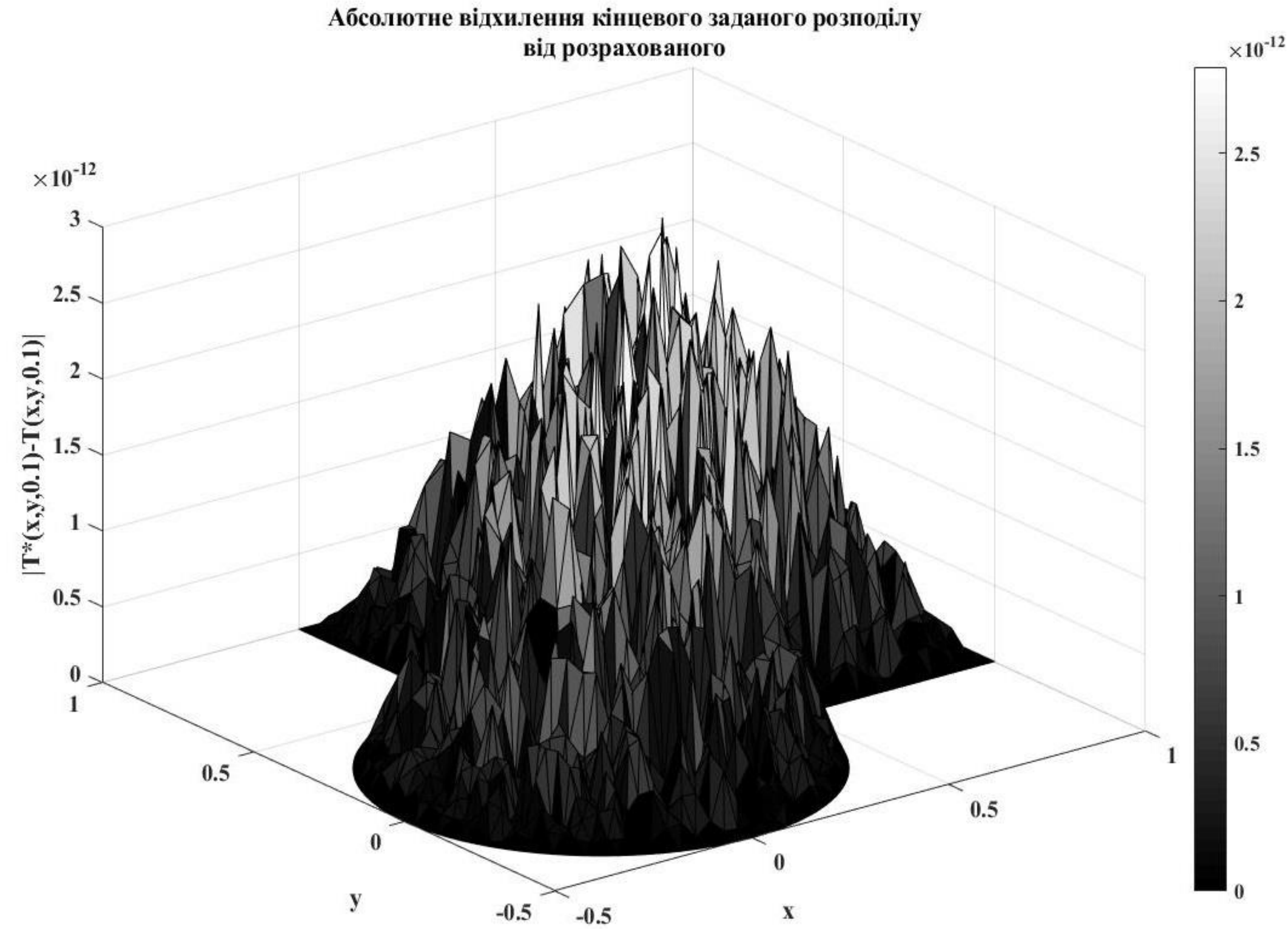


Рис. 3.21 – Абсолютне відхилення отриманого чисельного розв'язку методом найшвидшого спуску відносно точного розв'язку задачі

Рисунок 3.21 демонструє ще один варіант перевірки – абсолютне відхилення температурних полів (розрахованого й заданого за умовою задачі) у фіксований момент часу t = 0,1.

Нелінійні задачі. Знайти глобальний мінімум функціонала [98]:

$$
\begin{gathered}
J\left(\theta\left(\vec{x}\right)\right)=\int\limits_{\Omega}\left(T\left(\theta,\vec{x},t_f\right)-\Theta\left(\vec{x}\right)\right)^2 d\vec{x}\to\min,\ \vec{x}=\left(x_1,x_2\right),\\
\Omega=\Omega_1\setminus\left(\Omega_2\cap\Omega_3\cap\Omega_4\cap\Omega_5\cap\Omega_6\right),\\
\Omega_1=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1,x_2\right)\in\left[-1;1\right]^2\right\},\\
\Omega_2=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|x_1^2+x_2^2\le 1\right\},\\
\Omega_3=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1,x_2\right)\in\left[-0,8;-0,6\right]\times\left[-0,8;-0,6\right]\right\},\\
\Omega_4=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1,x_2\right)\in\left[-0,8;-0,6\right]\times\left[0,6;0,8\right]\right\},\\
\Omega_5=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1,x_2\right)\in\left[0,6;0,8\right]\times\left[-0,8;-0,6\right]\right\},\\
\Omega_6=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in R^2\middle|\left(x_1,x_2\right)\in\left[0,6;0,8\right]\times\left[0,6;0,8\right]\right\},
\end{gathered}
\tag{3.13}
$$

при умові:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(T^2-T+\sin T+1\right)\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left(T^2-T+\sin T+1\right)\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)+$$
$$+\cos\left(T-x_1+x_1\right)+x_1^2+x_2^2, t\in\left[0,t_f\right], t_f=0,3. \quad (3.14)$$
$$T\left(\vec{x},0\right)=\theta\left(\vec{x}\right),$$

де функція

$\theta\left(\vec{x}\right)$ – невідома функція;

$T\left(\theta,\vec{x},t_f\right)$ – шуканий розв’язок задачі;

$\Theta\left(\vec{x}\right)$ – заданий розподіл температури у момент часу t_f.

Граничні умови задачі (3.13)–(3.14) мають наступний вигляд:

$$T\left(-1,x_2,t\right)=\sin \pi x_2,$$
$$\left.\frac{\partial T\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_1}\right|_{\left(1,x_2,t\right)}=\left.\frac{\partial T\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_2}\right|_{\left(x_1,-1,t\right)}=\left.\frac{\partial T\left(\vec{x},t\right)}{\partial x_2}\right|_{\left(x_1,1,t\right)}=\left.\frac{\partial T\left(\vec{x},t\right)}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma_{inside}}=0, \quad (3.15)$$

де $\vec{n}$ – нормаль до границі області (у даному випадку до внутрішньої Γ_{inside}).

Розрахункова область Ω разом із сіткою зображена на рисунку 3.22. Вона є квадратом зі стороною 2 з центром у початку координат. Із квадрату вирізано коло з центром у початку координат, радіус якого дорівнює 0,5 та чотири квадрати зі сторонами 0,2 з центрами в точках $(-0,5;-0,5)$, $(-0,5;0,5)$, $(0,5;-0,5)$, $(0,5;0,5)$.

Задача (3.13)–(3.15) була розв’язана на різних сітках. Однією з них була тріангуляція, яка складається з 1348 вузлів сітки, 2472 елементів, 232 граничних елементів.

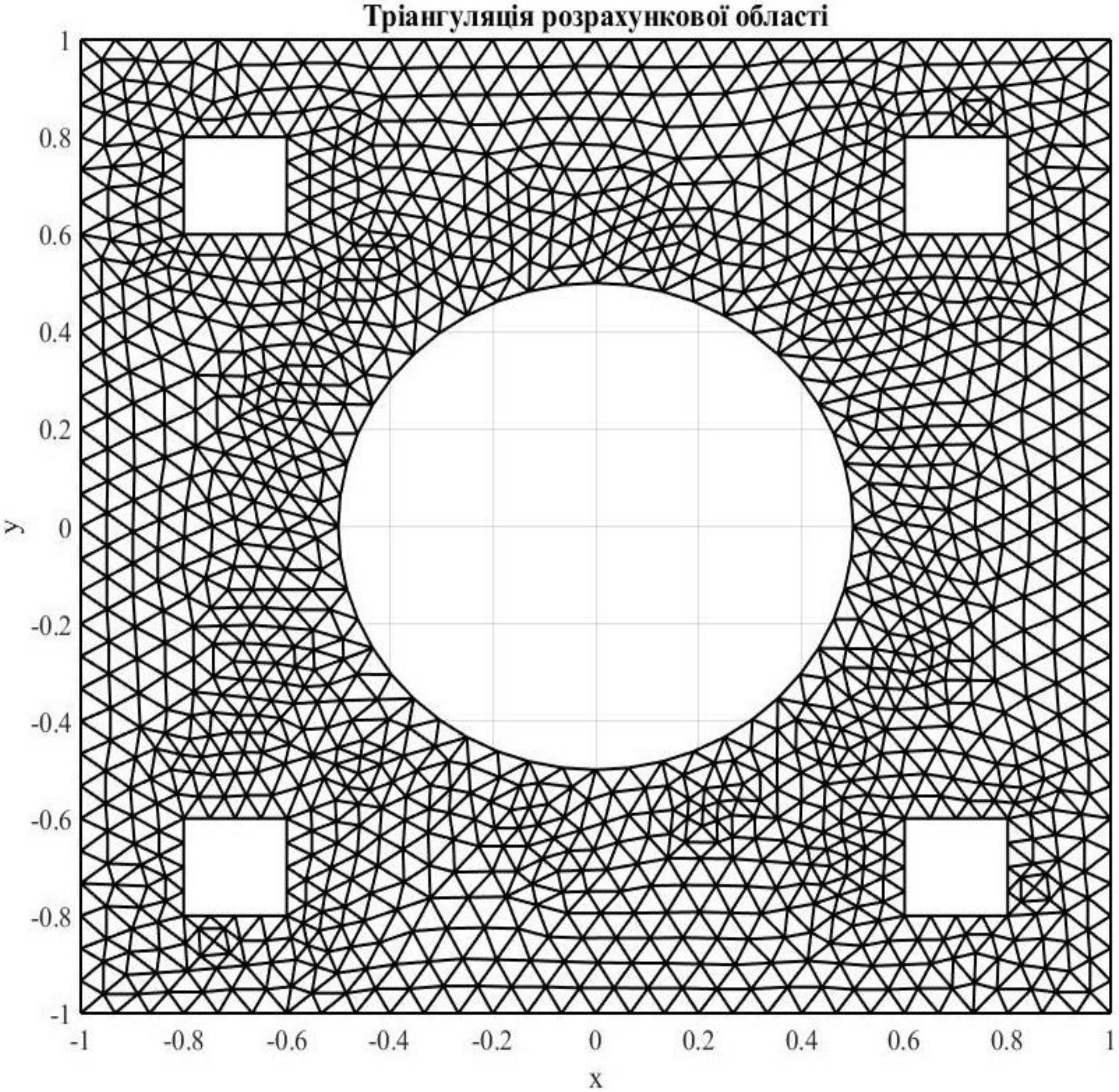


Рис. 3.22 – Розрахункова область задачі з накладеною на неї сіткою

Розподіл температури в розрахунковій області для задачі (3.13)–(3.15) наведено на рис. 3.23.

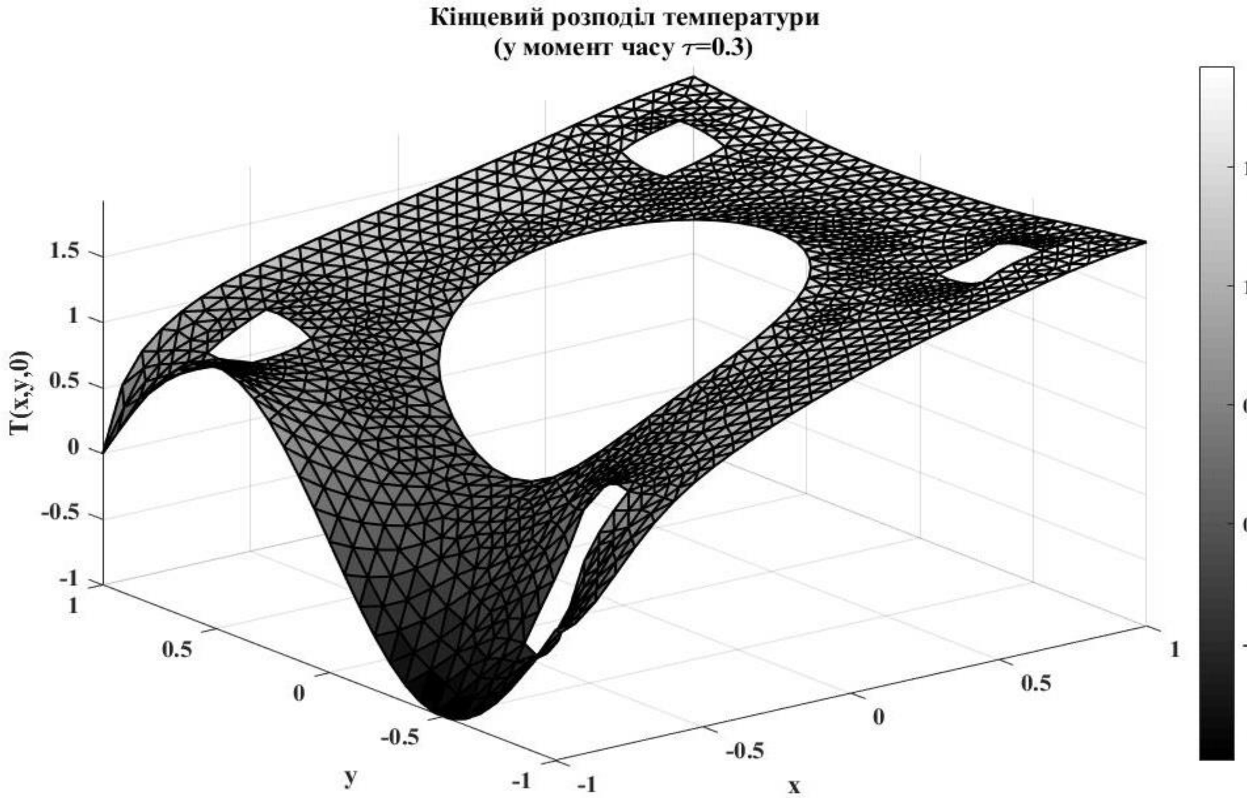


Рис. 3.23 – Розподіл температури у кінцевий момент часу (t = 0,3)

Основні результати розрахунків показані в таблицях 3.9 та 3.10 для задачі (3.13)–(3.15). У таблиці (3.9) містяться числові результати роботи методу (2.47), який отримано у попередньому розділі. Метод (2.47) на класичному методі Ньютона, але має третій порядок точності та змінний крок, за рахунок якого отриманий метод стійкіший у порівнянні з класичним методом Ньютона. Початкове наближення до розв’язку задачі – це нульове наближення.

Таблиця 3.9

Таблиця результатів ефективності модифікації класичного методу Ньютона (2.47) на задачі (3.13)–(3.15) з нульовим наближенням до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	1,22026164E-01	24	8,05304600E-06
9	5,42155734E-02	25	5,34488234E-06
10	3,21302169E-02	26	2,98248171E-06
11	1,70165198E-02	27	1,55410498E-06
12	1,25780218E-02	27	7,52028258E-07
13	6,56210171E-03	29	4,44511885E-07
14	3,70254206E-03	30	2,29363512E-07
15	2,09773785E-03	31	1,49021186E-07
16	9,18010513E-04	32	1,26460940E-07
17	5,55242366E-04	33	8,36731073E-08

18	3,37818897E-04	34	6,04248959E-08
19	1,82819269E-04	35	3,70056051E-08
20	1,34863628E-04	36	2,20083567E-08
21	7,04258876E-05	37	1,25221450E-08
22	3,56918849E-05	38	6,71496167E-09
23	1,59962584E-05	39	4,12695258E-09
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***165456***

Метод найшвидшого спуску зійшовся на поставленій задачі (3.13)–(3.15) за 43 ітерації. Точність обрахунків 1E-11. Кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ для задачі (3.13)–(3.15) дорівнює 172185.

Засосовуючи класичний метод Ньютона, кількість викликів процедури розв’зування ПЗТ дорівнює 278141, що свідчить про нераціональність використання класичного методу Ньютона для оптимізації функціонала (3.13).

Таблиця (3.10) містить числові результати роботи методу (2.47), але з початковим наближенням до розв’язку задачі, яке отримане завдяки розкладу в ряд Фур’є (4 члена розкладу в ряд).

Таблиця 3.10

Таблиця результатів ефективності модифікації класичного методу Ньютона (2.47) на задачі (3.13)–(3.15) з наближенням до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	5,45718397E-03	17	1,01614975E-05
9	2,44619370E-03	18	2,56655451E-06
10	1,41701096E-03	19	6,51180774E-07
11	7,47980362E-04	20	1,71757284E-07
12	5,68546559E-04	21	4,61817493E-08
13	2,89509245E-04	22	1,04534227E-08
14	1,63368028E-04	23	2,39947851E-09
15	9,34339315E-05	24	5,35485276E-10
16	4,06501898E-05	25	1,27723181E-10
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***20682***

Спираючись на отримані результати, які містяться у таблицях 3.9 та 3.10, можна зазначити, що використання методу Фур’є для ОЗТ (3.13)–(3.15) є раціональним, оскільки загальна кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ зменшена майже у 8 раз. Завдяки змінному кроку в модифікації класичного методу Ньютона (2.47), на кожній ітерації помилка обчислень зменшується. Це ще раз звідчить про те, що метод є стійким на нелінійних задачах.

На рисунку 3.24 зображене знайдене температурне поле всієї розрахункової області задачі (3.13)–(3.15).

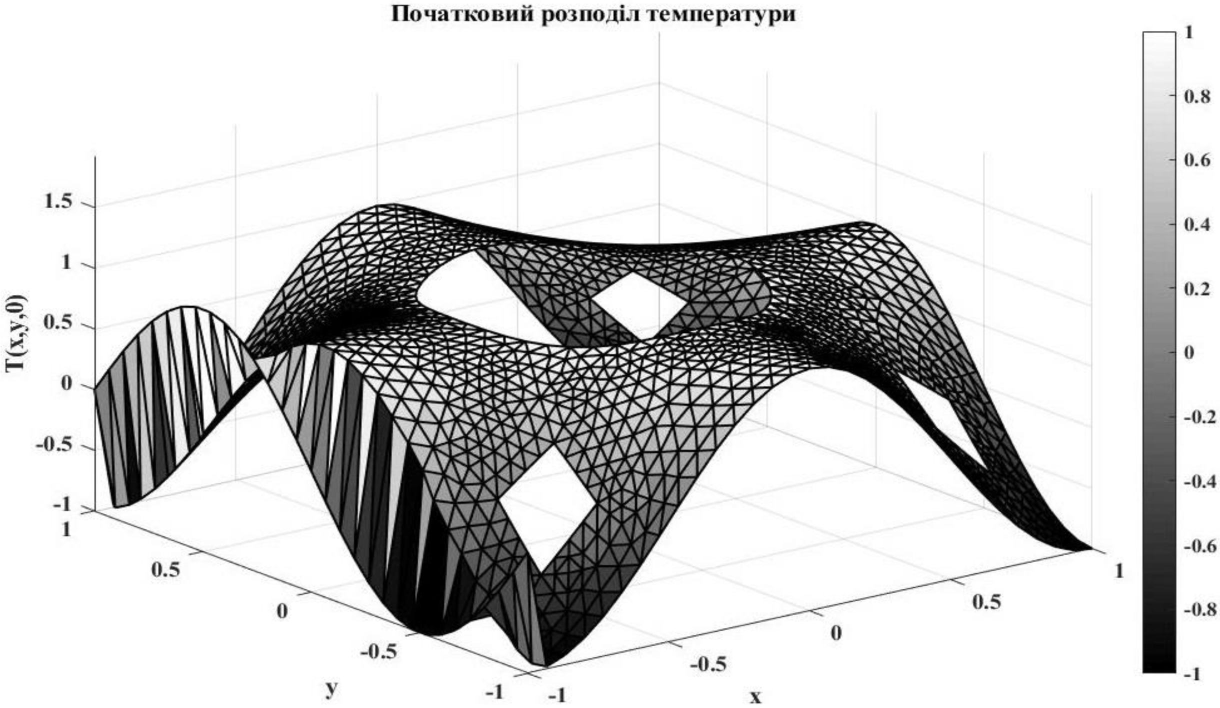


Рис. 3.24 – Температурне поле у момент часу t = 0

На рис. 3.25 показаний порівняльний аналіз збіжності отриманих методів та класичного методу Ньютона без використання методу Фур'є для побудови наближення до шуканої початкової умови.

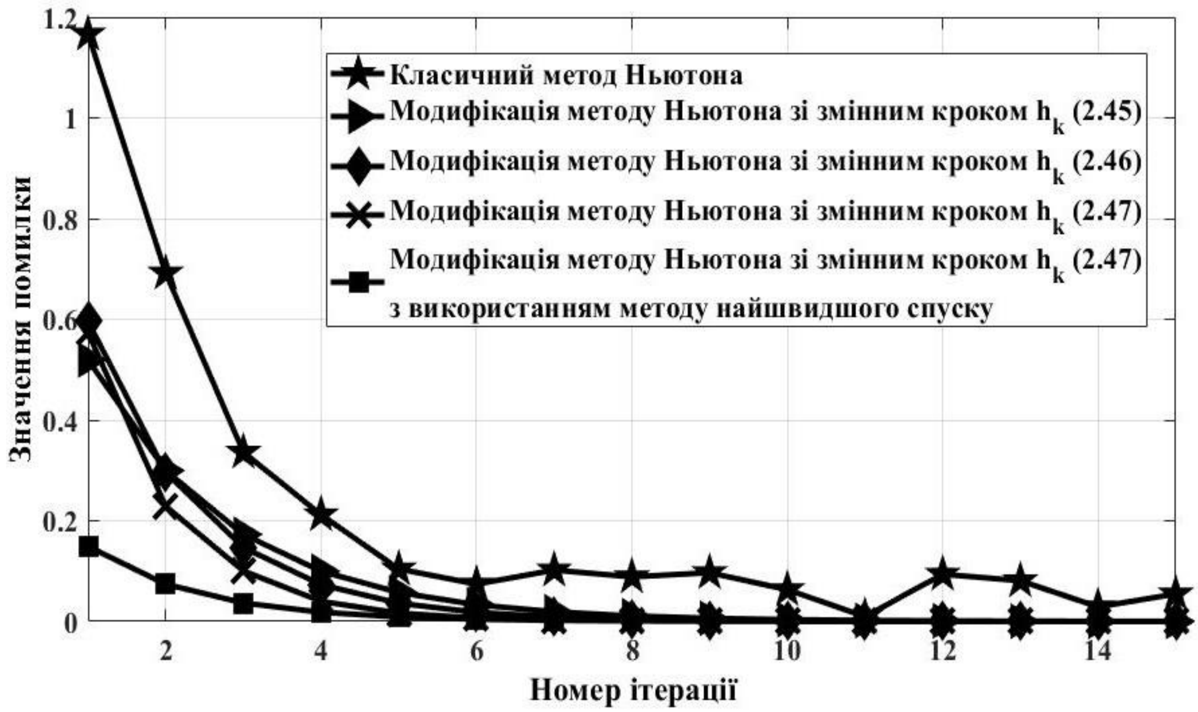


Рис. 3.25 – Порівняльний аналіз роботи методів (2.45)–(2.47) на нелінійній задачі (3.13)–(3.15) за критерієм помилки відповідних методів

Як видно з рис. 3.25, методи (2.45)–(2.47) дають стікійсть у порівнянні з класичним методом Ньютона. Змінний крок є обов'язковим при розв'язанні нелінійних багатовимірних ОЗТ.

Рисунки 3.26 та (3.27) демонструють ефективність отриманих методів (2.45)–(2.47) за критерієм кількості викликів процедури розв'язування ПЗТ для розв'язання нелінійної ОЗТ (3.13)–(3.15). Рис. 3.26 – початкове наближення до розв'язку – нульове наближення. Рис. 3.27 – початкове наближення до розв'язку – чотири члена розкладу в ряд Фур'є.

Рис. 3.26 – Порівняльний аналіз розглянутих методів на поставленій задачі за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з нульовим наближенням до початкової умови

Отримані методи тестувались на різних нелінійних ОЗТ ідентифікації початкової умови. Виходячи з отриманих результатів, видно, що навіть з нульовим наближенням до початкової умови вдалось зменшити загальну кількість викликів процедури розв'язування ПЗТ в 3 рази.

Результати, які зображені на рис. 3.27 – порівняння класичного методу Ньютона з отриманими. Наближення для кожного з чотирьох методів задаються з урахуванням методу Фур'є (4 члена розкладу в ряд).

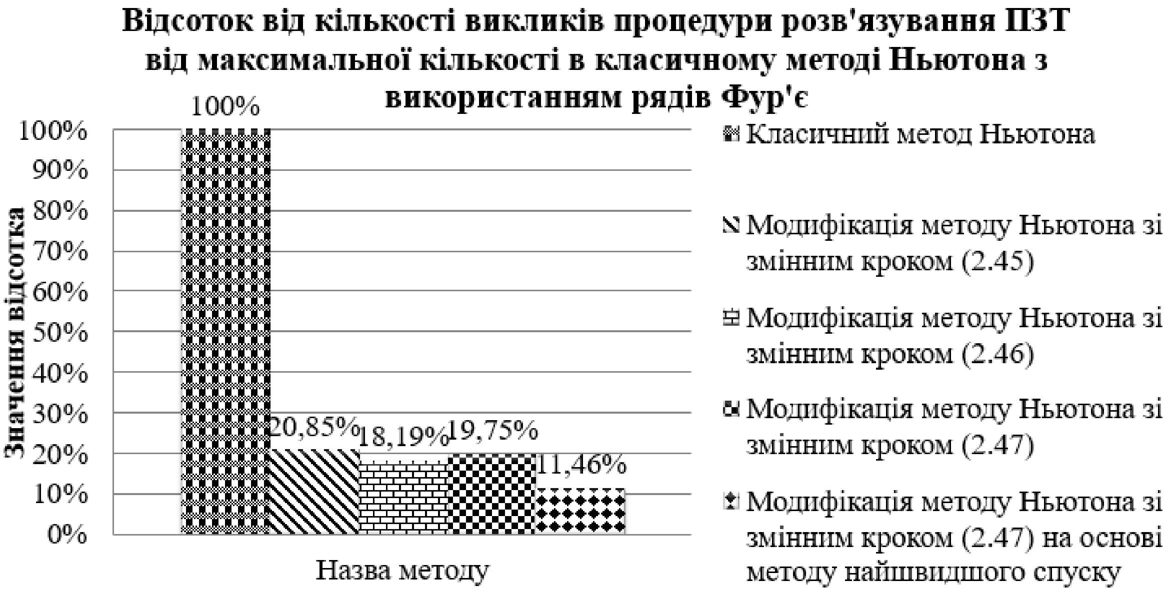


Рис. 3.27 – Порівняльний аналіз розглянутих методів на поставленій задачі за критерієм кількості викликів процедури розв’язку ПЗТ з наближенням до початкової умови за допомогою ряду Фур’є (використано 4 члени розкладу в ряд)

Застосування розкладу в ряд Фур’є дозволило скоротити загальну кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ майже в 9 раз.

3.4. Задача ідентифікації граничної умови

Як і раніше, спочатку протестуємо отримані методи на лінійних ОЗТ. Перша задача має таке формулювання. Знайти глобальний мінімум функціонала:

$$J\left(\theta\left(x\right)\right)=\int_0^1\left(\frac{\partial T\left(\theta,x,1\right)}{\partial y}-\Theta\left(x\right)\right)^2dx\to\min, \tag{3.16}$$

при умові:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+2T=2\left(x+y-4\right)\cos\left(x+y\right),\ \Omega=\left(x,y\right)\in\left[0;1\right]^2, \tag{3.17}$$

де функція

$\theta\left(x\right)$ – шукана гранична умова першого роду верхньої частини розрахункової області;

$T\left(\theta,x,1\right)$ – шуканий розв’язок задачі;

$\Theta(x)$ – заданий тепловий потік на нижній частині розрахункової області.

Граничні умови задачі (3.16)–(3.17) мають такий вигляд:

$$T(x,0) = -2(x-2)\sin x,\ \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \Theta(x) = -2\sin x - 2(x-2)\cos x,$$
$$T(0,y) = -2(y-2)\sin y,\ T(1,y) = -(y-2)\sin(y+1). \tag{3.18}$$

Всі розрахунки, які наведені нижче, виконані для розрахункової сітки: 1241 вузол, 2360 елементів, 120 граничних елемента.

Таблиця 3.11 демонструє чисельні результати збіжності методу найшвидшого спуску з нульовим наближенням до граничної умови задачі (3.16)–(3.18).

Таблиця 3.11

Таблиця результатів ефективності методу найшвидшого спуску на задачі (3.16)–(3.18) без побудови наближення до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	1,07541562E-01	20	3,72945744E-04
9	6,05576207E-02	21	2,29660623E-04
10	3,49936121E-02	22	1,43092596E-04
11	2,64021272E-02	23	9,03811601E-05
12	1,83386451E-02	24	6,84426707E-05
13	8,30349954E-03	25	5,25302767E-05
14	5,07895580E-03	26	4,14235791E-05
15	3,51860921E-03	27	3,60625786E-05
16	2,14768032E-03	28	2,15235616E-05
17	1,60824666E-03	29	1,33774444E-05
18	8,25531796E-04	30	1,16777744E-05
19	4,36504248E-04	31	6,03022798E-06
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***4654***

Метод найшвидшого спуску зійшовся з нульови наближенням до початкової умови за 37 ітерацій. Точність обрахунків 1,00E-9. Загальна кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ склала 4654. У таблиці 3.12 показані чисельні результати ефективності застосування методу Фур'є для розкладу граничної умови в ряд. Взято 4 члена розкладу в ряд.

Таблиця 3.12

Таблиця результатів ефективності методу найшвидшого спуску на задачі (3.16)–(3.18) з побудовою наближення до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	3,56702128E-03	15	3,90244204E-05
9	2,17901139E-03	16	9,32628105E-06
10	1,44308415E-03	17	2,31875621E-06
11	1,07215620E-03	18	5,25081519E-07
12	4,71380655E-04	19	1,43223012E-07
13	3,04444141E-04	20	3,93175693E-08
14	1,77187421E-04	21	9,28706427E-09
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***583***

Аналітичний розв'язок задачі (3.16)–(3.18) має вигляд:

$$T^*(x,y) = (x-2)(y-2)\sin(x+y).$$

Порівняння знайденого розв'язку задачі з аналітичним наведено на рис. 3.28.

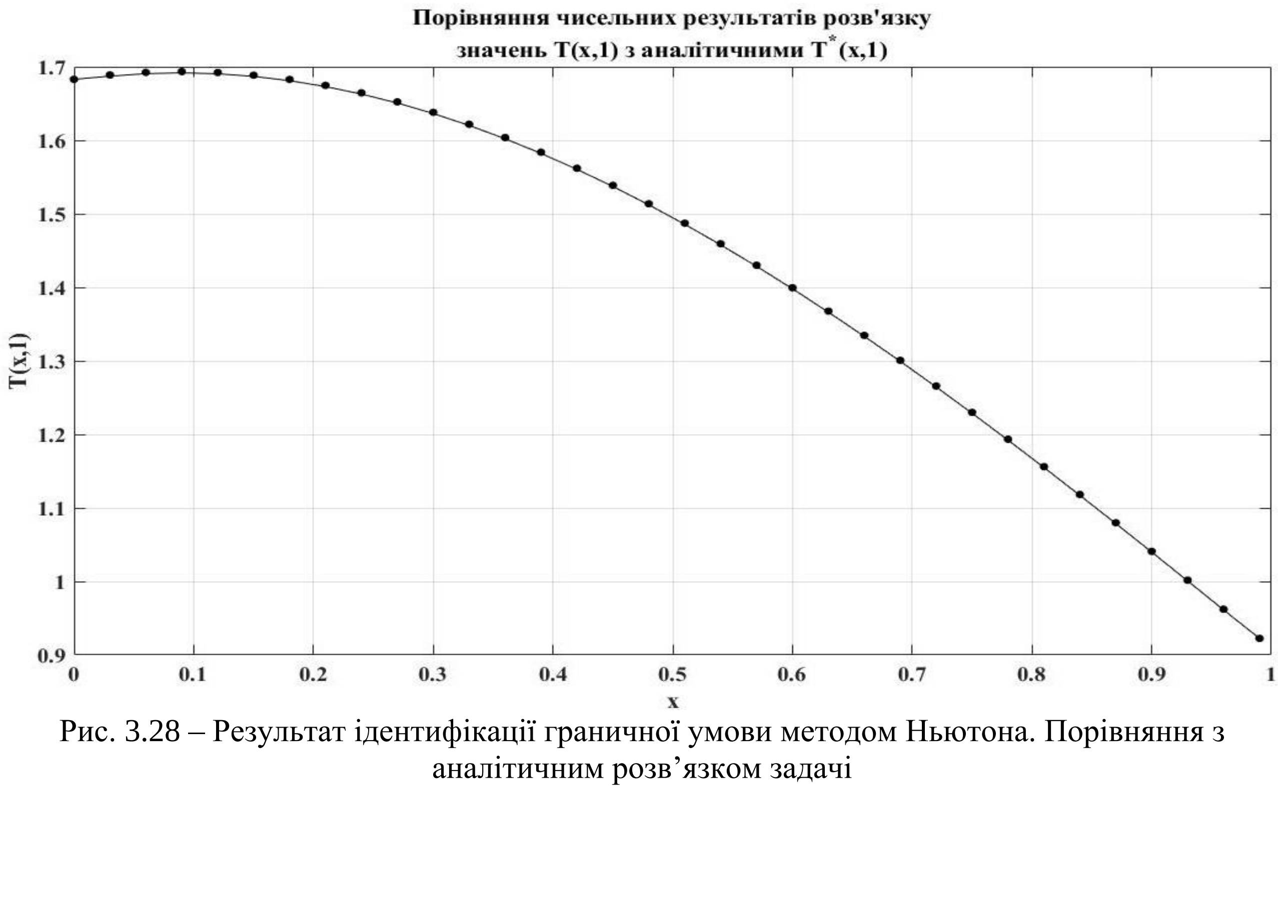


Рис. 3.28 – Результат ідентифікації граничної умови методом Ньютона. Порівняння з аналітичним розв'язком задачі

Порівняння знайденого чисельного розв'язку задачі з аналітичним показано на рисунку 3.29.

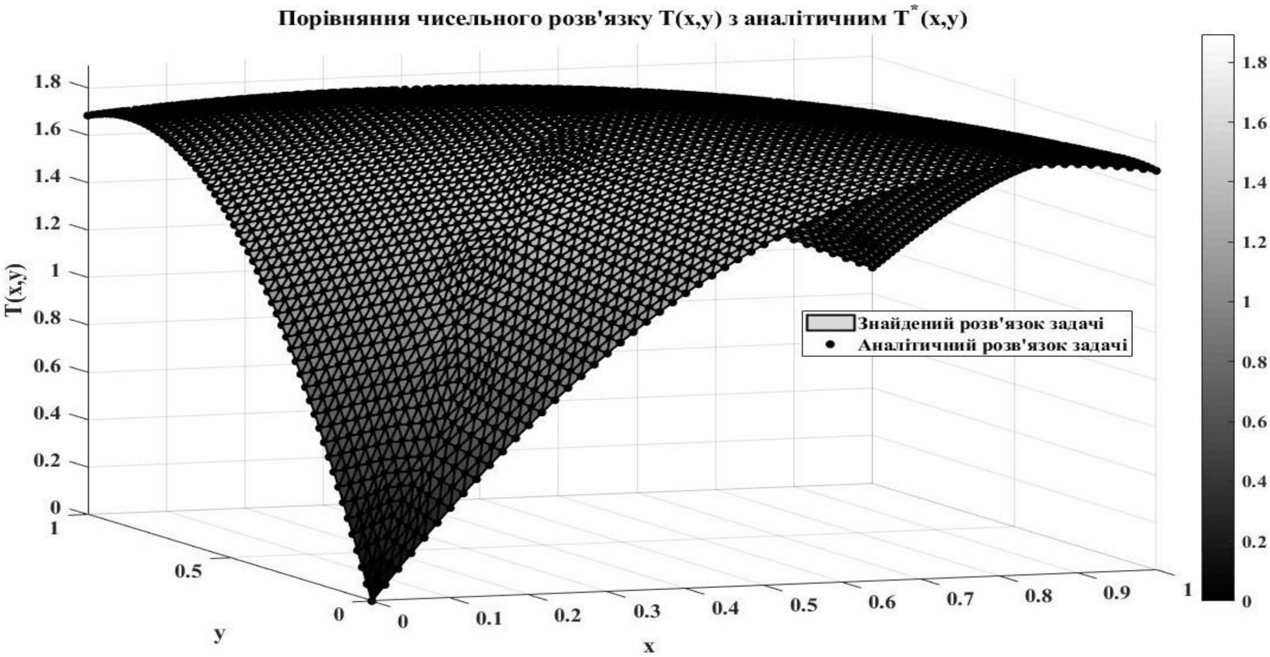


Рис. 3.29 – Графічне представлення розв'язку задачі при знайденій граничній умові. Порівняння знайденого чисельного розв'язку задачі з аналітичним розв'язком. Розрахункова сітка: 1241 вузол; 2360 елементів; 120 граничних елемента

Наступна лінійна ОЗТ має таке математичне формулювання. Знайти глобальний мінімум функціонала:

$$J\left(\theta_1(x),\theta_2(y)\right)=$$
$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial T\left(\theta_1,\theta_2,x,1\right)}{\partial y}-\Theta_1(x)\right)^2 dx+\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial T\left(\theta_1,\theta_2,1,y\right)}{\partial x}-\Theta_2(y)\right)^2 dy\to\min, \tag{3.19}$$

при умові:

$$\begin{gathered}\nabla\left(k\nabla T\right)-8T=f\,,\ \Omega=\left(x,y\right)\in\left[-1;1\right]^2,\\ k=k(x,y)=x^2+y^2+1,\ \ f=f(x,y)=f_1(x,y)+f_2(x,y)+f_3(x,y),\\ f_1(x,y)=12\left(x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)^2\right),\ f_2(x,y)=\frac{\sin(xy)}{12}f_1(x,y),\\ f_3(x,y)=-4xy\cos(xy),\end{gathered} \tag{3.20}$$

де функція

$\theta_1(x)$ – шукана гранична умова першого роду верхньої частини розрахункової області;

$\theta_2(y)$	–	шукана гранична умова другого роду правої частини розрахункової області;
$T(\theta_1,\theta_1,x,y)$	–	шуканий розв'язок задачі;
$\Theta_1(x)$	–	заданий тепловий потік на нижній частині розрахункової області;
$\Theta_2(y)$	–	заданий тепловий потік на лівій частині розрахункової області.

Граничні умови задачі (3.19)–(3.20) мають такий вигляд:

$$\begin{gathered}T(x,-1)=1+x^2+\sin x,\ \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right|_{y=-1}=\Theta_1(x)=-4-x\cos x,\\ T(-1,y)=1+y^2+\sin y,\ \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\right|_{x=-1}=\Theta_2(y)=-4+y\cos y.\end{gathered}\tag{3.21}$$

Знаходження чисельного розв'зку ОЗТ (3.19)–(3.21) відбулось із застосуванням методу скінченних елементів. Розрахункова сітка: 1326 вузлів; 1590 елементів, з яких 160 граничних.

У таблиці 3.13 містяться основні результати збіжності методу найшвидшого спуску без використання методуФур'є.

Таблиця 3.13

Таблиця результатів ефективності методу найшвидшого спуску на задачі (3.19)–(3.21) без побудови наближення до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	7,31721375E-02	28	9,20306425E-07
9	5,04747379E-02	29	5,99327912E-07
10	2,33769786E-02	30	4,58350767E-07
11	1,18091793E-02	31	3,11863007E-07
12	6,33163364E-03	32	1,59181139E-07
13	4,36734680E-03	33	8,18242450E-08
14	1,93534009E-03	34	4,82481894E-08
15	1,36233977E-03	35	2,45826917E-08
16	8,70556038E-04	36	1,18748738E-08
17	4,39941455E-04	37	8,42339451E-09
18	2,15869988E-04	38	4,83496077E-09
19	1,13758632E-04	39	3,47541468E-09
20	8,51626589E-05	40	2,12147942E-09
21	3,98410390E-05	41	1,20555670E-09
22	2,51184399E-05	42	8,76879420E-10
23	1,40526939E-05	43	5,52060507E-10
24	1,00234241E-05	44	3,40822485E-10

25	5,76104546E-06	45	2,20058418E-10
26	2,76056545E-06	46	1,07321026E-10
27	1,73611990E-06	47	5,19760047E-11
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***8751***

Метод найшвидшого спуску для задачі (3.19)–(3.21) з нульовим наближенням до початкової умови зійшовся за 49 ітерацій. Точність обчислень 1,00E-12. Загальна кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ для ОЗТ (3.19)–(3.21) склала 9127. Таблиця 3.14 демонструє основі результати застосування методу Фур’є для задачі (3.19)–(3.21).

Таблиця 3.14

Таблиця результатів ефективності методу найшвидшого спуску на задачі (3.19)–(3.21) з побудовою наближення до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	3,26526341E-03	17	1,01261985E-05
9	2,29100467E-03	18	2,64232634E-06
10	1,02824949E-03	19	5,88659579E-07
11	5,16592269E-04	20	1,37847157E-07
12	2,84313241E-04	21	3,55477881E-08
13	1,94321590E-04	22	8,47322182E-09
14	8,46044496E-05	23	1,89807762E-09
15	6,09127837E-05	24	4,62772970E-10
16	3,90264833E-05	25	1,03619016E-10
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***1022***

Метод найшвидшого спуску зійшовся за 31 ітерацію. Точність обрахунків для задачі складає 1,00E-12. Загальна кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ зменшилась майже у 8 разів.

Нижче на рисунках 3.30 та 3.31 показані знайдені граничні умови задачі (3.19)–(3.21). Також на цих рисунках показано порівняння отриманих граничних умов з аналітичними значеннями.

