НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛЮВАННЯ В ЕНЕРГЕТИЦІ
ІМ. Г.Є. ПУХОВА

ХАЙДУРОВ Владислав Володимирович

УДК 517.9 : 536.212

МЕТОДИ ТА ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ОСНОВНИХ КЛАСІВ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі комп'ютерних наук і системного аналізу Черкаського державного технологічного університету Міністерства освіти і науки України та на кафедрі комп'ютерних наук ПВНЗ «Київський міжнародний університет».

Науковий керівник	доктор технічних наук, професор **Головня Борис Петрович,** Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького Міністерства освіти і науки України, завідувач кафедри прикладної математики та інформатики.
Офіційні опоненти:	доктор технічних наук, старший науковий співробітник **Ларіонов Григорій Іванович,** Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України, відділ фізико-механічного гірничого транспорту, старший науковий співробітник; кандидат технічних наук, доцент **Волосова Наталія Миколаївна,** Дніпровський державний технічний університет Міністерства освіти і науки України, факультет електроніки та комп'ютерної техніки, доцент кафедри вищої математики.

Захист відбудеться «30» вересня 2019 року о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.185.01 Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України за адресою: 03164, м. Київ, вул. Генерала Наумова, 15.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України за адресою: 03164, м. Київ, вул. Генерала Наумова, 15.

Автореферат розісланий «27» серпня 2019 року.

Вчений секретар
спеціалізованої
вченої ради Д 26.185.01 В.В. Душеба

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Моделювання й ідентифікація теплових процесів в елементах турбомашин, котельних установках, двигунах внутрішнього згоряння, агрегатах кольорової металургії є одними з найважливіших промислових науково-технічних завдань сьогодення. Усі ці завдання зводяться до розв'язування обернених задач теплопровідності (ОЗТ). Останніми десятиліттями бурхливо розвивалася методика розв'язування ОЗТ і здійснювалася розробка швидкісних методів та алгоритмів розв'язування основних класів багатовимірних нелінійних ОЗТ. Більшість таких задач можуть бути розв'язані лише з використанням сучасних обчислювальних машин. Такі задачі мають низку проблем: коректність постановки, стійкість чисельних методів розв'язування, значний процесорний час пошуку розв'язків ОЗТ.

Тривалий час такі задачі вважалися некоректно поставленими. І тільки після того, як академік А.М. Тихонов увів поняття умовної коректності, з'явилась можливість розв'язувати такі задачі. Це зумовило розвиток теорії розв'язності ОЗТ, що сприяло потужному прогресу теплофізичних досліджень, отриманню актуальних результатів при розв'язанні науково-технічних проблем, виникненню інтернет-ресурсів і наукових шкіл (http://www.mth.msu.edu/ipnet, http://www.me.ua.edu/inverse), які працюють у даному напрямку, та міжнародних наукових журналів (Inverse Problems, Inverse Problems in Science and Engineering). Було запропоновано велику кількість методів розв'язування ОЗТ: аналітичних і чисельних, детермінованих і стохастичних, а також були запропоновані методи регуляризації розв'язку, методи штучної гіперболізації тощо. Вагомий внесок у розвиток теорії розв'язності ОЗТ зробили В.А. Барсуков, Б.П. Головня, В.М. Голощапов, Б.С. Елькін, В.А. Іванов, А.М. Тихонов, А.О. Костіков, О.В. Котульський, Н.А. Кошева, Н.М. Курська, Т.В. Лоцман, Ю.М. Мацевитий, Т.М. Парамонова, C. Chang, M. Engel, K. Grysa, A. Qian, A. Wroblewska та інші.

Дисертаційна робота присвячена створенню нових і модифікації існуючих методів розв'язування основних класів лінійних та нелінійних ОЗТ, а також створенню програмного комплексу моделювання ОЗТ.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана відповідно до індивідуального плану аспіранта та в межах досліджень, які проводились у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара за державною науково-дослідною темою «Розробка методик розв'язку фундаментальних задач міцності та руйнування кусково-однорідних тіл, скомпонованих з інтелектуальних матеріалів» (державний реєстраційний номер 0115U002393).

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є створення та модифікація сучасних методів розв'язування лінійних і нелінійних ОЗТ, моделей реальних процесів, які призводять до пошуку розв'язків ОЗТ, а також їхня програмна реалізація у відомих прикладних програмних пакетах.

Для досягнення мети необхідно виконати такі завдання:

- модифікувати існуючі методи багатовимірної оптимізації з метою підвищення точності розрахунків для знаходження чисельних розв'язків різних класів лінійних та нелінійних багатовимірних ОЗТ;

- розробити комплекс програм для знаходження чисельних розв’язків основних класів багатовимірних ОЗТ;
- зменшити загальну кількість обчислень, що необхідна для розв’язування нелінійних багатовимірних ОЗТ шляхом уведення процедури інтерполяції поверхнями другого порядку для мінімізації квадратичного функціонала ОЗТ. Це призводить до зменшення кількості викликів процедури розв’язування прямої задачі теплопровідності (ПЗТ), яка неодноразово викликається при розв’язуванні конкретної, зокрема, нелінійної ОЗТ;
- здійснити порівняльний аналіз отриманих методів розв’язування лінійних і нелінійних багатовимірних ОЗТ за критерієм збіжності методів та за критерієм загальної кількості викликів процедури розв’язування ПЗТ, розробивши для цього прикладний програмний комплекс;
- провести апробацію отриманих методів розв’язування багатовимірних ОЗТ на різних прикладних задачах ідентифікації теплофізичних характеристик досліджуваних об’єктів.

Об’єктом дослідження дисертаційної роботи є процеси теплообміну та обернені математичні моделі поширення процесів теплообміну.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є обчислювальні методи розв’язування прикладних обернених задач теплопровідності та моделі реальних теплових процесів, які зводяться до пошуку чисельного розв’язку лінійних та нелінійних обернених задач теплопровідності.

Методи дослідження базуються на використанні апарату чисельних методів розв’язування основних задач математичної фізики (методи дискретизації диференціальних рівнянь другого порядку, методи розв’язування систем алгебраїчних рівнянь, багатосіткові методи розв’язування задач математичної фізики, методи скінченних різниць і скінченних елементів), методів оптимізації (чисельні методи пошуку глобального екстремуму функцій багатьох змінних, методи пошуку глобального екстремуму функціонала) та методи моделювання (розробка комплексу програм розв’язування ОЗТ).

Наукова новизна отриманих результатів полягає в розробці методів та програмних засобів знаходження чисельного розв’язку прикладних багатовимірних (як лінійних, так і нелінійних) ОЗТ, а також у модифікації існуючих чисельних методів розв’язування ОЗТ, у яких суттєво зменшена загальна кількість обчислень, що необхідна для розв’язання ОЗТ. У роботі програмно реалізовано отримані методи розв’язування ОЗТ у середовищі MATLAB з використанням методів скінченних різниць і скінченних елементів.

Уперше:

- запропоновано інтерполяційний метод знаходження мінімуму квадратичного функціонала в класичній постановці ОЗТ отриманими модифікаціями методу Ньютона в матриці Гессе, що привело до зменшення обчислювальних затрат на пошук розв’язків ОЗТ у 3–10 разів;
- розроблено прикладну математичну модель протікання процесу теплообміну в замкненій системі з дифузійними поверхнями для вимірювання густини

теплового потоку на поверхні тепловідводу з метою розробки вимірювального еталону та можливості здійснення калібрування сенсорів.

<u>Удосконалено:</u>

- методи пошуку чисельного розв'язку різних класів багатовимірних ОЗТ модифікаціями класичного методу Ньютона. Отримані в роботі методи дають змогу отримати чисельні розв'язки основних класів ОЗТ з відносною помилкою розрахунків до $O(10^{-11})$;
- метод побудови початкового наближення для ітераційного процесу знаходження глобального мінімуму квадратичного функціонала в класичній постановці багатовимірної (лінійної та нелінійної) ОЗТ за допомогою розкладу в ряди та методу лінеаризації, що дозволило отримати якісні наближення до шуканих параметрів різних класів ОЗТ.

<u>Набули подальшого розвитку:</u>

- методи пошуку чисельних розв'язків прикладних науково-технічних задач, які зводяться до нелінійних ОЗТ з використанням розроблених методів багатовимірної оптимізації зі змінним кроком;
- багатосіткові методи знаходження розв'язку різних класів фізико-технічних завдань, які зводяться до ОЗТ ідентифікації внутрішніх джерел тепла методом скінченних елементів.

Практична цінність отриманих результатів полягає в тому, що запропоновані методи розв'язування ОЗТ дають змогу досить ефективно визначати невідомі параметри теплових фізичних процесів у твердих тілах, які математично описуються за допомогою обернених задач. Розроблена методика побудови початкового наближення у вигляді ряду Фур'є для знаходження розв'язку основних класів ОЗТ, яка дає можливість отримати шуканий чисельний розв'язок задач у 3–10 разів швидше, ніж класична процедура пошуку розв'язку таких задач. Експериментально встановлено, що метод найшвидшого спуску є найраціональнішим для розв'язування лінійних ОЗТ.

У роботі застосовані інтерполяційні методи для знаходження глобального мінімуму квадратичного функціонала в ОЗТ. У результаті застосування інтерполяційних методів, зменшено кількість обчислень для пошуку розв'язку нелінійних ОЗТ відновлення початкової умови (ПУ), граничних умов (ГУ), температур внутрішніх джерел тепла та коефіцієнта температуропровідності. Інтерполяційні методи були використані для пошуку мішаних частинних похідних другого порядку в класичному методі Ньютона в процедурі мінімізації квадратичного функціонала ОЗТ. Крім того, використання змінного кроку в серіях методу Ньютона та його модифікаціях, які отримані в роботі, дає змогу досить швидко отримати шуканий чисельний розв'язок ОЗТ з високою точністю. Запропоновані моделі ОЗТ дають змогу аналізувати роботу різних теплових процесів на підприємствах.

Розроблений комплекс програм дозволяє розв'язувати прикладні промислові задачі, що зводяться до розв'язування ОЗТ. Основні результати дисертаційної роботи використані в дослідженні процесу теплообміну у вимірювальній камері з радіаційним способом формування теплового потоку, у якій проводять калібрування засобів вимірювання за допомогою оцінки однорідності розподілу поверхневої густини теплового потоку на тепласприймальній поверхні випромінювача для відтворювання одиниці вимірювання високої інтенсивності при Інституті технічної теплофізики НАН України. Спрощені моделі дисертаційного дослідження активно використовуються під час проведення лабораторних занять із профільних технічних дисциплін (математичне моделювання складних систем, теорія керування та методи обчислень) у ПВНЗ «Київський міжнародний університет», а також для написання кваліфікаційних і магістерських робіт студентами технічних спеціальностей.

Особистий внесок здобувача. Наукові положення та пропозиції, що виносяться на захист, отримані автором особисто. У роботах, опублікованих у співавторстві, автору належать: [1] – побудовано ітераційні методи чисельного розв'язування основних класів ОЗТ на основі класичного методу Ньютона, методу предиктор-коректора та інтерполяційного методу знаходження чисельних похідних цільового функціонала ОЗТ; [3] – отримано математичну модель процесу теплообміну в системі з дзеркальними дифузійними поверхнями для розробки вимірювального еталону; [4] – проведено чисельний аналіз ефективності застосування отриманих чисельних методів розв'язування фізико-технічних задач у порівнянні з класичними; [7] – проведено чисельний аналіз методу побудови початкового наближення для розв'язування лінійних ОЗТ; [8] – проведено чисельний аналіз методів, які отримані в [1] для різних класів нелінійних ОЗТ з урахуванням узагальненої методики побудови початкової умови методики в [7]; [11] – експериментального показана ефективність отриманих у [1] методів для розв'язування нелінійних ОЗТ на відновлення коефіцієнта теплопровідності.

Апробація результатів роботи. Основні методи, моделі, ідеї, положення і результати досліджень доповідались, обговорювались та отримали позитивну оцінку на таких конференціях:

- XXI Міжнародна науково-практична конференція «Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси» (Київ, НАУ, 22–23 травня 2018 р.);
- Інтернет-конференція «Актуальні наукові дослідження у сучасному світі» (Переяслав-Хмельницький, 26–27 березня 2017 р.);
- Міжнародна науково-технічна Internet-конференція студентів і молодих вчених «Молода наука. Прогресивні технологічні процеси, технологічне оснащення» (Краматорськ, ДДМА, 30 березня 2017 р.);
- XXVI Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я» (Харків, НТУ ХПІ, 16–18 травня 2018 р.);
- Міжнародна заочна мультимедійна конференція «Роль фізики в розвитку міждисциплінарних наукових і навчальних напрямків» (Одеса, 2–5 травня 2016 р.);
- I Всеукраїнська науково-технічна конференція «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем» (Дніпропетровськ, 3–5 листопада 2015 р.);
- Міжнародна науково-практична конференція «Сучасна наука: проблеми та перспективи». Серія: Технічні науки (Київ, 13–14 жовтня 2015 р.);
- VI Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Актуальні наукові дослідження у сучасному світі» (Переяслав-Хмельницький, 26–27 жовтня 2015р.).

У повному обсязі робота доповідалась і обговорювалась на наукових семінарах кафедри комп'ютерних наук і системного аналізу Черкаського державного технологічного університету, на наукових семінарах кафедри прикладної математики та інформатики Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького та на семінарах кафедри комп'ютерних наук факультету інформаційних технологій ПВНЗ «Київський міжнародний університет».

Публікації. Основний зміст дисертаційної роботи відображено у 16 наукових публікаціях. Із них 8 статей у науково-фахових виданнях і збірниках у галузі технічних наук України (з них: 2 статті – у виданнях, включених у міжнародні наукометричні бази; 1 стаття іноземною мовою, яка включена до міжнародної наукометричної бази Scopus); 8 тез доповідей – на міжнародних та всеукраїнських конференціях.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел із 152 найменувань та 6 додатків. Загальний обсяг дисертації складає 216 сторінок. Основний зміст роботи викладено на 178 сторінках. Дисертація містить 97 рисунків і 27 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дисертаційної роботи обґрунтована актуальність теми, сформульована мета, вказані об'єкт та предмет дослідження, а також досліджена проблематика коректності методів знаходження чисельного розв'язку ОЗТ.

Перший розділ містить аналіз попередніх досліджень за даним напрямом. У ньому описані основні типи ОЗТ, які залежать від конкретних наукових технічних завдань. Даний розділ містить відомості про сучасні методи та алгоритми розв'язування ОЗТ відновлення початкової умови (ПУ), відновлення граничних умов (ГУ), відновлення коефіцієнта теплопровідності та методи розв'язування внутрішніх геометричних ОЗТ. У ньому висвітлені недоліки та переваги вже існуючих методів та алгоритмів. При знаходженні чисельного розв'язку основних класів ОЗТ відомими методами піднімаються актуальні питання, які стосуються коректності постановки ОЗТ та підвищення швидкості збіжності цих чисельних методів.

Другий розділ містить розроблені методи прискорення знаходження чисельного розв'язку різних класів багатовимірних ОЗТ. У цьому розділі описаний метод побудови наближення до ПУ за допомогою використання розкладів у ряд Фур'є для лінійних і нелінійних ОЗТ. Для лінійних ОЗТ експериментально обґрунтований вибір методу найшвидшого спуску, який застосовується для мінімізації квадратичного функціонала в ОЗТ. Для нелінійних ОЗТ експериментально обґрунтований вибір модифікацій класичного методу Ньютона для розв'язування задач умовної оптимізації з обмеженнями у вигляді диференціальних рівнянь. У цьому розділі отримано також низку модифікацій класичного методу Ньютона, які спрямовані на підвищення порядку точності та зменшення загальної кількості обчислень, які необхідні для знаходження чисельного розв'язку ОЗТ певного класу.

Нехай в області $D\times[0,\tau],\ D\subset\mathbb{R}^n$ маємо рівняння теплопровідності [1; 2; 4; 5; 8]:

$$\rho C\left(\partial T/\partial t\right)=\nabla\left(k\nabla T\right). \qquad (1)$$

Повний розв’язок рівняння (1) в заданій розрахунковій області має такі складові:

- значення температури в усіх внутрішніх точках розрахункової області задачі, тобто для $\forall x \in D$, $\forall t \in [0, \tau]$ відомий розподіл $T(x,t)$. Це означає, що відомі розподіли в початковий момент часу:

$$T_{init}(x) = T(x,0) \tag{2}$$

і кінцевий момент часу

$$T_{fin}(x) = T(x,\tau); \tag{3}$$

- граничні умови:

$$\partial D = \partial D_D + \partial D_N,\ x \in \partial D_D : T = T(x,\tau);\ x \in \partial D_N:\ \partial T / \partial \vec{n} = p(x,\tau), \tag{4}$$

де ∂D – границя розрахункової області; ∂D_D – це частина границі (можливо, порожня), на якій задана умова Дирихле; ∂D_N – частина границі, на якій задана умова Неймана; $\vec{n}$ – нормаль до границі розрахункової області;

- залежність параметрів задачі від координат і температури:

$$\rho = \rho(x,T),\ C = C(x,T),\ k = k(x,T), \tag{5}$$

де ρ – густина; C – теплоємність; k – коефіцієнт температуропровідності.

З урахуванням указаних вище складових про повний розв’язок ПЗТ для рівняння (1) ПЗТ можна сформулювати так [1; 5; 8]. Нехай задано рівняння (1), початковий розподіл температури (2), граничні умови (4), залежності параметрів від координат і температури (5). Потрібно знайти розподіл температури (3) у фіксований момент часу τ і як проміжний результат – значення температури в усіх внутрішніх точках розрахункової області рівняння (1) для $\forall t \in [0, \tau]$.