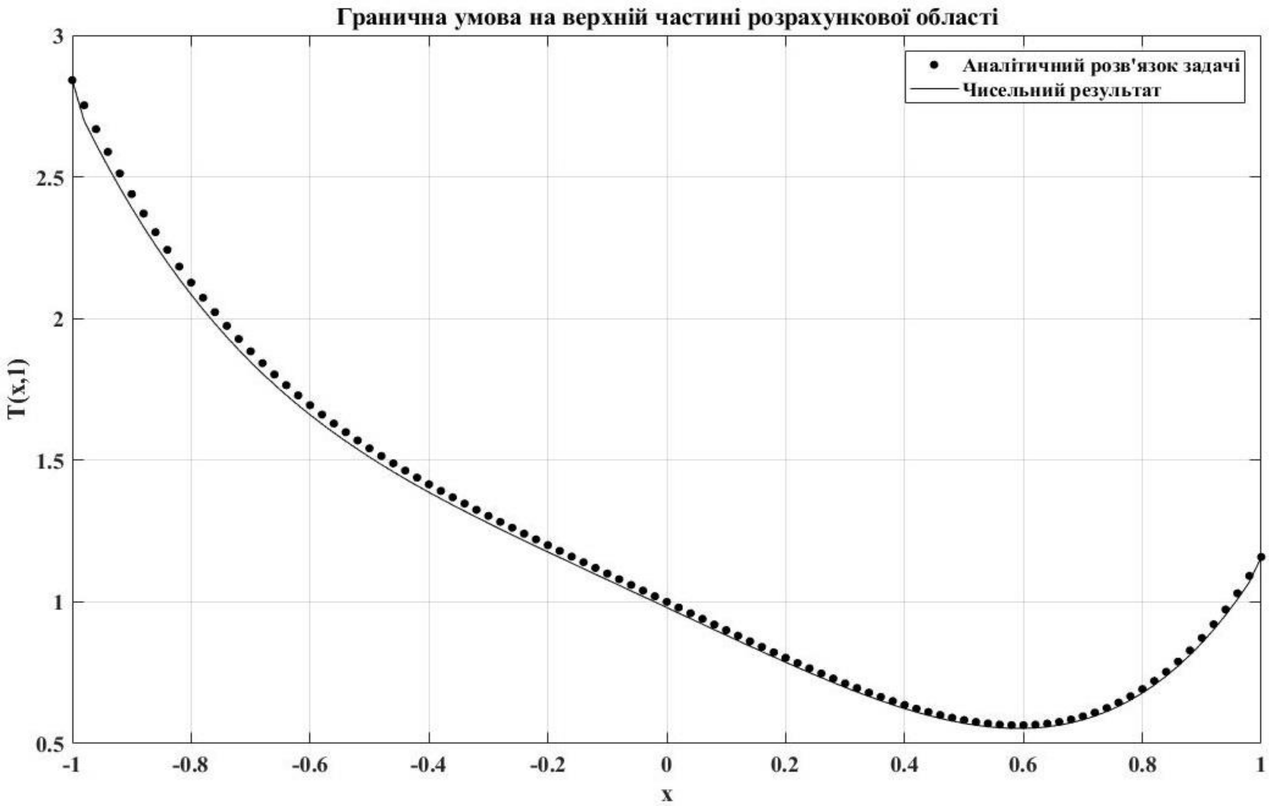


Рис. 3.30 – Результат ідентифікації граничної умови першого роду $\theta_1(x)$
та порівняння результату з аналітичним розв’язком задачі

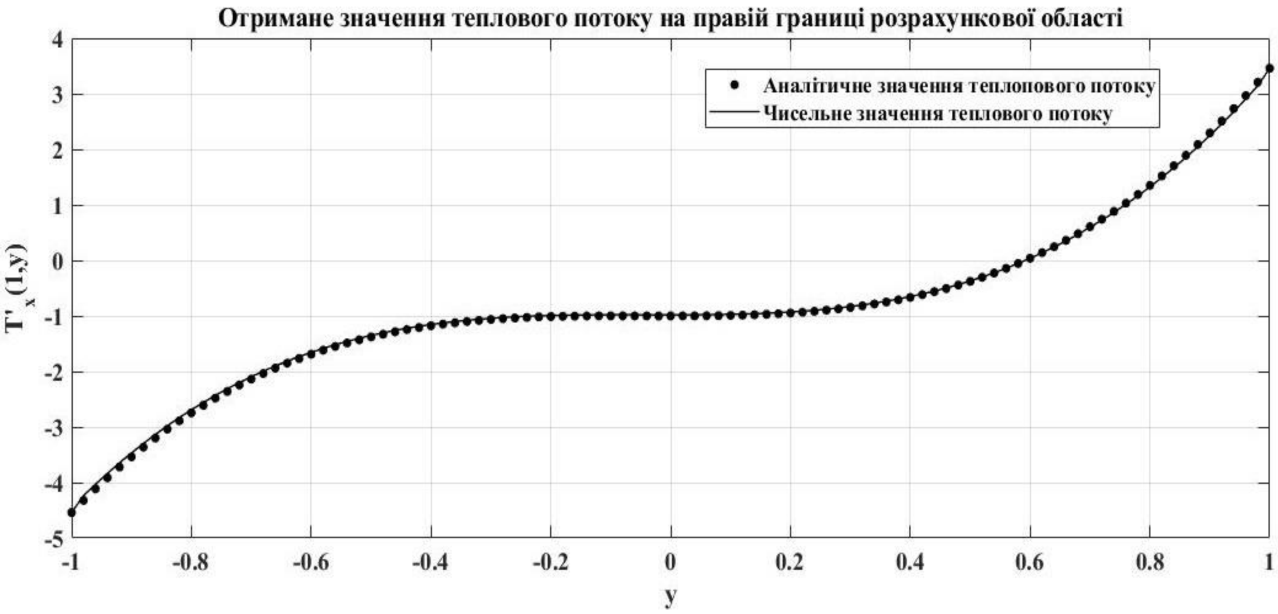


Рис. 3.31 – Результат ідентифікації граничної умови першого роду $\theta_2(y)$
та порівняння результату з аналітичним розв’язком задачі

Рисунок 3.32 містить температурне поле в результаті врахування граничних умов, які вказані на рис. 3.31 та рис. 3.32. Отримане температурне поле накладено на температурне поле, яке є аналітичним розв’язком задачі.

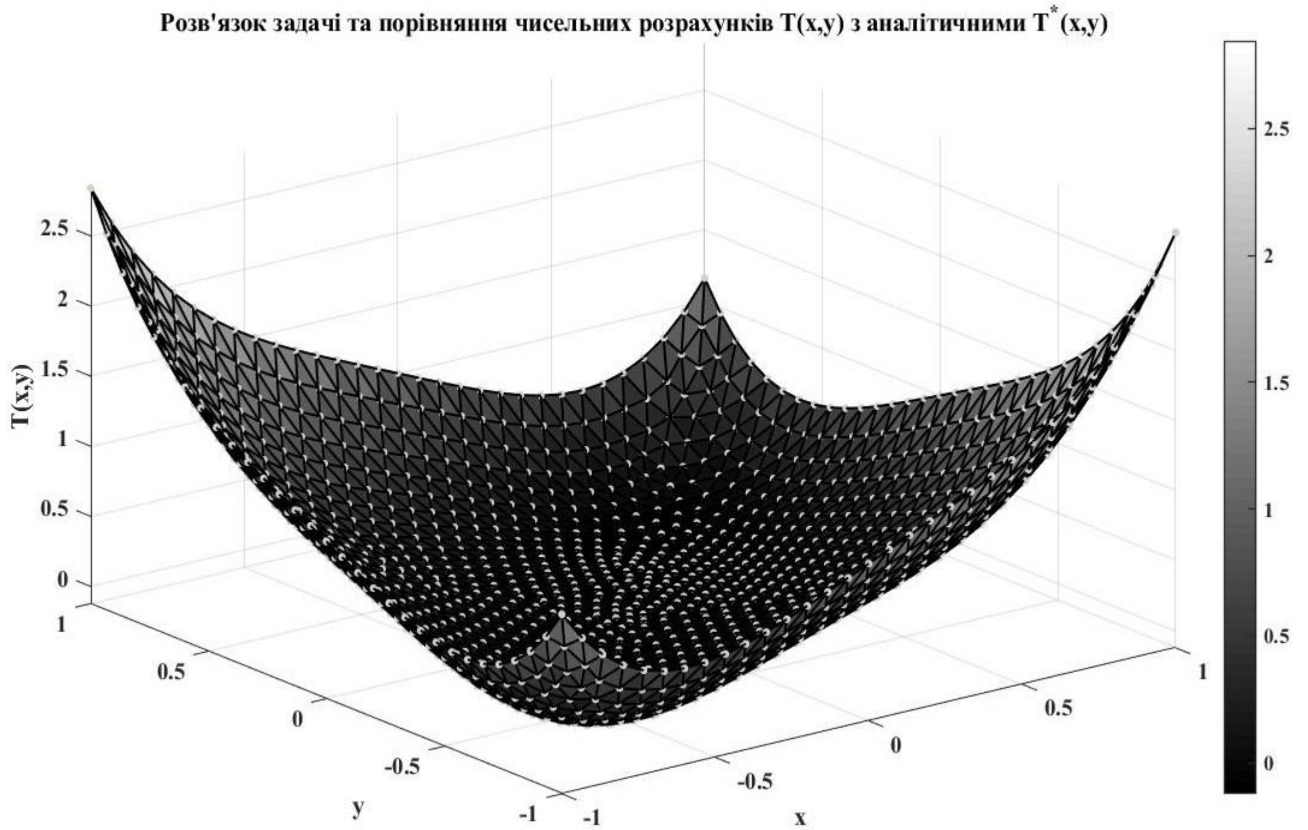


Рис. 3.32 – Розв’язок задачі. Температурне поле при знайдених граничних умовах. Порівняня отриманого результату з аналітичним розв’язком задачі.

Як бачимо, отримані поверхні практично співпадають. Ефективність методу найшвидшого спуску також добре прослідковується на лінійних ОЗТ, зокрема на тих, які були наведені вище. Далі будуть описані нелінійні задачі та апробація методів, які отримані в даній роботі.

Нелінійні задачі. Знайти глобальний мінімум функціонала [98]:

$$J\left(\theta(y)\right)=\int\limits_{\Gamma_1}\left(\left.\frac{\partial T\left(\theta,x,y\right)}{\partial x}\right|_{\Gamma_2}-\Theta\left(y\right)\right)^2 dy\to\min, \tag{3.22}$$

при умові:

$$\begin{gathered}
\nabla\left(k\nabla T\right)=-f\,,\\
\Omega=\Omega_1\setminus\left(\Omega_2\cup\Omega_3\cup\Omega_4\cup\Omega_5\cup\Omega_6\right),\\
\Omega_1=\left\{\left(x,y\right)\in R^2\middle|0\le x\le 2,0\le y\le 1\right\},\\
\Omega_2=\left\{\left(x,y\right)\in R^2\middle|x^2+\left(y-1\right)^2\le 0{,}04\right\},\\
\Omega_3=\left\{\left(x,y\right)\in R^2\middle|\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2\le 0{,}04\right\},
\end{gathered} \tag{3.23}$$

$$\Omega_4 = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle| (x-2)^2 + y^2 \le 0,04 \right\},$$

$$\Omega_5 = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle| x^2 + y^2 \le 0,04 \right\},$$

$$\Omega_6 = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle| 0,5 \le x \le 1,5;\ 0,25 \le y \le 0,75 \right\},$$

$$k = k(T, x, y) = \frac{T^2 + \sin\left(\frac{T}{100}\right) + 2}{100},$$

$$f = f(x, y) = 10\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right),$$

де функція

$\theta(y)$ – шукана гранична умова другого роду правої частини розрахункової області;

$T(\theta_1, x, y)$ – розв’язок задачі за умови $\theta(y)$;

$\Theta(y)$ – розподіл температури на правій частині розрахункової області.

Граничні умови задачі (3.22)–(3.23) мають такий вигляд:

$$T\big|_{\Gamma_{inside}} = 50,\ \partial T/\partial\vec{n}\big|_{\Gamma_{outside}\setminus(\Gamma_1\cup\Gamma_3)} = 0,\ \partial T/\partial\vec{n}\big|_{\Gamma_2} = \Theta(y), \qquad (3.24)$$

де

Γ_{inside} – вся внутрішня границя розрахункової області;

$\Gamma_{outside}$ – вся зовнішня границя розрахункової області;

$\vec{n}$ – нормаль до границь області;

Γ_2 – внутрішня права границя вирізаного прямокутника у розрахунковій області Ω для $y \in [0,2; 0,8]$;

Γ_3 – частина зовнішньої границі у формі чотирьох четвертин кіл розрахункової області Ω.

Розрахункова область задачі, яка зображена на рис. 3.33, є прямокутником, який має розмір 2х1. Ліва нижня вершина цього прямокутника лежить у початку координат. З прямокутника вирізано менший прямокутник з центром у точці $(1; 0,5)$, який має розмір 1х0,5 та чотири четвертини кіл, кожне з яких має радіус, який дорівнює 0,2, а центри розміщені у вершинах великого прямокутника. Розрахункова область: 932 вузла, 1680 елементів, 184 граничних елемента.

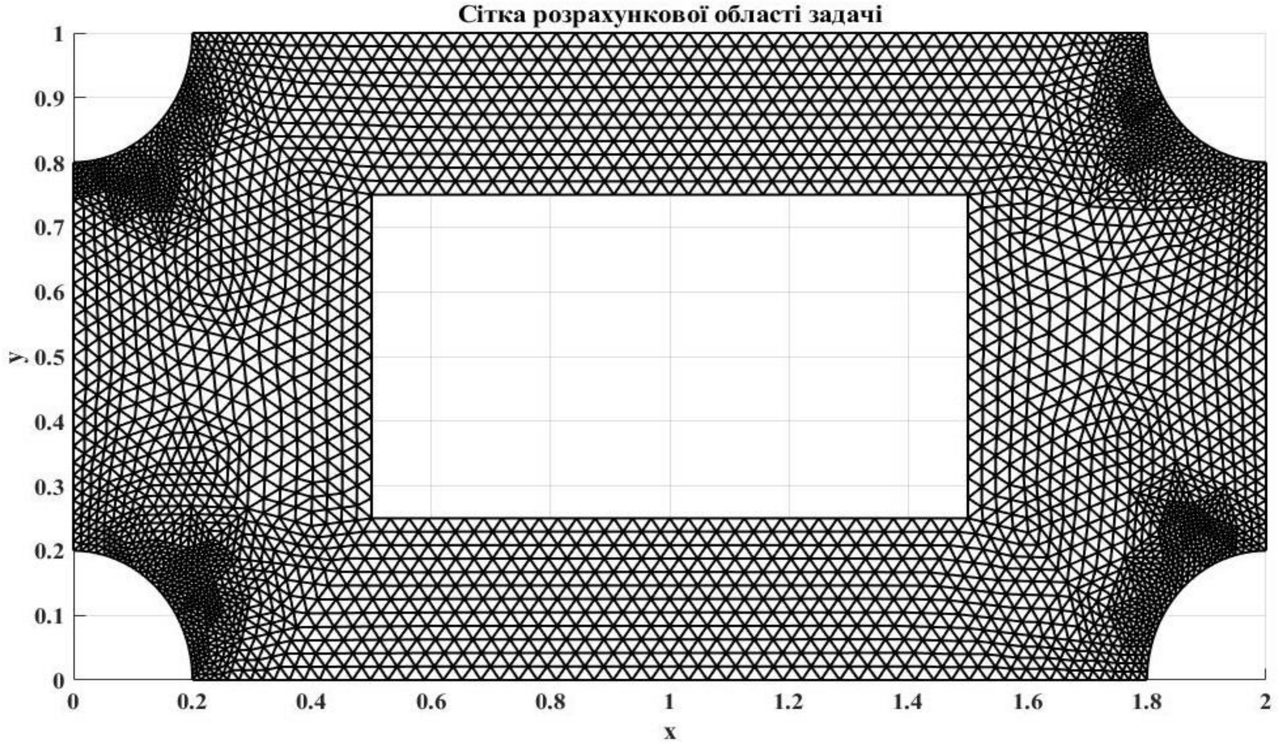


Рис. 3.33 – Розрахункова область задачі з тріангуляцією на ній

Поставлена задача (3.22)–(3.24) розв'язана з використанням методу скінченних елементів у зв'язку зі складністю геометрії області ОЗТ.

У таблиці 3.15 містяться результати розрахунків модифікацією класичного методу Ньютона (2.47), який має третій порядок точності. Для початку проведення ітерацій методу (2.47) обрано нульове наближення до шуканої граничної умови.

Таблиця 3.15

Таблиця результатів ефективності методу (2.47) на задачі (3.22)–(3.24) без побудови наближення до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	7,04781397E-02	24	2,29557396E-06
9	3,13755394E-02	25	8,62118142E-07
10	2,03450935E-02	26	3,39300887E-07
11	1,32286744E-02	27	1,29584040E-07
12	8,66241679E-03	28	4,78039591E-08
13	3,83282067E-03	29	1,66239373E-08
14	2,24614956E-03	30	6,29578297E-09
15	1,25800542E-03	31	2,05895995E-09
16	5,80316548E-04	32	7,34858956E-10
17	2,96805827E-04	33	3,12679533E-10
18	1,49447801E-04	34	1,12882327E-10
19	7,61841094E-05	35	4,12110913E-11
20	3,51448834E-05	36	1,63780373E-11

21	1,54208276E-05	37	5,34215810E-12
22	9,77852272E-06	38	2,37673780E-12
23	6,01219292E-06	39	7,94339234E-13
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***30484***

Метод (2.47) на задачі (3.22)–(3.24) зійшовся за 38 ітерацій. Точність обрахунків ОЗТ ідентифікації граничної умови 1,00E-13.

У таблиці 3.16 показано ефективність розкладу в ряд для пошуку граничної умови ОЗТ (3.22)–(3.24). Розв’язування ОЗТ проводилось із використанням модифікації класичного методу Ньютона (2.47).

Таблиця 3.16

Таблиця результатів ефективності методу на ОЗТ (3.22)–(3.24) з побудовою наближення до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	4,25648797E-03	17	7,49056494E-06
9	1,86111905E-03	18	1,66960548E-06
10	1,34332735E-03	19	4,23986396E-07
11	6,14389082E-04	20	1,12719270E-07
12	2,74253729E-04	21	2,97425354E-08
13	1,53613356E-04	22	6,64330839E-09
14	9,82144270E-05	23	1,53049298E-09
15	4,35119184E-05	24	4,04152015E-10
16	3,10767504E-05	25	1,03214223E-10
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***5101***

Рисунок 3.34 містить чисельні результати пошуку граничної умови ОЗТ (3.22)–(3.24) та його порівняння з відомим чисельним розв’язком даної ОЗТ.

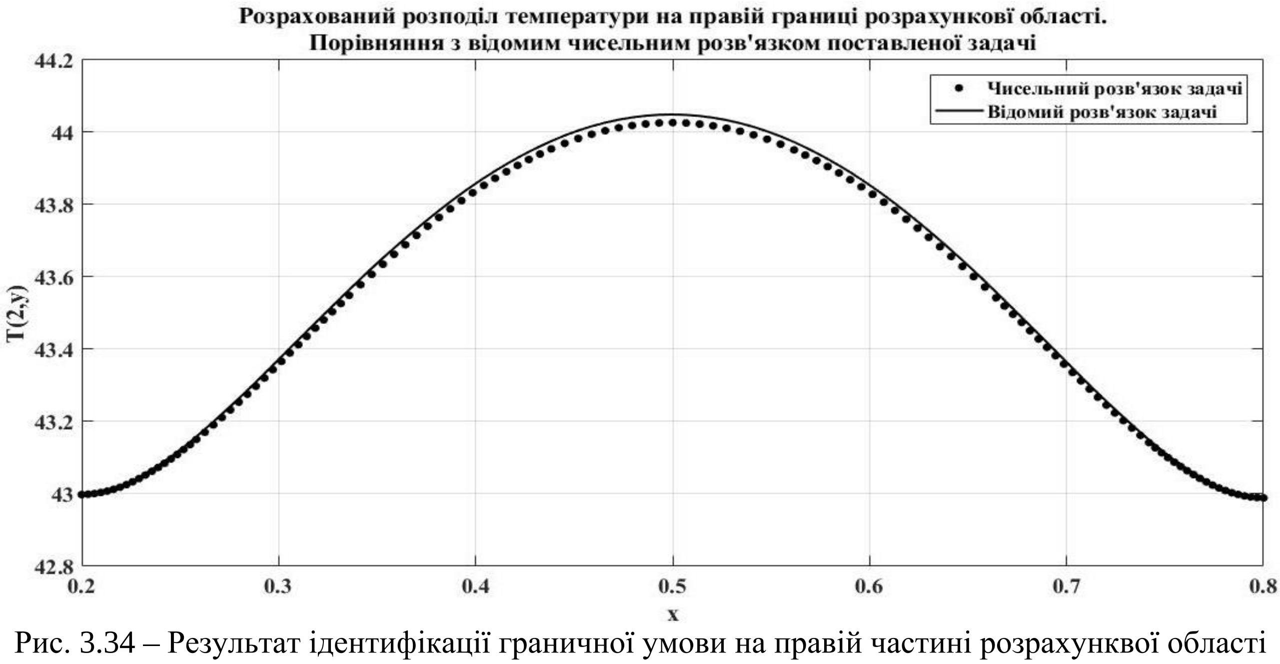


Рис. 3.34 – Результат ідентифікації граничної умови на правій частині розрахунквої області

Результат врахування отриманої граничної умови для задачі (3.22)–(3.24) дає розподіл температури, який зображений на рис. 3.35.

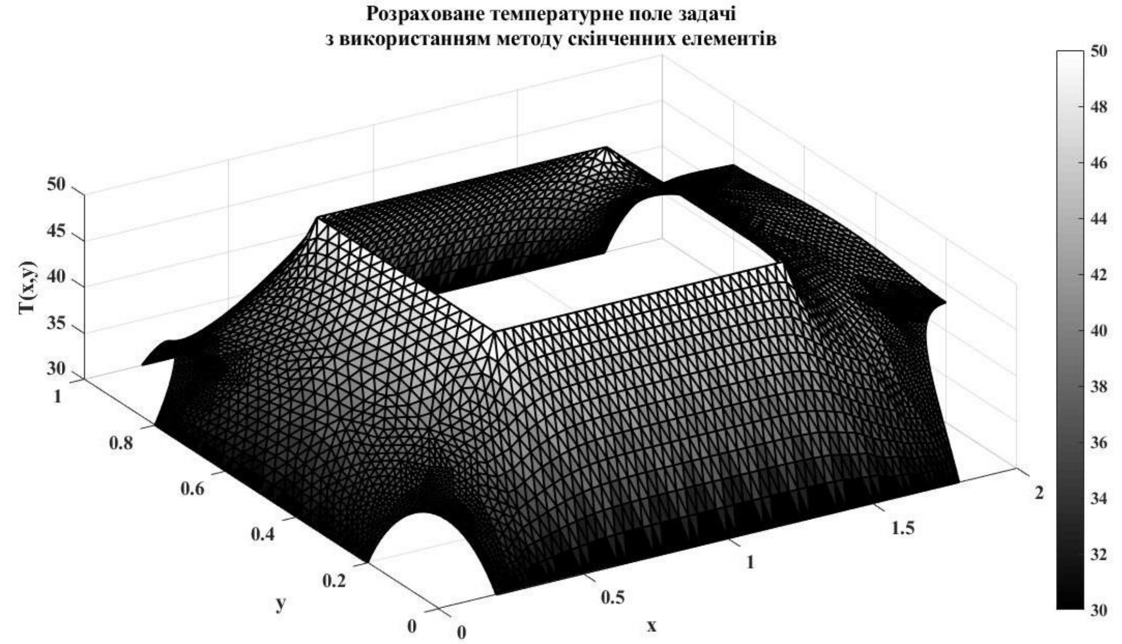


Рис. 3.35 – Розраховане температурне поле при знайденій граничній умові

Лінії рівня поверхні (див. рис. 3.35), яка є температурним полем задачі з урахуванням граничної умови (див. рис. 3.34), зображені на рис. 3.36.

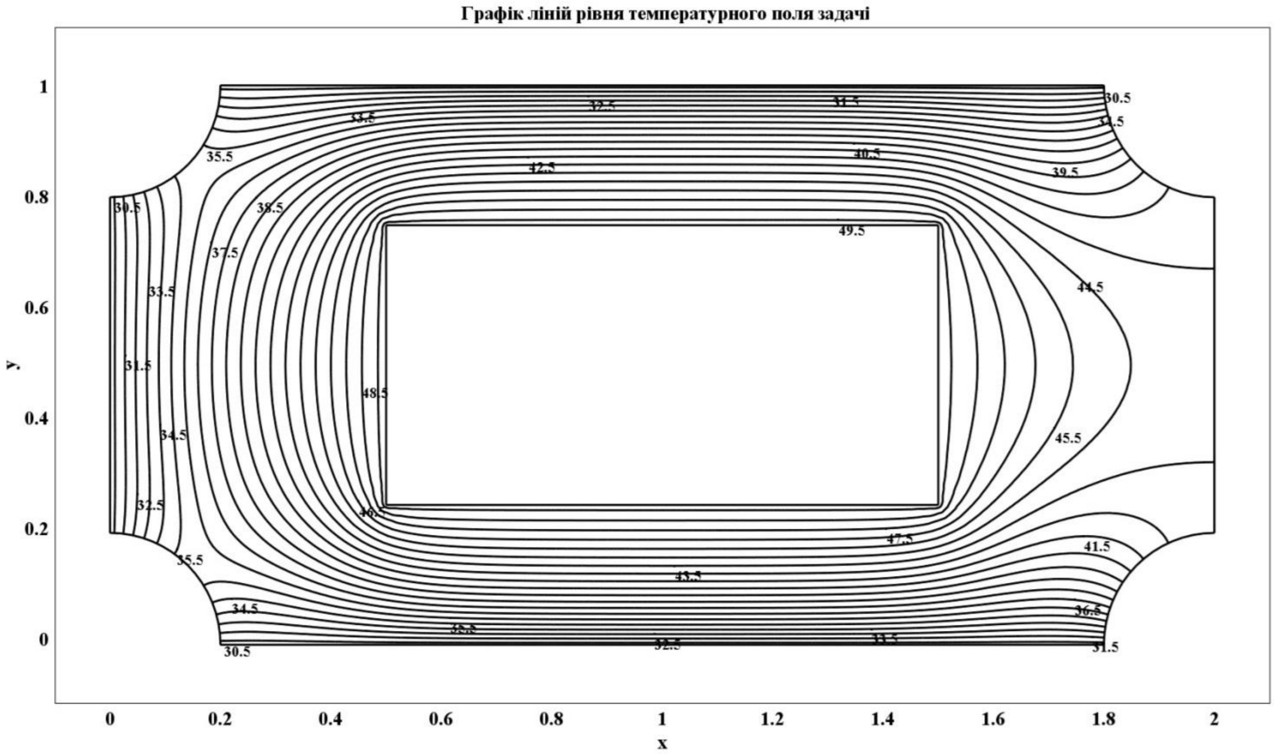


Рис. 3.36 – Представлення температурного поля у вигляді ліній рівня

На рис.3.37 показано порівняння роботи трьох чисельних методів розв’язування нелінійних багатовимірних ОЗТ на прикладі задачі (3.22)–(3.24).

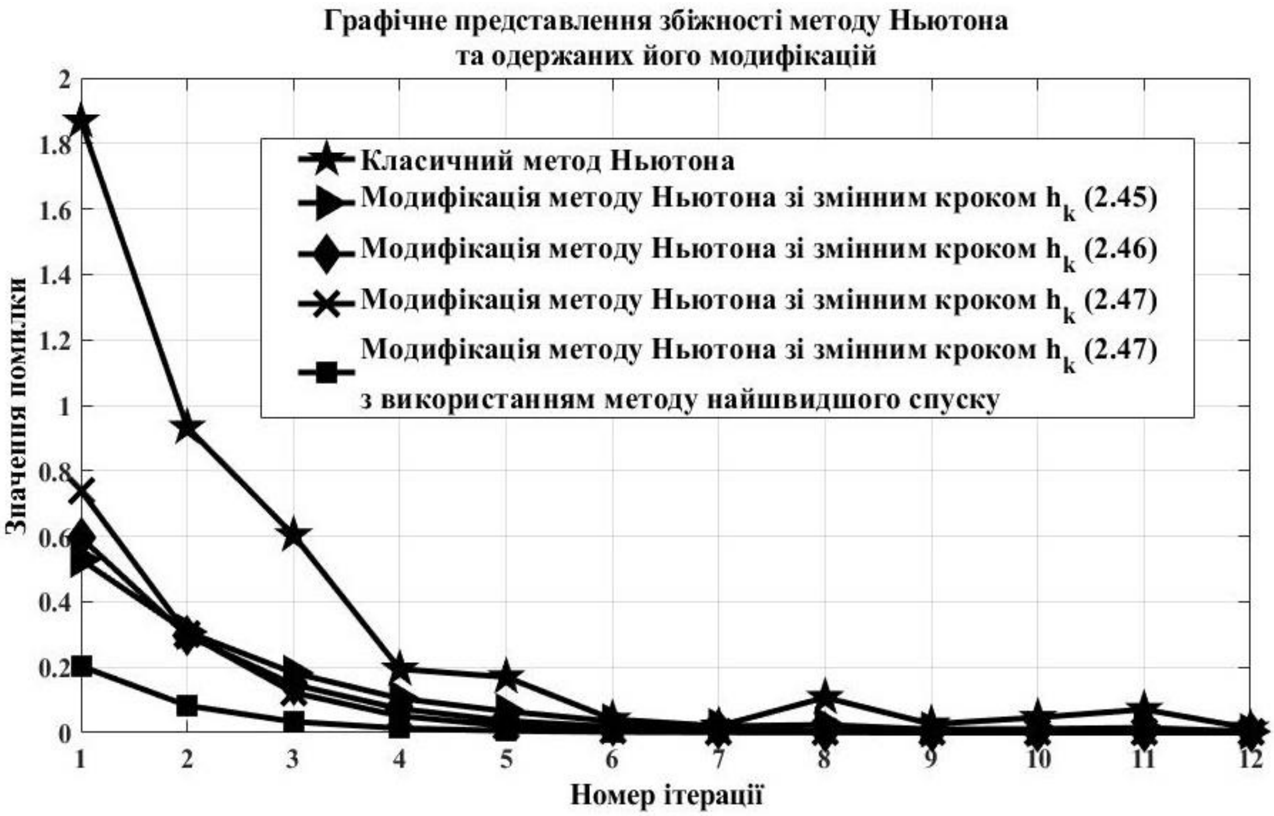


Рис. 3.37 – Порівняльний аналіз роботи алгоритмів за критерієм збіжності

На рис. 3.37 видно, що класичний метод Ньютона проявляє нестійку поведінку на поставленій задачі. Інші три методи, які отримані у роботі стабільно працюють на нелінійних ОЗТ, зокрема на (3.22)–(3.24), за рахунок змінного кроку на кожній ітерації методів.

Нижче на рис. 3.38 та рис. 3.39 показані основні результати методів за критерієм кількості викликів процедури розв'зування ПЗТ для розв'язання ОЗТ (3.22)–(3.24). Рисунок 3.38 показує загальну кількість викликів процедури розв'язування ПЗТ для розв'язання задачі (3.22) – (3.24) із заданням нульового наближення до граничної умови. За 100% бралась кількість викликів процедури розв'язування ПЗТ методом Ньютона, оскільки вона є найбільшою. Всі інші перераховуються у відсотках відносно результатів класичного методу Ньютона.

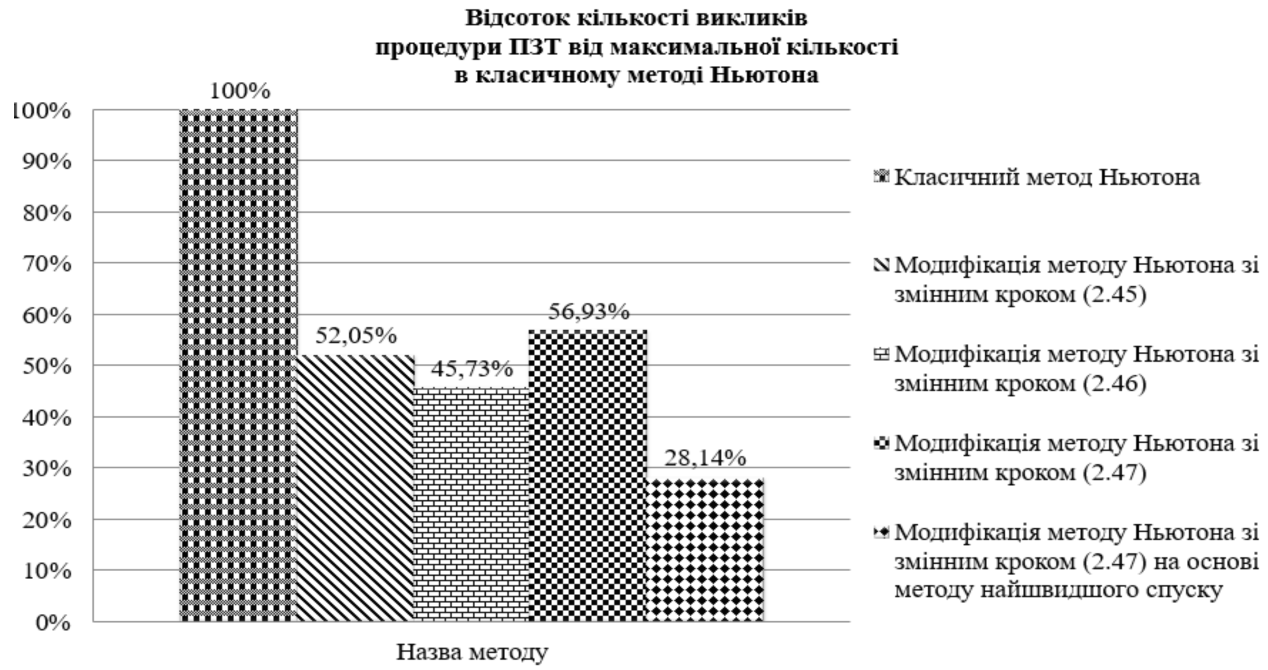


Рис. 3.38 – Порівняльний аналіз роботи алгоритмів за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з нульовим наближенням до граничної умови

На основі отриманих результатів (рис.3.38) можна відзначити, що кількість викликів процедури розв'язування ПЗТ змешнено в 3,7 раза.

Рис. 3.39 демонструє ефективність застосування рядів для прошуку граничної умови задачі (3.22)–(3.24). Обрано 4 члени розкладу в ряд Фур'є.

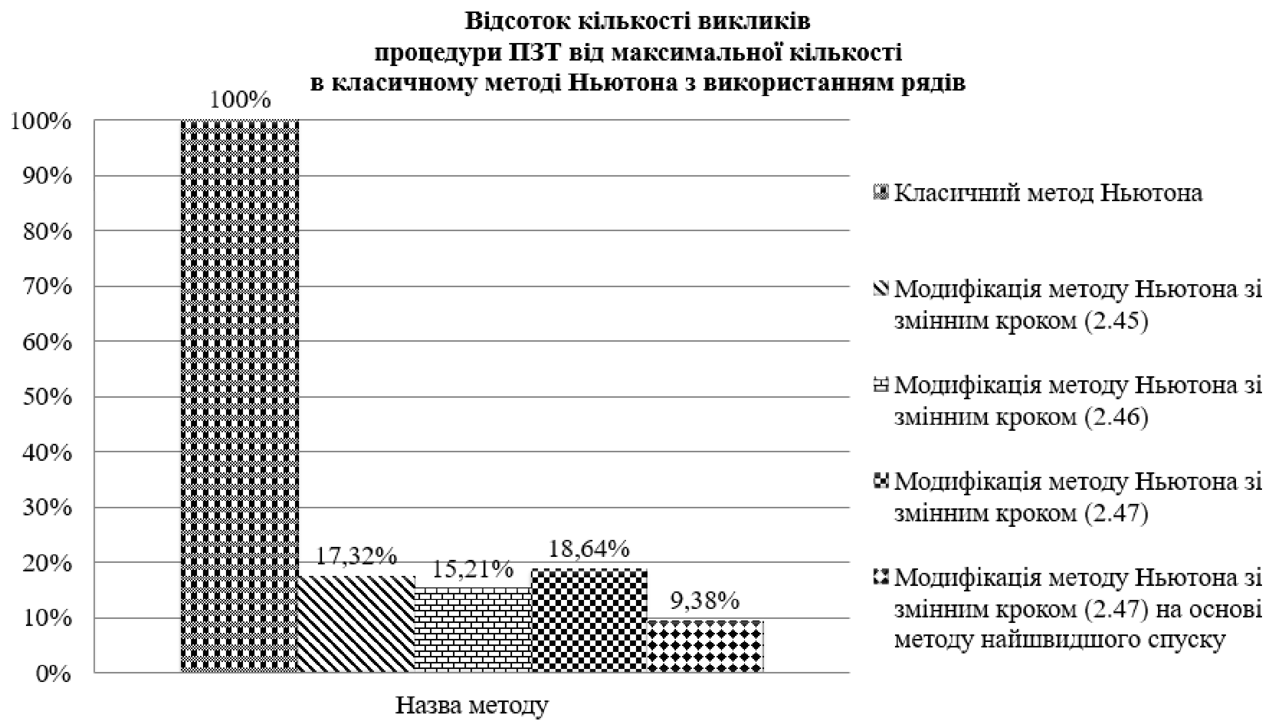


Рис. 3.39 – Порівняльний аналіз роботи алгоритмів за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ з відповідним розкладом граничної умови за повною системою функцій (4 члени рокладу в ряд)

За результатами, які наведені на рис. 3.39 чітко прослідковується ефективність отриманих методів даної роботи. Кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ для розв’язання задачі (3.22)–(3.24) зменшено в 10,7 раза.

3.5. Задача ідентифікації коефіцієнта температуропровідності

Як і рашіне почнемо тестування отриманих у роботі методів на лінійних ОЗТ. Розглянемо задачу у такій математичній постановці. Знайти глобальний мінімум функціонала:

$$J\left(\theta(x,y)\right)=\int_0^1\int_0^1\left(T\left(\theta,x,y,t_f\right)-T_{fin}\left(x,y\right)\right)^2 dxdy \to \min, \tag{3.25}$$

де $T\left(\theta,x,y,t_f\right)$ – розв’язок задачі

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial x}\left(\theta\left(x,y,t\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial T}{\partial y}\left(\theta\left(x,y,t\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right)+f,\\ \left(x,y\right)\in[0;1]^2, t\in\left[0,t_f\right], t_f=0,5;\\ f\left(x,y\right)=3\pi xe^{-t}\cos\left(3\pi tx\right)\cos\left(2\pi ty\right)+\\ +13\pi^2t^2e^{-t}\sin\left(3\pi tx\right)\cos\left(2\pi ty\right)\left(\cos\left(3\pi tx\right)\sin\left(2\pi ty\right)+2\right)+\\ +13\pi^2t^2e^{-t}\cos\left(3\pi tx\right)\cos\left(2\pi ty\right)\sin\left(3\pi tx\right)\sin\left(2\pi ty\right)-\\ -e^{-t}\sin\left(3\pi tx\right)\cos\left(2\pi ty\right)-2\pi ye^{-t}\sin\left(3\pi tx\right)\sin\left(2\pi ty\right).\end{gathered} \tag{3.26}$$

Початкова умова для (3.26) має вигляд:

$$T(x,y,0)=0. \tag{3.27}$$

Граничні умови задачі (3.25)–(3.26) мають такий вигляд:

$$\begin{gathered}T(x,0,t)=e^{-t}\sin\left(3\pi tx\right),\ T(x,1,t)=e^{-t}\sin\left(3\pi tx\right)\cos\left(2\pi t\right),\\ T(0,y,t)=0, T(1,y,t)=e^{-t}\cos\left(2\pi ty\right)\sin\left(3\pi t\right).\end{gathered} \tag{3.28}$$

Додаткова умова у момент часу $t_f=0,5$:

$$T(x,y,0.5)=T_{fin}\left(x,y\right)=e^{-0.5}\sin\left(1.5\pi x\right)\cos\left(\pi y\right). \qquad (3.29)$$

Задача (3.25)–(3.29) розв'язується з використанням методу скінченних елементів. Розрахункова область розбита на трикутники та має таку характеристику: 4841 вузол, 9440 елементів, 240 граничних елементів.

Нелінійна задача ідентифікації коефіцієнта температуропровідності вимагає найбільшої кількості обчислень порівняно з попередніми розглянутими в роботі задачами. Особливі труднощі при розв'зуванні таких задач виникає, коли евклідовий простір задачі великий.

Таблиця 3.17 містить результати чисельного експерименту на задачі (3.25)–(3.29) для методу (2.47), який отриманий у роботі, є модифікацією класичного методу Ньютона та має третій порядок точності.

Таблиця 3.17

Таблиця результатів ефективності методу найшвидшого спуску на задачі (3.25)–(3.29) без побудови наближення до шіканого розв'язку

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	8,30746298E-02	30	4,10171969E-06
9	7,54794537E-02	31	2,12417991E-06
10	6,83718653E-02	32	1,23240112E-06
11	3,59146699E-02	33	9,63295547E-07
12	2,41721023E-02	34	6,95857816E-07
13	1,98945705E-02	35	6,01925848E-07
14	1,40050790E-02	36	4,38577453E-07
15	1,18281679E-02	37	3,38336753E-07
16	6,26887542E-03	38	2,99469333E-07
17	3,60453558E-03	39	2,36443764E-07
18	2,22406381E-03	40	1,32344665E-07
19	1,06566968E-03	41	1,09623519E-07
20	7,13094474E-04	42	7,46727711E-08
21	6,26465088E-04	43	4,17173886E-08
22	3,00916448E-04	44	2,23971813E-08
23	2,08935612E-04	45	1,40293738E-08
24	1,51115402E-04	46	1,06399830E-08
25	7,79919891E-05	47	9,37596811E-09
26	3,94673980E-05	48	4,96107874E-09
27	2,84097403E-05	49	2,55037311E-09
28	1,46848135E-05	50	1,73062418E-09
29	1,20057350E-05	51	1,08767062E-09
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***32456***

Метод (2.47) зійшовся за 52 ітерацію. Точність обрахунків складає 1E-10. На кожній ітерації помилка методу зменшується, що говорить про стійкість даного методу з практичної точки зору.

Таблиця 3.18

Таблиця результатів ефективності методу найшвидшого спуску на задачі (3.25)–(3.29) з побудовою наближення до шуканого розв'язку

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	2,40164934E-03	19	4,40549804E-06
9	1,58034708E-03	20	9,90053147E-07
10	7,97207827E-04	21	2,66685714E-07
11	4,36634354E-04	22	6,04872478E-08
12	2,21871530E-04	23	1,66689853E-08
13	1,47804292E-04	24	4,51605756E-09
14	7,50645019E-05	25	1,16004105E-09
15	5,41636603E-05	26	3,03902628E-10
16	2,95112373E-05	27	8,36682837E-11
17	2,39306772E-05	28	1,92288662E-11
18	1,84902919E-05	29	4,59294320E-12
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***6078***

На рис. 3.40 – 3.46 показані основні результати роботи методу (2.47) на задачі (3.25)–(3.29). На рис. 3.40–3.43 показано знайдений коефіцієнт температуропровідності в різні моменти часу, а на рис. 3.44–3.46 – температурні поля для відповідних розподілів коефіцієнта температуропровідності.

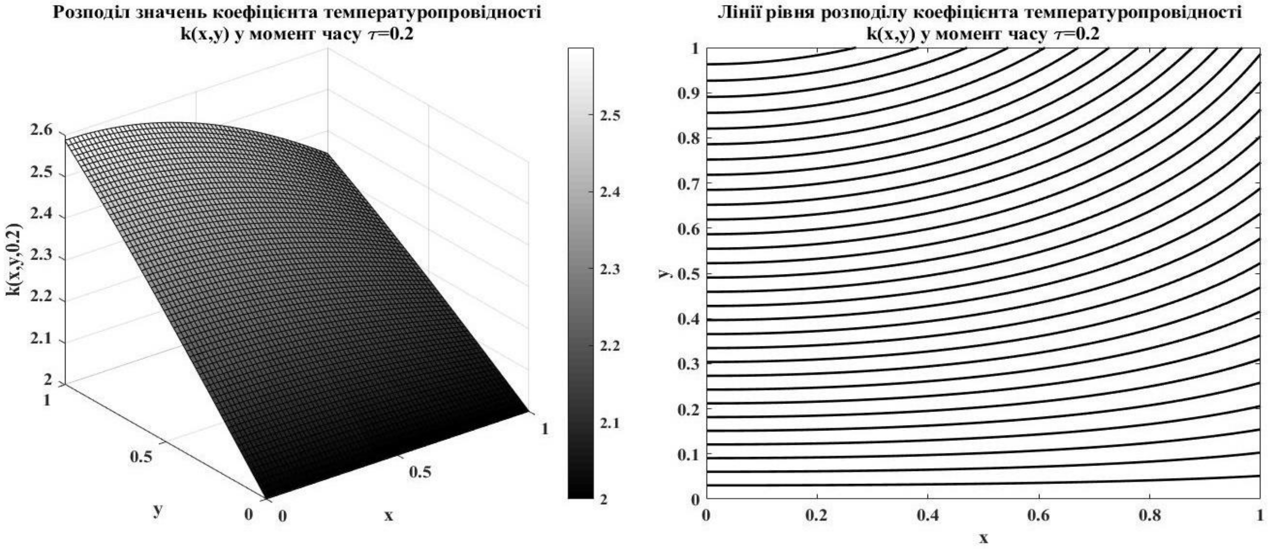


Рис. 3.40 – Результат ідентифікації коефіцієнта температуропровідності в момент часу t = 0,2

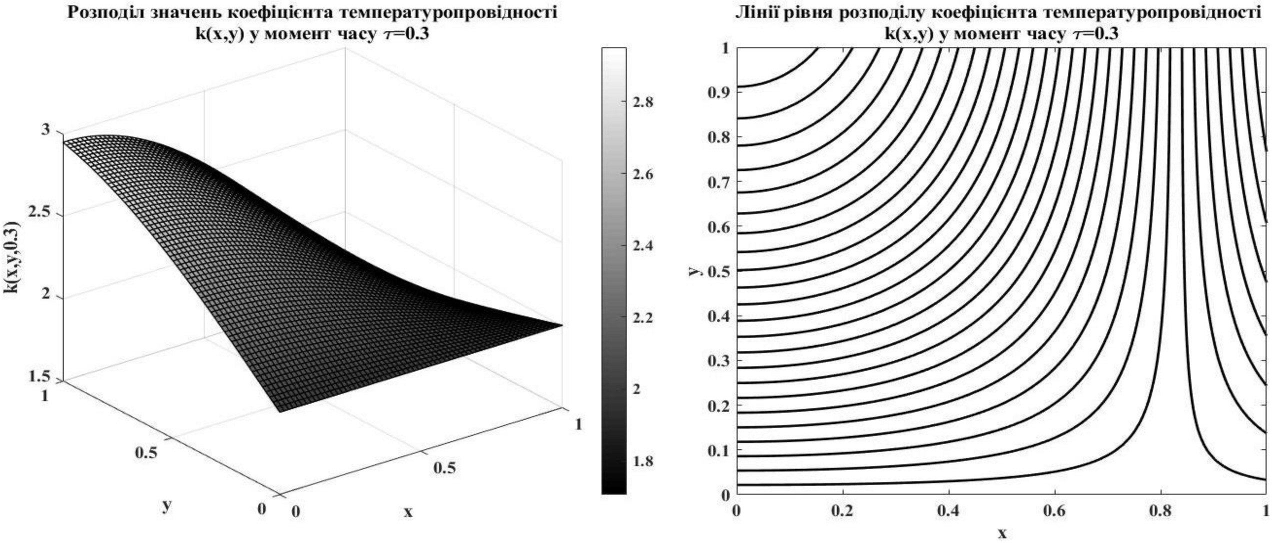


Рис. 3.41 – Результат ідентифікації коефіцієнта температуропровідності в момент часу t = 0,3

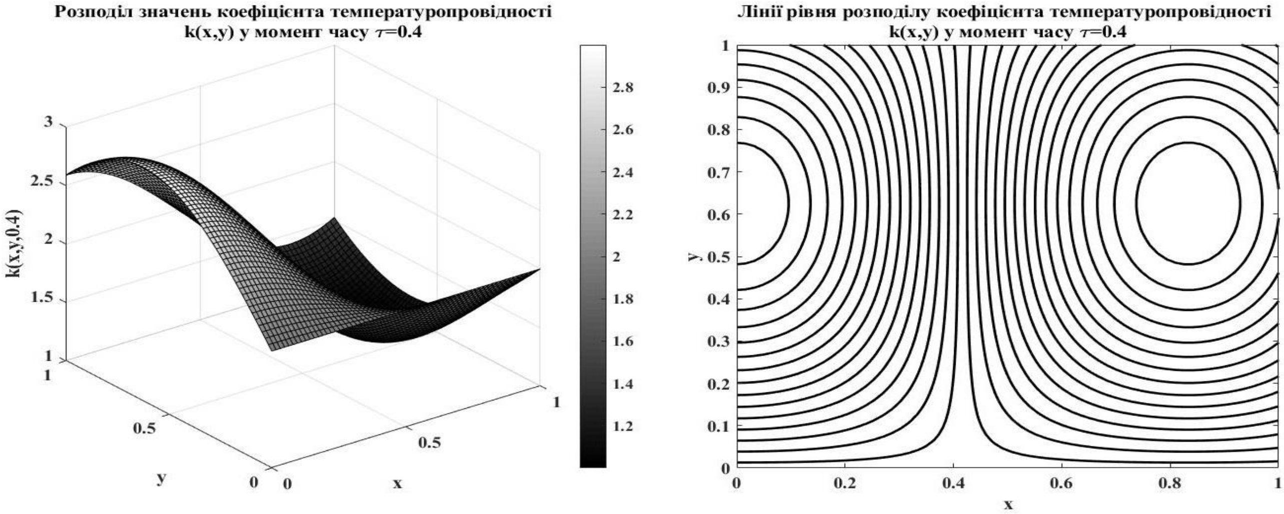


Рис. 3.42 – Результат ідентифікації коефіцієнта температуропровідності в момент часу t = 0,4

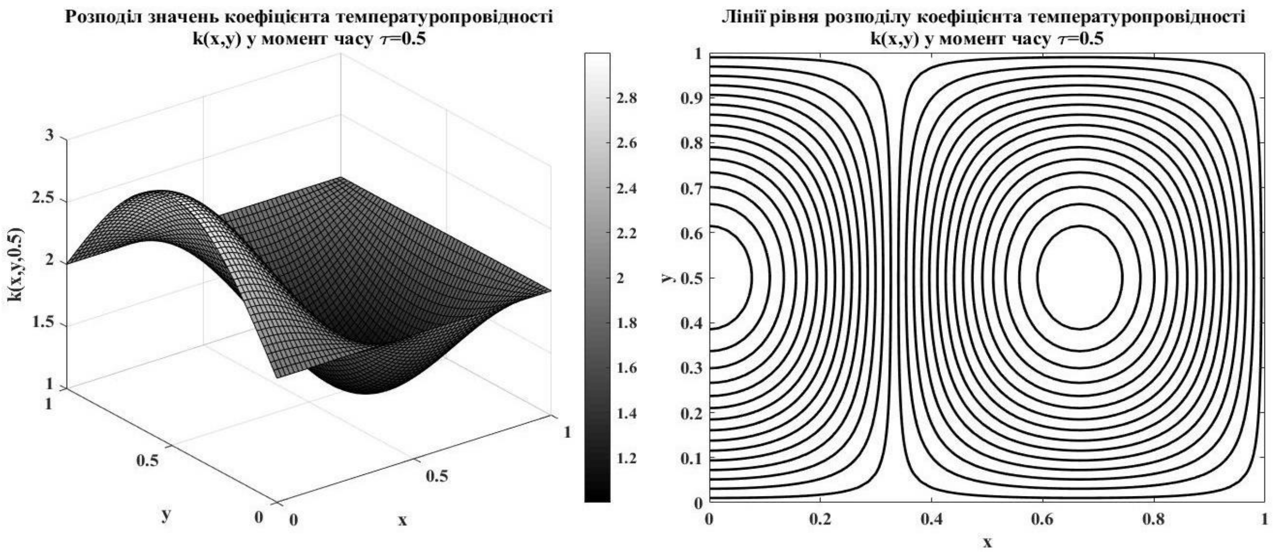


Рис. 3.43 – Результат ідентифікації коефіцієнта температуропровідності в момент часу t = 0,4

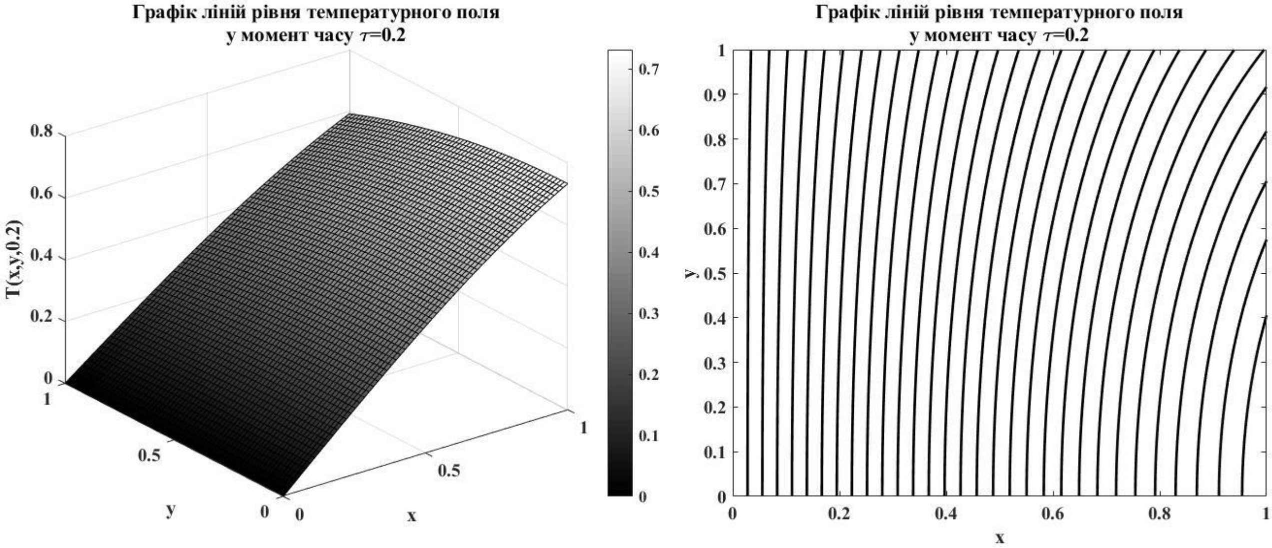


Рис. 3.44 – Температурне поле в результаті знайденого коефіцієнта температуропровідності в момент часу t = 0,2

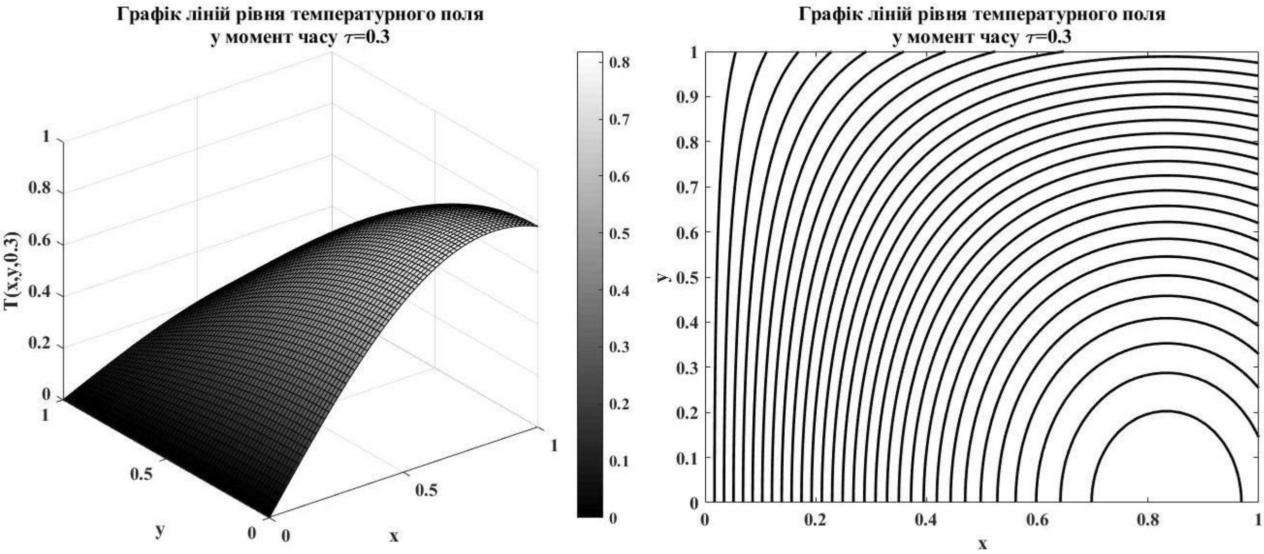


Рис. 3.45 – Температурне поле в результаті знайденого коефіцієнта температуропровідності в момент часу t = 0,3

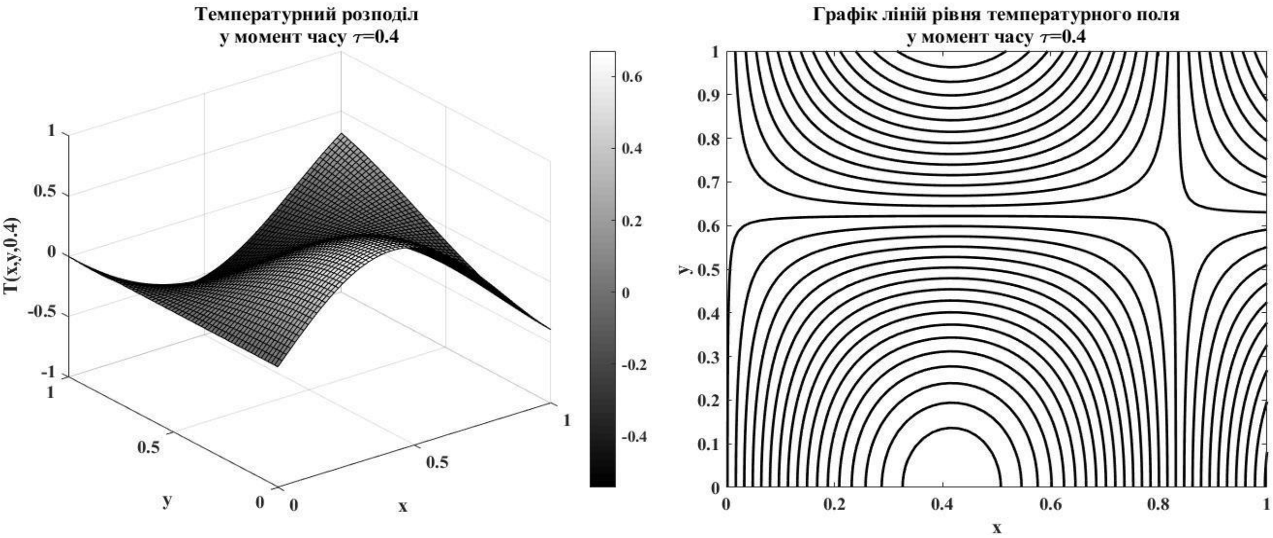


Рис. 3.46 – Температурне поле в результаті знайденого коефіцієнта температуропровідності в момент часу t = 0,4

Тепер розглянемо задачу у такій математичній постановці. Знайти глобальний мінімум функціонала:

$$J\left(\theta(x,y)\right)=\int_0^1\int_0^1\left(T\left(\theta,x,y,t_f\right)-T_{fin}\left(x,y\right)\right)^2 dxdy\to\min, \tag{3.30}$$

де $T\left(\theta,x,y,t_f\right)$ – розв'язок задачі

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial x}\left(\theta\left(x,y,t\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial T}{\partial y}\left(\theta\left(x,y,t\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right)+f,\\ f\left(x,y\right)=3\pi x\cos\left(3\pi tx\right)-2\pi y\sin\left(2\pi ty\right)+\\ +\pi^2t^2\left(\frac{1}{x^2+y^2+1}+xyt\right)\left(4\cos\left(2\pi ty\right)+9\sin\left(3\pi tx\right)\right)+\\ +\pi t\left(ty-\frac{2x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\right)\left(2\sin\left(2\pi y\right)-3\cos\left(3\pi tx\right)\right),\\ \left(x,y\right)\in[0;1]^2, t\in\left[0,t_f\right], t_f=1,\end{gathered} \tag{3.31}$$

Початкова умова для (3.31) має вигляд:

$$T(x,y,0)=1. \tag{3.32}$$

Граничні умови задачі (3.30)–(3.31) мають такий вигляд:

$$\begin{gathered}T(x,0,t)=1+\sin\left(3\pi tx\right),\ T(x,1,t)=\sin\left(3\pi tx\right)+\cos\left(2\pi t\right),\\ T(0,y,t)=\cos\left(2\pi ty\right),\ T(1,y,t)=\cos\left(2\pi ty\right)+\sin\left(3\pi t\right).\end{gathered} \tag{3.33}$$

Додаткова умова для (3.31) у момент часу $t_f=1$:

$$T(x,y,0.5)=T_{fin}\left(x,y\right)=\sin\left(3\pi x\right)+\cos\left(2\pi y\right). \tag{3.34}$$

Таблиця 3.19

Таблиця результатів ефективності методу найшвидшого спуску на задачі (3.30)–(3.34) без побудови наближення до шуканого розв'язку

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	4,15379913E-02	26	3,09825435E-06

9	3,29104641E-02	27	2,64427432E-06
10	1,95681555E-02	28	1,37897280E-06
11	1,09913249E-02	29	7,46245746E-07
12	6,43088181E-03	30	6,07863147E-07
13	3,06691260E-03	31	4,02871102E-07
14	2,30517730E-03	32	2,12257828E-07
15	1,77950230E-03	33	1,37970884E-07
16	1,32889108E-03	34	1,06168892E-07
17	6,45274241E-04	35	9,60227285E-08
18	3,83321499E-04	36	6,43505484E-08
19	2,67095954E-04	37	5,19410382E-08
20	1,37104905E-04	38	2,88323336E-08
21	8,02513261E-05	39	2,35706944E-08
22	4,96949275E-05	40	2,00967038E-08
23	2,68967335E-05	41	9,60326440E-09
24	1,63785394E-05	42	8,51298074E-09
25	9,25385286E-06	43	4,09936660E-09
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***24875***

Таблиця 3.20

Таблиця результатів ефективності методу найшвидшого спуску на задачі (3.30)–(3.34) з побудовою наближення до шуканого розв’язку

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	2,34871162E-03	17	3,04378668E-05
9	1,86413577E-03	18	8,11198339E-06
10	1,37275555E-03	19	1,78399340E-06
11	1,12495133E-03	20	4,72372749E-07
12	7,82305939E-04	21	1,06044715E-07
13	4,99795622E-04	22	2,56806688E-08
14	4,65419646E-04	23	6,12702007E-09
15	2,51819523E-04	24	1,33262490E-09
16	1,32268094E-04	25	3,23059310E-10
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***5012***

Із результатів, які представлені в таблицях 3.19 та 3.20, помітно прослідковується ефективність отриманих у роботі методів оптимізації. Кількість викликів процедури розв’язування ПЗТ для задачі (3.25)–(3.29) зменшено майже у 5 раз.

Нижче наведені отримані результати ідентифікації коефіцієнта температуропровідності та розрахованого по ньому температурного поля у різні моменти часу.

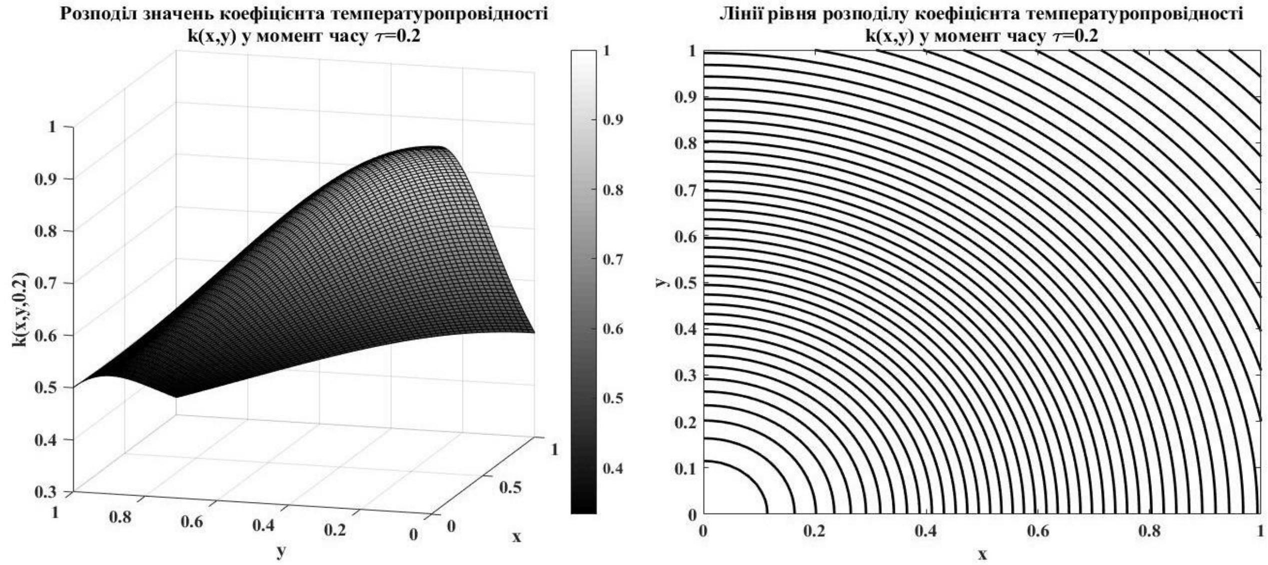


Рис. 3.47 – Результат ідентифікації коефіцієнта теплопровідності у момент часу t = 0,2

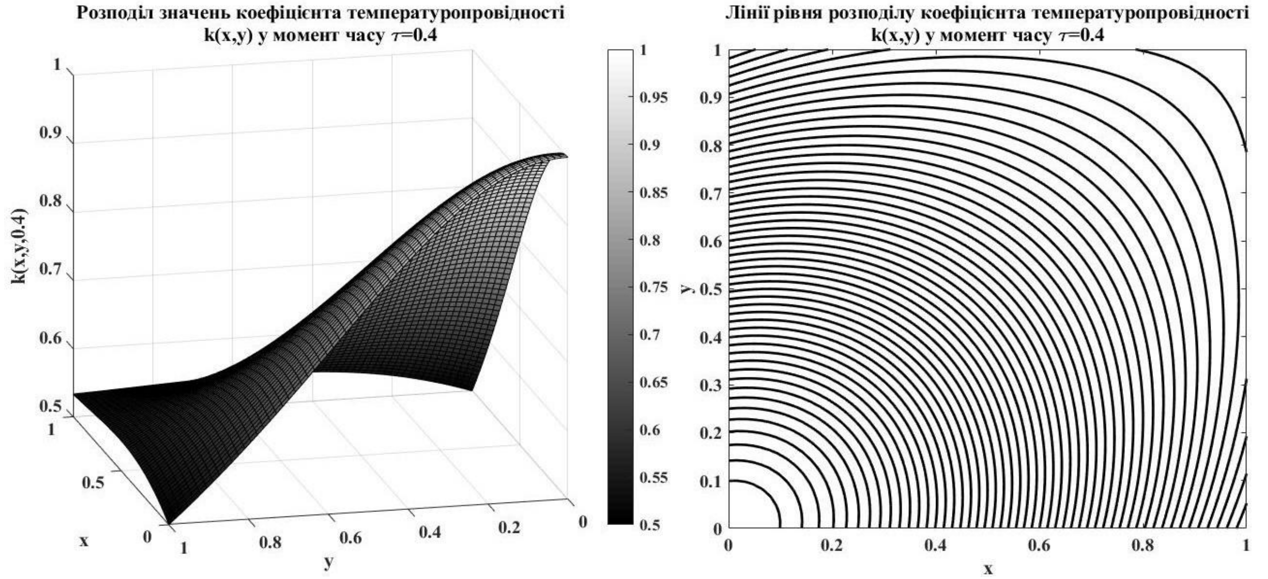


Рис. 3.48 – Результат ідентифікації коефіцієнта теплопровідності у момент часу t = 0,4

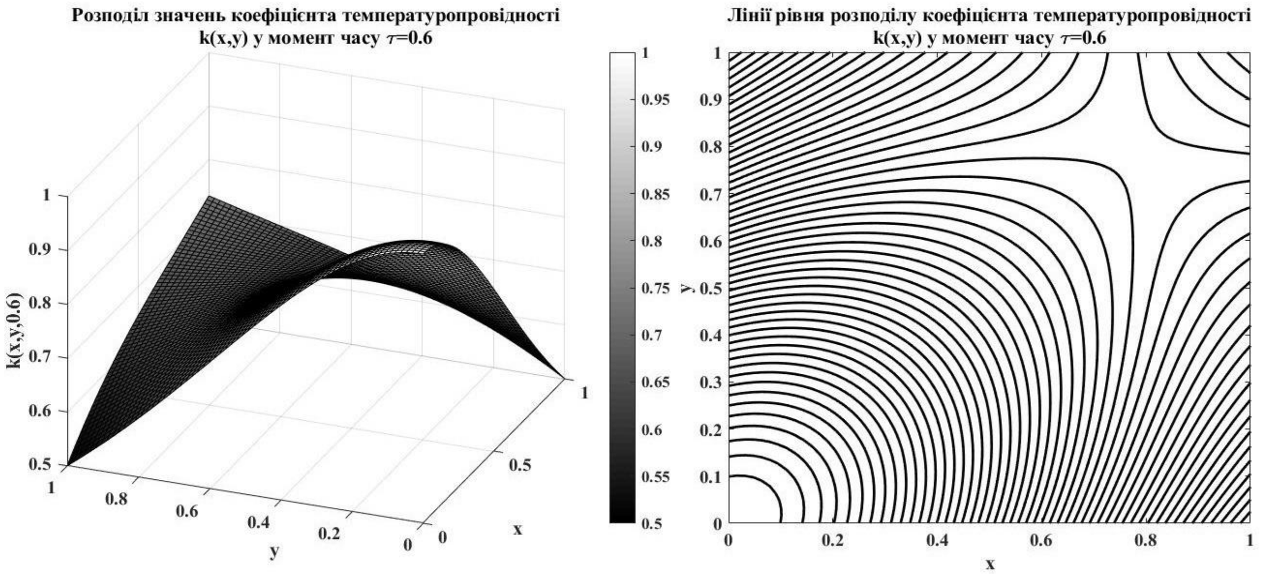


Рис. 3.49 – Результат ідентифікації коефіцієнта теплопровідності у момент часу t = 0,6

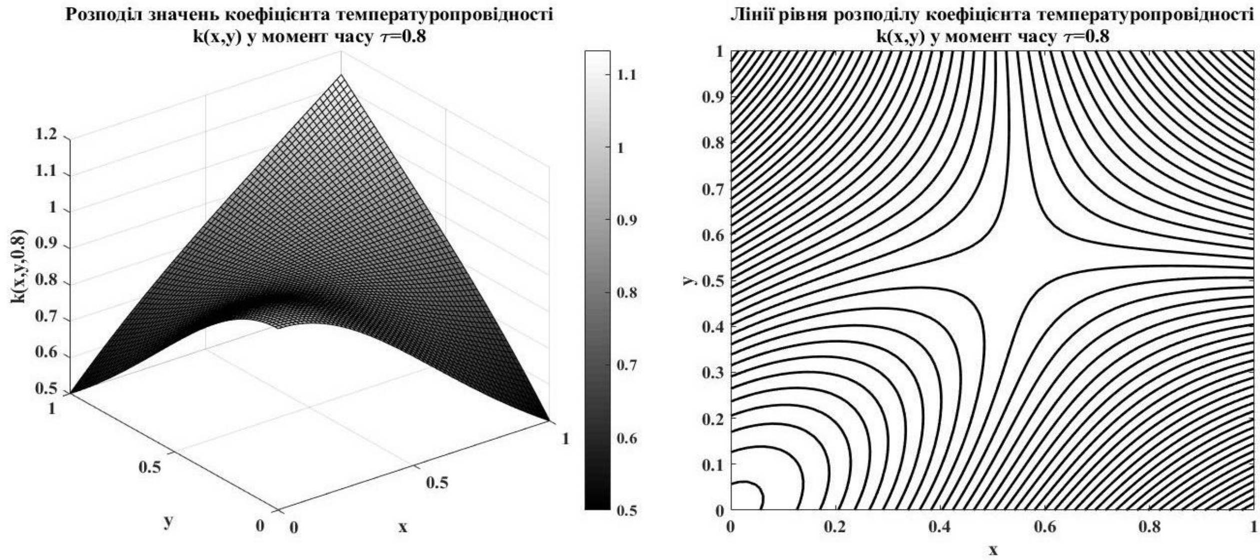


Рис. 3.50 – Результат ідентифікації коефіцієнта теплопровідності у момент часу t = 0,8

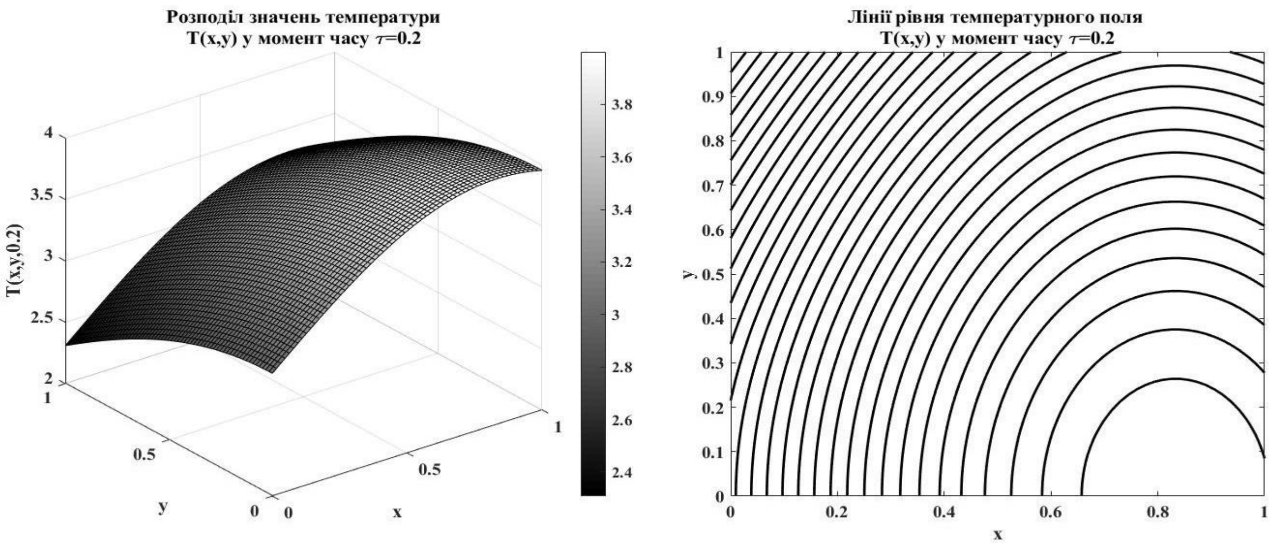


Рис. 3.51 – Розраховане температурне поле у момент часу t = 0,2
при отриманому коефіцієнті теплопровідності

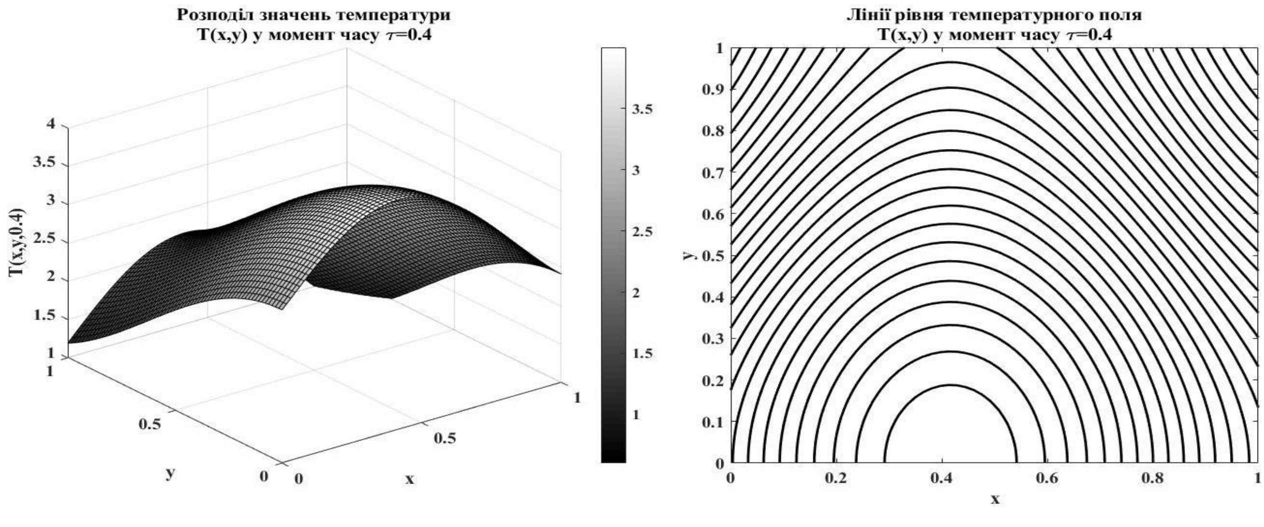


Рис. 3.52 – Розраховане температурне поле у момент часу t = 0,4
при отриманому коефіцієнті теплопровідності

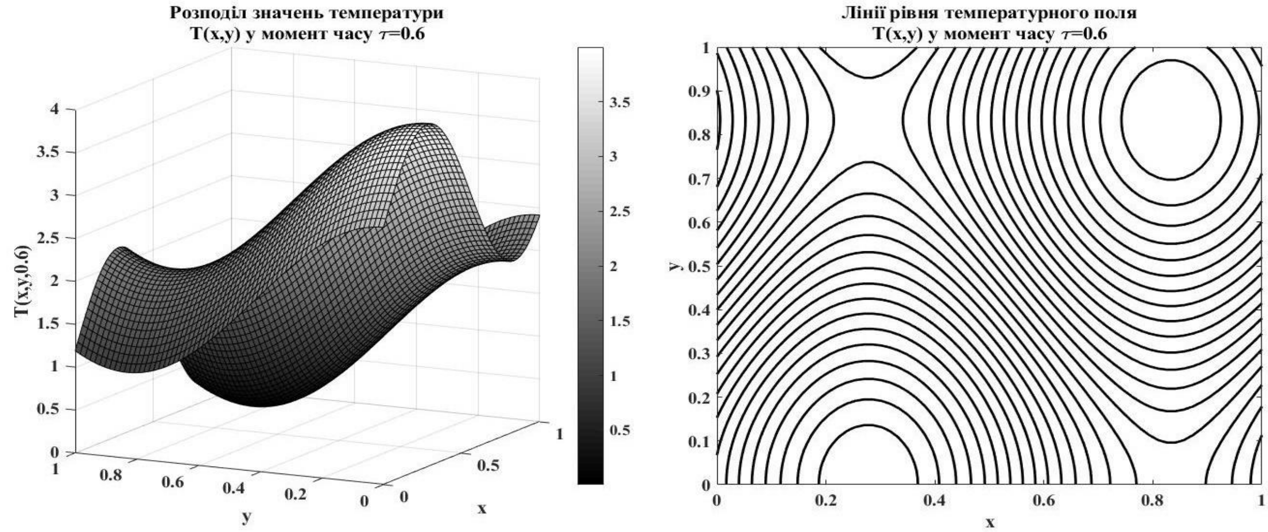


Рис. 3.53 – Розраховане температурне поле у момент часу t = 0,6
при знайденому коефіцієнті теплопровідності

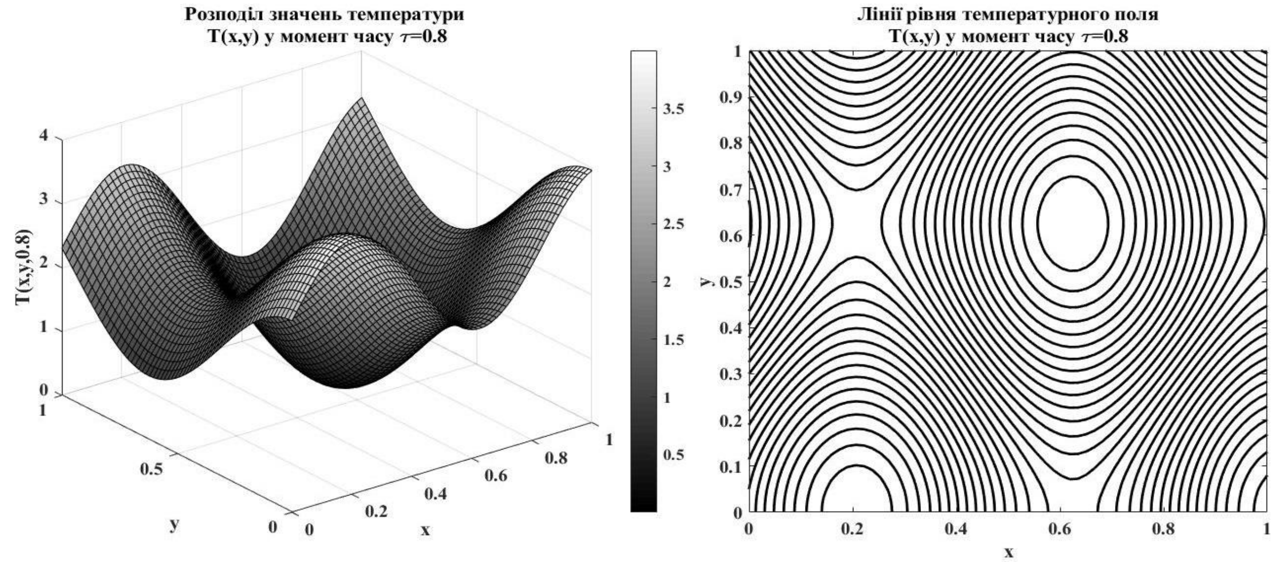


Рис. 3.54 – Розраховане температурне поле у момент часу t = 0,8
при знайденому коефіцієнті теплопровідності

Нелінійні задачі. Тепер розглянемо наступну задачу у такій математичній постановці. Знайти глобальний мінімум функціонала [98]:

$$J\left(\theta(x,y)\right)=\int_0^1\int_0^1\left(T\left(\theta,x,y,t_f\right)-T_{fin}\left(x,y\right)\right)^2 dxdy \to \min, \tag{3.35}$$

де $T\left(\theta,x,y,t_f\right)$ – розв’язок задачі

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial x}\left(\theta\left(x,y,t\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial T}{\partial y}\left(\theta\left(x,y,t\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right)+f, \tag{3.36}$$

$$\left(x,y\right)\in[0;1]^2, t\in\left[0,t_f\right], t_f=0,5;$$

$$f\left(x,y\right)=\frac{4\pi^2t^2\cos\left(2\pi tx\right)}{\left(\cos\left(2\pi tx\right)+\cos\left(3\pi ty\right)\right)^2+1}-3\pi y\sin\left(3\pi ty\right)-2\pi x\sin\left(2\pi tx\right)+$$
$$+\frac{2\pi^2t^2\left(\cos\left(2\pi tx\right)+\cos\left(3\pi ty\right)\right)\left(4\sin^2\left(2\pi tx\right)+9\sin^2\left(3\pi ty\right)\right)}{\left(\left(\cos\left(2\pi tx\right)+\cos\left(3\pi ty\right)\right)^2+1\right)^2}.$$

Початкова умова для (3.36) має вигляд:

$$T(x,y,0)=2. \qquad (3.37)$$

Граничні умови задачі (3.35)–(3.36) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} &T(x,0,t)=1+\cos\left(2\pi tx\right),\ T(x,1,t)=\cos\left(2\pi tx\right)+\cos\left(3\pi t\right),\\ &T(0,y,t)=1+\cos\left(3\pi ty\right),\ T(1,y,t)=\cos\left(3\pi ty\right)+\cos\left(2\pi t\right). \end{aligned} \qquad (3.38)$$

Додаткова умова у момент часу $t_f=0.5$:

$$T\left(x,y,0.5\right)=T_{fin}\left(x,y\right)=\cos\left(\pi x\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi y\right). \qquad (3.39)$$

Таблиця 3.21

Таблиця результатів ефективності методу (2.47) на задачі (3.35)–(3.39) без побудови наближення до шуканого розв’язку

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	1,27587755E-01	38	8,92847113E-08
9	6,65144868E-02	39	4,26560191E-08
10	3,54164707E-02	40	3,43067772E-08
11	2,36485212E-02	41	1,93152144E-08
12	1,66346563E-02	42	1,13152579E-08
13	1,14023096E-02	43	7,78332223E-09
14	6,23823809E-03	44	6,38953914E-09
15	4,94565959E-03	45	4,68582418E-09
16	2,67595491E-03	46	3,11129466E-09
17	1,46898565E-03	47	1,57906551E-09
18	1,08000661E-03	48	8,12626237E-10
30	6,27178418E-06	60	2,82717955E-12
31	3,24864177E-06	61	1,41458502E-12
32	1,91575600E-06	62	9,05430716E-13
33	1,06853903E-06	63	5,78896669E-13
34	5,66015435E-07	64	3,10660360E-13

35	3,65534359E-07	65	1,60960919E-13
36	3,23303094E-07	66	1,19765655E-13
37	2,37010510E-07	67	6,63687947E-14
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***62676***

Таблиця 3.22

Таблиця результатів ефективності методу (2.47) на задачі (3.35)–(3.39) з побудовою наближення до початкової умови

Номер ітерації	**Точність обчислень**	**Номер ітерації**	**Точність обчислень**
8	5,22646103E-03	19	1,03729297E-08
9	4,05255420E-03	20	2,70603620E-09
10	2,30739891E-03	21	6,39760350E-10
11	1,43598626E-03	22	1,40503244E-10
12	9,33251412E-07	23	3,56677125E-11
13	6,74594724E-07	24	8,43427729E-12
14	3,36548365E-07	25	1,83506769E-12
15	2,02449268E-07	26	4,18399470E-13
16	1,49713446E-07	27	9,37794019E-14
17	8,67162641E-08	28	2,48525157E-14
18	4,26754102E-08	29	5,83658486E-15
Кількість викликів функції розв'язування ПЗТ			***7154***

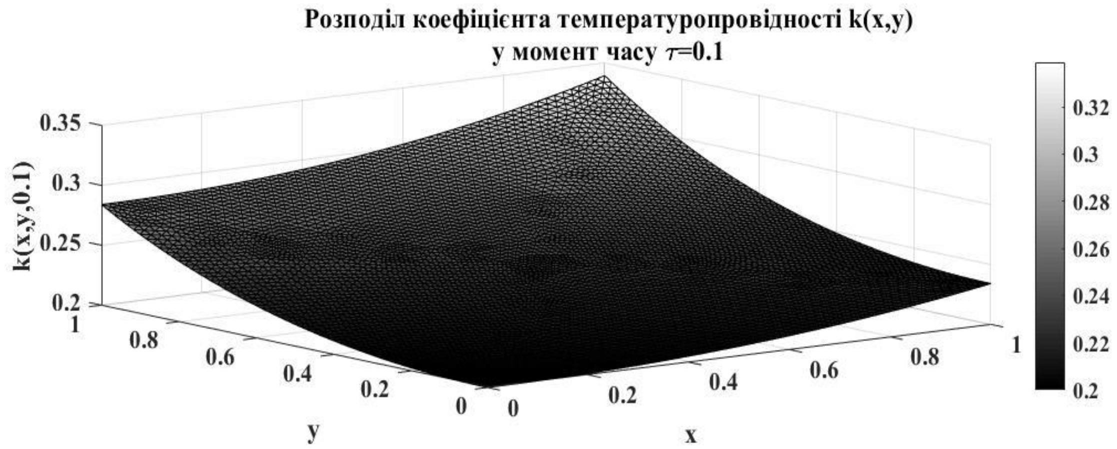


Рис. 3.55 – Відновлений розподіл коефіцієнта температуропровідності в момент часу *t=0.1*

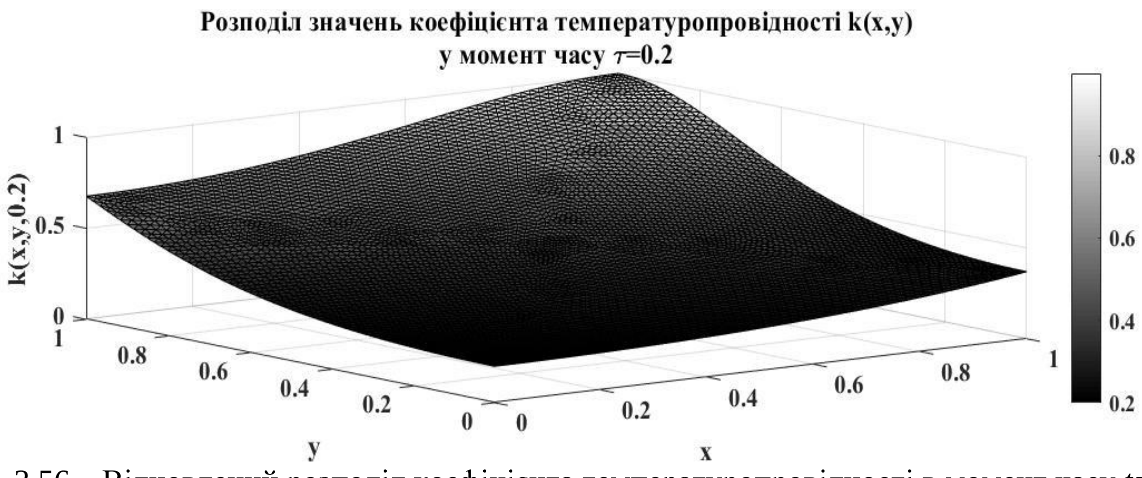


Рис. 3.56 – Відновлений розподіл коефіцієнта температуропровідності в момент часу *t=0.2*

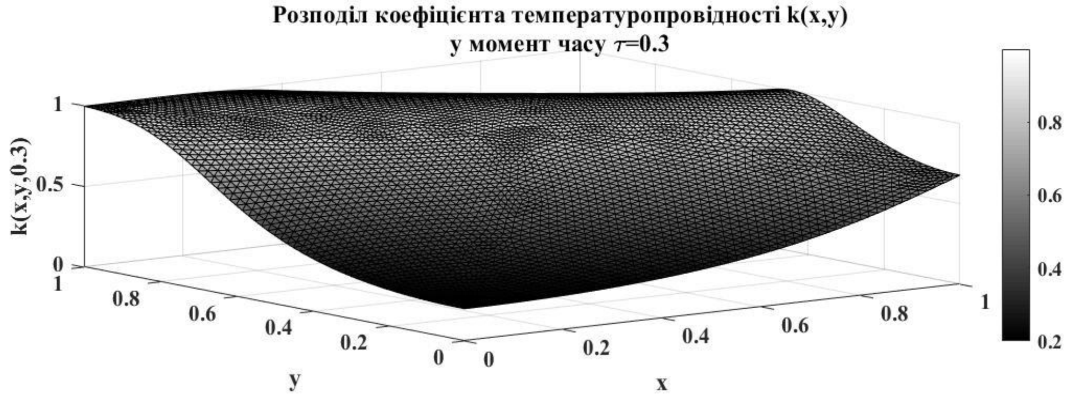


Рис. 3.57 – Відновлений розподіл коефіцієнта температуропровідності в момент часу *t=0.3*