Першою ОЗТ у роботі розглядається ОЗТ, яку можна сформулювати так [1; 8]. Нехай задано рівняння (1), кінцевий розподіл температури (3), граничні умови (4), залежності параметрів від координат та температури (5). Необхідно знайти початковий розподіл температури (2) і, як проміжний результат, значення температури в усіх внутрішніх точках області для $\forall t \in [0, \tau]$. При цьому ОЗТ вважається розв’язаною, якщо знайдено такий початковий розподіл температури $\overline{T_{init}}(x) = \overline{T}(x,0)$: розв’язок ПЗТ з початковою умовою (2) цього розподілу $T\left(\overline{T_{init}}\right)$ збігається з потрібним кінцевим розподілом T_{fin} в (3).

Поставлену вище ОЗТ можна подати у вигляді такого функціонала, для якого потрібно знайти початковий розподіл температури $\overline{T_{init}}$:

$$J\left(\overline{T_{init}}\right) = \left\| T\left(\overline{T_{init}}\right) - T_{fin} \right\| \to \min. \tag{6}$$

За норму в (6) обрано норму L_2, тобто $\|x\| = \sqrt{\int_D x^2 dD}$ або, у дискретному випадку $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$. При цьому слід зазначити, що для заданого початкового розподілу $\overline{T_{init}}$ значення $T\left(\overline{T_{init}}\right)$ можна знайти в результаті розв’язання диференціального рівняння (1). Для скорочення запису введемо позначення для рівняння теплопровідності (1):

$$L(T,\theta) = 0. \tag{7}$$

З рівняння (7) випливає, що розв'язок рівняння (1) отримано з використанням шуканого параметра θ, у даному випадку – з початковою умовою (2). Можна вважати, що диференціальне рівняння (7) для задачі (6) є обмеженням. Як результат отримуємо задачу на пошук глобального мінімуму функціонала (6) з обмеженням у вигляді диференціального рівняння (7). Задачі на пошук екстремуму з обмеженнями записують за допомогою множників Лагранжа, тобто задачу можна подати у вигляді $\int_D \left(T(\theta)-T_{fin}\right)^2 dD+\lambda L(T,\theta)\to \min$.

Тут потрібно знайти початковий розподіл температури $\theta=\overline{T_{init}}$ такий, що розподіл $T(\theta)$ дає глобальний мінімум функціонала:

$$J(\theta)=\int_D \left(T(\theta)-T_{fin}\right)^2 dD\to \min, \tag{8}$$

причому для довільних початкових умов $\theta=\overline{T_{init}}$ значення $T(\theta)$ є результатом розв'язання диференціального рівняння (7).

Другою задачею в роботі є задача пошуку граничної умови [1]. Її можна сформулювати так. Нехай задано рівняння (1), початковий розподіл температури (2), кінцевий розподіл температури (3), граничні умови задано на частині границі у вигляді (4), залежності параметрів від координат та температури (5). Необхідно знайти граничні умови (4) на тій частині границі розрахункової області, на якій вони не задані (відсутні) і як проміжний результат – значення температури в усіх внутрішніх точках області. При цьому ОЗТ вважається розв'язаною тоді, коли знайдено такий розподіл температури або тепловий потік на границі області, де вона не була заданою раніше, що розв'язок ПЗТ з використанням знайдених граничних умов збігається з потрібним кінцевим розподілом T_{fin}. Також у роботі розглянута третя ОЗТ – це ОЗТ відновлення коефіцієнта температуропровідності [1; 6]. Чисельні розв'язки всіх розглянутих у роботі ОЗТ отримані методом скінченних різниць і методом скінченних елементів для задач.

Мінімізація функціонала (8) зводиться до розв'язування системи [1; 2; 5; 8]:

$$\left\{\partial J/\partial(\theta_i)=0\right\}, i=\overline{1,N}, \tag{9}$$

де θ_i – шукане значення температури в i-му вузлу розрахункової сітки; N – загальна кількість вузлів, у яких потрібно знайти значення температури.

Система (9) для нелінійних задач розв'язується методом Ньютона та його модифікаціями, а для лінійних – методом найшвидшого спуску. Завдання оптимізації можна сформулювати так. Серед існуючих чисельних методів оптимізації, подібних до класичного методу Ньютона, отримати найефективніші для розв'язування ОЗТ і зменшити в них загальну кількість викликів процедури розв'язку ПЗТ [12; 13]. Модифікації класичного методу Ньютона призводять до заміни розв'язування системи рівнянь виду $F_i(\overline{x})=F_i(x_1,...,x_n)=0$ розв'язуванням послідовності систем [8]:

$$\begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_1\left(\overline{x}^k\right) & ... & \partial F_1/\partial x_n\left(\overline{x}^k\right) \\ ... & ... & ... \\ \partial F_n/\partial x_1\left(\overline{x}^k\right) & ... & \partial F_n/\partial x_n\left(\overline{x}^k\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k+1}-x_1^k \\ ... \\ x_n^{k+1}-x_n^k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_1\left(\overline{x}^k\right) \\ ... \\ F_n\left(\overline{x}^k\right) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Матрицею системи у формулі (10) є гессіан:

$$H\left(\theta^{(k)}\right)=\left\{\partial^2 J/\left(\partial\theta_i\partial\theta_j\right)\left(\theta^{(k)}\right)=0\right\}, \tag{11}$$

де k – номер ітерації методу.

Розв'язки таких задач можна отримати тільки чисельно, тобто у вигляді таблиць значень. Усі похідні в (11) повинні бути задані також тільки чисельно. Класичний метод Ньютона для розглянутих у роботі ОЗТ має вигляд:

$$G^k\Delta\theta^k=-R^k,\ \theta^{k+1}=\theta^k+\Delta\theta^k, \tag{12}$$

де $G=\left(G_{ij}\right)=\left(\partial^2 J/\partial\theta_i\partial\theta_j\right)$ – матриця Гессе; $\Delta\theta=\left(\Delta\theta_1,...,\Delta\theta_n\right)^T$ – вектор-стовпець приростів параметрів; $R=\left(R_1,...,R_n\right)^T=\left(\partial J/\partial\theta_1,...,\partial J/\partial\theta_n\right)^T$ – вектор-стовпець, що складається з похідних цільового квадратичного функціонала.

Використання методів, які описані у [8], приводить до модифікацій класичного методу Ньютона (12) зі змінним кроком.

Перша модифікація методу зі змінним кроком матиме вигляд [8]:

$$\begin{gathered}
J\left(\bar\theta^{(k)}-\beta_k\cdot\nabla J\left(\bar\theta^{(k)}\right)\right)=\min J\left(\bar\theta^{(k)}-\beta\cdot\nabla J\left(\bar\theta^{(k)}\right)\right),\ \beta>0,\\
\bar z=\bar\theta^{(k)}-\beta\cdot H^{-1}\left(\bar\theta^{(k)}\right)J\left(\bar\theta^{(k)}\right),\ \ J\left(\bar z-h_k\cdot\nabla J\left(\bar z\right)\right)=\min J\left(\bar z-h\cdot\nabla J\left(\bar z\right)\right),\ h>0,\\
\bar\theta^{(k+1)}=\bar\theta^{(k)}-2h_k\cdot\left(H\left(\bar\theta^{(k)}\right)+H\left(\bar z\right)\right)^{-1}J\left(\bar\theta^{(k)}\right),
\end{gathered} \tag{13}$$

де $\bar\theta^{(k)}$ – вектор невідомих задачі на ітерації k; H – матриця Гессе; h_k – крок методу на ітерації k. Метод (13) має другий порядок точності. Аналогічно друга модифікація методу Ньютона зі змінним кроком матиме такий вигляд:

$$\begin{gathered}
J\left(\bar\theta^{(k)}-\beta_k\cdot\nabla J\left(\bar\theta^{(k)}\right)\right)=\min J\left(\bar\theta^{(k)}-\beta\cdot\nabla J\left(\bar\theta^{(k)}\right)\right),\ \beta>0,\\
\bar z=\bar\theta^{(k)}-\beta\cdot H^{-1}\left(\bar\theta^{(k)}\right)J\left(\bar\theta^{(k)}\right),\ \ J\left(\bar z-h_k\nabla J\left(\bar z\right)\right)=\min J\left(\bar z-h\cdot\nabla J\left(\bar z\right)\right),\ h>0,\\
\bar\theta^{(k+1)}=\bar\theta^{(k)}-h_k\cdot\left(H\left(\bar\theta^{(k)}\right)\cdot H\left(\bar z\right)\right)^{-1}\left(H\left(\bar\theta^{(k)}\right)+H\left(\bar z\right)\right)J\left(\bar\theta^{(k)}\right)\Big/2.
\end{gathered} \tag{14}$$

Метод (14) також має другий порядок точності. Третя модифікація методу Ньютона зі змінним кроком матиме такий вигляд:

$$\begin{gathered}
J\left(\bar\theta^{(k)}-\beta_k\cdot\nabla J\left(\bar\theta^{(k)}\right)\right)=\min J\left(\bar\theta^{(k)}-\beta\cdot\nabla J\left(\bar\theta^{(k)}\right)\right),\ \beta>0,\\
\bar z=\bar\theta^{(k)}-\beta\cdot H^{-1}\left(\bar\theta^{(k)}\right)J\left(\bar\theta^{(k)}\right),\ \ J\left(\bar z-h_k\cdot\nabla J\left(\bar z\right)\right)=\min J\left(\bar z-h\cdot\nabla J\left(\bar z\right)\right),\ h>0,\\
\bar\theta^{(k+1)}=\bar\theta^{(k)}-h_k H^{-1}\left(\left(\bar\theta^{(k)}+\bar z\right)\Big/2\right)J\left(\bar\theta^{(k)}\right).
\end{gathered} \tag{15}$$

Слід зазначити, що метод (15) має третій порядок точності.