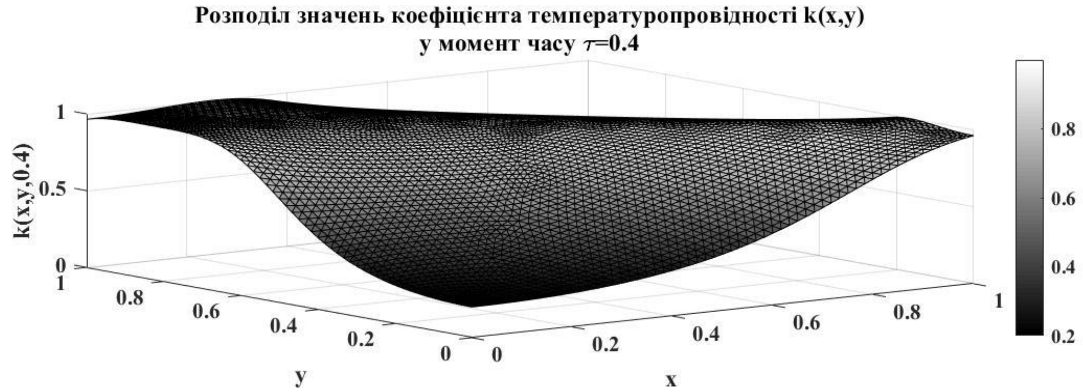


Рис. 3.58 – Відновлений розподіл коефіцієнта температуропровідності в момент часу $t = 0{,}4$

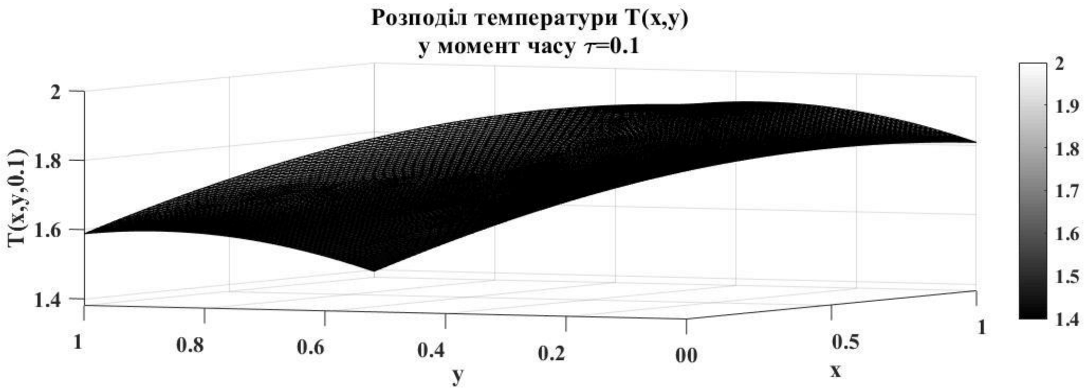


Рис. 3.59 – Розраховане температурне поле в момент часу $t = 0{,}1$ з врахуванням знайденого коефіцієнта температуропровідності

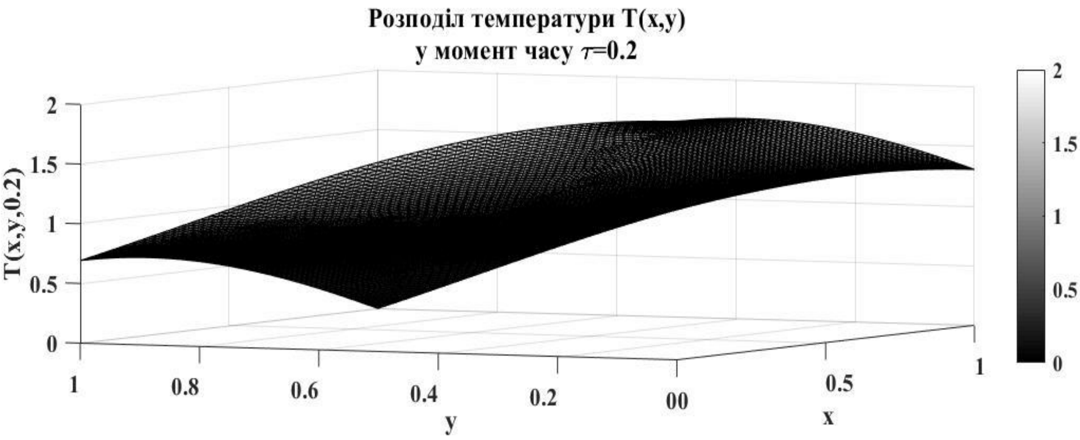


Рис. 3.60 – Розраховане температурне поле в момент часу $t = 0{,}2$ з врахуванням знайденого коефіцієнта температуропровідності

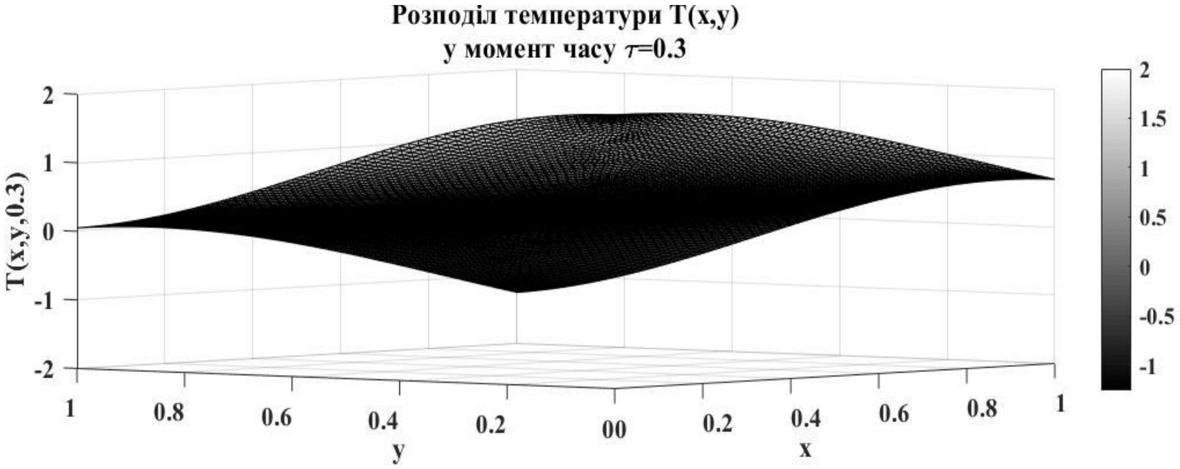


Рис. 3.61 – Розраховане температурне поле в момент часу $t = 0{,}3$ з врахуванням знайденого коефіцієнта температуропровідності

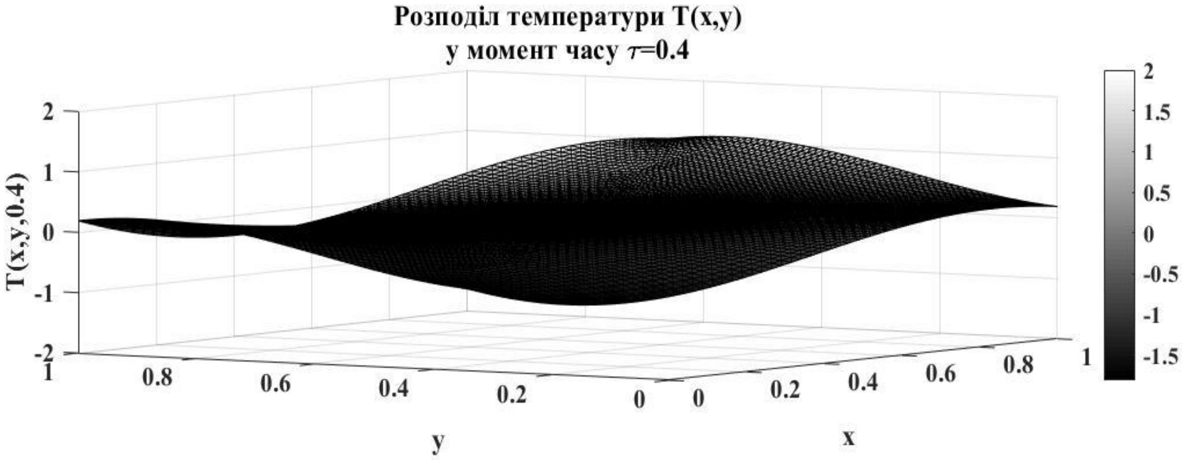


Рис. 3.62 – Розраховане температурне поле в момент часу $t = 0{,}4$ з врахуванням знайденого коефіцієнта температуропровідності

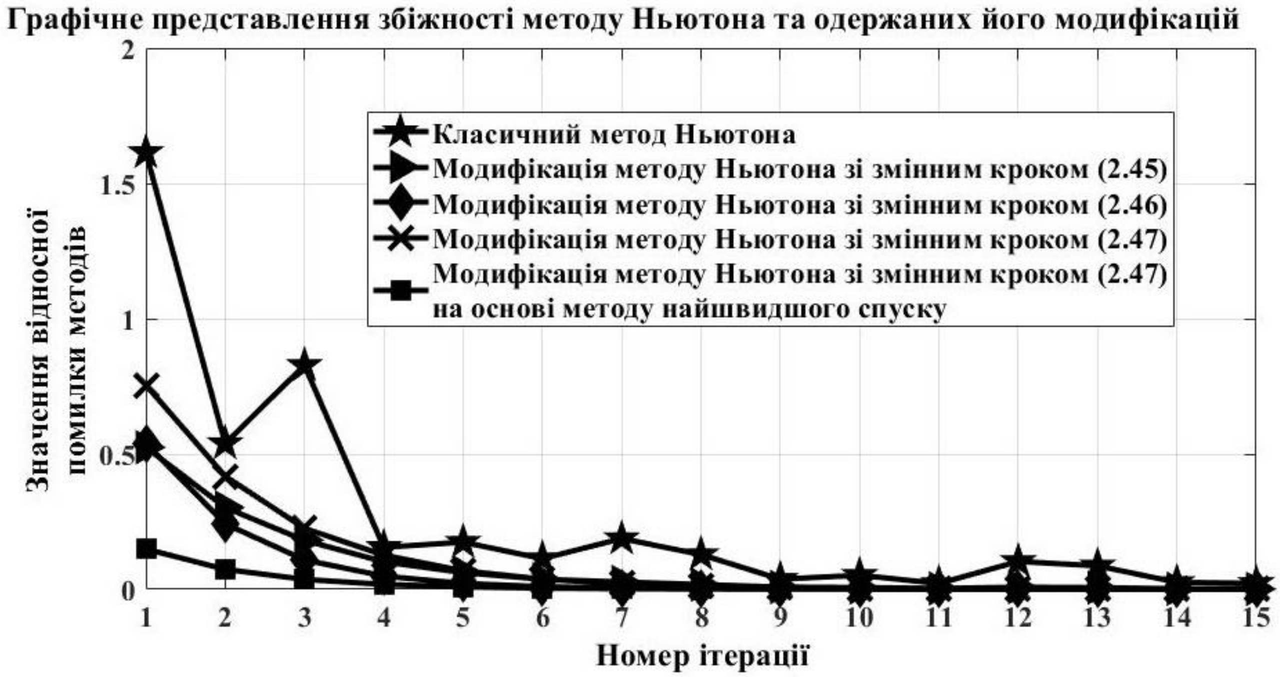


Рис. 3.63 – Порівняльний аналіз роботи кожного методу за критерієм збіжності

Із рисунка 3.63 прослідковуться стрибки в класичному методі Ньютона. Це означає, що є необхідність введення змінного кроку в процесі мінімізації квадратичного функціонала багатовимірних нелінійних ОЗТ.

На задачі (3.35)–(3.39) найшвидше збігається метод (2.47), оскільки він має третій порядок точності, завдяки чому кількість викликів процедури чисельного розв'язування ПЗТ є найменшою (рис. 3.64).

Рис. 3.64 – Порівняльний аналіз роботи кожного методу за критерієм кількості викликів процедури розв'язку ПЗТ

Результати моделювання основних класів багатовимірних ОЗТ слугують тому, що завдяки отриманим модифікаціям сучасних методів розв'язування лінійних та нелінійних ОЗТ можна знаходити чисельні розв'язки цих задач в 3–10 разів швидше. З графічних результатів, які наведені в розділі також прослідковується ефективність уведення змінного кроку в отриманих модифікаціях класичого методу Ньютона. Експериментально показано, що одним з найефективніших методів розв'язування лінійних багатовимірних ОЗТ є метод найшвидшого спуску разом із методом Фур'є. При розв'язуванні нелінійних ОЗТ доцільно користуватись модифікаціями класичного методу Ньютона для мінімізації квадратичного функціонала в класичній постановці обернених задач теплопровідності.

Висновки до третього розділу

Розділ містить практичну частину дисертаційної роботи. У ньому продемонстровано ефективність отриманих у другому розділі методів на різних задачах. Методи протестовані на різних класах лінійних та нелінійних ОЗТ: ОЗТ ідентифікації ПУ, ОЗТ ідентифікації ГУ та ОЗТ ідентифікації коефіцієнта температуропровідності. Практична частина даного розділу демонструє помітне прискорення пошуку чисельних розв’язків ОЗТ отриманими методами в порівнянні з класичними. Прискорення збіжності методів здійснюється шляхом зменшення кількості викликів процедури знаходження чисельного розв’язку ПЗТ, яка неодноразово викликається при мінімізації кваратичного функціонала в класичній постановці ОЗТ.

У розділі показана ефективність побудови початкових наближень до шуканого розв’язку конкретної ОЗТ шляхом розкладу задачі в ряд за допомогою методу Фур’є та методу лінеаризації за Ньютоном.

Комплексна робота методів для мінімізації квадратичного функціоналу в ОЗТ дає прискорення в 3–10 разів порівняно з класичними методами багатовимірної безумовної оптимізації.

Створено програмний комплекс розв’язування основних класів багатовимірних лінійних на нелінійних ОЗТ, структура якого наведена в додатку В до дисертаційної роботи. Він дає можливість досліджувати об’єкти досить складної геометричної форми із застосуванням методу скінченних елементів. Задачі, в яких досліджуваний об’єкт має просту форму (прямокутник, коло тощо) розв’язані методом скінченних різниць.

Геометрія та розрахункова сітка досліджуваних об’єктів створювалась у прикладних програмних пакетах MATLAB та COMSOL Multiphysics (додаток Б).

РОЗДІЛ 4
МОДЕЛІ ПРИКЛАДНИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

4.1. Моделі оптимальної роботи промислової печі

Одним із актуальних в умовах сьогодення є дослідження теплофізичних характеристик внутрішніх нагрівачів промислових та муфельних печей [95; 103; 125; 134; 140; 143–145], приклади яких зображено на рис. 4.1 та рис. 4.2.

Рис. 4.1 – Приклади промислових печей на елекричній основі

На рис. 4.2 показано приклад муфельної печі на електричній основі.

Рис. 4.2 – Муфельні печі на електричній основі

У даному розділі описані досить актуальні завдання оптимізації. Потрібно знайти оптимальну температуру печі, система опалення якої реалізована на основі електричних нагрівачів.

Перша частина дослідження полягає в обчисленні температурного поля всередині печі, коли значення температур нагрівачів відомі. Це завдання зводиться до чисельного розв’язку ПЗТ: значення температур нагрівачів відомі (додаткові внутрішні умови), всі дані про середовище відомі (ПУ, ГУ, коефіцієнт температуропровідності тощо). Потрібно знайти температурне поле в печі.

Друга частина дослідження присвячена обчисленню значень температур нагрівачів та їх розташувань для підтримки температури в печі. Очевидно, що кожне із завдань цієї частини дослідження є завданням умовної промислової оптимізації, причому обмеження, яке накладається на задачу – класичне рівняння теплопровідності.

Перше завдання оптимізації можна описати у словесній формі. Дано піч. Вона не спроможна нагріти об'єкт, який знаходиться в ній до заданої температури. З метою підвищення ефективності роботи печі в неї вмонтовані нагрівачі, розташування яких задається двома просторовими координатами на площині. Потрібно знайти такі значення температур цих нагрівачів, щоб розподіл температури на об'єкті був близький до необхідного (наперед заданого користувачем печі).

Друге завдання оптимізації описується так. У піч вбудовані нагрівачі температури яких відомі. Потрібно знайти розташування цих нагрівачів (координати на площині) в області печі, щоб розподіл температури на об'єкті печі був близький до необхідної (наперед заданої) температури.

Розрахунок температурних полів двох вище сформульованих технічних завдань здійснюється методами скінченних різниць та скінченних елементів.

Для простоти обмежимося геометрією простої форми: об'єкт печі – прямокутник, який поміщено в область даної печі, яка теж має форму прямокутника (рис. 4.3).

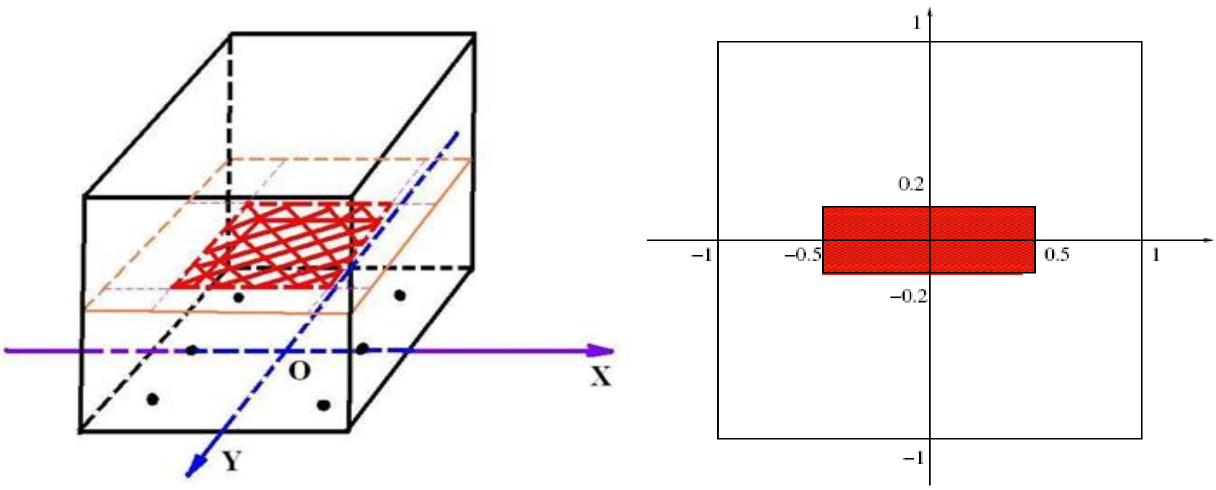


Рис. 4.3 – Піч та положення об'єкта всередині неї

Перейдемо до математичного формулювання описаних моделей промислової оптимізації. Нижче описані моделі (лінійні та нелінійні), які реалізовані в прикладному програмному пакеті MATLAB R2017b. Всі моделі зводяться до знаходження чисельного розв'язку ОЗТ ідентифікації внутрішніх джерел тепла (температур та геометричного їх розташування).

4.1.1. Математичний опис моделей

Очевидно, що для першого завдання промислової оптимізації, яке словесно описано вище, необхідно знайти мінімум функціонала [140; 143–145]:

$$J\left(\overline{\alpha}\right)=\iint\limits_{D_{object}}\left(T_{actual}-T\left(\overline{\alpha}\right)\right)^2 ds, \tag{4.1}$$

для якого задано обмеження у вигляді рівняння теплопровідності:

$$\nabla\left(k\nabla T\right)=0 \text{ на } D\in\left(x,y\right),D\subset R^2 \tag{4.2}$$

де

T_{actual}	– наперед задана температура на об'єкті печі;
D_{object}	– область, у якій знаходиться об'єкт печі;
D	– область всієї печі $\left(D_{object}\subset D\right)$;
$\overline{\alpha}=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$	– шукані значення температур вбудованих у піч нагрівачів,
n	– кількість вбудованих у піч точкових нагрівачів.

Граничні для (4.1)–(4.2) загалом мають такий вигляд:

$$\left.\left(pT+q\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right)\right|_{\Gamma}=r, \tag{4.3}$$

де

Γ	– границя всієї розрахункової області $D\in\left(x,y\right),\ D\subset R^2$;
$\vec{n}$	– вектор нормалі до границі розрахункової області D;
$p,\ q,\ r$	– дійсні числа, які визначені умовою задачі.

Очевидно, що описана модель (4.1)–(4.3)в загальному випадку є нелінійною, оскільки нічого не сказано про її коефіцієнти, які характеризують об’єкт та розрахункову область печі в цілому.

Мінімізація квадратичного функціонала проводиться описаними у другому розділі методами.

Другу модель можна описати так. Знайти мінімум функціонала:

$$J\left(\overline{\alpha},\overline{\beta}\right)=\iint\limits_{D_{object}}\left(T_{actual}-T\left(\overline{\alpha},\overline{\beta}\right)\right)^2 ds, \tag{4.4}$$

при обмеженні

$$\nabla\left(k\nabla T\right)=0 \text{ на } D\in\left(x,y\right), D\subset R^2 \tag{4.5}$$

де

T_{actual}	–	наперед задана температура, яка повинна бути на об’єкті печі;
D_{object}	–	область, у якій знаходиться об’єкт печі;
D	–	область всієї печі $\left(D_{object}\subset D\right)$;
$\overline{\alpha}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$	–	шукані координати осі абсцис розташування нагрівачів;
$\overline{\beta}=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$	–	шукані координати осі ординат розташування нагрівачів;
n	–	кількість вбудованих у піч точкових нагрівачів.

Граничні умови (4.4)–(4.5) мають такий вигляд:

$$\left.\left(pT+q\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right)\right|_{\Gamma}=r\,, \tag{4.6}$$

де

Γ	–	границя всієї розрахункової області $D\in\left(x,y\right),\ D\subset R^2$;
$\vec{n}$	–	вектор нормалі до границі розрахункової області D;
p, q, r	–	дійсні числа, які визначені умовою задачі.

Пошук значення функції, яка мінімізується, вимагає чисельного розв’язку диференціального рівняння (4.5).

Програмні реалізації моделей (4.1)–(4.3) та (4.4)–(4.6) наведені нижче.

4.1.2. Програмна реалізація моделей у MATLAB

Розв’язання описаних моделей з попереднього пункту проводиться з використанням оптимізаційних методів, які описані в другому розділі. Очевидно, що функціонали (4.1) та (4.3) квадратичні, до того ж опуклі на всій області D_{object} об’єкта, а це означає, що він має єдиний мінімум, який є глобальним. У методі Ньютона для заданої функції потрібно знайти градієнт та матрицю других похідних по всіх її аргументах (матриця Гессе).

Спочатку знайдемо градієнт функціонала для (4.1) [140; 143–145].

$$\begin{gathered}\frac{\partial J}{\partial \alpha_1} = -2 \iint\limits_{D_{object}} \left(T_{actual} - T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)\right) T'_{\alpha_1}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) dxdy, \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} = -2 \iint\limits_{D_{object}} \left(T_{actual} - T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)\right) T'_{\alpha_2}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) dxdy, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_n} = -2 \iint\limits_{D_{object}} \left(T_{actual} - T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)\right) T'_{\alpha_n}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) dxdy.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Отже, на основі виразів (4.7) вектор-градієнт для функціонала (4.1) такий:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} J\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)} = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial J}{\partial \alpha_2}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial \alpha_n}\right). \tag{4.8}$$

Наступним кроком є визначення матриці Гессе для функціонала (4.1):

$$H\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_n \partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_n^2} \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

де

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = -2 \iint\limits_{D_{object}} \begin{bmatrix} -T'_{\alpha_j}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) T'_{\alpha_i}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) + \\ +\left(T_{actual} - T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)\right) T''_{\alpha_i \alpha_j}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) \end{bmatrix} dxdy. \tag{4.10}$$

Остаточно, виходячи з (4.8) та (4.10), маємо вираз для других похідних у гессіані, який записано в кигляді (4.9):

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}=2\iint\limits_{D_{object}}\left[\begin{array}{c}T'_{\alpha_j}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)T'_{\alpha_i}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)-\\-\left(T_{actual}-T\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)\right)T''_{\alpha_i\alpha_j}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)\end{array}\right]dxdy. \qquad (4.11)$$

Очевидно, що функція, яку ми шукаємо (температурне поле) не може бути задане аналітично, тому розраховуємо його чисельно. Це значить, що всі похідні, у тому числі (4.7) та (4.11), потрібно шукати також чисельно, оскільки на кожному етапі отримується дискретний (чисельний) розв’язок. Для чисельного запису використаємо центральні різницеві схеми при знаходженні похідних першого та другого порядків, тобто так:

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_i}=-2\lim_{\Delta\alpha_i\to 0}\iint\limits_{D_{object}}\left[\begin{array}{c}\left(T_{actual}-T\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)\right)\times\\\times\left(\begin{array}{c}\dfrac{T\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+\Delta\alpha_i,\ldots,\alpha_n\right)}{2\Delta\alpha_i}-\\-\dfrac{T\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_i-\Delta\alpha_i,\ldots,\alpha_n\right)}{2\Delta\alpha_i}\end{array}\right)\end{array}\right]dxdy. \qquad (4.12)$$

Вважаючи в (4.12), що $\Delta\alpha_i$ та $\Delta\alpha_j$ досить малі, перепишемо формули похідних у такому вигляді:

$$T'_{\alpha_i}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)=\frac{T\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+\Delta\alpha_i,\ldots,\alpha_n\right)-T\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_i-\Delta\alpha_i,\ldots,\alpha_n\right)}{2\Delta\alpha_i}$$

$$T'_{\alpha_j}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)=\frac{T\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_j+\Delta\alpha_j,\ldots,\alpha_n\right)-T\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_j-\Delta\alpha_j,\ldots,\alpha_n\right)}{2\Delta\alpha_j} \qquad (4.13)$$

$$T''_{\alpha_i\alpha_j}=\frac{1}{4\Delta\alpha_j\Delta\alpha_i}\times\left[\begin{array}{l}T\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_i-\Delta\alpha_i,\ldots,\alpha_j-\Delta\alpha_j,\ldots,\alpha_n\right)+\\+T\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+\Delta\alpha_i,\ldots,\alpha_j+\Delta\alpha_j,\ldots,\alpha_n\right)-\\-T\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_i-\Delta\alpha_i,\ldots,\alpha_j+\Delta\alpha_j,\ldots,\alpha_n\right)-\\-T\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_i+\Delta\alpha_i,\ldots,\alpha_j-\Delta\alpha_j,\ldots,\alpha_n\right)\end{array}\right].$$

Остаточно запишемо елементи вектора-градієнта функціонала:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \alpha_1} &= -2 \iint\limits_{D_{object}} \left(\begin{array}{c} \left(T_{actual} - T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)\right)\times \\ \times \dfrac{T\left(\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right) - T\left(\alpha_1 - \Delta\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)}{2\Delta\alpha_1} \end{array} \right) dxdy, \\
\frac{\partial J}{\partial \alpha_2} &= -2 \iint\limits_{D_{object}} \left(\begin{array}{c} \left(T_{actual} - T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)\right)\times \\ \times \dfrac{T\left(\alpha_1, \alpha_2 + \Delta\alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) - T\left(\alpha_1, \alpha_2 - \Delta\alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)}{2\Delta\alpha_2} \end{array} \right) dxdy, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial J}{\partial \alpha_n} &= -2 \iint\limits_{D_{object}} \left(\begin{array}{c} \left(T_{actual} - T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)\right)\times \\ \times \dfrac{T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n + \Delta\alpha_n\right) - T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n - \Delta\alpha_n\right)}{2\Delta\alpha_n} \end{array} \right) dxdy.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Визначення елементів гессіану для (4.11) з використанням (4.13) та записується так:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 2 \iint\limits_{D_{object}} & \left[\begin{array}{c} \dfrac{T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_j + \Delta\alpha_j, \ldots, \alpha_n\right) - T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_j - \Delta\alpha_j, \ldots, \alpha_n\right)}{2\Delta\alpha_j} \times \\ \dfrac{T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \Delta\alpha_i, \ldots, \alpha_n\right) - T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_i - \Delta\alpha_i, \ldots, \alpha_n\right)}{2\Delta\alpha_i} \end{array} \right] dxdy - \\
-2 \iint\limits_{D_{object}} & \left[\begin{array}{c} \left(T_{actual} - T\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)\right)\times \\ \dfrac{1}{4\Delta\alpha_j \Delta\alpha_i} \times \left(\begin{array}{c} T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_i - \Delta\alpha_i, \ldots, \alpha_j - \Delta\alpha_j, \ldots, \alpha_n\right) + \\ + T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \Delta\alpha_i, \ldots, \alpha_j + \Delta\alpha_j, \ldots, \alpha_n\right) - \\ - T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_i - \Delta\alpha_i, \ldots, \alpha_j + \Delta\alpha_j, \ldots, \alpha_n\right) - \\ - T\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + \Delta\alpha_i, \ldots, \alpha_j - \Delta\alpha_j, \ldots, \alpha_n\right) \end{array} \right) \end{array} \right] dxdy.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Формули (4.14) та (4.15) лежать в основі реалізації нелінійних моделей (4.1)–(4.3) та (4.4)–(4.6) відповідно.

Нижче наведені основні результати моделювання моделі (4.1)–(4.3). Матеріал, з якого виготовлений об’єкт печі – алюміній. Розрахункова область задачі – квадрат зі стороною 2, центр якого знаходиться на початку кординат. Граничні умови моделі (4.1)–(4.3) мають такий вигляд:

$$T_x'\left(-1; y\right) = T_x'\left(1; y\right) = 0,\ T\left(x; -1\right) = 100^{\circ}\mathrm{C},\ T\left(x; 1\right) = 50^{\circ}\mathrm{C}.$$

Об’єкт печі – прямокутник, $D_{object}(x,y):[-0,5;0,5]\times[-0,2;0,2]$. Температура, яка вимагається на об’єкті печі – 200ºС. Коефіцієнт температуропровідності здля (4.1)–(4.3) взято з бібліотеки матеріалів прикладного програмного пакета COMSOL Multiphysics. У піч вбудовано шість точкових нагрівачів, розсташування яких задане просторовими координатами: (-0,75; 0,75), (0; 0,75), (0,75; 0,75), (-0,75; -0,75), (0; -0,75) та (0,75; -0,75) відповідно. На рис. 4.4 та рис. 4.5 показано результати розрахунків для моделі (4.1)–(4.3).

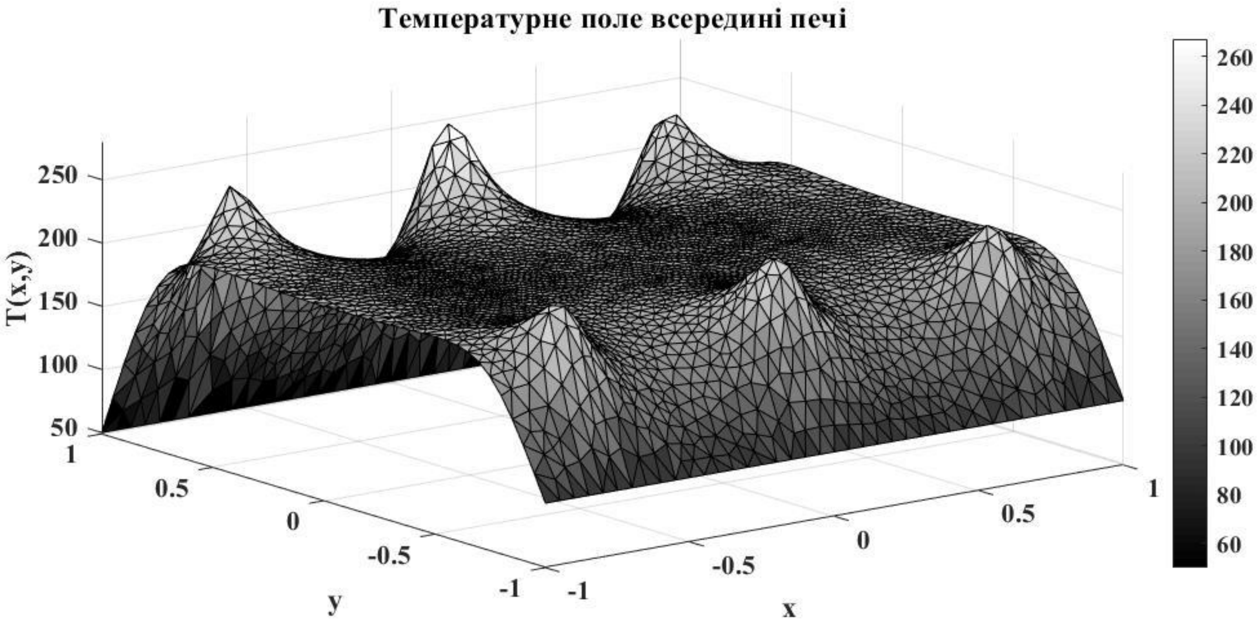


Рис. 4.4 – Реалізація моделі (4.1)–(4.3). Розподіл температури в печі в результаті дії внутрішніх нагрівачів

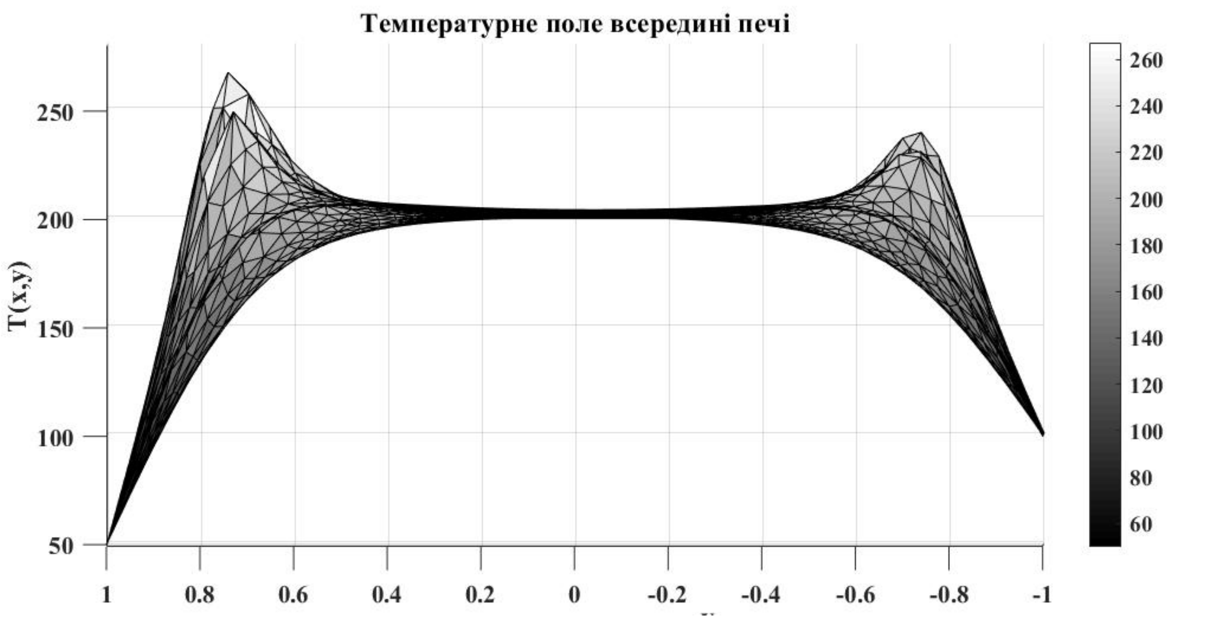


Рис. 4.5 – Порівняння розподілу температури зі значенням T_{actual} на області об’єкта печі

Значення температур внутрішніх нагрівачів склали 221,234°C, 250,763°C, 221,652°C, 213,842°C, 217,732°C та 213,832°C відповідно.

Як видно з рис. 4.4 та з рис. 4.5, температура на об'єкті печі близька до 200°C. Значення функціоналу (4.1) складає 0,21.

Порівняння отриманих результатів проведено при Інституті технічної теплофізики НАН України на муфельній печі СНОЛ-1,6.2,5.1/11–И2М. Відхилення розрахованого температурного поля за моделлю (4.1)–(4.3) температурного поля відносно реального, яке отримане в результаті вимірювання, не перевищило 5,3%.

Лінійний випадок для моделі (4.1) – (4.3)

Випадок лінійної моделі типу (4.1)–(4.3) можна досліджувати іншим методом. Якщо обмеження (4.2) є лінійним, тобто коефіцієнт k не залежить від температури (у тому випадку, якщо його значення повільно змінюється зі зміною температури), то шуканий розв'язок моделі (4.1)–(4.3) – температурне поле всередині печі під дією внутрішніх нагрівачів можна розглядати як лінійну комбінацію температурних полів кожного з нагрівачів печі та температурного поля печі без впливу цих внутрішніх нагрівачів. Опис лінійного випадку пошуку температур внутрішніх нагрівачів промислової печі наведено нижче.

Опис лінійної моделі як часткового випадку

Як вже було сказано вище, розв'язок моделі (4.1)–(4.3) може бути записаний з використанням рівності:

$$T(x,y) = T_0(x,y) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k T_k(x,y). \tag{4.16}$$

де

$T_k(x,y)$ – розподіл температури k-го нагрівача окремо;

$T_0(x,y)$ – розподіл температури системи без врахування дій внутрішніх нагрівачів;

α_k – коефіцієнти підвищення впливу внутрішніх нагрівачів, які визначаються із розв’язку математичної моделі.

Знаходження чисельного розв’язку лінійного випадку для математичної моделі (4.1)–(4.3)

Для проведення чисельного аналізу даної моделі необхідно виконати п’ять основних пунктів перед розробкою програмного комплексу:

1) знаходження температурного поля без дії внутрішніх нагрівачів:

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} = 0. \tag{4.17}$$

Граничні умови мають вид:

$$T_0(x,-1) = 100,\ T_0(x,1) = 50,\ T'_{0x}(-1,y) = 0,\ T'_{0x}(1,y) = 0; \tag{4.18}$$

2) знаходження температурного поля кожного нагрівача окремо.

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_k}{\partial y^2} = 0, \tag{4.19}$$

де $k = \overline{1,n}$, n – кількість нагрівачів у печі.

Граничні умови мають вид:

$$T_k(x,-1) = T_k(x,1) = 0,\ T'_{kx}(-1,y) = T'_{0x}(1,y) = 0. \tag{4.20}$$

Внутрішні умови мають вид:

$$T_k(x,y)\big|_{G_k} = T_{pres_k}, \tag{4.21}$$

де

G_k – область k-го нагрівача, причому $G_k \subset D$, $G_k \cap D_{object} = \varnothing$, $k = \overline{1,n}$, $G_i \cap G_j = \varnothing$, $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$;

T_{pres_k} – розрахункова температура k-го нагрівача – додатне число (для розрахунків береться рівним одиниці);

3) розв’язування лінійної системи рівнянь відносно невідомого вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, яка отримується з умови мінімізації функціонала:

$$A\alpha = b, \tag{4.22}$$

причому ліва та права частини системи мають такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \iint\limits_{D_{object}} T_1(x,y)T_1(x,y)\,dxdy & \cdots & \iint\limits_{D_{object}} T_n(x,y)T_1(x,y)\,dxdy \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint\limits_{D_{object}} T_1(x,y)T_n(x,y)\,dxdy & \cdots & \iint\limits_{D_{object}} T_n(x,y)T_n(x,y)\,dxdy \end{pmatrix},$$
$$b = \begin{pmatrix} \iint\limits_{D_{object}} \left(T_{actual} - T_0(x,y)\right)T_1(x,y)\,dxdy \\ \vdots \\ \iint\limits_{D_{object}} \left(T_{actual} - T_0(x,y)\right)T_n(x,y)\,dxdy \end{pmatrix}; \tag{4.23}$$

4) обрахунок лінійної комбінації отриманих температурних полів зі знайденими коефіцієнтами з попереднього пункту, а саме:

$$T(x,y) = T_0(x,y) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(x,y); \tag{4.24}$$

5) Візуалізація отриманого результату $T(x,y)$.

Формули (4.17)–(4.24) задають основну процедуру пошуку розв’язку лінійної моделі ідентифікації параметрів внутрішніх дрежел тепла печі.

Протестуємо модель на конкретних прикладах та вхідних даних.

Тестування моделі здійснюється з урахуванням тих же відомостей про піч. Коефіцієнтом температуропровідності для моделі (4.1)–(4.3) взято середнє значення – $82{,}51 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Результати моделювання наведені на рис. 4.6–4.11.

Результати розрахунків лінійного випадку для моделі (4.1)–(4.3) наведено нижче з використанням методу скінченних елементів.

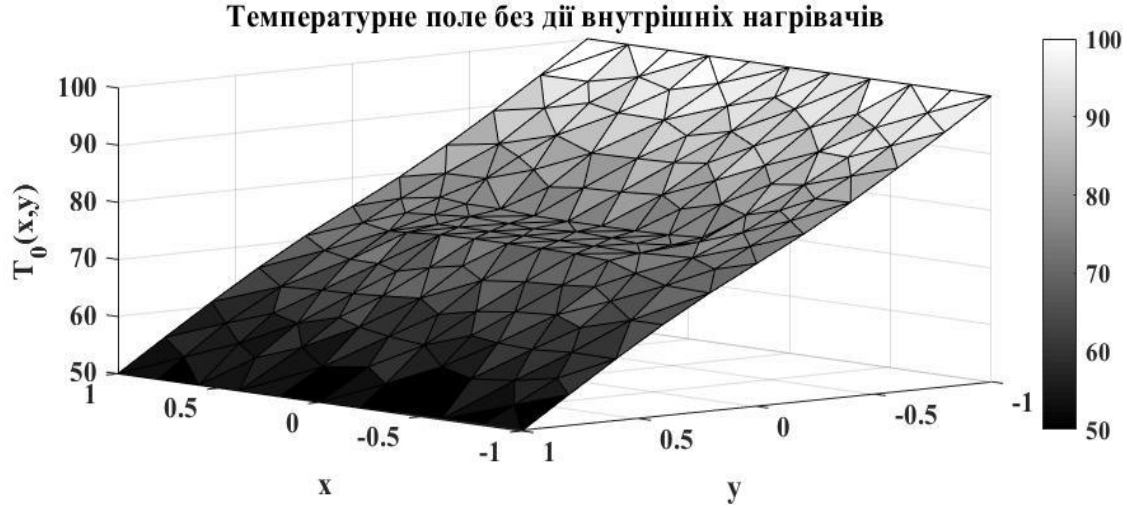


Рис. 4.6 – Розподіл температури в печі без дії внутрішніх нагрівачів

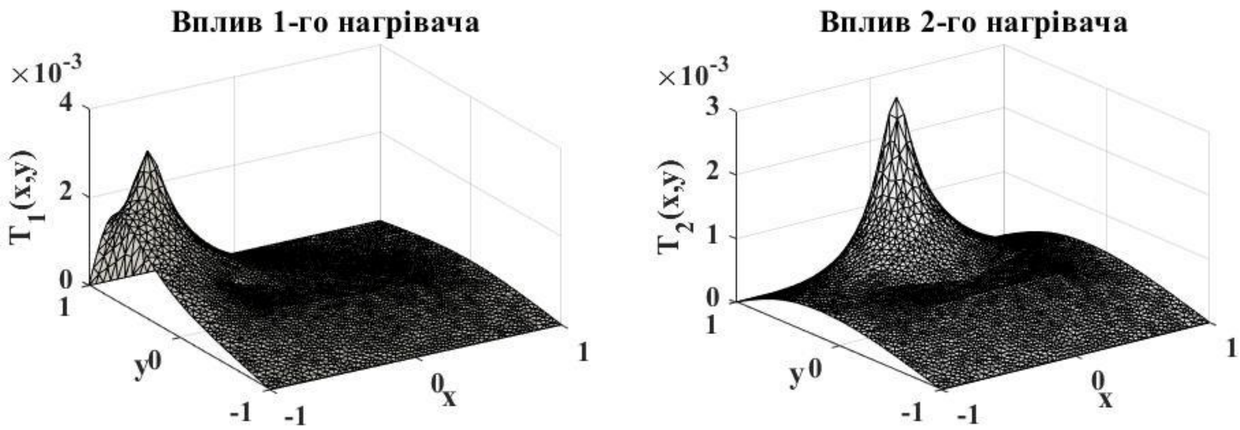


Рис. Визначення температурного поля двох перших внутрішніх нагрівачів – функції $T_1(x,y)$ та $T_2(x,y)$.

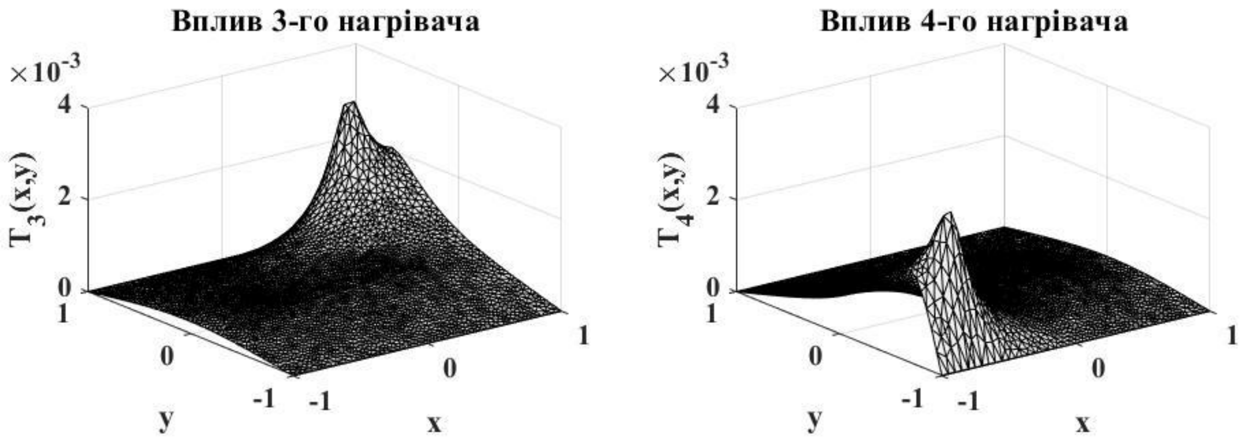


Рис. 4.7 – Визначення температурного поля третього та четвертого внутрішніх нагрівачів – функції $T_3(x,y)$ та $T_4(x,y)$.

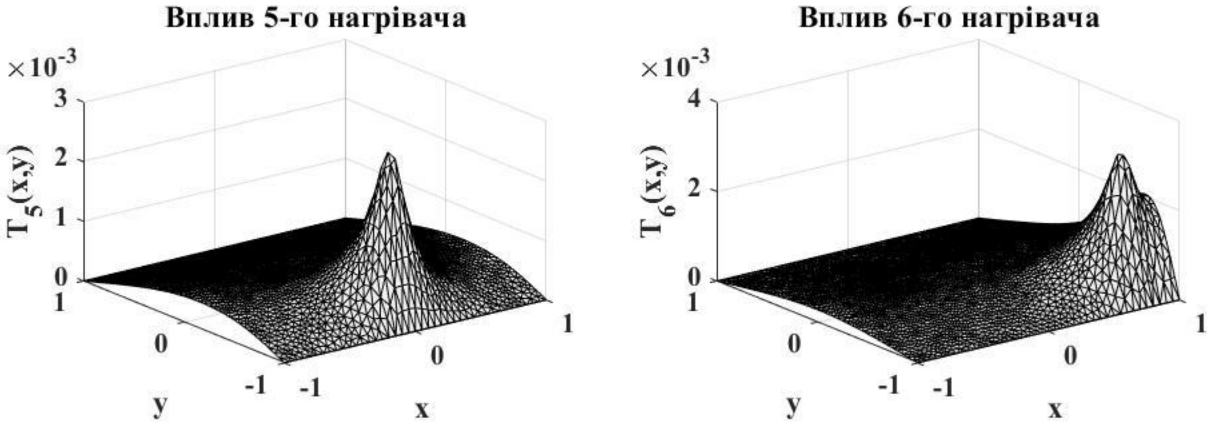


Рис. 4.8 – Визначення температурного поля п’ятого та шостого внутрішніх нагрівачів – функції $T_5(x,y)$ та $T_6(x,y)$.

На рис. 4.9 графічно наведено температурне поле, яке є розв’язком задачі.

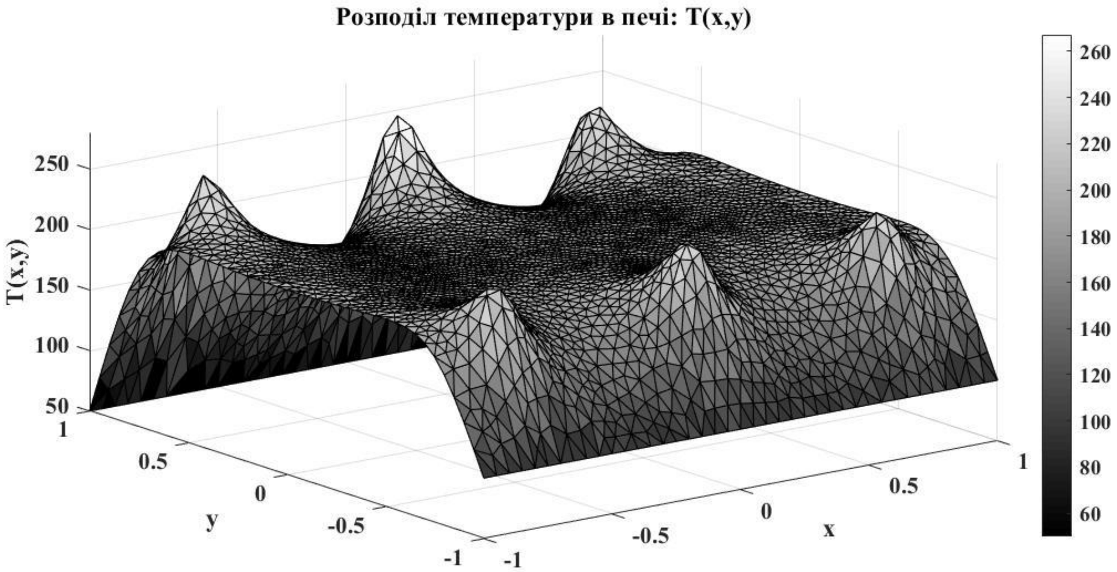


Рис.4.9 – Результуюче температурне поле в печі з урахуванням дії внутрішніх нарівачів

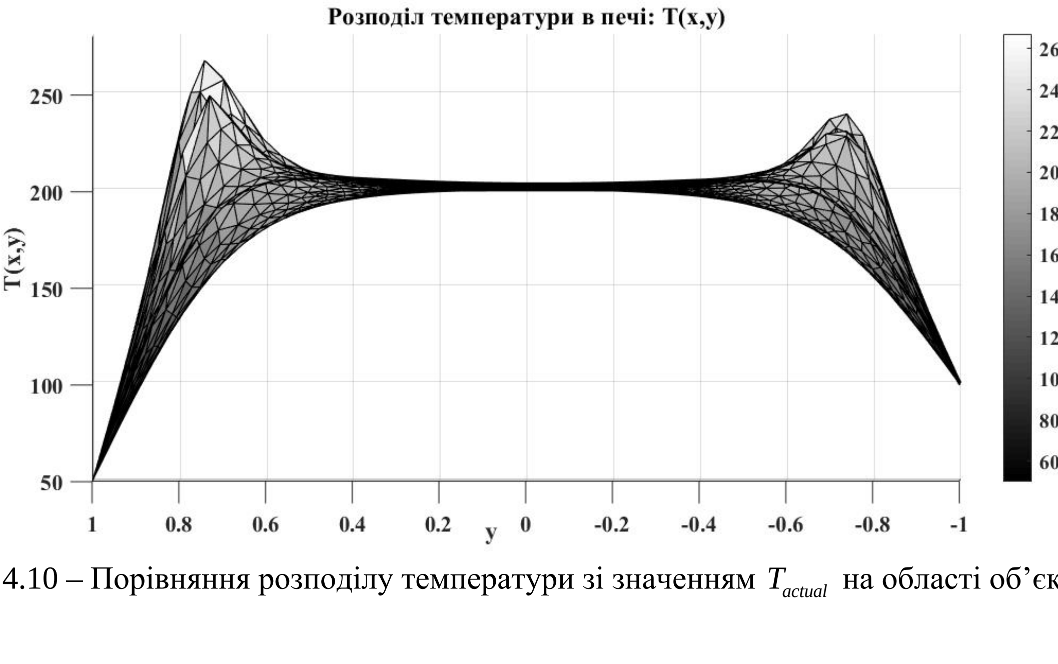


Рис. 4.10 – Порівняння розподілу температури зі значенням T_{actual} на області об’єкта печі

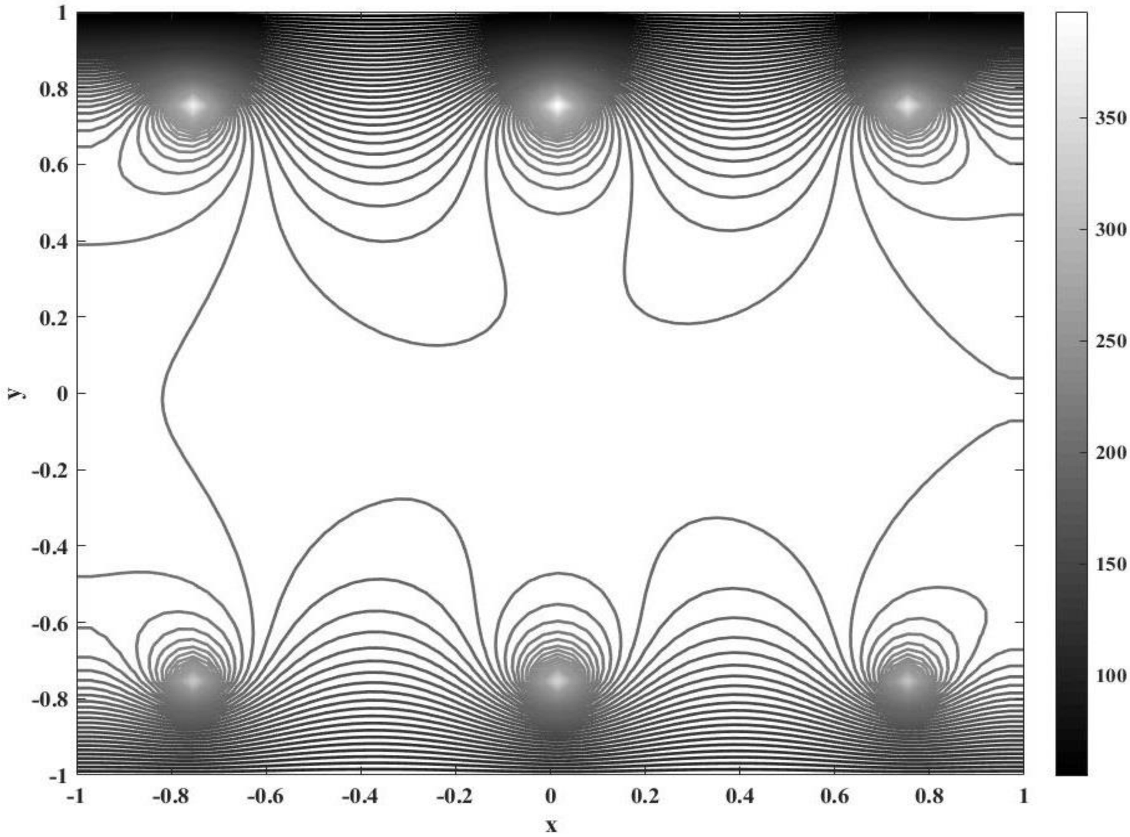


Рис. 4.11 – Контурний графік температурного поля задачі

Отримані розрахунки моделі (4.1)–(4.3) підтверджуються відповідним актом впровадження основних результатів дисертаційного дослідження в Інституті технічної теплофізики НАН України (додаток Е).

На рис. 4.12 показана ефективність отриманих в роботі методів за кількістю викликів процедури розв’язування ПЗТ для моделі (4.1)–(4.3).

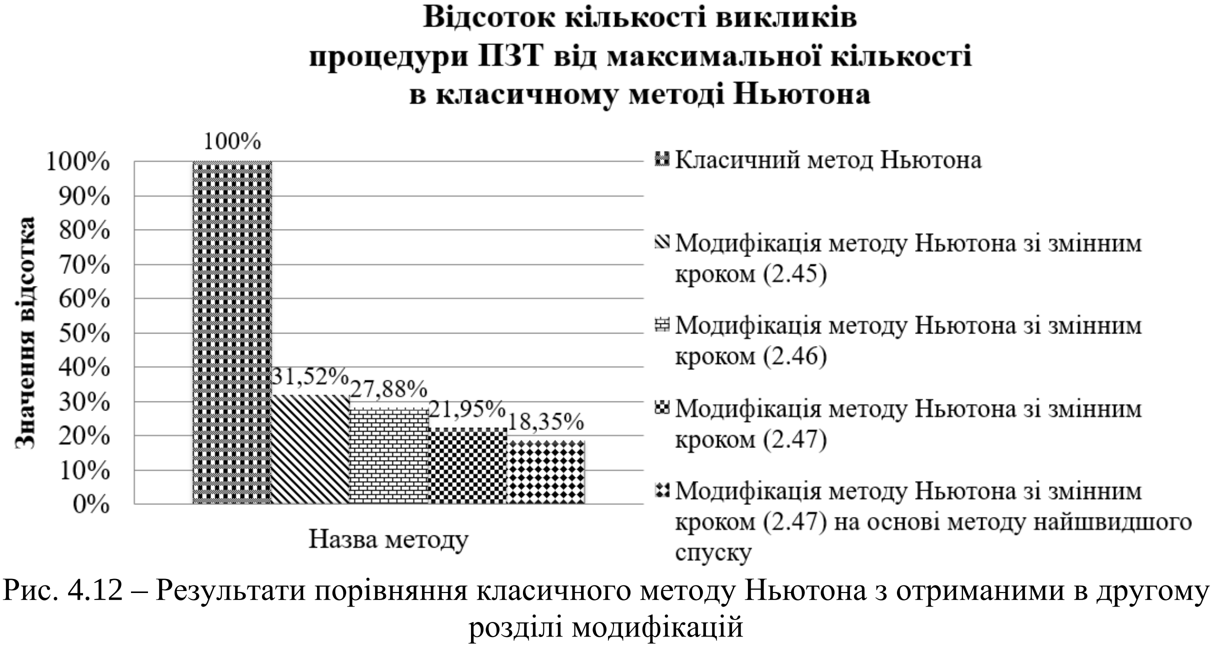


Рис. 4.12 – Результати порівняння класичного методу Ньютона з отриманими в другому розділі модифікацій

Тепер розглянемо модель (4.4)–(4.6). Для цієї моделі оптимізації уведемо позначення: $\gamma = \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n\right)$. Тоді всі частинні похідні функціонала (4.4) матимуть такий вигляд:

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_1} = -2 \iint\limits_{D_{object}} \left[\left(\begin{gathered} \left(T_{actual} - T\left(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n}\right)\right) \times \\ \times \frac{T\left(\gamma_1 + \Delta\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}\right) - T\left(\gamma_1 - \Delta\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}\right)}{2\Delta\gamma_1} \end{gathered} \right) dxdy \right].$$

… … … … … … … …

$$\frac{\partial J}{\partial \gamma_{2n}} = -2 \iint\limits_{D_{object}} \left[\left(\begin{gathered} \left(T_{actual} - T\left(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n}\right)\right) \times \\ \times \frac{T\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n} + \Delta\gamma_{2n}\right) - T\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_n - \Delta\gamma_{2n}\right)}{2\Delta\gamma_{2n}} \end{gathered} \right) dxdy \right].$$

Аналогічно розраховуються похідні другого порядку. Отже, для моделі (4.4)–(4.6) маємо систему рівнянь від $2n$ невідомих. Ця модель вже не може бути лінійною, оскільки прямим способом ми не можемо отримати температурні поля кожного точкового нагрівача окремо, розташування яких невідомі. Модель (4.4)–(4.6) розв’язується комплексно, тобто мінімізація квадратичного функціоналу (4.4) здійснюється методами, які описані в другому розділі даної дисертаційної роботи. На рис. 4.13 наведено основні результати роботи методів, описаних в другому розділі на моделі (4.4)–(4.6).

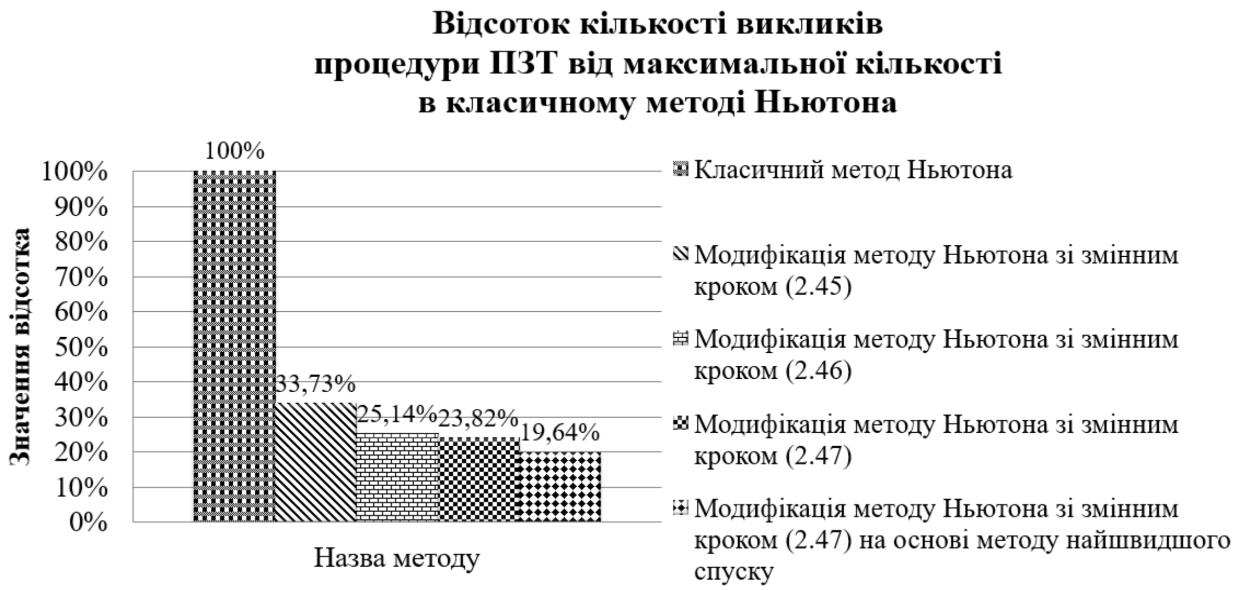


Рис. 4.13 – Кількість викликів ПЗТ, яка необхідна для отримання чисельного розв’язку моделі (4.4)–(4.6) класичним методом Ньютона та його модифікаціями

Моделі (4.1)–(4.3) та (4.4)–(4.6) можна активно використовувати в промисловості для здійснення модернізації промислових та муфельних печей за рахунок їхньої реконструкції з метою підвищення ефективності їх роботи.

4.1.3. Аналіз результатів моделювання

Вхідні дані розглянутих моделей (4.1)–(4.3) та (4.4)–(4.6) є вихідними даними до моделей, що зводяться до ОЗТ. Тому в першу чергу порівняння виконуються саме з відповідними моделями ОЗТ.

На рис. 4.14 показано порівняння заданих температур нагрівачів моделі на розв'язування ПЗТ та результат розрахунків температур точкових нагрівачів за моделлю (4.1)–(4.3).

Рис. 4.14 – Порівняння результатів моделювання для (4.1)–(4.3) з відомими значеннями, які були задані при розв'язуванні ПЗТ, яка відповідає даній моделі

За даними, які відображені на рис. 4.14 видно, що абсолютне відхилення розрахованих у моделі значеннях не перевищує 2%.

Аналогічний аналіз проведено для моделі (4.4)–(4.6). Порівняння розташувань точкових нагрівачів з реальними, які були задані при розв'язуванні ПЗТ, що відповідає даній моделі. Результати наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Порівняння результатів моделювання для (4.4)–(4.6) з відомими

	Задана координата "*x*" в ПЗТ	Задана координата "*y*" у ПЗТ	Отримана "*x*" в ОЗТ	Отримана "*y*" в ОЗТ
Нагрівач №1	-0,75	0,75	-0,797140511	0,777920666
Нагрівач №2	0	0,75	0,001016594	0,795654887

Нагрівач №3	0,75	0,75	0,761298087	0,799821165
Нагрівач №4	-0,75	-0,75	-0,773324819	-0,79088635
Нагрівач №5	0	-0,75	0,041665929	-0,73184487
Нагрівач №6	0,75	-0,75	0,792592287	-0,768088104

Похибка в моделі (4.4)–(4.6) прямо залежить від вибору сітки. У більшості випадків може трапитись, що на певній ітерації методу оптимізації знайдені розташування нагрівачів не знаходяться у вузлах сітки. Тоді є два варіанти виходу з даної ситуації: 1) помістити кожнен нагрівач у найближчий до розрахованого положення вузол сітки; 2) здійснювати корекцію розрахункової сітки з додаванням нових вузлів, у яких отримане розташування кожного нагрівача (наприклад, за алгоритмом Руперта).

Загальна кількість ітерацій в процесі мінімізації функціонала (4.1) для моделі (4.1)–(4.3) методом (2.47) склала 15 ітерацій, а загальна кількість ітерацій для мінімізації функціонала (4.4) для моделі (4.4)–(4.3) цим же методом – 19 ітерацій.

4.2. Модель теплообміну в системі з дифузійними поверхнями

4.2.1. Математичний опис моделі

Для реалізації процесу відтворювання одиниці вимірювання високої інтенсивності розглядається вимірювальна комірка, що являє собою замкнутий простір, утворений двома дифузійними випромінювальними поверхнями: джерела та стоку теплової енергії, а також захисного екрану, що складається з чотирьох дзеркальних поверхонь [93]. Точність вимірювання у пристроях такого типу залежить як від ступеня напівсферичності падаючого випромінювання, так від рівномірності розподілу значень густини теплового потоку, що надходить на тепловідвід. Тобто повинна існувати зона, в якій густина теплового потоку є однорідною. Розміри цієї зони залежать в кожному конкретному випадку від геометричних та теплових факторів.

Нижче на рис. 4.20 наведена 2D-модель вимірювальної комірки пристрою. Випромінювач разом з екраном утворюють порожнину, що має форму прямокутного паралелепіпеда, на всіх поверхнях якого підтримується постійна температура *T* [93].

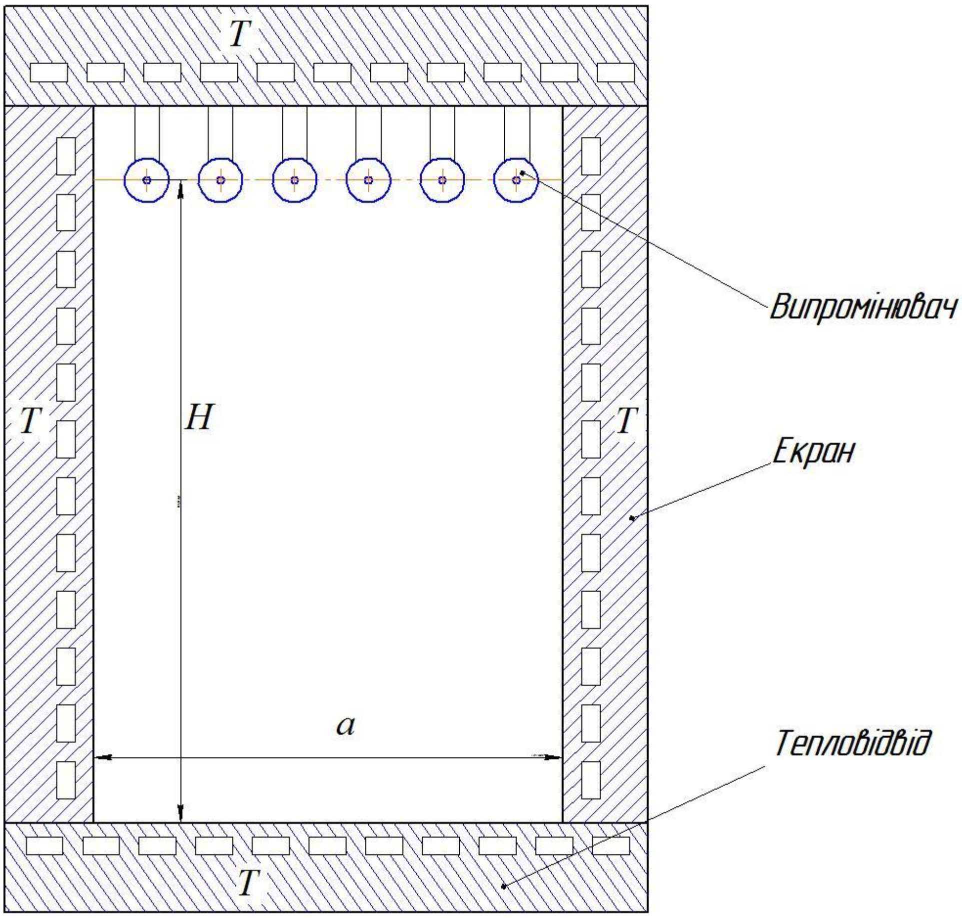


Рис. 4.20 – Двовимірна модель вимірювальної комірки пристрою, що реалізує радіаційний метод відтворення теплового потоку високої інтенсивності

Внутрішня поверхня порожнини виконана з полірованого алюмінію, тепловідвід з алюмінієвого сплаву. Джерелом випромінення є галогенні лампи, що генерують потік теплового випромінення в області спектру [104].

Для розрахунку теплообміну випромінюванням та оцінювання ступеня рівномірності теплового поля на поверхні тепловідводу необхідно знати, яка частина теплової енергії, що випромінюється поверхнями галогенних лампам, потрапляє на іншу поверхню тепловідводу. Для дифузійно випроміюючих та відбиваючих поверхонь ця інформація цілком може бути отримана за допомогою розрахунку кутових коефіцієнтів випромінення, а для поверхонь, що дзеркально відбивають, необхідно визначити роздільний кутовий коефіцієнт теплового випромінювання з урахуванням перевідбиття від поверхонь системи.

Роздільний кутовий коефіцієнт теплового випромінювання для замкненої системи розраховується за формулою [93]:

$$\Phi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{4} r_i \cdot \varphi_{i-1}\,, \tag{4.25}$$

де

φ_0 – кутовий коефіцієнт випромінення між поверхнею площини, в якій розміщено лампи, та поверхнею тепловідводу;

r_i – коефіцієнт відбиття i-ої поверхні екрану;

φ_{i-1} – кутові коефіцієнти випромінення між i-ою поверхнею екрану та поверхнею тепловідводу.

Розподіл кутових коефіцієнтів у (4.25) при поширенні теплового випромінення від поверхні площини, в якій розміщено лампи, до поверхні тепловідводу розраховується так [93]:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{a/H}{\sqrt{1+(a/H)^2}}\,arctg\left(\frac{b/H}{\sqrt{1+(a/H)^2}}\right)+\frac{b/H}{\sqrt{1+(b/H)^2}}\,arctg\left(\frac{a/H}{\sqrt{1+(b/H)^2}}\right)\right], \tag{4.26}$$

де a – відстань, на яку зміщена елементарна площина на поверхні тепловідводу від бічної поверхні [93; 118].

Розподіл локальних значень кутових коефіцієнтів випромінення внутрішньої поверхні екрану висотою H у (4.25), що має в основі квадрат, знаходиться для випадку теплообміну між поверхнею тепловідводу та кожної з чотирьох бокових граней розраховується згідно виразу [93]:

$$\varphi_{i-1} = \frac{1}{2\pi}\left[arctg\left(\frac{1}{c/b}\right)-\frac{c/b}{\sqrt{(H/b)^2+(c/b)^2}}\,arctg\left(\frac{1}{\sqrt{(H/b)^2+(c/b)^2}}\right)\right], \tag{4.27}$$

де

c – відстань, на яку зміщена елементарна площадка на поверхні тепловідводу від бічної поверхні екрану;

b – ширина внутрішньої поверхні екрану.

На рис. 4.21 наведені результати розрахунків, отримані за формулами (4.25)–(4.27), розподілу в радіальному напрямі значення кутових коефіцієнтів випромінювання при варіації відносної висоти порожнини випромінювача [93].

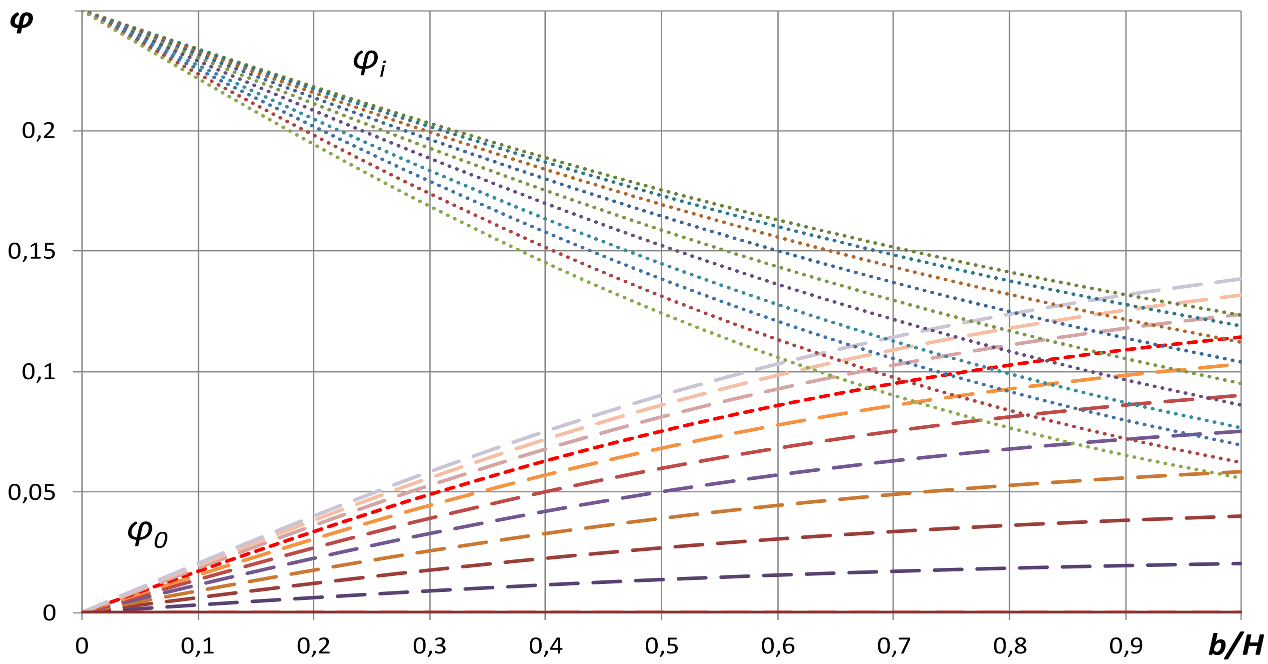


Рис. 4.21 – Графіки розподілу значень кутових коефіцієнтів випромінювання по поверхні тепловідводу при варіації відносної висоти порожнини випромінювача

Із наведених результатів для порожнини з висотою екрану H=170 мм та стороною квадрата в основі 120 мм, з урахуванням, що всі бокові поверхні мають однакову геометрію та теплофізичні характеристики (зокрема $r_i = 0{,}92$), отримано значення кутових коефіцієнтів, які складають: $\varphi_0 = 0{,}11$; $\varphi_{i-1} = 0{,}096$; $\Phi = 0{,}484$.

Дане завдання зводиться до розв'язання прямої задачі термодинаміки, що описується системою рівнянь Нав'є-Стокса, рівнянням нерозривності та рівнянням теплопровідності в деякій розрахункової області:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial V_x}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x , \\
\frac{\partial V_y}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y ,
\end{gathered} \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial \tau}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(V_x T)}{\partial x}+\frac{\partial(V_y T)}{\partial y}+\frac{\partial(V_z T)}{\partial z}=$$

$$=\frac{1}{\rho C_p}\left(\frac{\partial^2(kT)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(kT)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(kT)}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho=\rho_0\left(1-\gamma\left(T-T_0\right)\right),$$

де

x, y, z – просторові координати області;

V_x, V_y, V_z – компоненти векторного поля швидкості;

g_x, g_y, z_z – компоненти масових сил;

t, τ – параметр часу;

T – розподіл температури в розрахунковій області;

p – поле тиску;

ρ – густина повітря в кожній точці розрахункової області;

k – коефіцієнт теплопровідності;

C_p – питома теплоємність;

T_0 – початковий розподіл температури в області розрахунків.

T_0 – початковий розподіл густини в області розрахунків.

Для повноти постановки прямої задачі (4.28) потрібно задати граничні та початкові умови. Спочатку опишемо граничні умови для температури.

У найпростішому випадку – це умови першого роду (умови Дирихле) на границі досліджуваної області [93]:

$$\begin{gathered}T(0,Y,Z)=T_1(Y,Z),\ T(1,Y,Z)=T_2(Y,Z),\ T(X,0,Z)=T_3(X,Z),\\ T(X,1,Z)=T_4(Y,Z),\ T(X,Y,0)=T_5(X,Y),\ T(X,Y,1)=T_6(X,Y).\end{gathered}\tag{4.29}$$

де

$T_i, i=\overline{1,6}$ – розподіл значень температури на відповідній границі області;

X, Y, Z – безрозмірні координати.

У деяких випадках потрібно враховувати значення теплового потоку на границі розрахункової області. Ця умова є умовою другого роду – умова Неймана. У такому випадку граничну умову можна записати у вигляді [93]:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{(0,Y,Z)}=q_1(Y,Z),\ \left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{(1,Y,Z)}=q_2(Y,Z),\ \left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{(X,0,Z)}=q_3(X,Z),$$
$$\left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{(X,1,Z)}=q_4(X,Z),\ \left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{(X,Y,0)}=q_5(X,Y),\ \left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{(X,Y,1)}=q_6(X,Y).\qquad(4.30)$$

Тут $q_i, i=\overline{1,6}$ – розподіл значень температури на границі розрахункової області. Коли на границі області не можна обмежитися лише значенням на цій границі або тепловим потоком на ній, тоді задається умовв третього роду на границі геометрії. Умова такого роду випливає з ряду фізико-технічних постановок задачі, наприклад, присутній теплообмін з навколишнім середовищем. У такому випадку для кожної границі області їх можна записати у такому вигляді [93]:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{(0,Y,Z)}=h\big(T_1(Y,Z)-T(0,Y,Z)\big),\ \left.\frac{\partial \Theta}{\partial X}\right|_{(1,Y,Z)}=h\big(\Theta_2(Y,Z)-\Theta(1,Y,Z)\big),$$
$$\left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{(X,0,Z)}=h\big(T_3(X,Z)-T(X,0,Z)\big),\ \left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{(X,1,Z)}=h\big(T_4(X,Z)-T(X,1,Z)\big)\qquad(4.31)$$
$$,$$
$$\left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{(X,Y,0)}=h\big(T_5(X,Y)-T(X,Y,0)\big),\ \left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{(X,Y,1)}=h\big(T_6(X,Y)-T(X,Y,1)\big).$$

Коефіцієнт h залежить від теплофізичних властивостей матеріалу.

У більшості завдань тепло- та масоперенесення присутня передача тепла за рахунок теплового випромінення. Для опису граничних умов в такому випадку використовують закон Стефана-Больцмана [93]:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{(0,Y,Z)}=h_2\left(T_1^4(Y,Z)-T^4(0,Y,Z)\right),\ \left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{(1,Y,Z)}=h_2\left(T_2^4(Y,Z)-T^4(1,Y,Z)\right),$$
$$\left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{(X,0,Z)}=h_2\left(T_3^4(X,Z)-T^4(X,0,Z)\right),\ \left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{(X,1,Z)}=h_2\left(T_4^4(X,Z)-T^4(X,1,Z)\right),\qquad(4.32)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{(X,Y,0)} = h_2\left(T_5^4\left(X,Y\right) - T^4\left(X,Y,0\right)\right),\ \left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{(X,Y,1)} = h_2\left(T_6^4\left(X,Y\right) - T^4\left(X,Y,1\right)\right).$$

При вирішенні науково-технічних завдань, де потрібно враховувати всі типи передачі тепла, їх можна записати так [93]:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{(0,Y,Z)} &= q_1\left(Y,Z\right) + h_1\left(T_1^4\left(Y,Z\right) - T^4\left(0,Y,Z\right)\right) + h_2\left(T_1^4\left(Y,Z\right) - T^4\left(0,Y,Z\right)\right),\\
\left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{(1,Y,Z)} &= q_2\left(Y,Z\right) + h_1\left(T_2^4\left(Y,Z\right) - T^4\left(0,Y,Z\right)\right) + h_2\left(T_2^4\left(Y,Z\right) - T^4\left(1,Y,Z\right)\right),\\
\left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{(X,0,Z)} &= q_3\left(X,Z\right) + h_1\left(T_3^4\left(Y,Z\right) - T^4\left(X,0,Z\right)\right) + h_2\left(T_3^4\left(X,Z\right) - T^4\left(X,0,Z\right)\right),\\
\left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{(X,1,Z)} &= q_4\left(X,Z\right) + h_1\left(T_4^4\left(Y,Z\right) - T^4\left(X,0,Z\right)\right) + h_2\left(T_4^4\left(X,Z\right) - T^4\left(X,1,Z\right)\right),\\
\left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{(X,Y,0)} &= q_5\left(X,Y\right) + h_1\left(T_5^4\left(X,Y\right) - T^4\left(X,Y,\ 0\right)\right) + h_2\left(T_5^4\left(X,Y\right) - T^4\left(X,Y,0\right)\right),\\
\left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{(X,Y,1)} &= q_6\left(X,Y\right) + h_1\left(T_6^4\left(X,Y\right) - T^4\left(X,Y,\ 1\right)\right) + h_2\left(T_6^4\left(X,Y\right) - T^4\left(X,Y,1\right)\right).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Оскільки для (4.28) необхідно отримати вплив ламп, які розташовані в межах розрахункової області площину тепловідводу, нам необхідно задати внутрішні умови, які записуються так [93]:

$$\left.q\right|_{\Gamma_i}\left(X,Y,Z\right) = q_{C_i},\ \left(X,Y,Z\right) \in D_i,\ D_i \cap D_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i,j = \overline{1,N}, \tag{4.34}$$

де

- D_i – неперетинні області простору розрахункової області, де знаходяться внутрішні джерела тепла – галогенні лампи;
- Γ_i – границі областей внутрішніх джерел тепла;
- q_{C_i} – тепловий потік на границі i-го внутрішнього джерела тепла.

Після того, як обрані граничні (внутрішні та зовнішні) умови, перейдемо до обрання граничних умов для Ψ. На границях області ми маємо такі умови [93]:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{4.35}$$

Рівняння (4.28)–(4.35) є повною математичною моделлю прямої науково-технічної задачі, що розглядається в рамках даної роботі. Друга частина дослідження полягає у визначення значень теплового потоку на поверхні кожної з галогенних ламп, щоб тепловий потік на площині тепловідводу був максимально близький до заданого. Подальший аналіз моделі здійснюється з використанням прикладних програмних пакетів MATLAB та COMSOL Multiphysics.

4.2.2. Програмна реалізація моделі у MATLAB та COMSOL

Областю розрахунку є прямий паралелепіпед з розмірами $a = 0{,}12$м, $b = 0{,}12$м, c=0,19м. Внутрішній об’єм паралелепіпеда заповнено повітрям. Усередині розрахункової області розташовано шість внутрішніх нагрівників у формі циліндра (рис. 4.22) з постійним тепловим потоком у кожній точці на їх поверхні [93]. Потрібно розрахувати розподіл температурного поля на поверхні нижньої грані паралелепіпеда за умови, що на стінках області розрахунку підтримується постійна температура $T_{external\_bound}$=300 K. Для розв’язання прямої задачі використаємо сумарне значення теплового потоку галогенних ламп – 445 кВт/м^2. Ця величина разом із температурою $T_{internal\_bound}$ і задають внутрішні граничні умови на стінках ламп. При проведенні експерименту було використано такі значення коефіцієнтів: $\varepsilon_{\text{lateral}} = 0{,}08$; $\varepsilon_{\text{top}} = 0{,}79$; $\varphi_{\text{lateral}} = 0{,}096$; $\varphi_{\text{top}} = 0{,}11$; $h_{\text{lateral}} = 0{,}05$; $h_{\text{top}} = 0{,}5$. Реалізація моделі була виконана методом скінченних елементів на сітці з характеристиками: загальна кількість вузлів – 53647; загальна кількість елементів (пірамід) – 291600; кількість граничних елементів (пірамід) – 18270. Модель прямої задачі розв’язувалась із використанням прикладного програмного пакету COMSOL Multiphysics. На рис. 4.22 наведено макет моделі (4.28)–(4.35).

Результат моделювання наведено на рис. 4.23–4.24.

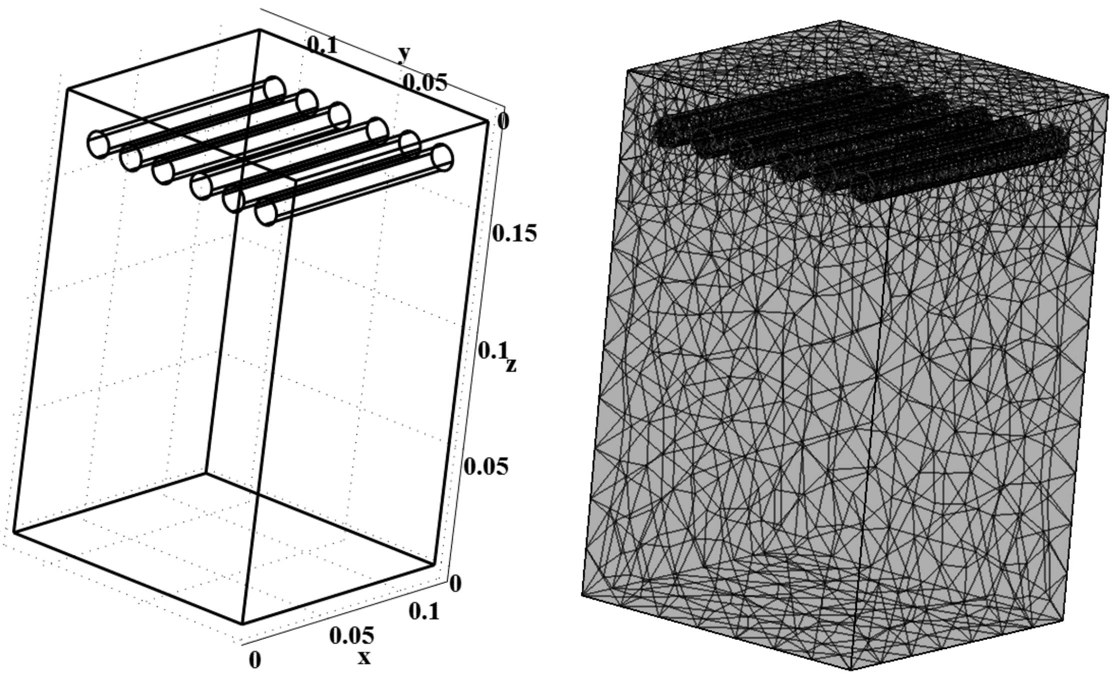


Рис. 4.22 – Геометрія області розрахунку із внутрішніми джерелами тепловиділення:
зліва – макет геометрії області розрахунку;
справа – покриття кінцевими елементами:
53647 вузлів, 291600 елементів, 18270 граничних елементів

Розв’язок подібних задач знаходиться завжди чисельно. Його найкраще проводити з використанням методу скінченних елементів, оскільки за його допомогою можна покрити геометрію довільної форми елементами.

Слід зазначити, що метод скінченних елементів має ряд переваг перед іншими методами розв’язку багатовимірних математичних моделей, які описуються диференціальними рівняннями математичної фізики. Основною перевагою методу є те, що за його допомогою, можна розв’язувати задачі для області розрахунку довільної геометричної форми.

Розрахункова область задачі вкрита тетраедрами. Області, у яких знаходяться джерела тепла, покриті більш дрібними елементами. Це дає змогу підвищити точність розрахунку для даного завдання.

На рис. 4.23 наведені основні розрахунки температурного поля у середині розрахункової області моделі (4.28)–(4.35). Зліва на рис. 4.23 наведено зрізи температурного поля, яке утворюється в результаті дії галогенних ламп, а справа – лінії загального потоку тепла.