Можна прискорити методи (13), (14) і (15), якщо для знаходження вектора $\bar\theta$ використати метод найшвидшого спуску.

Третій розділ містить основні результати моделювання обернених (лінійних і нелінійних) задач теплопровідності пошуку ПУ, ГУ та коефіцієнта теплопровідності. У ньому для лінійних ОЗТ експериментально обґрунтований вибір методу найшвидшого спуску для мінімізації квадратичного функціонала ОЗТ. Також у ньому для пошуку чисельного розв'язку нелінійних ОЗТ обрано отримані в попередньому розділі модифікації класичного методу Ньютона. Крім того, для прискорення збіжності ітераційного процесу, тобто для зменшення кількості ітерацій, проведено інтерполяцію багатовимірною поверхнею другого порядку для обчислення мішаних чисельних похідних у матриці Гессе [8]. Розроблені методи були протестовані на низці задач, серед них і на задачах 1–3, математичні формулювання яких наведені нижче.

Задача 1. Знайти глобальний мінімум функціонала:

$$J\left(\theta\left(\bar{x}\right)\right)=\int_{\Omega}\left(T\left(\theta,\bar{x},t_f\right)-\Theta\left(\bar{x}\right)\right)^2 d\bar{x}\rightarrow \min,\ \bar{x}=\left(x_1,x_2\right), \tag{16}$$

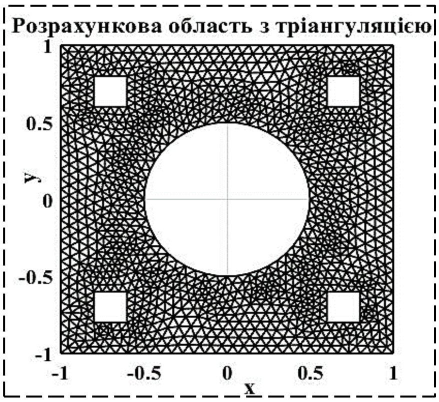

Рис. 1 – Розрахункова область: 1348 вузлів; 2472 елементи; 232 граничних елементи

де Ω – розрахункова область; $\theta\left(\bar{x}\right)$ – невідома (шукана) функція; $T\left(\theta,\bar{x},t_f\right)$ – шуканий розв'язок задачі, який залежить від $\theta\left(\bar{x}\right)$; $\Theta\left(\bar{x}\right)$ – заданий розподіл температури в момент часу t_f.

Розрахункова область Ω разом із сіткою зображена на рисунку 1. Вона є квадратом зі стороною 2 і центром у початку координат. Із цього квадрата вирізано: коло, що має центр у початку координат і радіус якого дорівнює 0,5; та чотири квадрати зі сторонами 0,2 з центрами в точках $(-0{,}5;-0{,}5)$, $(-0{,}5;0{,}5)$, $(0{,}5;-0{,}5)$, $(0{,}5;0{,}5)$ відповідно. Обмеження для (16) записується так:

$$\begin{gathered}\partial T/\partial t=\nabla\left(k\nabla T\right)+f,\\ k\left(T\right)=T^2-T+\sin T+1,\ \ f\left(x_1,x_2,T\right)=\cos\left(T-x_1+x_2\right)+x_1^2+x_2^2,\ \ t\in\left[0,t_f\right],t_f=0{,}3.\end{gathered} \tag{17}$$

При цьому граничні умови для (17) мають такий вигляд:

$$T\left(-1,x_2,t\right)=\sin\pi x_2,\ \ \partial T/\partial x_1\left(1,x_2,t\right)=\partial T/\partial x_2\left(x_1,-1,t\right)=\partial T/\partial x_2\left(x_1,1,t\right)=\partial T/\partial\vec{n}\Big|_{\Gamma_{inside}}=0, \tag{18}$$

де $\vec{n}$ – нормаль до границі області (у даному випадку до внутрішньої Γ_{inside}). Температурне поле для (17) з граничними умовами (18) для (16) має вигляд:

$$T_{fin}\left(\bar{x}\right)=T\left(\bar{x},t_f\right), \tag{19}$$

причому розподіл $T_{fin}\left(\bar{x}\right)$ представлено на рис. 2 (ліворуч).

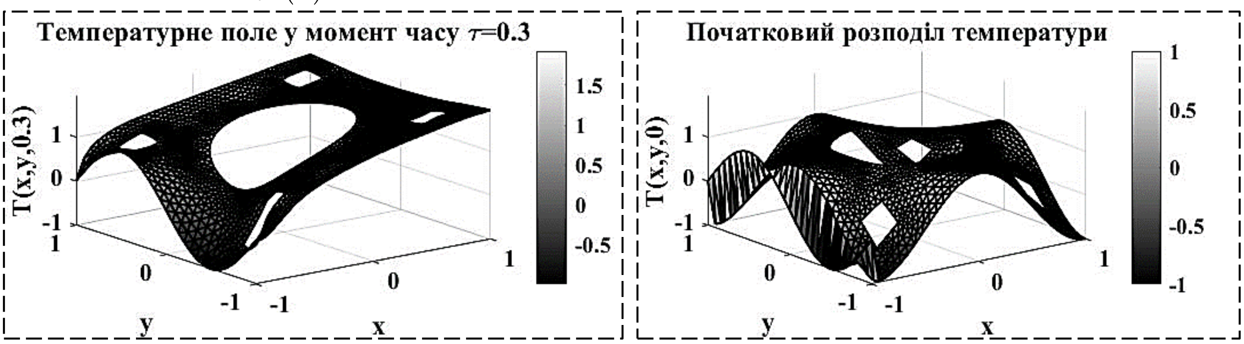

Рис. 2 – Розподіл температури: зліва – при t=0,3; справа – температурне поле при t=0

На рис. 2 справа показано знайдений розв’язок поставленої задачі – початкове температурне поле. Результати чисельних експериментів наведено на рис. 2 (праворуч), рис. 3 та рис. 4.

Рис. 3 – Порівняльний аналіз роботи методів на поставленій нелінійній задачі за критерієм збіжності відповідних методів

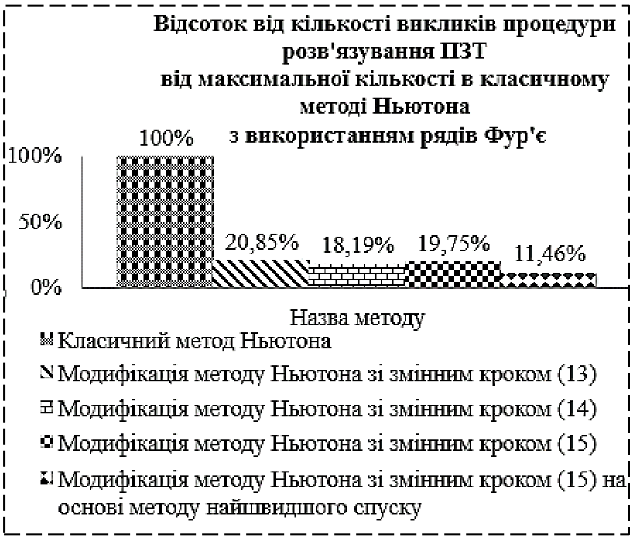

Рис. 4 – Порівняльний аналіз роботи методів розв’язування задачі: зліва – з нульовим наближенням; справа – з наближенням за допомогою ряду Фур’є [7; 14] (4 члени розкладу в ряд)

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що модифікації методів Ньютона працюють на нелінійних задачах пошуку ПУ значно ефективніше порівняно з класичним методом Ньютона. Нижче сформулювана друга нелінійна ОЗТ відновлення граничної умови.

Задача 2. Знайти глобальний мінімум функціонала:

$$J\left(\theta(y)\right)=\int_{\Gamma_1}\left(\partial T(\theta,x,y)/\partial x\Big|_{\Gamma_2}-\Theta(y)\right)^2 dy\to\min, \tag{20}$$

де $\theta(y)$ – шукана зовнішня гранична умова другого роду (умова Неймана) на правій зовнішній границі розрахункової області $y\in[0,2;0,8]$; $T(\theta,x,y)$ –температурне поле на всій області; Γ_1 – границя, на якій потрібно знайти розподіл температури – це права зовнішня границя розрахункової області для $y\in[0,2;0,8]$; Γ_2 – внутрішня права границя вирізаного прямокутника у розрахунковій області Ω для $y \in [0,2;0,8]$; $\Theta(y)$ – заданий температурний потік на правій частині розрахункової області Γ_2.