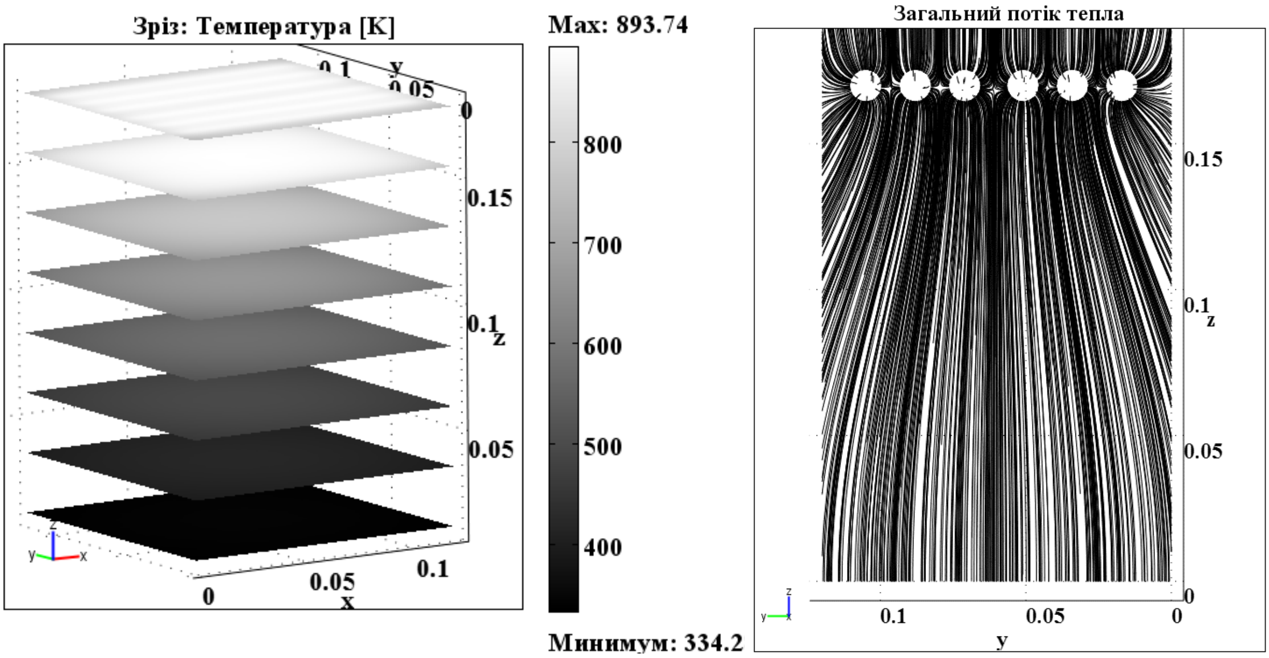


Рис. 4.23 – Результати моделювання:
зліва – поширення температури для різних зрізів геометрії, перпендикулярних до XOY;
справа – загальний потік тепла у області розрахунку (проекція на площину YOZ)

Після того як отримано температурне поле, потрібно дізнатись який тепловий потік буде на нижній грані геометрії (на теплосприймальній поверхні). Очевидно, що потік буде складатись із трьох компонент (радіаційної, конвективної та кондуктивної). Результати чисельного розрахунку густини теплового потоку наведені на рис. 4.24.

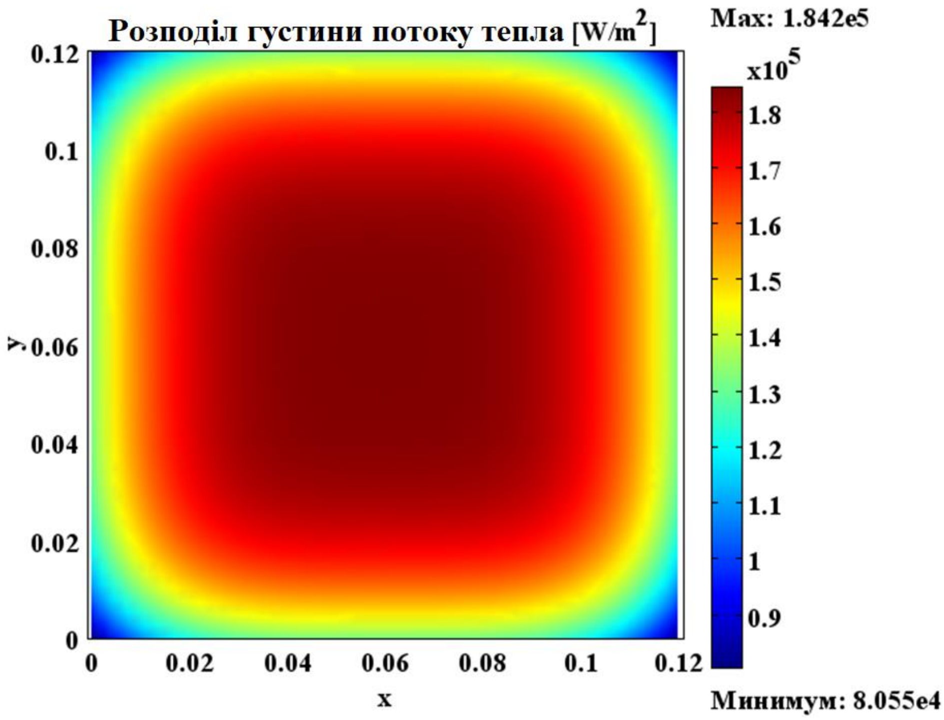


Рис. 4.24 – Розподіл густина теплового потоку на поверхні тепловідводу

Згідно отриманих результатів, слід зазначити, що основна складова теплопередачі – це радіаційний теплообмін. Вона складає більше 90% від загальної теплопередачі в процесі, що досліджується.

Розв'язуючи комплексні задачі теплопередачі, часто виникають питання у постановці обернених задач теплопровідності (ОЗТ). Будь-яка ОЗТ виникає в результати практичних завдань. У процесі розв'язання таких задач проводять певні вимірювання. На основі результатів вимірювань намагаються знайти необхідні дані, що дають інформацію про конкретні фізичні характеристики досліджуваного об'єкту та процесу в ньому.

Друга частина дослідження, як вже було зазначено, полягає у реалізації оберненої задачі до моделі (4.28)–(4.35). Обернену задачу можна сформулювати так. *Потрібно визначити такий тепловий потік на поверхні кожної із 6 галогенних ламп, щоб розподіл теплового потоку на тепловідводу максимально був близький до необхідного* (див. рис. 4.24) за умови, що на стінках області розрахунку підтримується постійна температура $T_{external\_bound}=300\ K$ (умова термостатування). Тобто в оберненій задачі для (4.28)–(4.35) потрібно знайти мінімум функціоналу, який має вигляд:

$$J\left(\vec{q}\right)=\int\limits_G\left(\frac{\partial T}{\partial z}\left(\vec{q}\right)\Big|_{z=0}-Q\right)^2 ds\to\min. \tag{4.36}$$

де

$\vec{q}=\left(q_{C_1},q_{C_2},...,q_{C_n}\right)$ – вектор регуюючих параметрів моделі (шукані значення теплового потоку на поверхнях галогенних ламп);

q_{C_i} – шукане значення теплового потоку на поверхні i-ої галогенної лампи;

n – кількість внутрішніх джерел тепла (кількість галогенних ламп розрахункової області задачі);

Q – розподіл густини теплового потоку, який задано з прямої задачі (див. рис. 4.24).

Нижче в таблиці 4.2 наведені розрахунки щільності теплового потоку галогенних ламп у результаті розв’язання оберненої задачі до математичної моделі (4.28)–(4.35).

Таблиця 4.2

Розрахунок щільності теплового потоку галогенних ламп та порівняння значнь з реальними значеннями, [кВТ/м^2]

	Лампа №1	Лампа №2	Лампа №3	Лампа №4	Лампа №5	Лампа №6
Значення щільності теплового потоку з прямої задачі моделювання	450	450	450	450	450	450
Отримані значення щільності в оберненій задачі моделювання	430,48413	445,45485	465,63322	466,8945	446,49541	430,54949

Середнє значення щільності теплового потоку складає 447,5852663 кВт/м^2. Отримане значення складає відносну помилку 1% від значення, яке було задане при розв’язанні прямої задачі для моделі (4.28)–(4.35). Значення (4.36) – 0,00457.

Нижче наведено графік підінтегральної функцію $F\left(\vec{q}\right)=\left(\left(\partial T/\partial z\right)\Big|_{z=0}-Q\right)^2$.

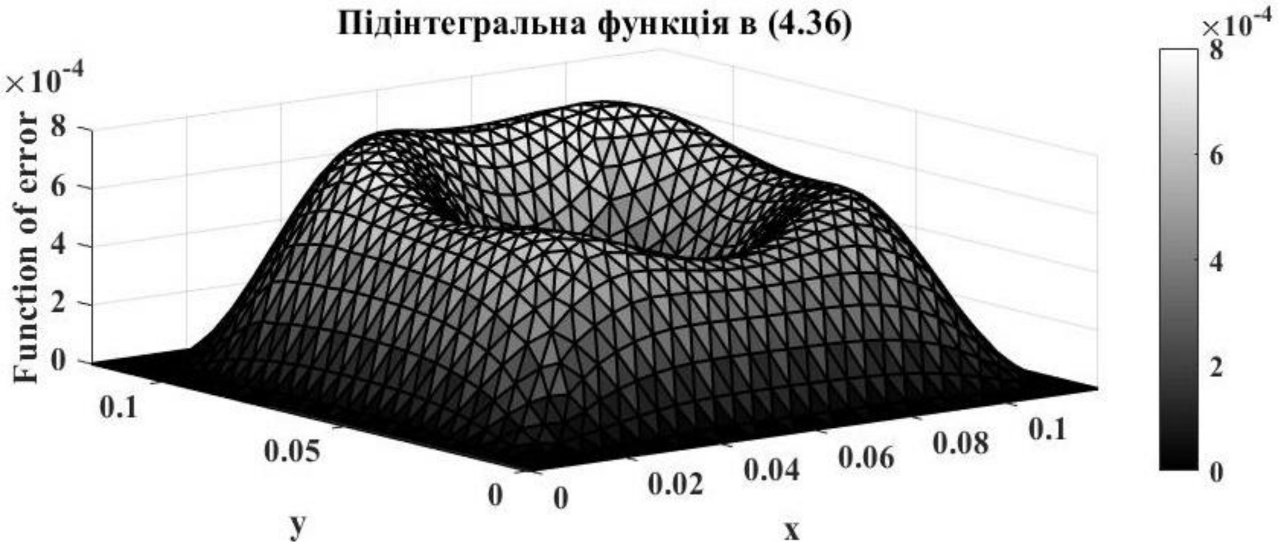


Рис. 4.25 – Підінтегральна функція виразу (4.36)

Значення функціоналу (4.36) можна отримати і меншим, але для цього потрібно брати значно дрібнішу розрахункову сітку для реалізації моделі (4.28)–(4.35). Значення щільності теплового потоку отримані методом (2.47).

4.2.3. Аналіз результатів моделювання

Слід відмітити, що при знаходженні чисельного розв’язку задачі, яка представлена у роботі, радіаційна складова теплового потоку в (4.24) має найбільше значення на тепловідводі. Вона складає більше 90% від загального теплового потоку. Очевидно, що при збільшенні розмірності задачі похибка обчислень може повільно рости. Це може бути пов’язано з вибором розрахункової сітки для проведення комп’ютерного моделювання задачі.

Висновки до четвертого розділу

Четвертий розділ дисертаційної роботи містить дві прикладі моделі ОЗТ. Перша модель є моделлю оптимізації роботи промислової печі. На базі цієї моделі будується низка науково-технічних прикладних завдань сьогодення, які спрямовані на реконструкцію теплових установок, колтів, промислових та муфельних печей з ціллю підвищення їх ефективності та раціонального керування теплових режимів у різних об’єктах теплоенергетики. Отримані в другому розділі методи (2.45)–(2.47) протестовані на цій моделі. Результати апробації методів показані у вигляді графіків збіжності методів та графіків порівняння реальних значень температур внутрішніх джерел тепла з розрахованими. Відносна момилка складає близько 3%.

Друга модель четвертого розділу моделює процес теплообміну в системі з дзеркальними дифузійними поверхнями. Модель є тривимірною, що дає змогу аналізувати теплові процеси в замкнених просторових об’єктах.

Модель оптимізації роботи промислової печі реалізована з використанням методів скінченних різниць та скінченних елементів. Модель теплообміну в замкненій системі з дзеркальними дифузійними поверхнями реалізована з викорисанням методу скінченних елементів, оскільки форма досліджуваної системи не є елементарної форми. Отримання розрахункових сіток для моделей четвертого розділу виконано за допомогою прикладних програмних пакетів MATLAB та COMSOL Multiphysics.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв’язано низку науково-технічних задач, які зводяться до розв’язування лінійних та нелінійних багатовимірних обернених задач теплопровідності. Створена низка методів розв’язування різних класів обернених задач теплопровідності, зокрема задач відновлення початкової умови, задач відновлення граничної умови (граничних умов), задач відновлення коефіцієнта температуропровідності та інших класі обернених задач теплопровідності в цілому.

У роботі отримано такі теоретичні та практичні результати.

1. Розроблено чисельні методи підвищеної точності розв’язування різних класів лінійних та нелінійних ОЗТ на основі класичного методу Ньютона та методу найшвидшого спуску, які дають змогу отримати чисельні розв’язки ОЗТ в 3–10 разів швидше, ніж класичні методи розв’язування ОЗТ.
2. Модифіковано процедуру пошуку матриці Гессе для знаходження глобального мінімуму квадратичного функціонала, за рахунок проведення процедури інтерполяції поверхнями другого порядку. При цьому зменшено обчислювальні затрати на побудову матриці Гессе на кожній ітерації при мінімізації квадратичного функціонала в 8–10 разів.
3. Уведено змінний крок у модифікованих методах пошуку глобального мінімуму квадратичного функціонала в ОЗТ на базі класичного методу Ньютона та методу найшвидшого спуску. Такий підхід дає змогу зменшити кількість ітерацій при застосуванні методу оптимізації та підвищити точність чисельних розв’язків різних класів ОЗТ.
4. Розроблено програмний комплекс у прикладному програмному пакеті MATLAB, за допомогою якого розв’язуються різні класи ОЗТ в залежності від конкретного фізико-технічного завдання (додаток В).
5. Розроблені моделі прикладних технічних завдань, які призводять до знаходження чисельних розв’язків ОЗТ, а саме: модель оптимізації роботи промислової печі та модель теплообміну в замкненій системі з дзеркальними дифузійними поверхнями.

6. Реалізовано прикладні моделі ОЗТ в середовищі MATLAB з використанням сітки розрахункових областей, які отримані з пакету моделювання складних систем COMSOL Multiphysics.

Усі розрахунки для отримання чисельних розв’язків основних класів обернених задач теплопровідності проведені на сучасному персональному комп’ютері, основні технічні характеристики якого наведено в додатку Г до даної дисертаційної роботи.

Отримані в роботі методи дають змогу розв’язувати більш складні промислово-технічні завдання, які зводяться до керування різних теплових процесів, а також для створення об’єктів, у яких протікають певні процеси тепломасоперенесення.

Основні результати дисертаційної роботи (додаток Д) використані при дослідженні процесу теплообміну в вимірювальній камері з радіаційним способом формування теплового потоку, в якій проводять калібрування засобів вимірювання за допомогою оцінки однорідності розподілу поверхневої густини теплового потоку на теплосприймальній поверхні випромінювача для відтворювання одиниці вимірювання високої інтенсивності при Інституті технічної теплофізики НАН України (додаток Е). Спрощені моделі дисертаційного дослідження активно використовуються під час проведення лабораторних занять із профільних технічних дисциплін «Математичне моделювання складних систем», «Теорія керування» та «Методи обчислень» у ПВНЗ «Київський міжнародний університет», а також для написання кваліфікаційних та магістерських робіт студентами технічних спеціальностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Acosta C., Mejia C. Stabilization of explicit methods for convection diffusion equations by discrete mollification. *An International Journal of Computers & Mathematics with Applications*. UK : Elsevier Ltd, 2008. No 55. P. 368–380.

2. Alifanov O. Inverse Heat Transfer Problems. Berlin : Springer, 1994.

3. Alvarez Acevedo N., Roberty N., Silva Neto A. An explicit formulation for the inverse transport problem using only external detectors. *Computational modelling. Part I. Computational & Applied Mathematics*. Netherlands : Elsevier, 2010. No 29(3). P. 343–358.

4. Bakushinsky A., Kokurin M. Iterative methods for approximate solution of inverse problems. *Mathematics and Its Applications : Springer*, 2005.

5. Baranov V., Zasyad'ko A., Frolov G. Integrodifferential method of solving the inverse coefficient heat conduction problem. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2010. Vol. 83. P. 60–71.

6. Barbone P., Oberai A., Harari I., Albocher P. Adjoint-weighted variational formulation for a direct computational solution of an inverse heat conduction problem. *USA : Journal of Inverse Problems*, 2007. No 6(23). P. 2325–2342.

7. Beck J., Blackwell B., Clair Sr. Inverse Heat Conduction : Ill-Posed Problems. New York : Wiley, 1985.

8. Bialecki R., Divo E., Kassab A. Reconstruction of time-dependent boundary heat flux by a BEM based inverse algorithm. *Engineering Analysis with Boundary Elements.* UK : Elsevier Ltd, 2006. Vol. 30. P. 767–773.

9. Cannon J. The one-Dimensional Heat Equation. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. *Addison-Wesley, Menlo Park* : *Calif.*, 1984. Vol. 23.

10. Cannon, J., Zachman D. Parameter Determination in Parabolic Differential equation from overspecified boundary data. *International Journal of Engineering ScienceSci*, 1982. P. 779–788.

11. Carasso A. Determining surface temperatures from interior observations. *SIAM: SIAM Journal of Applied Mathematics (SIAP)*, UK : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1982. Vol. 23. P. 558–574.

12. Carita Montero R., Roberty N., Silva Neto A. Absorption coefficient estimation in heterogeneous media using a domain partition consistent with divergent beams. *Inverse Problems in Engineering*. UK : Taylor & Francis, 2001. No 9. P. 587–617.

13. Chang C., Chang M. Inverse determination of thermal conductivity using semi-discretization method. *Appl. Math. Model.* Netherlands : Elsevier BV, 2009. No 33. P. 1644–1655.

14. Chapko R., Johansson B., Vavrychuk V. A projected iterative method based on integral equations for inverse heat conduction in domains with a cut. *Inverse Problems*. 29 (6), 2013.

15. Chen H., Wu X. Estimation of surface conditions for nonlinear inverse heat conduction problems using the hybrid inverse scheme. *Numerical Heat Transfer. Part B,* 2007. No 51. P. 159–178.

16. Cheng W., Fu C., Qian Z. Two regularization methods for a spherically symmetric inverse heat conduction problem. *Applied Mathematical Modelling*, 2008. No 32. P. 432–442.

17. Cui M., Duan W., Gao X. Conjugate Gradient Method Based on Complex-variable-differentiation Method and Its Application for Identification of Boundary Conditions in Inverse Heat Conduction Problem. *CIESC Journal, supplement 1*, 2015. Vol. 90. P. 106–110.

18. Dou F. Wavelet-Galerkin method for identifying an unknown source term in a heat equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.

19. Duda P. Numerical and experimental verification of two methods for solving an inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015. Vol. 84. P. 1101–1112.

20. Elkinsa B., Keyhania M., Franke J. Global time method for inverse heat conduction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2012. No 20(5). P. 651–664.

21. Engel M. A Multigrid Method for the Effcient Numerical Solution of Optimization Problems Constrained by Partial Differential Equations. *Angefertigt mit*

Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultat der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universitat Bonn, 2009.

22. Engel M. A Newton-Multigrid Method for PDE Constrained Optimization // *Workshop on PDE Constrained Optimization University of Hamburg March 27–29*, 2008.

23. Fan Y., Li D. Identifying the Heat Source for the Heat Equation with Convection Term. *International Journal of Mathematical Analysis*, 2014. Vol. 3, No. 27. P. 1317–1323.

24. Fernandes A., Santos M., Guimarães G. An analytical transfer function method to solve inverse heat conduction problems. *Applied Mathematical Modelling*, 2015. No 39. P. 6897–6914.

25. Garshasbi M., Dastour H. Estimation of unknown boundary functions in an inverse heat conduction problem using a mollified marching scheme. *Numerical Algorithms Journal*, 2015. No 68(4). P. 769–790.

26. Grysa K., Lesniewska R. Different finite element approaches for inverse heat conduction problems. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2010. No 18. P. 3–17.

27. Hackbusch W. Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations. *Applied Mathematical Sciences.* New York : Springer, 1994.

28. Hackbusch W. Multigrid Methods and Applications. Berlin, Heidelberg, New York Tokyo : Springer, 1985.

29. Hanke M. Conjugate Gradient Type Methods for Ill-Posed Problems. *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. UK : Longman, Harlow, 1995. Vol. 327.

30. Hao D. Methods for Inverse Heat Conduction Problems. Peter Lang, Europaischer Verlag der Wissenschaften, 1998.

31. Hao D. Methods for Inverse Heat Conduction Problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. New York, 1998.

32. Hao D., Reinhardt H., Jarny Y. A variational method for multidimensional linear inverse heat conduction problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization. Special Issue*. New York, 1998. P. 48–56.

33. Hazra S. Large-Scale PDE-Constrained Optimization in Applications / S. Hazra. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer, 2010. Vol. 49.

34. Hon Y., Wei T. A fundamental solution method for inverse heat conduction problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004. No 28. P. 489–495.

35. Ikehata M. An inverse source problem for the heat equation and the enclosure method. *Inverse Problems*, 2007. Vol. 23. No 1. P. 183–202.

36. Johansson B., Lesnic D., Reeve T. A method of fundamental solutions for the radially symmetric inverse heat conduction problem. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2012. No 7. P. 887–895.

37. Keskin Y., Oturanc G. Reduced differential transform method for partial differential equations. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2009. No 10 (6). P. 741–749.

38. Kostikov A., Matsevity Yu. Thermal designing of ceramic printed circuit board with micro-cannel cooling system. *Proc. Of 5th Shina-Russian-Ukrainian Symposium on Space Science and Technology, Harbin, China : 2000-Habrin Institute of Technology*, June 6–9 2000, China, 2000. P. 738–743.

39. Ladyzenskaja O., Solonnikov V., Uralceva N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. *Applied Mathematical Sciences : Translations of Mathematical Monographs*. Vol. 23, 1968.

40. Larsson S., Thomee V. Partial Differential Equations with Numerical Methods // Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2003.

41. Li J., Xie J., Zou J. An adaptive Finite Element reconstruction of distributed fluxes. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2011.

42. Marquardt W. Model-based experimental analysis of kinetic phenomena in multi-phase reactive systems. *Chemical Engineering Research and Design*, 2005. P 83.

43. Mierzwiczak M., Kolodziej J. The determination temperature-dependent thermal conductivity as inverse steady heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2011. Vol. 54. P. 790–796.

44. Miura K. Supercomputing and related national projects in Japan. *CERN*, 1989. No 9. P. 202–222.

45. Miyamoto S., Ikeda S., Sawaragi Y. Identification of Distributed Systems and the Theory of the Regularization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1978. Vol. 63. No 1. P. 77–95.

46. Morton K., Mayers D. Numerical Solution of Partial Differential Equations. *New York Melbourne : Cambridge University Press Cambridge*, 1994.

47. Murio D. Stable numerical evaluation of Grünwald-Letnikov fractional derivatives applied to a fractional IHCP. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2009. No 17(2). P. 229–243.

48. Nocedal J., Wright S. Numerical Optimization. *Berlin, Heidelberg, New York* : Springer, 1999.

49. Onyango T., Ingham D., Lesnic D. Reconstruction of boundary condition laws in heat conduction using the boundary element method. *Comput. Mathematics Applications*, 2009. No 57. P. 153–168.

50. Onyango T., Ingham D., Lesnic D. Reconstruction of heat transfer coefficients using the boundary element method. *Computers & Mathematics with Applications*, 2008. No 56. P. 114–126.

51. Pasquetti R., Petit D. Inverse Diffusion by Boundary Elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1995. Vol. 15(2). P. 197–205.

52. Petrov A., Chernyakov Yu., Steblyanko P., Demichev K., Haydurov V. Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. *Технічні науки.* Харків, 2018. №4/7 (94). С. 25–33.

53. Qian A. Identifying an unknown source in the Poisson equation by a wavelet dual least square method. *Journal of Boundary Value Problems*, 2013.

54. Qian Z. Optimal modified method for a fractional-diffusion inverse heat conduction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2010. Vol. 18. P. 521–533.

55. Qian Z., Zhang Q. Differential-difference regularization for a 2D inverse heat conduction problem. *Journal of Inverse Problems*, 2010. Vol. 26(9).

56. Qiu C., Fu C. Wavelets and regularization of the Cauchy problem for the Laplace equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008. Vol. 33(2). P. 1440–1447.

57. Qu S., Li S., Chen H., Qu Z. Radial integration boundary element method for acoustic eigenvalue problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013. Vol. 37. P. 1043–1051.

58. Quarteroni A., Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. *Springer Berlin Heidelberg*, 1994.

59. Quigley A. An approach to the control of divergence in Kalman filter algorithms. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 1973. Vol. 17. No 4. P. 741–746.

60. Rees T. Preconditioning Iterative Methods for PDE Constrained Optimization. *University of Oxford : Hilary*, 2010.

61. Reginska T., Elden L. Stability and convergence of wavelet-Galerkin method for the sideways heat equation. *Journal of Inverse Problems*, 2000. No 8. P. 31–49.

62. Reusken A. Numerical methods for elliptic partial differential equations. *Lecture notes*, 2005.

63. Reusken A., Soemers M. On the robustness of a multigrid method for anisotropic reaction-diffusion problems. *International Journal of Computing*, 2007. Vol. 80. P. 299–317.

64. Rosch A. A Gauss-Newton method for the identification of non-linear heat transfer laws. *International Series of Numerical Mathematics*, 2002. Vol. 139. P. 217–230.

65. Rosch A. Identification of nonlinear heat transfer laws by optimal control // Numerical Functional Analysis and Optimization 15, 1994. P. 417–434.

66. Rosch A. Stability estimates for the identification of nonlinear heat laws. *Inverse Problems*, 1996. Vol. 12. P. 743–756.

67. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. *SIAM : 2nd edition*, 2003.

68. Seidman T., Elden L. An optimal filtering method for the sideways heat equation. *Inverse Problems*, 1990. Vol. 6. P. 681–696.

69. Sheng C. Direct And Inverse Heat Conduction Problems Solving by the Boundary Element Method. *Hunan University*, 2007.

70. Silva Neto A., Lugon Jr., Soeiro F. Application of simulated annealing and hybrid methods in the solution of inverse heat and mass transfer problems. *Simulated Annealing. Theory with Applications*, 2010. Vol. 2. P.17–50.

71. Stutz D. Parallel computation strategies for image restoration with Tikhonov's regularization functional. *D.Sc. Thesis. Computational Modelling Program. Polytechnique Institute : Rio de Janeiro State University*, 2009.

72. Tautenhahn U. Optimality for ill-posed problems under general source conductions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 1988. P. 377–398.

73. Tian N. Numerical Methods for the PDE-Based Inverse Problems and Applications. *Journal of Jiangnan University*, 2012.

74. Wang JR. Shannon wavelet regularization methods for a backward heat equation. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011. No 235(9). P. 3079–3085.

75. Wang L., Mei L., Huang J. Inverse heat conduction problem based on least squares prediction. *Chinese Journal of Chemical Engineering (CIESC Journal)*, 2016. Vol. 67. P. 103–110.

76. Wang Y., Cheng J., Nakagawa J. A numerical method for solving the inverse heat conduction problem without initial value. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2010. Vol. 18. No. 5. P. 655–671.

77. Woodbury K., Beck J., Najafi H. Filter solution of inverse heat conduction problem using measured temperature history as remote boundary condition. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2014. Vol. 72. P. 139–147.

78. Wroblewska A., Frackowiak A., Cialkowski A. Regularization of the inverse heat conduction problem by the discrete Fourier transform. *Inverse Problems in Science and Engineering,* 2016. Vol. 24 (2). P. 195–212

79. Wu H. Heat Conduction Problem Solving by Boundary Element Method. *Beijing, China : National Defence Industry Press,* 2008.

80. Xiong XT, Hon YC: Regularization error analysis on a one-dimensional inverse heat conduction problem in multilayer domain. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2013. Vol. 21(5). P. 865–887.

81. Xue Q., Wei W. Parameters identification of non-linear inverse heat conduction problem. *Engineering Mechanics*, 2010. Vol. 27. No 8. P. 5–9.

82. Yaparova N. Numerical methods for solving a boundary-value inverse heat conduction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2014. Vol. 22. No 5. P. 832–847.

83. Yu X. Inverse Analysis of Thermal Conductivities in Non-Homogeneous Heat Conductions Using Boundary Element Method. *Dalian University of Technology*, 2013.

84. Zhou H., Xu X., Li X. Identification of temperature-dependent thermal conductivity for 2-d transient heat conduction problems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014. Vol. 12. No 35. P. 1341–1351.

85. Zhu L. Fuzzy Inverse for Two-Dimensional Steady Heat Conduction. *System and Application*. Chongqing University, 2016.

86. Zhu L., Wang G., Chen H. Estimating steady multi-variables inverse heat conduction problem by using conjugate gradient method. *Proceedings of the Chinese Society of Electrical Engineering*, 2011. Vol. 31. No 8. P. 58–61.

87. Азаркевич Н.Н. Определение температурного поля конца штамповки вытяжкой. *Контактные и цилиндрические задачи. Инж.-физ. журнал*, 1967. № 4(12). С. 465–468.

88. Алдошин Г.Т, Голосов А.С., Жук В.И. Построение явных зависимостей для определения коэффициентов внутреннего тепло- и массопереноса по данным

измерений в нестационарных режимах. Инженерно-физический журнал. 1983. Выпуск 45. №5. С. 794—797.

89. Алексашенко А.А. Аналитический метод решения нелинейных обратных задач теплопроводности. *Известия АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт*, 1982. №3. С. 122–130.

90. Алексашенко А.А. Качественное исследование решений некоторых нелинейных краевых задач теплопроводности. *Тепломассообмен-V*. Минск : Институт тепломассообмена АН БССР, 1976. №5(13). – С. 657–662.

91. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. Москва : Машиностроение, 1988. 280 с.

92. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Панкратов Б.М. Решение нелинейной обратной задачи теплопроводности. Минск : Тепломассообмен, 1976. Выпуск 9. С. 94–103.

93. Бабак В.П., Ковтун С.І., Хайдуров В.В., Щербак Л.М. Моделювання процесу теплообміну в замкненій системі з дзеркальними та дифузними поверхнями. *Збірник наукових праць «Наукоємні технології». Технічні науки.* Київ, 2018. №2 (38) С. 245–254.

94. Вабищевич П.Н., Самарский А.А. Вычислительная теплопередача. Москва : Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

95. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам веществ. Москва : Энергоиздат, 1956. 368 с.

96. Васильев. Ф.П. Методы решения экстремальных задач. Москва : Наука, 1981. 400 с.

97. Гласко. В.Б. Обратные задачи математической физики. Москва : Изд-во Моск. Ун-та, 1984.

98. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Деякі швидкісні методи розв’язку нелінійних обернених задач теплопровідності. *Збірник наукових праць Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Прикладна математика. Інформатика. Технічні науки.* Черкаси, 2017. №1–2. С. 71–90.

99. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Ефективні методи розв’язку нелінійних обернених задач теплопровідності. Відновлення коефіцієнта теплопровідності. *«Молода наука. Прогресивні технологічні процеси, технологічне оснащення»* : матеріали Міжнародної науково-технічної Internet-конференції студентів і молодих вчених, м. Краматорськ, (30 березня), 2017 р. Краматорськ, 2017. С. 101–105.

100. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Метод знаходження чисельного розв’язку оберненої двовимірної задачі теплопровідності. *Збірник наукових праць Державного технологічного університету. Технічні науки*. Черкаси, 2015. №2. С. 49–56.

101. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Эффективные методы решения нелинейных обратных задач теплопроводности. *Збірник наукових праць Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Прикладна математика. Інформатика. Технічні науки.* Черкаси, 2014. №2. С. 87–98.

102. Григорьев В.А. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент. *Справочник. Под общ. ред. В.А. Григорьева и В.М. Зорина*. Москва : Энергоиздат, 1982. 512 с.

103. ДСТУ EN 746-1:2014 Устатковання для термооброблення промислового. Частина 1. Загальні вимоги щодо безпеки (EN 746-1:1997+A1:2009, IDT). [Дата прийняття: 29.12.2014; Дата початку дії 01.01.2016].

104. ДСТУ EN 60357:2017 Лампи вольфрамово-галогенні (крім ламп транспортних засобів). Вимоги до робочих характеристик (EN 60357:2003; Cor:2003; A1:2008; A2:2008; A3:2011; A11:2016, IDT; IEC 60357:2002, MOD; A1:2006, MOD; A2:2008, IDT; A3:2011, IDT). [Дата прийняття: 06.12.2017; Дата початку дії 01.01.2019].

105. Жалдак М.І, Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації : навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 608 с.

106. Иванов В.К. Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва : Наука, 1978. 206 с.

107. Иванов В.К. О линейных некорректных задачах. Доклады АН СССР, 1962. Выпуск 145. №2. С. 270–272.

108. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах. *Математический сборник*, 1963. Выпуск 61. №2. С. 211–233.

109. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск : *Сибирское научное издательство. Второе издание, переработанное*, 2009. 457 с.

110. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Обоснование метода наискорейшего спуска в интегральной постановке обратной задачи. *Сибирский математический журнал*, 2001. Том 42. №3. С. 567–584.

111. Коршунов В.А., Танана В.П., Штаркман А.А. Принцип минимальных невязок в решении некорректных задач. *Исследования по функциональному анализу*. Свердловск, 1978. С. 99–104.

112. Кривошей Ф.А. К решению инверсной задачи теплопроводности. Вопросы теплообмена и термодинамики, 1971. Выпуск 1. С. 75–81.

113. Круковский П.Г. Обратные задачи тепломассопереноса (общий инженерный подход). Киев : Институт технической теплофизики НАН Украины, 1998. 224 с.

114. Лабейш В.Г., Родионов О.А., Шелудько О.В. Тепловые процессы при производстве листового проката. Ленинград : ЛГУ, 1981. С. 82–86.

115. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск : Издательство СО АН СССР, 1962. 92 с.

116. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск : Наука, 1969. 67 с.

117. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва : Наука, 1980. 288 с.

118. Лебедев П.Д., Юренеко В.Н. Теплотехнический справочник в двух томах. Москва : Энергия, 1976. 896 с.

119. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности в двух томах : том 1. Методология. Київ : Наукова думка, 2002. 408 с.

120. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности в двух томах : том 2. Приложения. Київ : Наукова думка, 2003. 392 с.

121. Мацевитый Ю.М., Тимченко В.П. Диагностика разрушения металлургического оборудования с использованием методов решения обратных задач теплопроводности. *Промышленная теплотехника*, 2001. Выпуск 23. №6. С. 10–15.

122. Мацевитый Ю.М., Цаканян О.С., Кошевая Н.А. Гибридное моделирование контактного теплообмена при решении нелинейной задачи теплопроводности. *Электронное моделирование*, 2001. Выпуск 23. №4. С. 3–15.

123. Мацевитый Ю.М., Цаканян О.С., Кошевая Н.А. Моделирование теплового состояния составного поршня форсированного двигателя. *Проблемы машиностроения*, 2001. №3. С. 30–37.

124. Мишин В.П. Алгоритмы диагностики тепловых нагрузок летательных аппаратов. Москва : Машиностроение, 1983. 168 с.

125. Охотин А.С. Теплопроводность твердых тел. Справочник. Москва : Наука, 1984.

126. Поляк Б.Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике. *Институт системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН). Труды ИСА РАН*. Том 28, 2006. С. 48–66.

127. Резник С.В., Соловьев В.А., Титов А.В. Методические аспекты и результаты исследования теплофизических свойств материалов на стендах радиационного нагрева. *Использование Солнца и других источников лучистой энергии в материаловедении*. Киев : Наукова думка, 1983. С. 97–103.

128. Романовский М.Р. Идентифицируемость в целом нелинейного уравнения теплопроводности и автомодельные решения. *Инженерно-физический журнал*, 1983. №2. С. 309–316.

129. Романовский М.Р. Исследование обратных коэффициентных задач теплопроводности применительно к задачам интерпретации теплофизического

эксперимента : *автореферат диссертации кандидата технических наук*. Киев, 1981. 23 с.

130. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики : учебное пособие, изд. 3-е. Москва : Издательство ЛКИ, 2009. 480 с.

131. Страхов В.Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве. *Дифференциальные уравнения*, 1970. Том 6. №8. С. 1490–1495.

132. Сурков Г.А. Некоторые аналитические исследования области нелинейной теплопроводности и их приложений к определению теплофизических характеристик твердых тел. *Высокотемпературный тепло- и массообмен в стационарных условиях*. Минск : Институт тепломассообмена АН БССР, 1978. С. 18–50.

133. Танана В.П. Приближенное решение неявных операторных уравнений первого рода методом регуляризации. Известия высших учебных заведений. Математика, 1978. №11. С. 98–103.

134. Тепловой расчет котельных агрегатов (нормативный метод). – Москва : Энергия, 1973.

135. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. *Доклады АН СССР. Математика и физика*, 1963. №3. С. 501–504.

136. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач. *Доклады АН СССР*, 1997. №5. С. 195–198.

137. Тихонов А.Н. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1965. Том 5. №3. С. 463–473.

138. Узлов А.Е. Существование квазирешения для систем параболического типа./ Москва : Дифференциальные уравнения, 1978. С. 116–122.

139. Фомин В.Н., Фрадков А.А., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. Київ : Вища школа, 1988. 488 с.

140. Хайдуров В.В. Багатосітковий метод вирішення нелінійних обернених задач електро- та теплоенергетики. *Збірник наукових праць «Моделювання та інформаційні технології». Технічні науки*. Київ. Інститут проблем моделювання в енегретиці ім. Г.Є. Пухова, 2018. №83. С. 117–124.

141. Хайдуров В.В. Використання методу Фур’є для знаходження чисельного розв’язку багатовимірних обернених задач теплопровідності. *«Комп’ютерне моделювання та оптимізація складних систем»* : тези доповідей I Всеукраїнської науково-технічної конференції, м. Дніпропетровськ, 3–5 листопада, 2015 р. Дніпропетровськ, 2015. С. 256–261.

142. Хайдуров В.В. Деякі питання обернених задач теплопровідності. *«Роль фізики в розвитку міждисциплінарних наукових і навчальних напрямків» (PhysIST–2016)* : матеріали Міжнародної заочної мультимедійної (інтернет) конференції, м. Одеса, 2–5 травня 2016 р. Одеса, 2016. С. 24.

143. Хайдуров В.В. Ефективні методи розв’язку точкових обернених задач теплопровідності. *Збірник наукових праць «Молодий вчений». Технічні науки.* Суми, 2016. №6 (33). С. 87–98.

144. Хайдуров В.В. Знаходження оптимальних температур електричних нагрівачів промислової печі. *«Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я» (MicroCAD–2018)* : матеріали XXVI Міжнародної науково-практичної конференції, м. Харків, 16–18 травня 2018 р. Харків, 2018. С. 261.

145. Хайдуров В.В. Знаходження чисельного розв’язку деяких точкових обернених задач теплопровідності. *«Сучасна наука: проблеми та перспективи»* : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 13–14 жовтня 2015 р. Київ, 2015. С. 26–30.

146. Хайдуров В.В. Знаходження чисельного розв’язку нелінійних обернених задач теплопровідності. Відновлення коефіцієнта теплопровідності. *«Актуальні наукові дослідження у сучасному світі». Технічні науки* : збірник наукових праць, м. Переяслав-Хмельницький, 26–27 березня 2017 р. Переяслав-Хмельницький, 2017. С. 115–120.

147. Хайдуров В.В. Метод анализа работы теплового оборудования. *«Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси» (ІРТК-2018)* : збірник матеріалів XXI Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 22–23 травня 2018 р. Київ, 2018. С. 191–193.

148. Хайдуров В.В. Моделирование прикладных обратных задач теплопроводности по вычислению коэффициента теплопроводности. *Збірник наукових праць «Моделювання та інформаційні технології». Технічні науки*. Київ, 2017. №81. С. 69–77.

149. Хайдуров В.В. Модифицированные методы решения нелинейных задач теплопроводности. *«Актуальні наукові дослідження у сучасному світі»* : матеріали VI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Переяслав-Хмельницький, 26–27 жовтня 2015 р. Переяслав-Хмельницький, 2015. С. 74–82.

150. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976. 426 с.

151. Юшков П.П. О влиянии граничных условий и типа сеток на устойчивость разностных схем при численном интегрировании уравнений теплопроводности. Москва : Тепло- и массоперенос, 1966. Том 6. С. 216–225.