Додаткове обмеження для функціонала (20) має вигляд:

$$\nabla(k\nabla T) = -f,\ \ k = k(T) = \left(T^2 + \sin(T/100) + 2\right)/100,\ \ f = f(x,y) = 10\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right). \qquad (21)$$

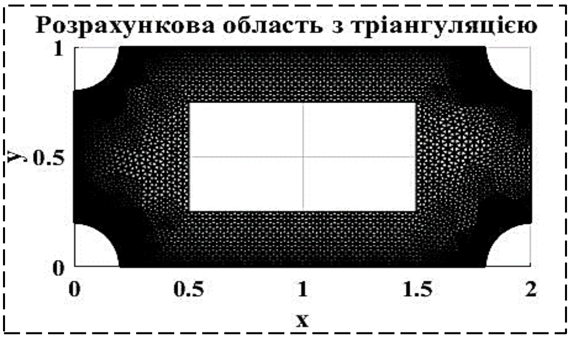

Рис. 5 – Розрахункова область: 932 вузла, 1680 елементів, 184 граничних елемента

Розрахункова область Ω для (21) зображена на рис. 5. Вона є прямокутником, який має розміри 2x1. Ліва нижня вершина цього прямокутника лежить у початку координат. Із нього вирізано прямокутник з центром у точці $(1;0,5)$, який має розміри 1x0,5 та чотири чверті кіл, кожна з яких має радіус, який дорівнює 0,2 з центрами, розміщеними у вершинах великого прямокутника (рис. 5).

Граничні умови для (21) мають вигляд:

$$T\big|_{\Gamma_{inside}} = 50,\ \ T\big|_{\Gamma_{outside}\setminus(\Gamma_1\cup\Gamma_3)} = 30,\ \ \partial T/\partial\vec{n}\Big|_{\Gamma_3} = 0,\ \ \partial T/\partial\vec{n}\Big|_{\Gamma_2} = \Theta(y), \qquad (22)$$

де Γ_{inside} – уся внутрішня границя розрахункової області; $\Gamma_{outside}$ – уся зовнішня границя розрахункової області; $\vec{n}$ – нормаль до границь області; Γ_3 – частина зовнішньої границі у формі чотирьох чвертей кіл області Ω. У задачі 2 потрібно знайти невідому граничну умову $\theta = \Gamma_1$ та відповідне їй температурне поле $T(\theta, x, y)$ всієї розрахункової області Ω. Результати розрахунків наведено на рис. 6 і рис. 7.

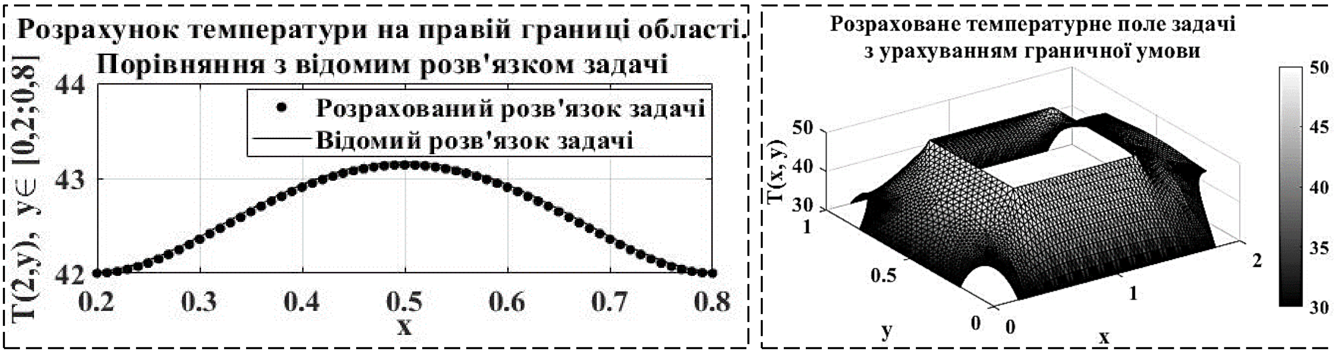

Рис. 6 – Знайдена зовнішня гранична умови на правій частині розрахункової області (зліва) та розраховане температурне поле при відновленій граничній умові (справа)

Рис. 7 – Порівняльний аналіз роботи алгоритмів за критерієм збіжності (зліва) та критерієм кількості обчислювальних затрат з розкладом граничної умови в ряд (справа)

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що модифікації методів Ньютона (13)–(15) працюють на нелінійних задачах пошуку граничних умов значно ефективніше, ніж класичний метод Ньютона.

Тепер розглянемо третю задачу в такій математичній постановці.

Задача 3. Знайти глобальний мінімум функціонала [10; 11]:

$$J\left(\theta\left(x,y\right)\right)=\int_0^1\int_0^1\left(T\left(\theta,x,y,t_f\right)-T_{fin}\left(x,y\right)\right)^2 dxdy \to \min, \tag{23}$$

де $T\left(\theta,x,y,t_f\right)$ – розв'язок задачі; $\theta\left(x,y\right)$ – шуканий розподіл коефіцієнта температуропровідності в усій розрахунковій області на $\left(x,y\right)\in\left[0;1\right]^2$; $T\left(\theta,x,y,t_f\right)$ – розраховане температурне поле в момент часу t_f; $T_{fin}\left(x,y\right)$ – розподіл температури в усій розрахунковій області задачі:

$$\begin{gathered}\partial T/\partial t=\partial\left(\theta\left(x,y,T\right)\partial T/\partial x\right)/\partial x+\partial\left(\theta\left(x,y,T\right)\partial T/\partial y\right)/\partial y+f,\\ g\left(x,y\right)=\left(\cos\left(2\pi tx\right)+\cos\left(3\pi ty\right)\right)^2+1,\\ f\left(x,y\right)=4\pi^2t^2\cos\left(2\pi tx\right)g^{-1}\left(x,y\right)-3\pi y\sin\left(3\pi ty\right)-2\pi x\sin\left(2\pi tx\right)+\\ +2\pi^2t^2\left(\cos\left(2\pi tx\right)+\cos\left(3\pi ty\right)\right)\left(4\sin^2\left(2\pi tx\right)+9\sin^2\left(3\pi ty\right)\right)g^{-2}\left(x,y\right),\\ \left(x,y\right)\in[0;1]^2,\ t\in\left[0,t_f\right],\ t_f=0,5.\end{gathered} \tag{24}$$

Початкова умова має вигляд:

$$T(x,y,0)=2. \tag{25}$$

Граничні умови задачі мають такий вигляд:

$$\begin{gathered}T(x,0,t)=1+\cos\left(2\pi tx\right),\ \ T(x,1,t)=\cos\left(2\pi tx\right)+\cos\left(3\pi t\right),\\ T(0,y,t)=1+\cos\left(3\pi ty\right),\ \ T(1,y,t)=\cos\left(3\pi ty\right)+\cos\left(2\pi t\right).\end{gathered} \tag{26}$$

Додаткова умова в момент часу $t_f=0,5$ має вигляд:

$$T(x,y,0.5)=T_{fin}\left(x,y\right)=\cos\left(\pi x\right)+\cos\left(3\pi y/2\right). \tag{27}$$

У поставленій задачі необхідно знайти коефіцієнт температуропровідності. Результати моделювання наведено на рис. 8.

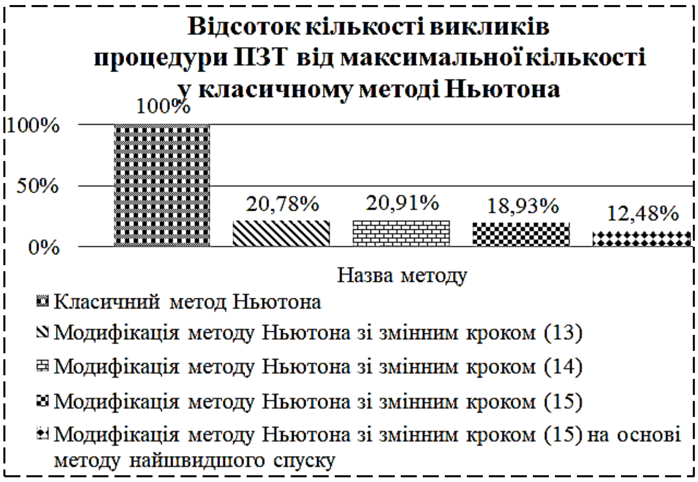

Рис. 8 – Порівняльний аналіз роботи методів за кількістю викликів процедури розв'язку ПЗТ

Під час тестування методів з'ясувалось, що знову ж модифікації методів Ньютона (13)–(15) працюють на нелінійних задачах пошуку коефіцієнта теплопровідності значно ефективніше, ніж класичний метод Ньютона. Розглянуті в роботі завдання були розв'язані з використанням сіток різної розмірності. Для кожної нелінійної задачі найбільше викликів функції дає класичний метод Ньютона. Для всіх розв'язаних у роботі задач кількість викликів процедури розв'язування ПЗТ класичним методом

Ньютона приймалась за 100%. Даний розділ містить результати роботи розробленого програмного комплексу моделювання різних прикладних ОЗТ з використанням програмних пакетів MATLAB та COMSOL Multiphysics. Програмний пакет COMSOL дає можливість створювати різні одновимірні, двовимірні та тривимірні об'єкти, у яких досліджуються певні фізичні процеси. Практична частина розділу дає змогу виконувати різні прикладні фізико-технічні завдання, які полягають у знаходженні чисельних розв'язків ОЗТ для об'єктів різноманітної геометричної форми.