152. Ярхо А.А. Метод определения зависимости коэффициентов теплопроводности и удельной теплоемкости сублимирующих теплозащитных материалов от температуры. Москва : Академия наук УСРС. Теплофизика высоких температур, 1968. Том 6. С. 145–148.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Розв’язок стаціонарного рівняння теплопровідності

```
%% лістинг А.1 – Розв’язок рівняння стаціонарної теплопровідності
методом скінченних прямокутних елементів
clear all; close all; clc;
%% Ініціалізація даних програми
Lx = 1; % довжина області (по просторовій координаті x)
Ly = 1; % ширина  області (по просторовій координаті y)
nx = 1000; % кількість внутрішніх вузлів сітки по осі абсцис
ny = 1000; % кількість внутрішніх вузлів сітки по осі ординат
hx = Lx/(nx+1); % крок по просторовій координаті x
hy = Ly/(ny+1); % крок по просторовій координаті y
x = 0:hx:Lx;    % масив аргументів по осі OX
y = 0:hy:Ly;    % масив аргументів по осі OY

%% Процес формування вузлів сітки (з граничними) випадковим чином
M_index = 1:(nx+2)*(ny+2);      % формування масиву за допомогою функції
перестановки randperm
M_index = reshape(M_index,nx+2,ny+2);   % перетворення результату
попереднього генерування у вигляді матриці для подальшого формування
коефіцієнтів за методом скінченних різниць

M_ind_ij  = M_index(2:nx+1, 2:ny+1);    % формування матриці індексів
центральної точки за різницевої схемою з шаблоном "хрест"
M_ind_ipj = M_index(3:nx+2, 2:ny+1);    % формування матриці індексів
правої від центральної точки за різницевої схемою з шаблоном "хрест"
M_ind_imj = M_index(1:nx  , 2:ny+1);    % формування матриці індексів
лівої від центральної точки за різницевої схемою з шаблоном "хрест"
M_ind_ijp = M_index(2:nx+1, 3:ny+2);    % формування матриці індексів
верхньої від центральної точки за різницевої схемою з шаблоном "хрест"
M_ind_ijm = M_index(2:nx+1, 1:ny);      % формування матриці індексів
нижньої від центральної точки за різницевої схемою з шаблоном "хрест"

%% Перетворення індексів точок сформованих матриць у вектори-стовпчики
для формування розрідженої матриці
M_ind_ij  = reshape(M_ind_ij , nx*ny, 1);   % Перетворення матриці
індексів центральних точок у вектор
M_ind_ipj = reshape(M_ind_ipj, nx*ny, 1);   % Перетворення матриці
індексів правих від центральних точок у вектор
M_ind_imj = reshape(M_ind_imj, nx*ny, 1);   % Перетворення матриці
індексів лівих від центральних точок у вектор
M_ind_ijp = reshape(M_ind_ijp, nx*ny, 1);   % Перетворення матриці
індексів верхніх від центральних точок у вектор
M_ind_ijm = reshape(M_ind_ijm, nx*ny, 1);   % Перетворення матриці
індексів нижніх від центральних точок у вектор

%% Формуємо індекси матриці для передачі у функцію sparse для задання
тільки ненульових елементів матриці
i = [M_ind_ij; M_ind_ij;  M_ind_ij;  M_ind_ij;  M_ind_ij];  % індекси
рядків матриці для ненульових елементів
j = [M_ind_ij; M_ind_ipj; M_ind_imj; M_ind_ijp; M_ind_ijm]; % індекси
стовпців матриці для ненульових елементів
```

```
i = [i; M_index(:, 1);   M_index(:, ny+2);   M_index(1, 2:ny+1)';
M_index(nx+2, 2:ny+1)'];  % врахування індексів рядків для граничних
вузлів
j = [j; M_index(:, 1);   M_index(:, ny+2);   M_index(1, 2:ny+1)';
M_index(nx+2, 2:ny+1)'];  % врахування індексів стовпців для граничних
вузлів

%% Формування вектору глобальної матриці
v = ones(nx*ny, 1) * (-2/hx^2-2/hy^2);  % для центральних елементів
(центральні точки шаблону "хрест")
v = [v; ones(2*nx*ny, 1)/hx^2];         % для правих та лівих від
центральних елементів
v = [v; ones(2*nx*ny, 1)/hy^2];         % для верхніх та нижніх
елементів відносно центральних
v = [v; ones(2*nx + 2*ny + 4, 1)];      % для граничних вузлів

A = sparse(i, j, v);         % передавання індексів рядків рядків та
стовпців для ненульових елементів, а також самі значення

%% Формування вевтору вільних членів для СЛАР
v = ones(nx*ny,1);                      % для всіх внутрішніх точок
значення задаємо 1, оскільки права частина еліптичного рівняння рівна
одиниці
v = [v; zeros(2*nx + 2*ny + 4, 1)];     % граничні умови першого роду
(умови Дирихле) і всі рівні нулю
b = sparse([i(1:nx*ny); i(5*nx*ny+1:end)],ones((nx+2)*(ny+2),1),v);   %
формування вектору вільних членів для СЛАР
%% Розв'язання СЛАР з розрідженою головною матрицею
tic;
sol = full(A\b); % знаходження розв'язку СЛАР
toc;
%% перетворення результату до нормального вигляду для візуалізації
for i=1:nx+2
    for j=1:ny+2
        ind = M_index(i,j);
        s(i,j) = sol(ind,1);
    end
end
%% Процес візуалізації отриманих результатів
subplot(2,2,1); % перший графік - поверхня, яка є розв'язком рівняння
surf(x,y,s');   % візуалізація самої поверхні

subplot(2,2,2); % другий графік - вигляд розрідженої матриці, яка була
утворена в ході розв'язання задачі
spy(A,1);       % візуалізація ненульових елементів матриці (в
стандартному вигляді - початок з лівого верхнього кута)

subplot(2,1,2); % третій графік - контурний розв'язок поставленої задачі
contour(x,y,s',100);    % виведення контурного представлення розв'язку
(100 ліній рівня)
% b = full(A)
```

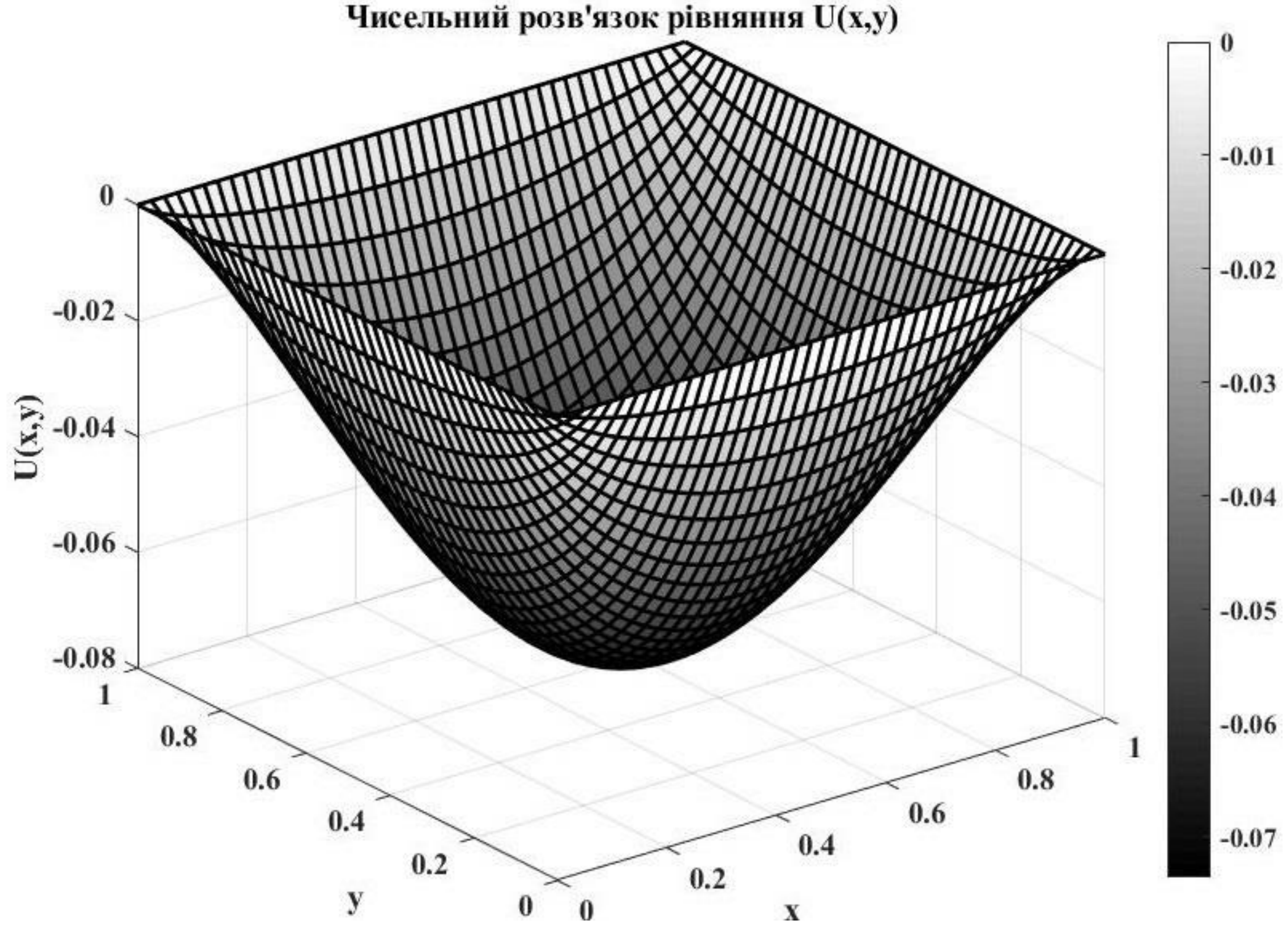


Рис. А.1 – Чисельний розв'язок рівняння Пуассона з $f(x,y)=1$

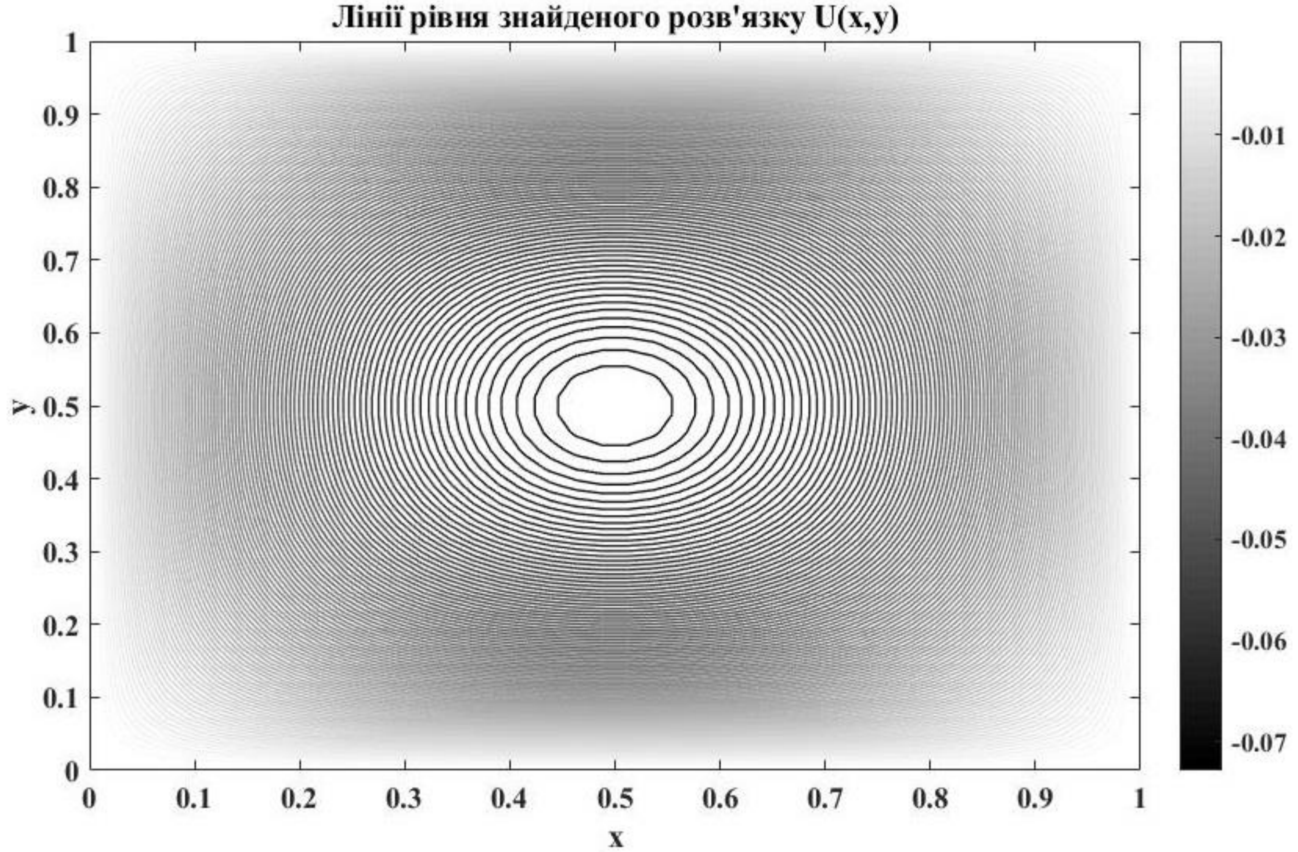


Рис. А.2 – Контурний графік чисельного розв'язку задачі

Лістинг А.2 – Розв’язок рівняння стаціонарної теплопровідності методом скінченних трикутних елементів

```
function mke_2D(e,p,t)
clc; close all;
global k_elem data_of_elem coord
global A_ C_ D_ E_ F_ sol
global Z X_mid Y_mid A B C A_global B_global s_elem X Y
% A_*Uxx + C_*Uyy + D_*Ux + E*Uy + F_*U = f(x,y);

A_ = 1; C_ = 1; D_ = 0; E_ = 0; F_ = 0;

tri_tools(e,p,t);
N = max(max(data_of_elem))
k_elem

A_global = zeros(N);
B_global = zeros(N,1);
tic;
for k=1:k_elem
    X(1) = coord(data_of_elem(k,1),1);    X(2) =
coord(data_of_elem(k,2),1);    X(3) = coord(data_of_elem(k,3),1);
    Y(1) = coord(data_of_elem(k,1),2);    Y(2) =
coord(data_of_elem(k,2),2);    Y(3) = coord(data_of_elem(k,3),2);
    X_mid = sum(X)/3;      Y_mid = sum(Y)/3;

    EleM = [X' Y' ones(3,1)];
    s_elem = 0.5*abs(det(EleM));

    coeff_plant = inv(EleM);
    A = coeff_plant(1,:);    B = coeff_plant(2,:);    C =
coeff_plant(3,:);

    j1 = data_of_elem(k,1);
    j2 = data_of_elem(k,2);
    j3 = data_of_elem(k,3);
    i = data_of_elem(k,1);

    Z = A(1,1)*X_mid + B(1,1)*Y_mid + C(1,1);
    Form_system(i,j1,1,1);
    Form_system(i,j2,2,1);
    Form_system(i,j3,3,1);

    i = data_of_elem(k,2);
    Z = A(1,2)*X_mid + B(1,2)*Y_mid + C(1,2);
    Form_system(i,j1,1,2);
    Form_system(i,j2,2,2);
    Form_system(i,j3,3,2);

    i = data_of_elem(k,3);
    Z = A(1,3)*X_mid + B(1,3)*Y_mid + C(1,3);
    Form_system(i,j1,1,3);
    Form_system(i,j2,2,3);
    Form_system(i,j3,3,3);
end
figure;
spy(A_global,5);
correct_bou;
sol = A_global\B_global;
```

```
toc;
Plot_solution;
function tri_tools(e, p, t)
global k_elem data_of_elem coord edges
data_of_elem = t(1:3,:)';
coord = p';
edges = [[round(e(1,:))'; round(e(2,:))']
[round(e(5,:))';round(e(5,:))']];
k_elem = length(data_of_elem(:,1));

function correct_bou
global coord edges A_global B_global
len_edges = length(edges(:,1));
for i = 1:len_edges
    X = coord(edges(i,1),1);
    Y = coord(edges(i,1),2);
    B_global = B_global -
A_global(:,edges(i,1))*boundary(edges(i,2),X,Y);
    A_global(:,edges(i,1)) = 0;
    A_global(edges(i,1),:) = 0;
    A_global(edges(i,1),edges(i,1)) = 1;
    B_global(edges(i,1)) = boundary(edges(i,2),X,Y);
end

function z = f(x,y)
z = 1;

function Form_matrix(i,j,k,L)
global Z X_mid Y_mid A B C A_ C_ D_ E_ F_ A_global B_global s_elem X Y
Z1 = A(1,L)*X_mid + B(1,L)*Y_mid + C(1,L);
s = 0;
s = s - A_ * A(1,L)*A(1,k);
s = s - C_ * B(1,L)*B(1,k);
s = s + D_ * A(1,L) / 3;
s = s + E_ * B(1,L) / 3;
s = s + F_ * Z*Z1;
A_global(i,j) = A_global(i,j) + s_elem * s;
B_global(i,1) = B_global(i,1) + s_elem * f(X_mid,Y_mid) * Z*Z1;

function z = boundary(k,x,y)
if k == 1
    z = 0*x;
else
    z = 0*y;
end

function Plot_solution
global data_of_elem coord sol k_elem

figure;
axis([min(coord(data_of_elem(:,1),1)) max(coord(data_of_elem(:,1),1))
min(coord(data_of_elem(:,1),2)) max(coord(data_of_elem(:,1),2))]);
hold on; grid on;
for i=1:k_elem
    X1 = coord(data_of_elem(i,1),1); X2 = coord(data_of_elem(i,2),1); X3
= coord(data_of_elem(i,3),1);
```

```
    Y1 = coord(data_of_elem(i,1),2); Y2 = coord(data_of_elem(i,2),2); Y3
= coord(data_of_elem(i,3),2);
    X = [X1 X2 X3 X1];  Y = [Y1 Y2 Y3 Y1];
    line(X,Y,'Color','Black','LineWidth',1);
end
figure;
axis([min(coord(data_of_elem(:,1),1)) max(coord(data_of_elem(:,1),1))
min(coord(data_of_elem(:,1),2)) max(coord(data_of_elem(:,1),2)) min(sol)
max(sol)]);
% axis([0 1 0 1 min(sol) max(sol)]);
hold on; grid on;
for i=1:k_elem
    X1 = coord(data_of_elem(i,1),1);     X2 =
coord(data_of_elem(i,2),1);     X3 = coord(data_of_elem(i,3),1);
    Y1 = coord(data_of_elem(i,1),2);     Y2 =
coord(data_of_elem(i,2),2);     Y3 = coord(data_of_elem(i,3),2);
    Z1 = sol(data_of_elem(i,1),1);       Z2 = sol(data_of_elem(i,2),1);
Z3 = sol(data_of_elem(i,3),1);
    line ([X1 X2 X3 X1],[Y1 Y2 Y3 Y1], [Z1 Z2 Z3
Z1],'Color','Black','LineWidth',1);
%     pause(1e-5);
end
```

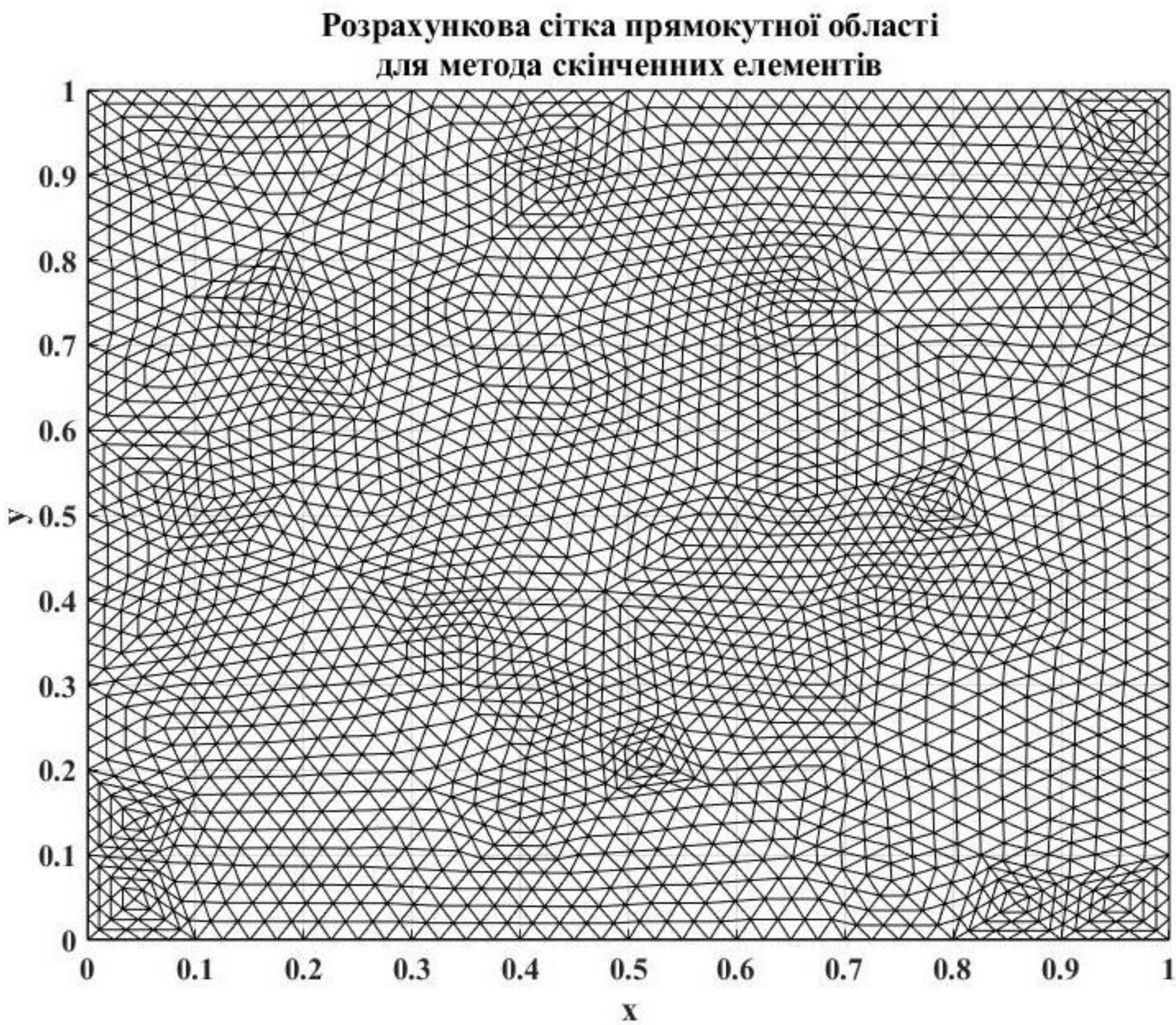


Рис. А.3 – Розрахункова область для рівняння Пуассона $f\left(x,y\right)=1$

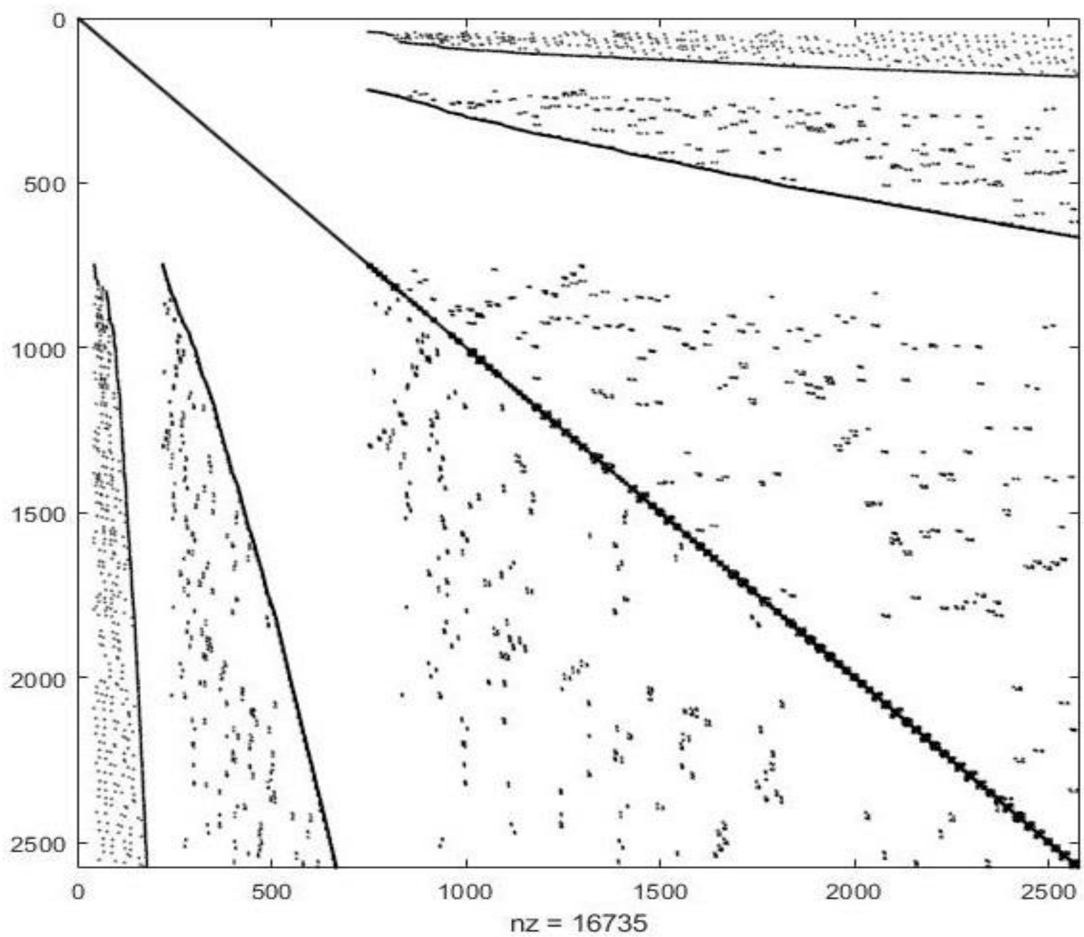


Рис. А.4 – Структура розрідженої матриці для вище сформованої тріангуляції

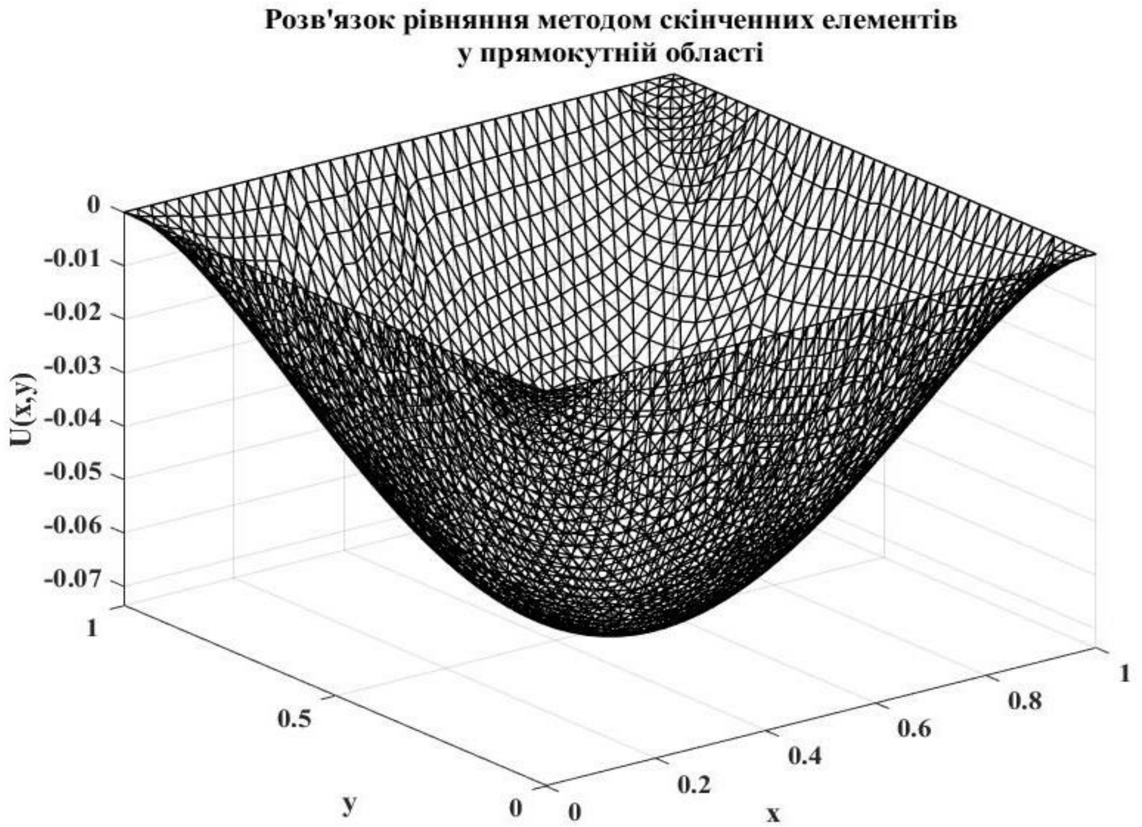


Рис. А.5 – Шуканий чисельний розв’язок рівняння Пуассона з $f(x,y)=1$ у прямокутнику методом скінченних трикутних елементів

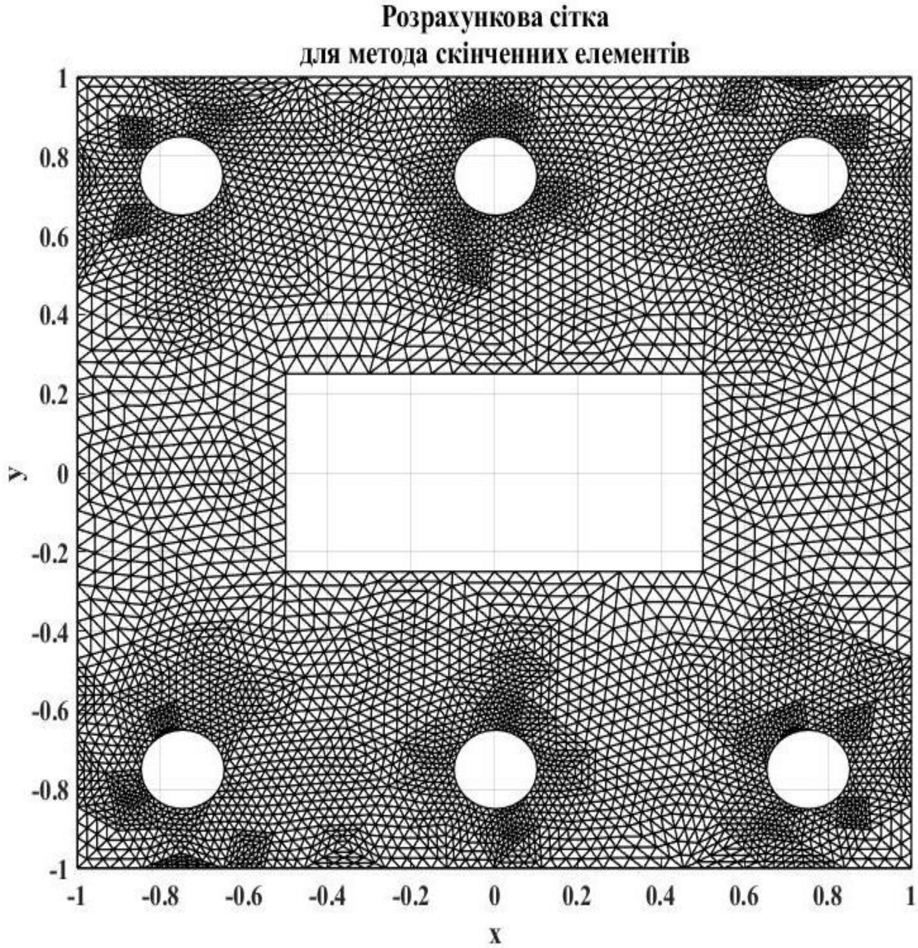


Рис. А.6 – Приклад ще однієї розрахункової області для рівняння Лапласа

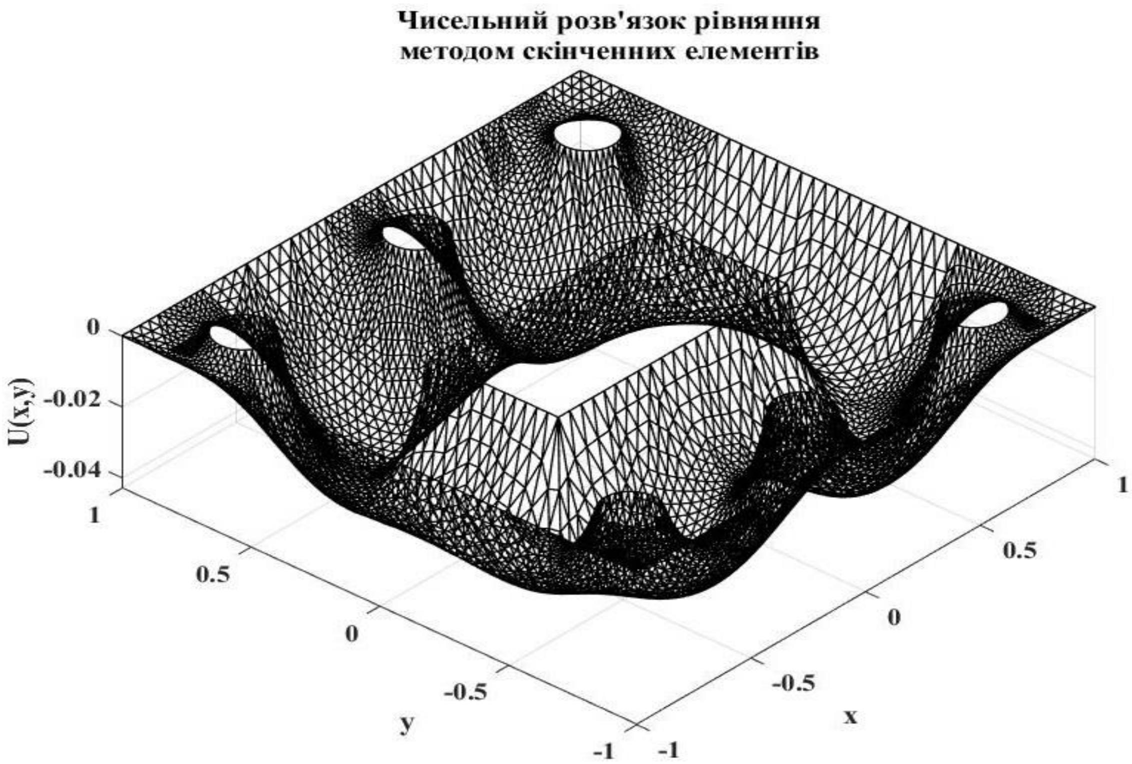


Рис. А.5 – Шуканий чисельний розв’язок рівняння Пуассона з $f(x,y)=1$ та нульовими граничними умовами у прямокутнику методом скінченних трикутних елементів

ДОДАТОК Б
Отримання сітки для методу кінцевих елементів

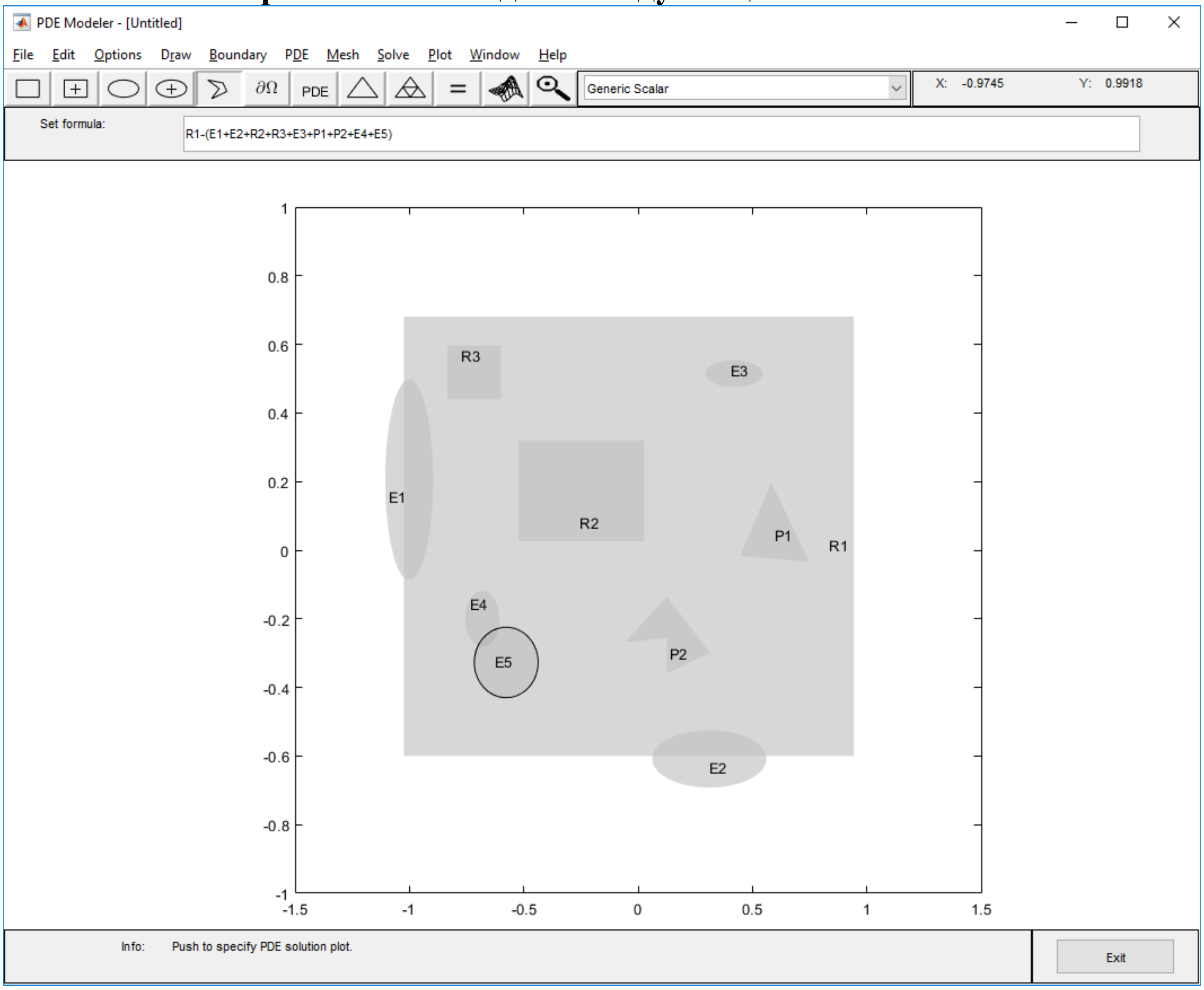


Рис. Б.1 – Редактор геометрії розрахункової області

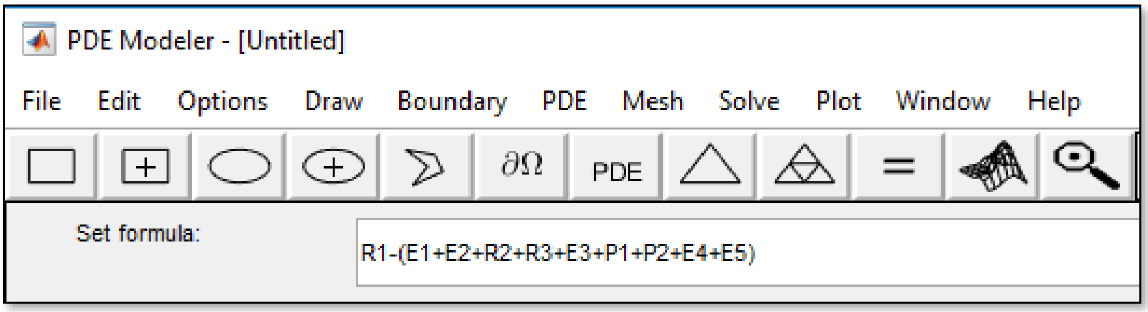


Рис. Б.2 – Редактор формул геометрії розрахункової області складного об’єкта дослідження

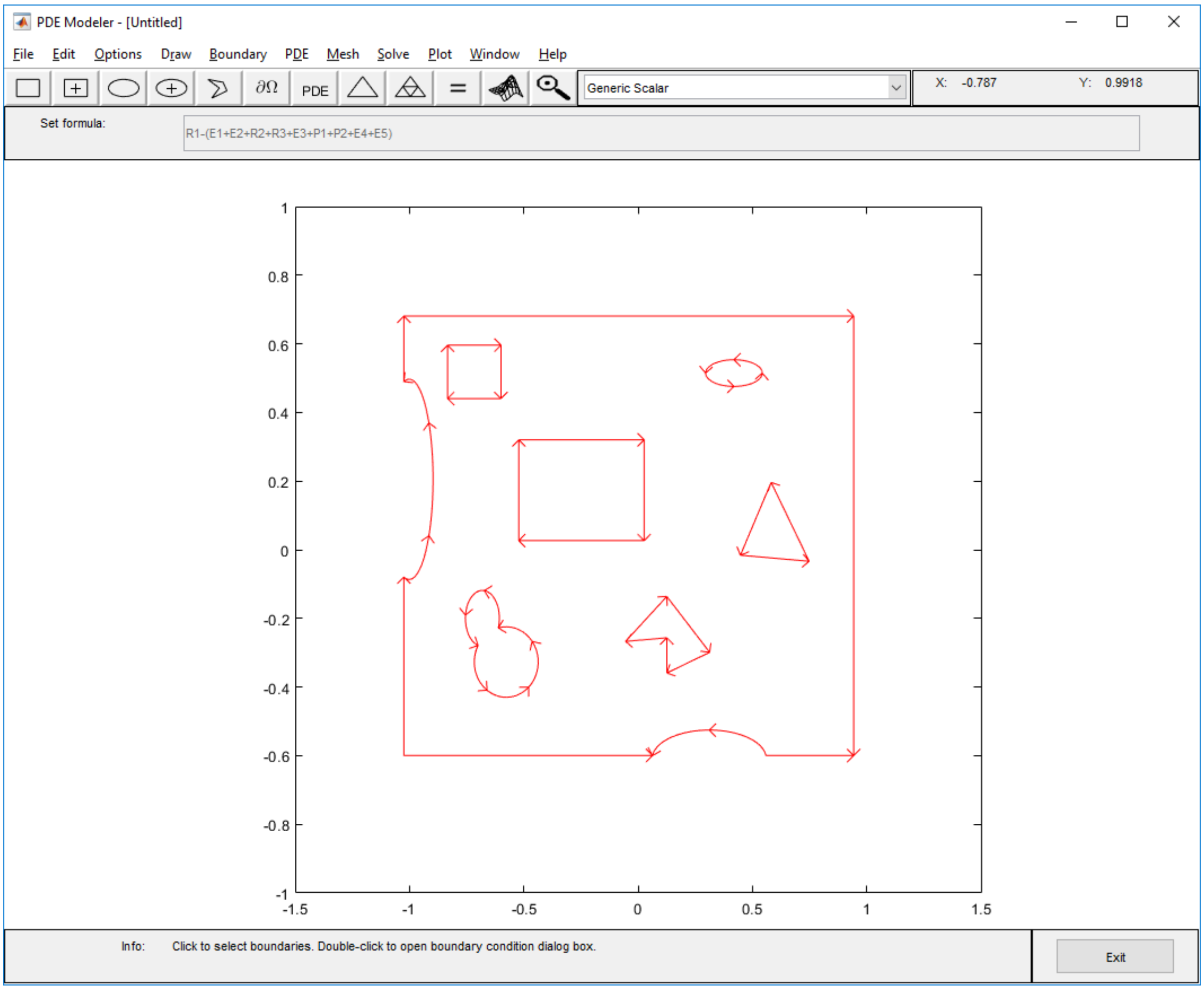


Рис. Б.3 – Границі розрахункової області об’єкта дослідження

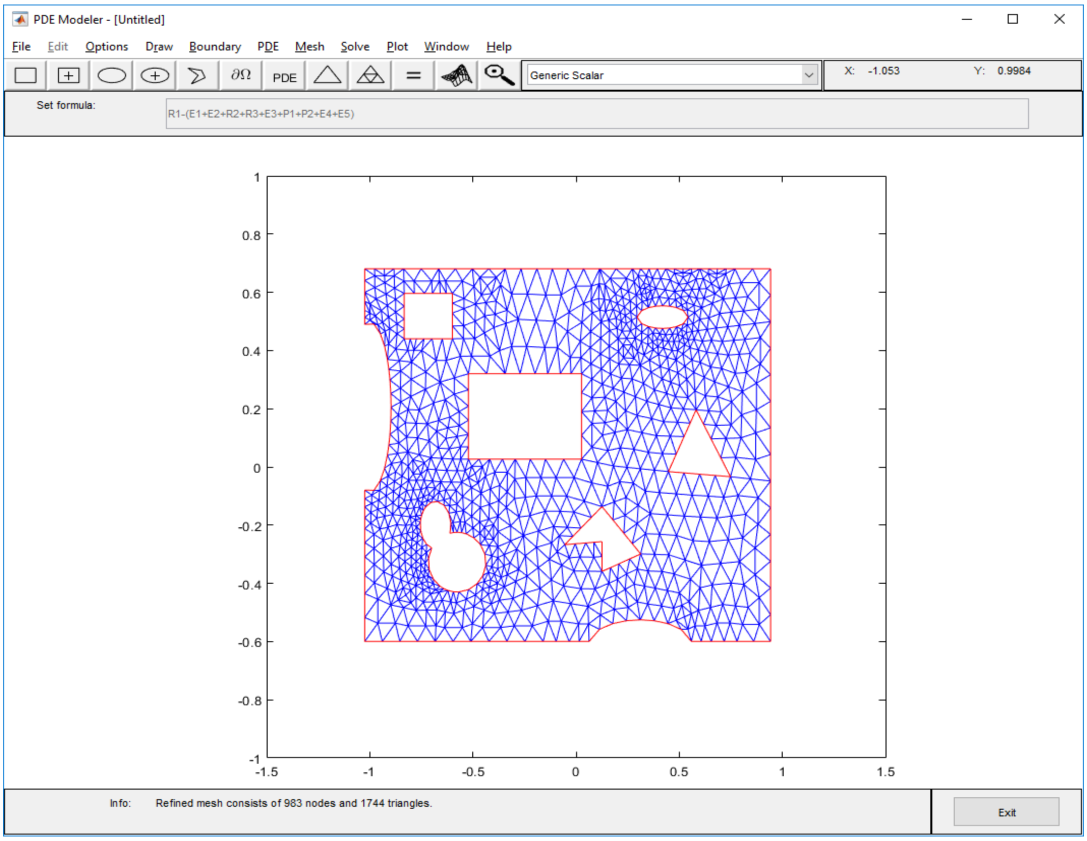


Рис. Б.4 – Згенерована тріангуляція розрахункової області

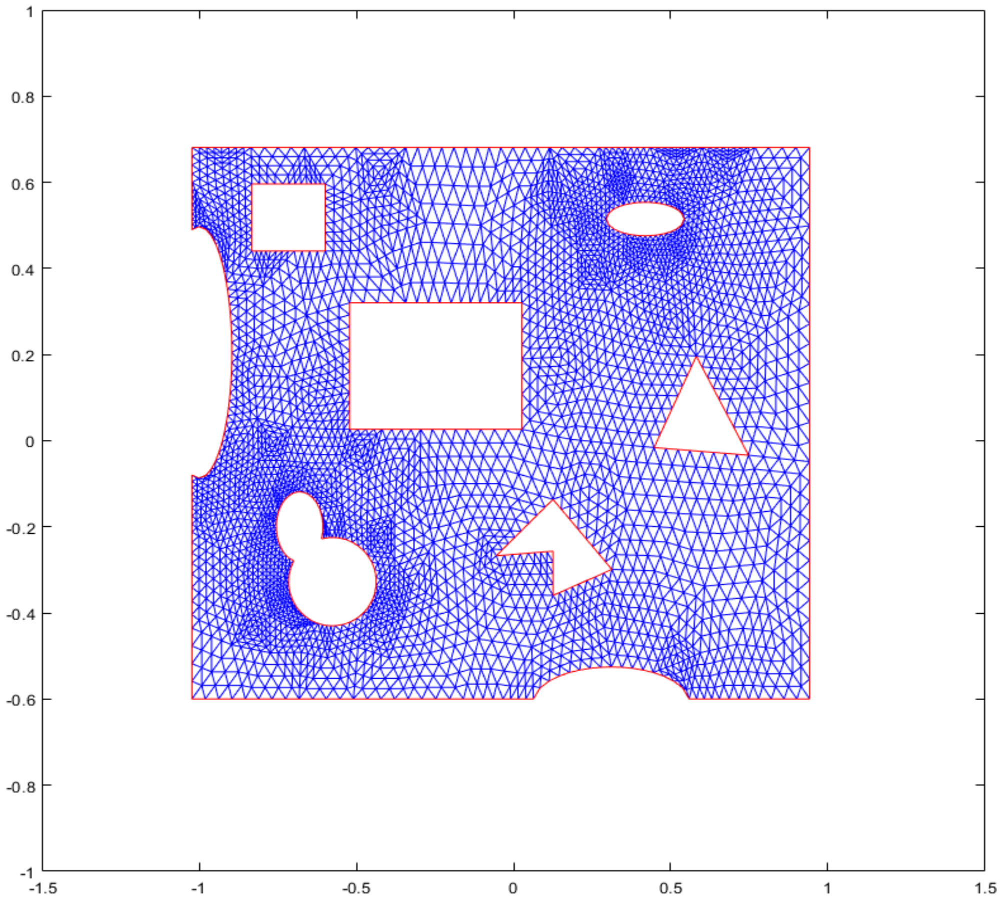


Рис. Б.5 – Модифікація тріангуляції розрахункової області за рахунок подрібнення трикутних елементів

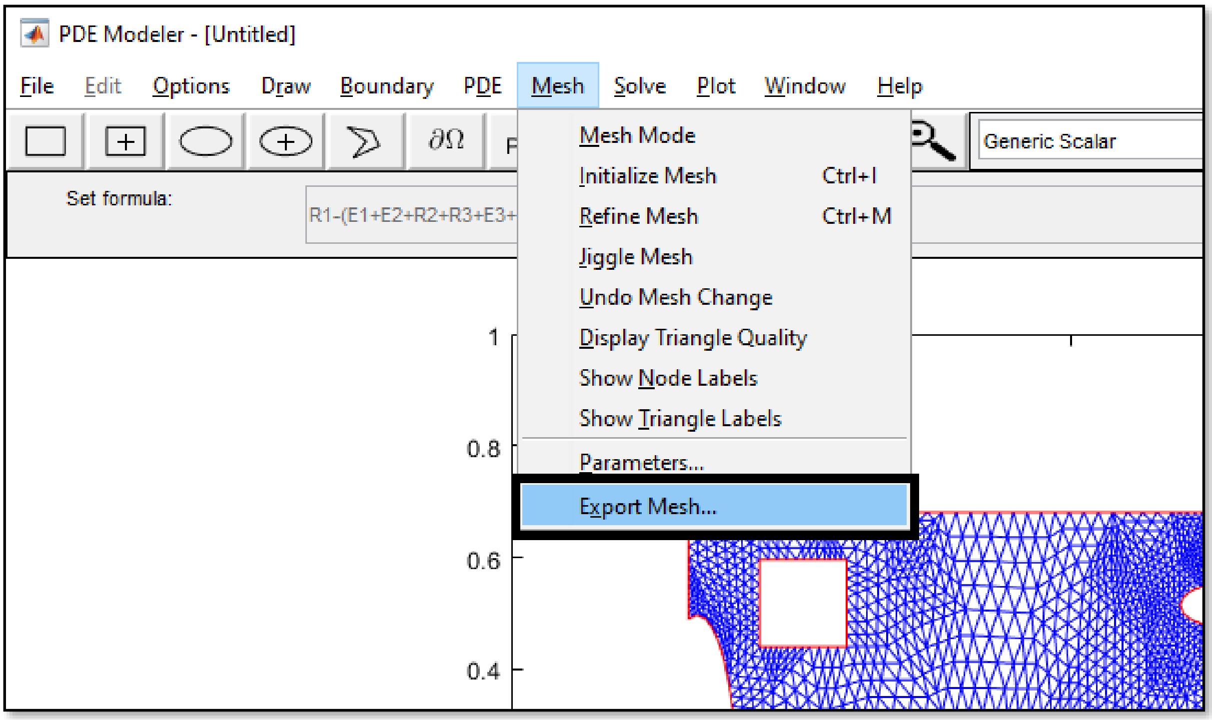


Рис. Б.6 – Експортування створеної розрахункової області разом із тріангуляцією

```
% Лістинг Б.1 – Отримання та подальша обробка з розрахунковою областю
function tri_tools(e, p, t)
global k_elem data_of_elem coord edges
```

```
data_of_elem = t(1:3,:)';
coord = p';
edges = [[round(e(1,:))'; round(e(2,:))'] [round(e(5,:))';
round(e(5,:))']];
k_elem = length(data_of_elem(:,1));
```

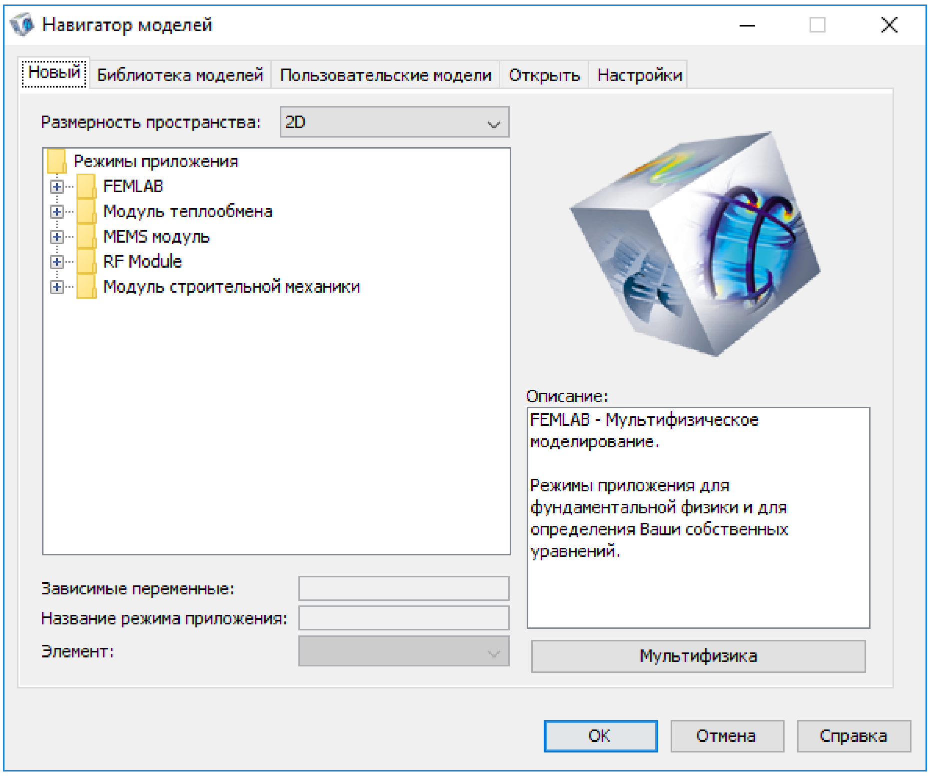


Рис. Б.7 – Навігатор моделей прикладного програмного пакету Comsol Multiphysics 3.5a

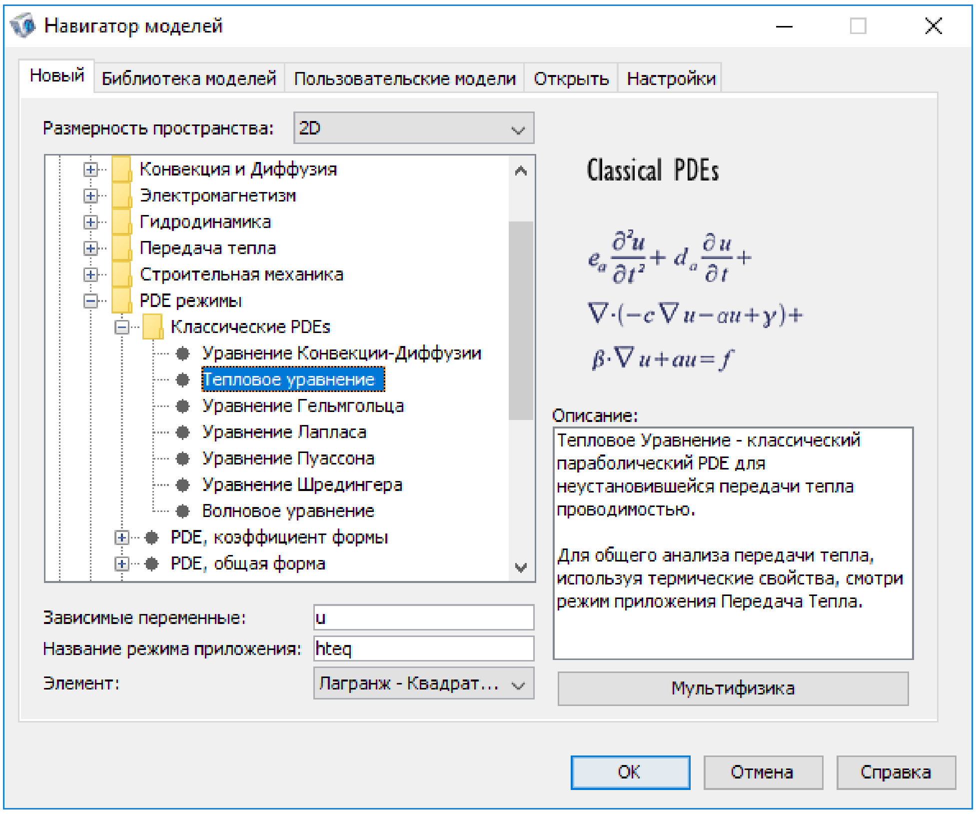


Рис. Б.8 – Обрання розмірності простору та потрібної моделі, якій відповідає технічна постановка задачі у Comsol Multiphysics 3.5a

Рис. Б.9 – Створення розрахункової області за допомогою конструктора у Comsol

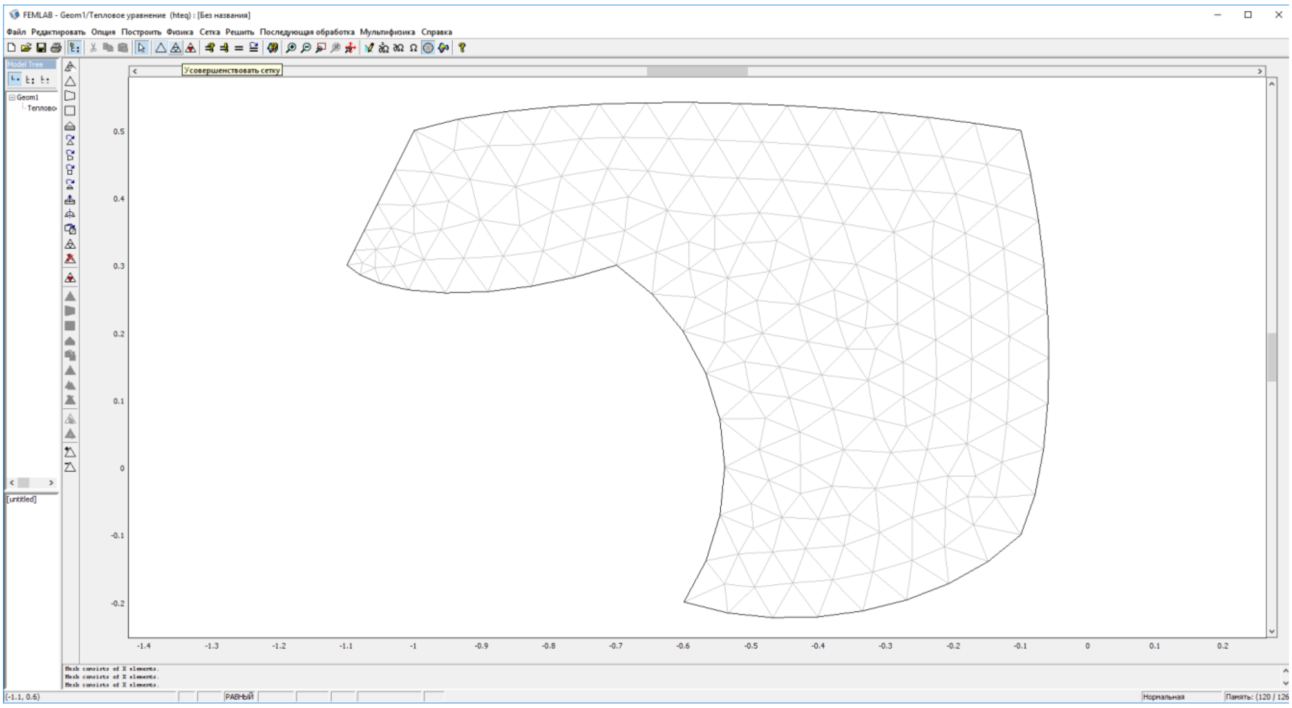


Рис. Б.10 – Ініціалізація тріангуляції розрахункової області з грубими елементами

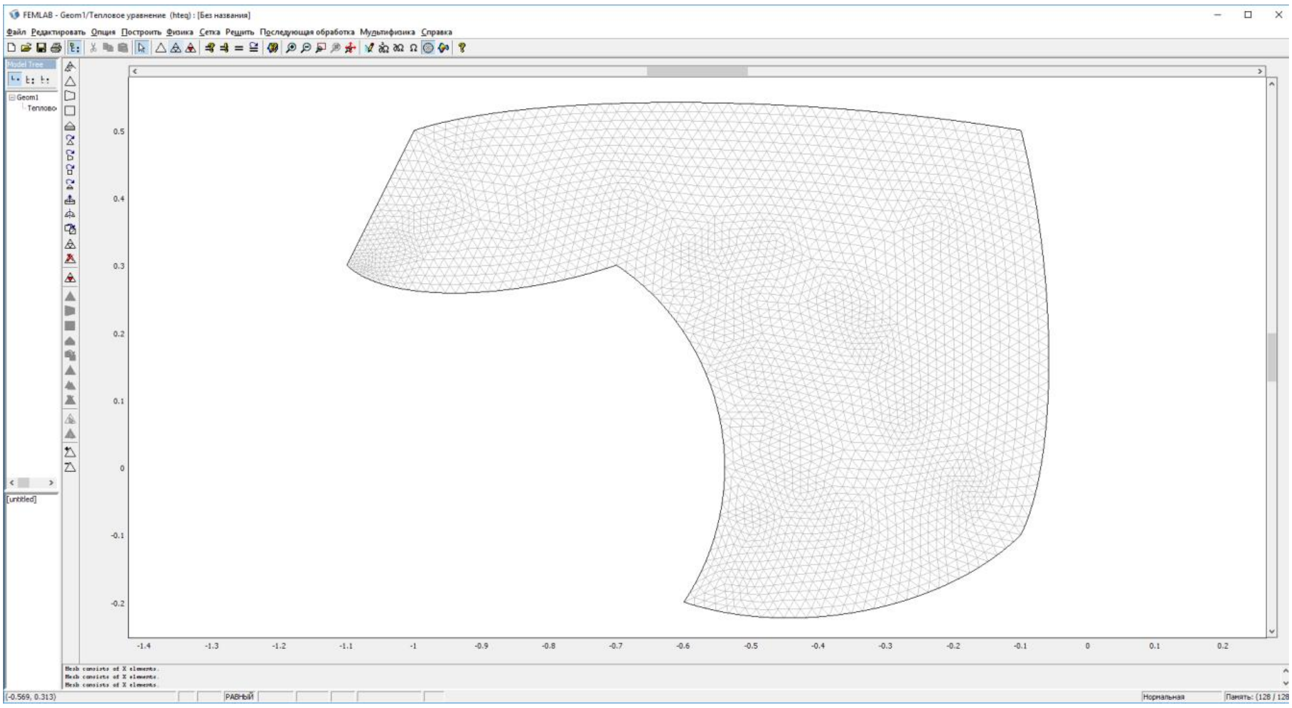


Рис. Б.11 – Модифікація тріангуляції області з мілкими трикутними елементами

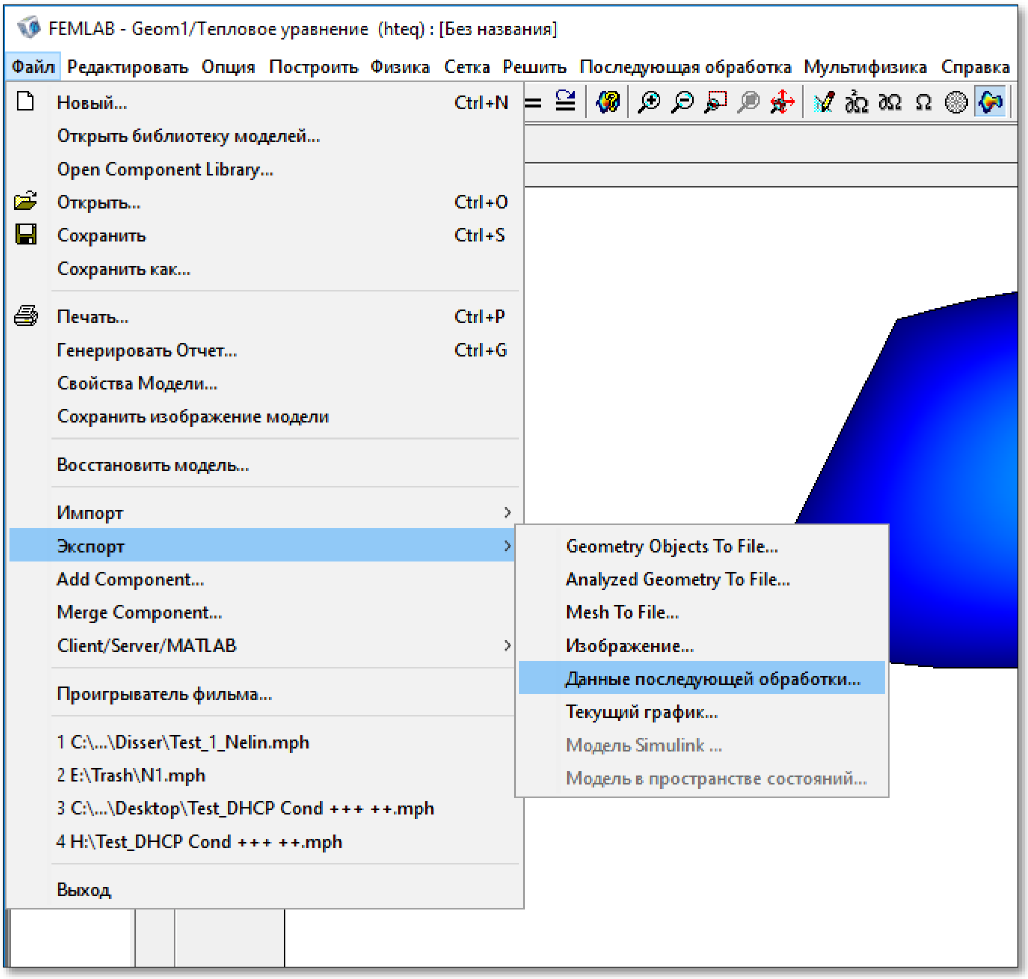


Рис. Б.12 – Експортування даних у файл, у тому числі відомостей про тріангуляцію розрахункової області

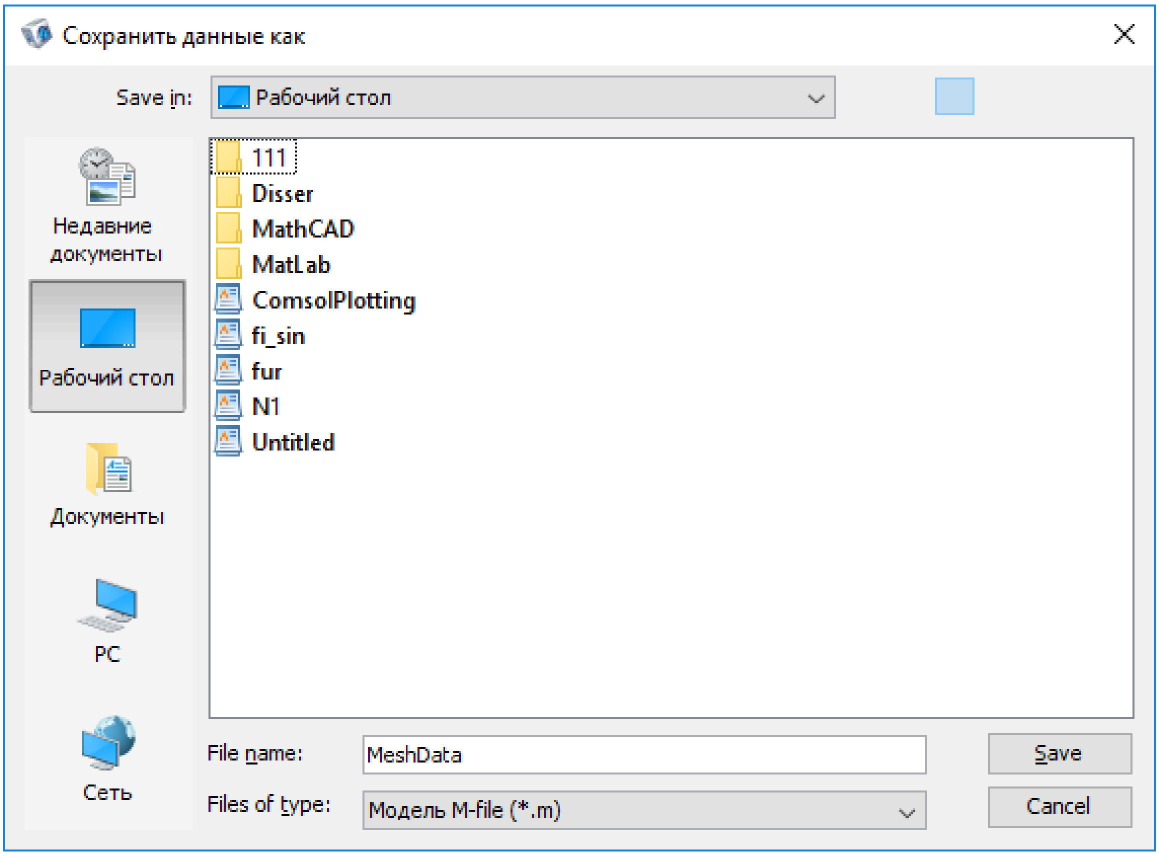


Рис. Б.13 – Збереження m-файла з даними про поставлену задачу

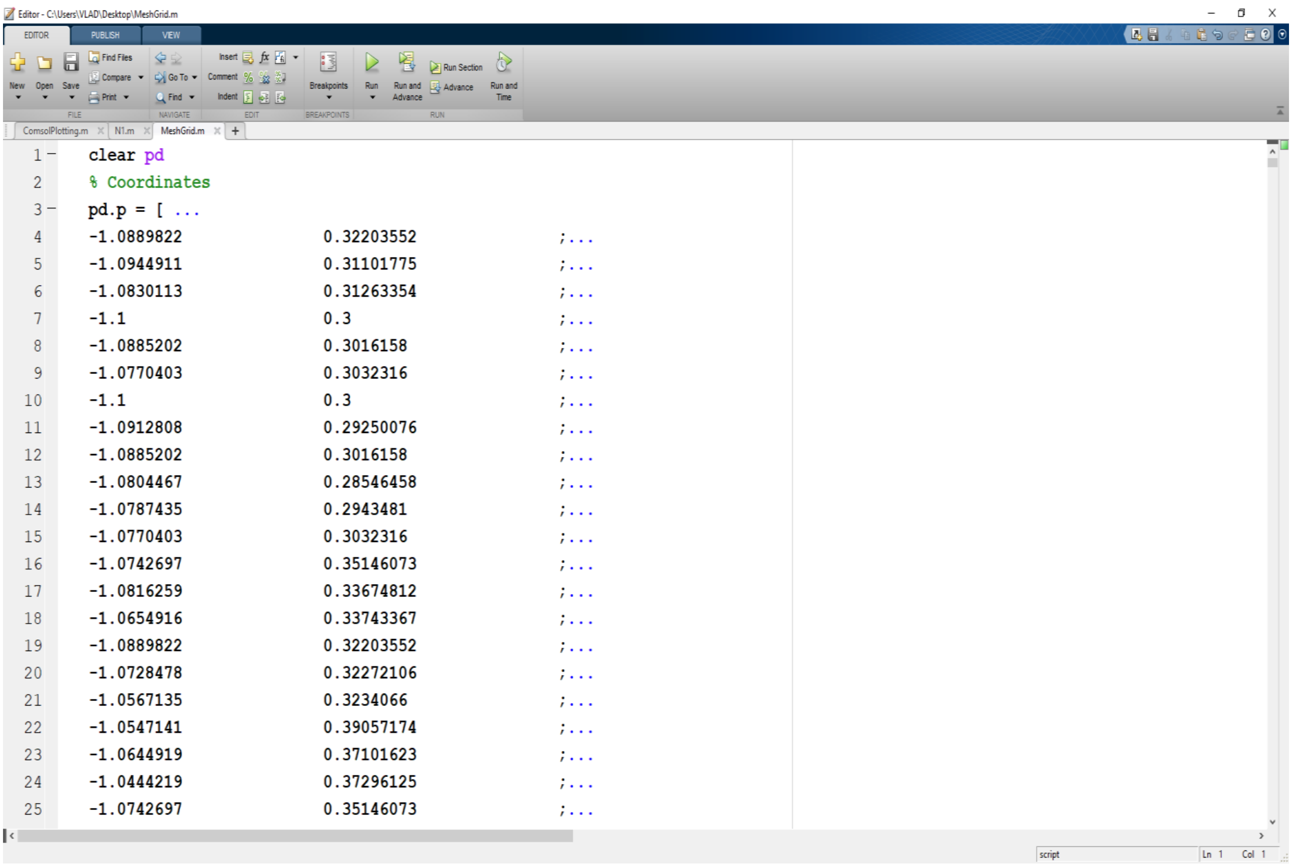


Рис. Б.14 – Вміст m-файла з даними задачі

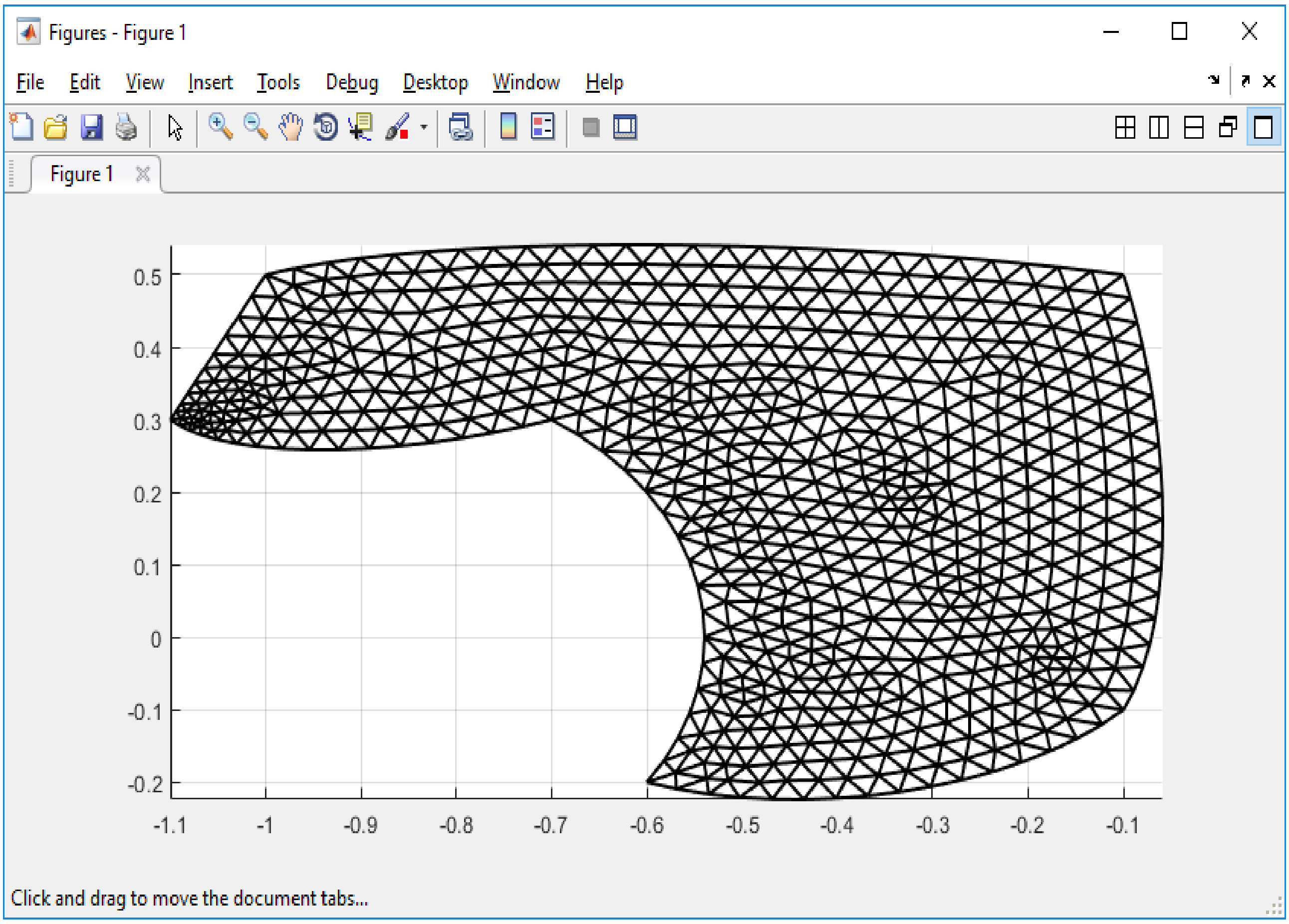
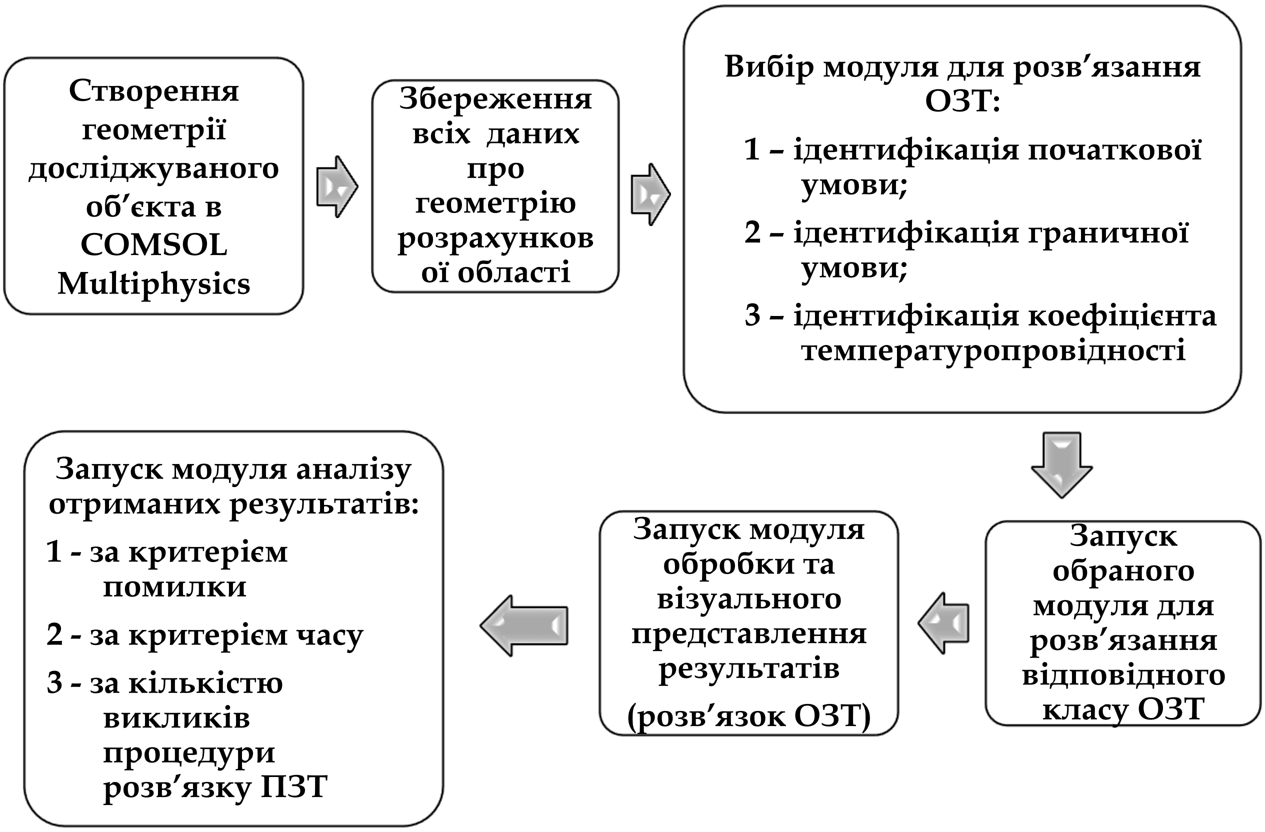


Рис. Б.15 – Побудована геометрії розрахункової області у прикладному математичному пакеті MATLAB 2017b

ДОДАТОК В

Структура програмного комплексу розв'язування основних класів обернених задач теплопровідності

Розроблений програмний комплекс складається із шести основних модулів (підпрограм), роботу яких можна відобразити схематично так:



Модуль 1 – модуль створення геометрії.

Модуль 2 – модуль збереження геометрії.

Модуль 3 – модуль формування та вибір класу ОЗТ.

Модуль 4 – модуль розв'язування обраного класу ОЗТ.

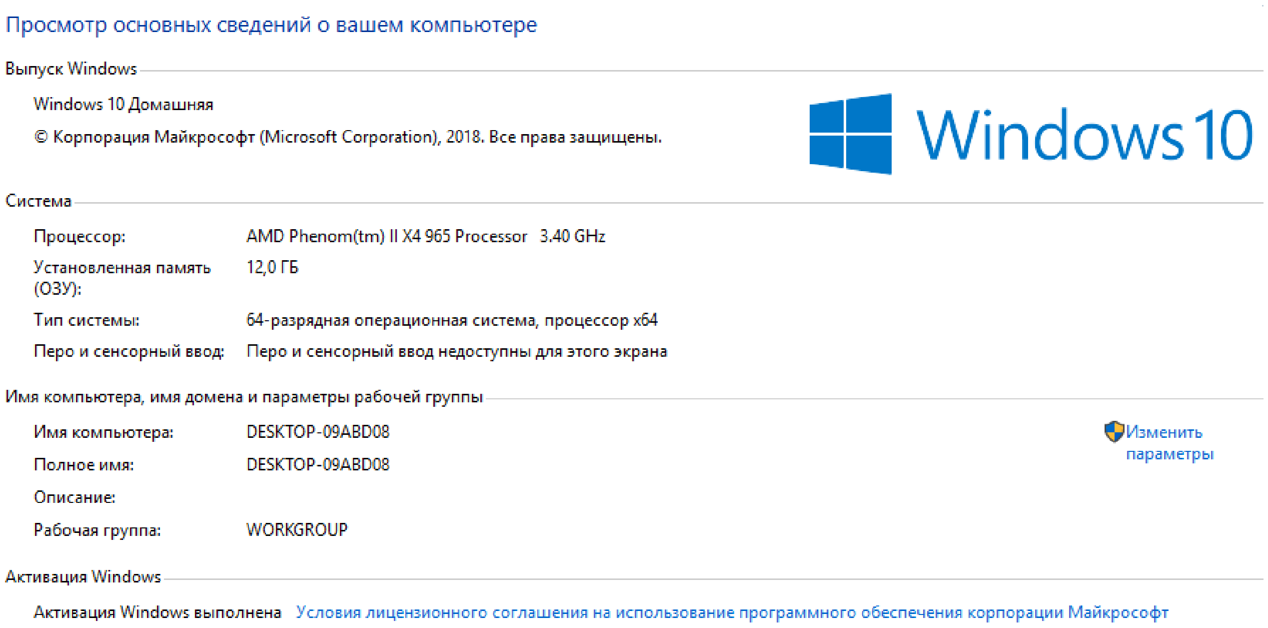
Модуль 5 – модуль обробки та візуалізації розв'язку обраного класу ОЗТ.

Модуль 6 – модуль аналізу розв'язку обраного класу ОЗТ.

ДОДАТОК Г

Основні характеристики персонального комп’ютера

Процесор, частота роботи	4-ядерний AMD Phenom™ II X64 965 Black, 3.4 ГГц
Об’єм оперативної пам’яті	12 Gb
Тип відеокарти, об’єм відеопам’яті	Дискретна, nVidia GeForce GTX 1050 Ti, 4 Gb
Чіпсет материнської плати	Intel H110
Об’єм HDD	1 Tb
Потужність блока живлення	400 W
Операційна система, розрядність	Windows 10, x64
Тип пам’яті	DDR3-2400 МГц



ДОДАТОК Д

Список публікацій за темою дисертаційного дослідження

Список праць, в яких опубліковано основні наукові результати дисертаційного дослідження

1. Бабак В.П., Ковтун С.І., Хайдуров В.В., Щербак Л.М. Моделювання процесу теплообміну в замкненій системі з дзеркальними та дифузними поверхнями. *Збірник наукових праць «Наукоємні технології». Технічні науки.* Київ, 2018. №2 (38) С. 245–254.

2. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Деякі швидкісні методи розв'язку нелінійних обернених задач теплопровідності. *Збірник наукових праць Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Прикладна математика. Інформатика. Технічні науки.* Черкаси, 2017. №1–2. С. 71–90.

3. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Метод знаходження чисельного розв'язку оберненої двовимірної задачі теплопровідності. *Збірник наукових праць Державного технологічного університету. Технічні науки.* Черкаси, 2015. №2. С. 49–56.

4. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Эффективные методы решения нелинейных обратных задач теплопроводности. *Збірник наукових праць Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Прикладна математика. Інформатика. Технічні науки.* Черкаси, 2014. №2. С. 87–98.

5. Хайдуров В.В. Багатосітковий метод вирішення нелінійних обернених задач електро- та теплоенергетики. *Збірник наукових праць «Моделювання та інформаційні технології». Технічні науки.* Київ. Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова, 2018. №83. С. 117–124.

6. Хайдуров В.В. Ефективні методи розв'язку точкових обернених задач теплопровідності. *Збірник наукових праць «Молодий вчений». Технічні науки.* Суми, 2016. №6 (33). С. 87–98.

7. Хайдуров В.В. Моделирование прикладных обратных задач теплопроводности по вычислению коэффициента теплопроводности. *Збірник*

наукових праць «Моделювання та інформаційні технології». Технічні науки. Київ, 2017. №81. С. 69–77.

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертаційного дослідження

1. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Ефективні методи розв'язку нелінійних обернених задач теплопровідності. Відновлення коефіцієнта теплопровідності. *«Молода наука. Прогресивні технологічні процеси, технологічне оснащення»* : матеріали Міжнародної науково-технічної Internet-конференції студентів і молодих вчених, м. Краматорськ, (30 березня), 2017 р. Краматорськ, 2017. С. 101–105.

2. Хайдуров В.В. Використання методу Фур'є для знаходження чисельного розв'язку багатовимірних обернених задач теплопровідності. *«Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем»* : тези доповідей I Всеукраїнської науково-технічної конференції, м. Дніпропетровськ, 3–5 листопада, 2015 р. Дніпропетровськ, 2015. С. 256–261.

3. Хайдуров В.В. Деякі питання обернених задач теплопровідності. *«Роль фізики в розвитку міждисциплінарних наукових і навчальних напрямків» (PhysIST–2016)* : матеріали Міжнародної заочної мультимедійної (інтернет) конференції, м. Одеса, 2–5 травня 2016 р. Одеса, 2016. С. 24.

4. Хайдуров В.В. Знаходження оптимальних температур електричних нагрівачів промислової печі. *«Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я» (MicroCAD–2018)* : матеріали XXVI Міжнародної науково-практичної конференції, м. Харків, 16–18 травня 2018 р. Харків, 2018. С. 261.

5. Хайдуров В.В. Знаходження чисельного розв'язку нелінійних обернених задач теплопровідності. Відновлення коефіцієнта теплопровідності. *«Актуальні наукові дослідження у сучасному світі». Технічні науки* : збірник наукових праць, м. Переяслав-Хмельницький, 26–27 березня 2017 р. Переяслав-Хмельницький, 2017. С. 115–120.

6. Хайдуров В.В. Метод анализа работы теплового оборудования. *«Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси» (ІРТК-2018)* : збірник матеріалів XXI Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 22–23 травня 2018 р. Київ, 2018. С. 191–193.

7. Хайдуров В.В. Модифицированные методы решения нелинейных задач теплопроводности. *«Актуальні наукові дослідження у сучасному світі»* : матеріали VI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Переяслав-Хмельницький, 26–27 жовтня 2015 р. Переяслав-Хмельницький, 2015. С. 74–82.

Список публікацій, які додатково відображають наукові результати дисертаційного дослідження

1. Petrov A., Chernyakov Yu., Steblyanko P., Demichev K., Haydurov V. Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. *Технічні науки.* Харків, 2018. №4/7 (94). С. 25–33.

2. Хайдуров В.В. Знаходження чисельного розв’язку деяких точкових обернених задач теплопровідності. *«Сучасна наука: проблеми та перспективи»* : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 13–14 жовтня 2015 р. Київ, 2015. С. 26–30.

ДОДАТОК Е

Документи про впровадження результатів дисертаційного дослідження

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник директора з наукової роботи Інституту технічної теплофізики НАН України, член-кор. НАН України

_______________ В. П. Бабак

«9» 10 2018 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційного дослідження викладача кафедри комп'ютерних наук Київського міжнародного університету
Хайдурова Владислава Володимировича

Цим актом засвідчуємо, що результати дисертаційного дослідження використані при моделюванні теплових процесів у елементах деталей теплометричних приладів та систем.

Найменування впровадженого результату	Форма впровадження і досягнутий фактичний ефект
Математична модель визначення теплових фізико-технічних характеристик промислових печей	Тестування моделі на реальних вхідних даних муфельних печей. Визначення ефективності роботи муфельної печі, порівняльний аналіз результатів моделювання та експериментальних даних.
Чисельні методи розв'язку лінійних та нелінійних обернених задачах теплопровідності: відновлення початкової умови, граничним умов, внутрішніх теплових режимів.	Тестування методів при оптимізації складних процесів тепло-перенесення. Порівняльний аналіз із класичними методами за критерієм часу та точності отриманих розрахунків.

Старший науковий співробітник
ІТТФ НАН України, к.т.н. _______________ С. І. Ковтун

ЗАТВЕРДЖУЮ
Президент Київського міжнародного університету, проф.
______________ Хачатурян Х. В.
«21» 12 20 18 р.

АКТ

про впровадження у навчальний процес результатів дисертаційної роботи викладача кафедри комп'ютерних наук Київського міжнародного університету *Хайдурова Владислава Володимировича*

Комісія у складі Голови, завідувача кафедри комп'ютерних наук, проф. Щербака Л. М. та членів комісії: доц. Дьомічева К. Е., доц. Цюпій Т. І. створила цей акт про те, що основні результати дисертаційної роботи Хайдурова В. В. впроваджені в навчальний процес при викладанні навчальних дисциплін, таких як: «Чисельні методи», «Математичне моделювання складних систем», «Системний аналіз» та «Теорія прийнятті рішень» студентам, які навчаються на спеціальностях: «Комп'ютерні науки», «Архітектура та містобудування», «Будівництво та цивільна інженерія».

До лекційних, практичних та лабораторних робіт включені результати, що отримані автором, які використовуються в сучасних інформаційних технологіях, зокрема:

- чисельні методи розв'язання стаціонарних та нестаціонарних багатовимірних обернених задач теплопровідності для комп'ютерного математичного моделювання, на основі яких студенти мають можливість контролювати різні промислові теплові процеси, які виникають у різних напрямах виробництва;
- основні модифікації чисельних методів Ньютона, описаних у дисертаційній роботі, викладаються на практичних та лабораторних заняттях з вище вказаних дисциплін для моделювання оптимізації складних процесів, які мають некоректну математичну постановку;
- математичні моделі, які описуються за допомогою прикладних обернених задач теплопровідності, використовуються студентами при написанні курсових та дипломних робіт;
- спрощені математичні моделі обернених задач теплопровідності розглядаються на практичних та лабораторних заняттях з вище вказаних дисциплін.

Завідувач кафедри комп'ютерних наук,
д. т. н., проф. ______________ Л. М. Щербак

Доцент кафедри комп'ютерних наук,
к. т. н., доц. ______________ К. Е. Дьомічев

Доцент кафедри комп'ютерних наук,
к. ф.-м. н., доц. ______________ Т. І. Цюпій