Четвертий розділ містить прикладні моделі теплових промислових процесів, які зводяться до знаходження чисельного розв'язку багатовимірних лінійних і нелінійних ОЗТ. Практична частина четвертого розділу доводить ефективність методів, які розроблені в другому розділі, а також доводить ефективність застосування багатосіткових методів для знаходження розв'язків ПЗТ, які неодноразово розв'язуються для отримання чисельного розв'язку ОЗТ. У даному розділі розроблено та реалізовано дві прикладні моделі ОЗТ. Першою моделлю є модель оптимізації температур нагрівачів промислової печі. Друга модель – модель теплообміну в замкненій системі з дзеркальними дифузійними поверхнями.

<u>Модель оптимізації промислової печі</u>. Нехай у піч покладено об'єкт. При цьому піч не спроможна нагріти об'єкт до заданої температури [6; 16]. Для підвищення ефективності роботи печі в неї вмонтовані точкові нагрівачі, розташування яких задається двома просторовими координатами. Потрібно знайти такі значення температур цих нагрівачів, щоб температура на об'єкті була близька до заданої. При цьому необхідно розрахувати температурне поле всередині печі, яке утвориться внаслідок дії нагрівачів при отриманих значеннях їх температур.

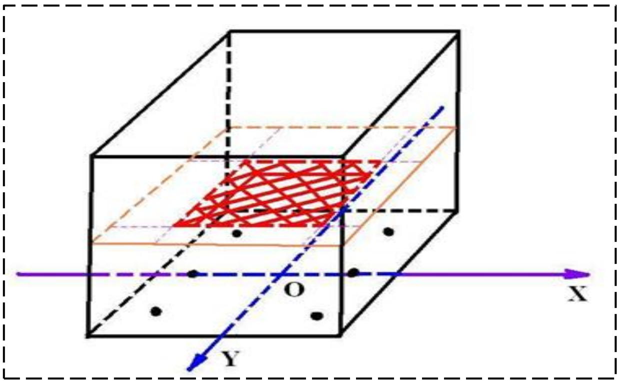

Рис. 9 – Положення об'єкту печі

Для простоти розглянемо задачу, у якій об'єкт має елементарну геометричну форму. Нехай об'єкт печі – прямокутник, який поміщено в область печі (див. рис. 9).

Математичне формулювання задачі. Знайти глобальний мінімум функціонала:

$$J\left(\overline{\alpha}\right)=\iint_{D_{object}}\left(T_{actual}-T\left(\overline{\alpha}\right)\right)^2 ds \tag{28}$$

при обмеженні

$$\nabla\left(k\nabla T\right)=0 \text{ на } D\in\left(x,y\right), D\subset R^2, \tag{29}$$

де T_{actual} – задана температура, яка повинна бути на об'єкті печі; D_{object} – область, у якій перебуває об'єкт печі; D – область всієї печі $\left(D_{object}\subset D\right)$; $\overline{\alpha}=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$ – шукані значення температур убудованих у піч нагрівачів; n – кількість убудованих у піч нагрівачів.

Із математичної постановки ОЗТ (28), (29) випливає, що вона належить до оптимізаційних задач з обмеженнями у вигляді диференціальних рівнянь [6; 8; 9; 15].

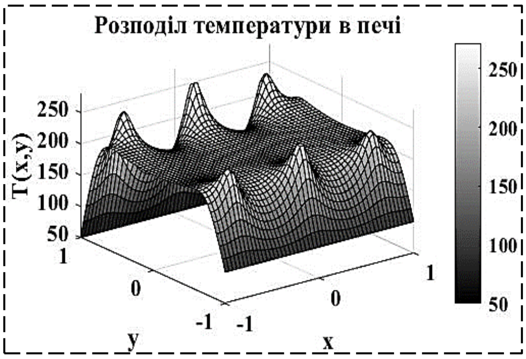

Рис. 10 – Розподіл температури в печі

Нижче наведені основні результати моделювання для таких вхідних даних. На двох протилежних стінках задана умова теплоізоляції (похідна дорівнює 0), на інших двох – постійна температура 50°С та 100°С відповідно. Крім того, задана температура на об’єкті печі – 200°С. На рис. 10 показано основні результати реалізації моделі. Отримані такі температури точкових нагрівачів (221,234°С, 250,763°С, 221,652°С, 213,842°С, 217,732°С, 213,832°С). Звідси випливає, що розподіл температури на об’єкті печі близький до заданого, тобто до значення 200°С. При цьому значення функціоналу (28) дорівнює 0,2.

<u>Модель протікання процесу теплообміну в замкненій системі з дзеркальними дифузійними поверхнями</u>. Для реалізації процесу відтворювання одиниці вимірювання високої інтенсивності розглядається вимірювальна комірка, яка є замкнутим простором, що утворений двома дифузійними випромінювальними поверхнями: джерела та стоку теплової енергії, а також захисного екрана [3]. На рис. 11 показана двовимірна модель вимірювальної комірки пристрою. Випромінювач разом з екраном утворюють порожнину у формі паралелепіпеда, на всіх поверхнях якого підтримується постійна температура *T*. Внутрішня поверхня порожнини виготовлена з полірованого алюмінію, тепловідвід – з алюмінієвого сплаву. Джерелом випромінювання в моделі є галогенні лампи розжарювання. Для розрахунку теплообміну випромінюванням та оцінки ступеня рівномірності теплового поля на поверхні тепловідводу необхідно знати, яка частина теплової енергії, що випромінюється однією з поверхонь (у нашому випадку, лампою), потрапляє на іншу поверхню (тепловідвід) [9]. Для дифузно випромінювальних і відбивальних поверхонь ця інформація цілком може бути отримана з розрахунків кутових коефіцієнтів випромінення, а для поверхонь, що дзеркально відбивають, необхідно визначити роздільний кутовий коефіцієнт теплового випромінювання з урахуванням багатократного перевідбиття від поверхонь даної системи. Роздільний кутовий коефіцієнт теплового випромінювання для замкненої системи розраховується за формулою [3]:

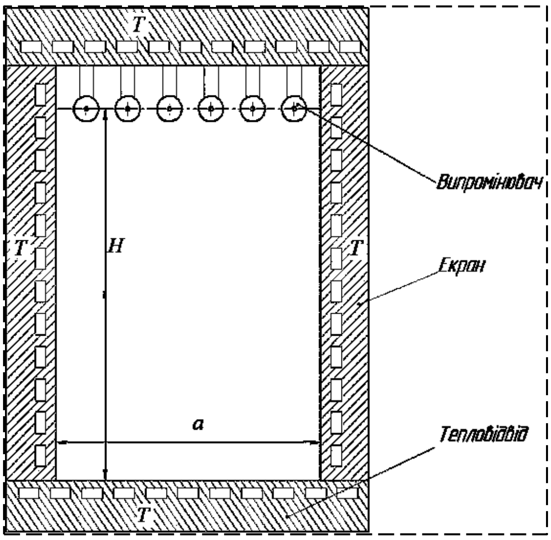

Рис. 11 – Двовимірна модель вимірювальної комірки пристрою, що реалізує радіаційний метод відтворення теплового потоку високої інтенсивності

$$\Phi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{4} r_i \cdot \varphi_{i-1}, \tag{30}$$

де φ_0 – кутовий коефіцієнт випромінення між поверхнею площини, у якій розміщено лампи, і поверхнею тепловідводу; r_i – коефіцієнт відбиття i-ї поверхні екрана; φ_{i-1} – кутові коефіцієнти випромінення між i-ю поверхнею екрана та поверхнею тепловідводу. Розподіл кутових коефіцієнтів при поширенні теплового випромінення від поверхні площини, у якій розміщено лампи до поверхні тепловідводу, розраховується за допомогою виразу [3]:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{a/H}{\sqrt{1+(a/H)^2}} arctg\left(\frac{b/H}{\sqrt{1+(a/H)^2}}\right) + \frac{b/H}{\sqrt{1+(b/H)^2}} arctg\left(\frac{a/H}{\sqrt{1+(b/H)^2}}\right)\right], \tag{31}$$

де a – відстань, на яку зміщена елементарна площина на поверхні тепловідводу від бічної поверхні. Розподіл локальних значень кутових коефіцієнтів випромінення внутрішньої поверхні екрана висотою H, що містить в основі квадрат, який міститься для випадку теплообміну між поверхнею тепловідводу та всіх бічних граней, розраховується відповідно до виразу [3]:

$$\varphi_{i-1} = \left[arctg\left(b/c\right) - c\left((H/b)^2 + (c/b)^2\right)^{-1/2} / b \cdot arcctg\left(\sqrt{(H/b)^2 + (c/b)^2}\right)\right] \Big/ 2\pi, \tag{32}$$

де c – відстань, на яку зміщена площадка на поверхні тепловідводу від бічної поверхні екрана; b – ширина внутрішньої поверхні екрана.

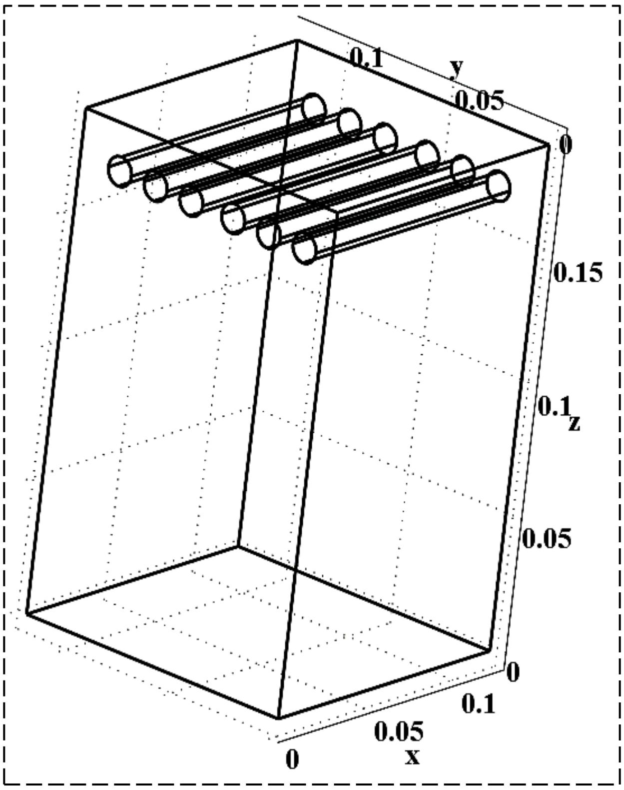

Рис. 12 – Розрахункова область для визначення теплового потоку на поверхні тепловідводу

Областю розрахунку є прямий паралелепіпед, що має виміри $a = 0{,}12$ м, $b = 0{,}12$ м, $c = 0{,}19$ м. На основі результатів вимірювань для порожнини з висотою екрана $H = 170$ мм, стороною квадрата 120 мм в основі та з урахуванням того, що всі бічні поверхні мають однакову геометрію та теплофізичні характеристики ($r_i = 0{,}92$), отримані значення кутових коефіцієнтів, які дорівнюють: $\varphi_0 = 0{,}11$; $\varphi_{i-1} = 0{,}096$; $\Phi = 0{,}484$. Паралелепіпед заповнено повітрям. Всередині розрахункової області розташовано шість внутрішніх нагрівачів (галогенних ламп) у формі циліндра з постійним тепловим потоком на їх стінках, осі яких розташовані на відстані 11 мм від верхньої площини паралелепіпеда (рис. 12). Потрібно визначити такий тепловий потік на поверхні кожної із 6 ламп, щоб розподіл теплового потоку на поверхні нижньої грані паралелепіпеда був близький до необхідного за умови, що на стінках області розрахунку буде підтримуватися постійна температура $T_{external} = 300K$ (умова термостатування). На рис. 13 наведені основні результати моделювання теплового процесу.

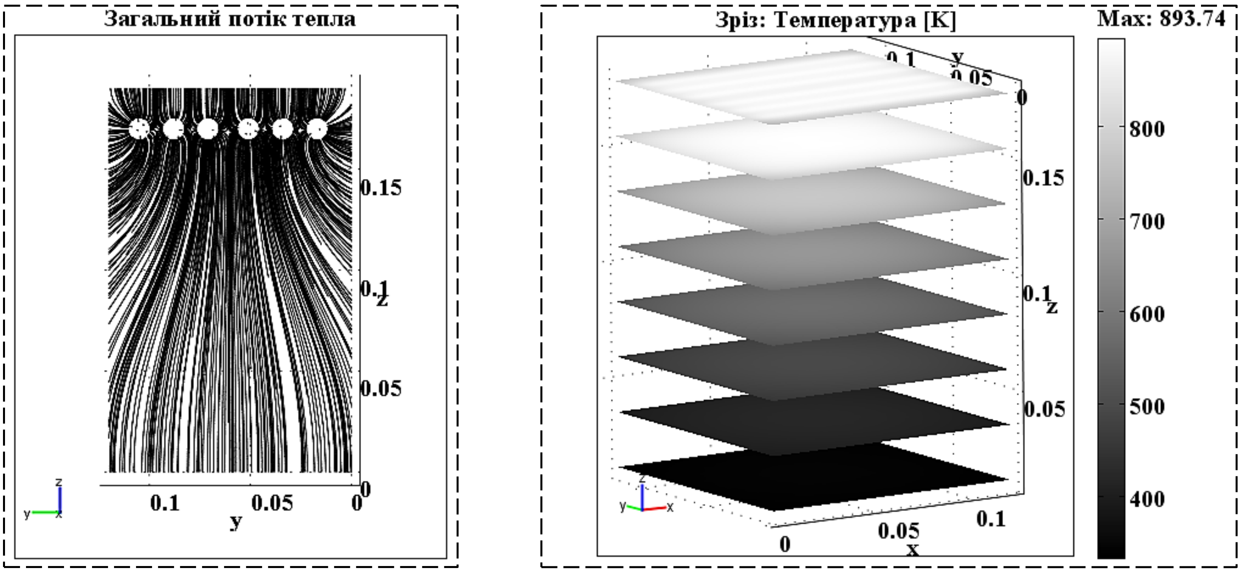

Рис. 13 – Результати моделювання: зліва – напрям потоку вздовж осей ламп; справа – зрізи розподілу температури в розрахунковій області

Поставлена задача була розв’язана методом скінченних елементів на сітці, що має 53647 вузлів, 291600 елементів і 18270 граничних елементів. На рис. 13 представлено основні розрахунки температурного поля всередині розрахункової області розглянутого в роботі завдання. При цьому знайдена щільність теплового потоку від внутрішнього джерела (галогенних ламп) становить 447,585 кВт/м^2. У результаті проведення чисельного аналізу моделі, яка описана вище, радіаційна складова теплового потоку має найбільше значення на тепловідводі – 90% від загального теплового потоку.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальне науково-технічне завдання розробки нових та модифікації існуючих методів розв’язування основних класів лінійних і нелінійних багатовимірних ОЗТ, що дозволило підвищити ефективність розв’язання різних задач моделювання теплофізичних процесів, зокрема, ОЗТ відновлення ПУ, ОЗТ відновлення ГУ, ОЗТ відновлення коефіцієнта температуропровідності та ОЗТ відновлення температур і теплових потоків поверхонь внутрішніх джерел тепла.

У роботі отримано такі теоретичні та практичні результати.

1. Розроблено чисельні методи підвищеної точності розв’язування різних класів лінійних і нелінійних ОЗТ на основі класичного методу Ньютона та методу найшвидшого спуску, які дають змогу отримати чисельні розв’язки ОЗТ в 3–10 разів швидше, ніж класичні методи розв’язування ОЗТ.
2. Модифіковано процедуру пошуку матриці Гессе для знаходження глобального мінімуму квадратичного функціонала, за рахунок проведення процедури інтерполяції поверхнями другого порядку. При цьому зменшено обчислювальні затрати на побудову матриці Гессе на кожній ітерації при мінімізації квадратичного функціонала в 8–10 разів.
3. Уведено змінний крок у модифікованих методах пошуку глобального мінімуму квадратичного функціонала в ОЗТ на базі класичного методу Ньютона та методу найшвидшого спуску. Такий підхід дає змогу зменшити кількість ітерацій при

застосуванні методу оптимізації та підвищити точність чисельних розв'язків різних класів ОЗТ.

4. Розроблено програмний комплекс у прикладному програмному пакеті MATLAB, за допомогою якого розв'язуються різні класи ОЗТ в залежності від конкретного фізико-технічного завдання.
5. Розроблена прикладна модель дослідження теплообміну в замкненій системі з дзеркальними дифузійними поверхнями, практичним застосуванням якої є створення вимірювальних еталонів.
6. Реалізовано прикладні моделі ОЗТ в середовищі MATLAB з використанням сітки розрахункових областей, які отримані з пакета моделювання складних систем COMSOL Multiphysics.

Отримані результати дисертаційної роботи можуть бути використані для реалізації ефективних теплових режимів різних енергетичних об'єктів, визначення оптимальних геометричних положень внутрішніх джерел тепла.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Деякі швидкісні методи розв'язку нелінійних обернених задач теплопровідності. *Збірник наукових праць Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Прикладна математика. Інформатика.* Черкаси, 2017. №1–2. С. 71–90.

2. Хайдуров В.В. Багатосітковий метод вирішення нелінійних обернених задач електро- та теплоенергетики. *Збірник наукових праць «Моделювання та інформаційні технології».* Київ. Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова, 2018. №83. С. 117–124.

3. Бабак В.П., Ковтун С.І., Хайдуров В.В., Щербак Л.М. Моделювання процесу теплообміну в замкненій системі з дзеркальними та дифузними поверхнями. *Збірник наукових праць «Наукоємні технології».* Київ, 2018. №2 (38) С. 245–254.

4. Petrov A., Chernyakov Yu., Steblyanko P., Demichev K., Haydurov V. Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* Харків, 2018. №4/7 (94). С. 25–33.

5. Хайдуров В.В. Моделирование прикладных обратных задач теплопроводности по вычислению коэффициента теплопроводности. *Збірник наукових праць «Моделювання та інформаційні технології».* Київ. Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова, 2017. №81. С. 69–77.

6. Хайдуров В.В. Ефективні методи розв'язку точкових обернених задач теплопровідності. *Збірник наукових праць «Молодий вчений».* Суми, 2016. №6 (33). С. 87–98.

7. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Метод знаходження чисельного розв'язку оберненої двовимірної задачі теплопровідності. *Збірник наукових праць Державного технологічного університету.* Черкаси, 2015. №2. С. 49–56.

8. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Эффективные методы решения нелинейных обратных задач теплопроводности. *Збірник наукових праць Черкаського*

національного університету імені Богдана Хмельницького. Прикладна математика. Інформатика. Черкаси, 2014. №2. С. 87–98.

Праці апробаційного характеру:

9. Хайдуров В.В. Метод анализа работы теплового оборудования. *«Інтегровані інтелектуальні робототехнічні комплекси» (ІРТК-2018)* : збірник матеріалів XXI Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 22–23 травня 2018 р. Київ, 2018. С. 191–193.

10. Хайдуров В.В. Знаходження чисельного розв'язку нелінійних обернених задач теплопровідності. Відновлення коефіцієнта теплопровідності. *«Актуальні наукові дослідження у сучасному світі»* : збірник наукових праць, м. Переяслав-Хмельницький, 26–27 березня 2017 р. Переяслав-Хмельницький, 2017. С. 115–120.

11. Головня Б.П., Хайдуров В.В. Ефективні методи розв'язку нелінійних обернених задач теплопровідності. Відновлення коефіцієнта теплопровідності. *«Молода наука. Прогресивні технологічні процеси, технологічне оснащення»* : матеріали Міжнародної науково-технічної Internet-конференції студентів і молодих вчених, м. Краматорськ, (30 березня), 2017 р. Краматорськ, 2017. С. 101–105.

12. Хайдуров В.В. Знаходження оптимальних температур електричних нагрівачів промислової печі. *«Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я» (MicroCAD–2018)* : матеріали XXVI Міжнародної науково-практичної конференції, м. Харків, 16–18 травня 2018 р. Харків, 2018. С. 261.

13. Хайдуров В.В. Деякі питання обернених задач теплопровідності. *«Роль фізики в розвитку міждисциплінарних наукових і навчальних напрямків» (PhysIST–2016)* : матеріали Міжнародної заочної мультимедійної (інтернет) конференції, м. Одеса, 2–5 травня 2016 р. Одеса, 2016. С. 24.

14. Хайдуров В.В. Використання методу Фур'є для знаходження чисельного розв'язку багатовимірних обернених задач теплопровідності. *«Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем»* : тези доповідей I Всеукраїнської науково-технічної конференції, м. Дніпропетровськ, 3–5 листопада, 2015 р. Дніпропетровськ, 2015. С. 256–261.

15. Хайдуров В.В. Знаходження чисельного розв'язку деяких точкових обернених задач теплопровідності. *«Сучасна наука: проблеми та перспективи»* : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 13–14 жовтня 2015 р. Київ, 2015. С. 26–30.

16. Хайдуров В.В. Модифицированные методы решения нелинейных задач теплопроводности. *«Актуальні наукові дослідження у сучасному світі»* : матеріали VI Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Переяслав-Хмельницький, 26–27 жовтня 2015 р. Переяслав-Хмельницький, 2015. С. 74–82.

АНОТАЦІЯ

Хайдуров В.В. Методи та програмні засоби реалізації моделей основних класів обернених задач теплопровідності. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. –

Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, Київ, 2019.

У дисертаційній роботі розроблені та модифіковані існуючі методи розв'язування лінійних і нелінійних обернених задач теплопровідності (ОЗТ) різного походження. Розроблено методику, що дозволяє отримати чисельні розв'язки основних класів ОЗТ. Знайдені методи дозволяють зменшити кількість обчислень, яка необхідна для знаходження глобального мінімуму квадратичного функціонала, який використовується в обернених ОЗТ, а також отримані методи зменшення кількості ітерацій для отримання шуканих розв'язків певного класу ОЗТ. Експериментально обґрунтований вибір методу найшвидшого спуску під час мінімізації квадратичного функціонала в класичній постановці ОЗТ. Розроблено метод отримання початкового наближення для побудови ітераційного процесу пошуку чисельного розв'язку основних класів ОЗТ. Отримані та реалізовані прикладні моделі теплоенергетики з використанням програмних пакетів MATLAB та COMSOL Multiphysics.

Ключові слова: обернена задача теплопровідності (ОЗТ), оптимізація квадратичного функціонала, ітераційна процедура, багатовимірні ОЗТ.

АННОТАЦИЯ

Хайдуров В.В. Методы и программные средства реализации моделей основных классов обратных задач теплопроводности. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Институт проблем моделирования в энергетике имени Г.Е. Пухова НАН Украины, Киев, 2019.

Диссертационная работа посвящена разработке и модификации существующих методов решения линейных и нелинейных обратных задач теплопроводности (ОЗТ) различного происхождения. Разработан метод получения численного решения основных классов обратных задач теплопроводности. Основным направлением работы является уменьшение количества вычислений, которое необходимо для нахождения глобального минимума квадратичного функционала, используемого в классической постановке ОЗТ, а также уменьшение количества итераций для получения искомого решения определенной обратной задачи теплопроводности. В диссертационной работе экспериментально обоснован выбор метода скорейшего спуска при минимизации квадратичного функционала в классической постановке ОЗТ. Разработан метод задания начального приближения для построения итерационного процесса поиска численных решений основных классов ОЗТ. Получены и реализованы прикладные модели теплопереноса с использованием программных пакетов MATLAB и COMSOL Multiphysics.

Научная новизна работы заключается в применении интерполяционного подхода для поиска численных решений различных классов нелинейных ОЗТ при нахождении глобального минимума квадратичного функционала модификациями метода Ньютона в матрице Гессе. Такой подход дает возможность уменьшить вычислительные затраты и время поиска решений поставленных ОЗТ. Также научная новизна работы заключается в разработке прикладной трехмерной модели протекания процесса теплообмена в замкнутой системе с зеркальными и диффузными поверхностями для измерения поверхностной плотности теплового потока на поверхности теплоотвода с целью разработки измерительного эталона и осуществления калибровки сенсоров.

Практическое значение работы состоит в том, что полученные методы решения различных классов ОЗТ (линейных и нелинейных) дают возможность получать их искомые численные решения значительно быстрее, чем традиционные методы. При этом для исследования различных физико-технических процессов активно применяются прикладные технические модели, которые сводятся к решению многомерных ОЗТ.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности (ОЗТ), оптимизация квадратичного функционала, итерационная процедура, многомерные ОЗТ.

ABSTRACT

Haydurov V.V. Methods and software for implementing models of the main classes of inverse heat conduction problems. – As the manuscript.

Dissertation thesis for a Candidate of Technical Sciences degree in specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Pukhov Institute for Modelling in Energy Engineering. National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the development and modification of existing methods and algorithms for solving linear and nonlinear inverse heat conduction problems (IHCP) of various nature. A technique for obtaining a numerical solution of the main classes of IHCP is developed. The main direction of the work is to reduce the number of computations that is necessary to find the global minimum of the quadratic functional that is used in inverse problems of this kind, as well as to reduce the number of iterations to obtain the desired solution of the corresponding IHCP. The choice of the method of speedy descent while minimizing a quadratic functional in the classical formulation of IHCP is experimentally justified. A methodology has been built for constructing an initial approximation for the iterative process of finding a numerical solution of the main classes of IHCP. The resulting heat transfer models are implemented by software using the program packages MATLAB and COMSOL Multiphysics.

Key words: inverse heat conduction problem (ICHP), optimization of quadratic functional, iterative procedure, multidimensional IHCP.

Підписано до друку 27.06.2019 р. Формат 60х90/16.
Папір офісний. Гарнітура “Times New Roman”.
Обл.-вид. арк. 0,9. Наклад 100 прим. Зам. № 246

Видруковано в друкарні ПВНЗ «Київський міжнародний університет».
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців
та розповсюджувачів видавничої продукції
ДК №978 від 08.07.2002 р.

03179, Україна, м. Київ, вул. Львівська, 49.
Тел.: +38(044)424-64-88, e-mail: info@kymu.edu.ua