

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛЮВАННЯ В ЕНЕРГЕТИЦІ
ІМ. Г.Є. ПУХОВА**

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ВЕРЛАНЬ АНДРІЙ АНАТОЛІЙОВИЧ

УДК 519.6, 004.942 : 519.876.2

ДИСЕРТАЦІЯ

**АДАПТАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ КОМП'ЮТЕРНО-
ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ (СТОСОВНО ДО СИЛОВИХ
ЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК)**

Спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
Галузь знань – інформаційні технології

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело



А.А. Верлань

Науковий консультант – Мохор Володимир Володимирович
член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор

Київ – 2019

Анотація

Верлань А.А. Адаптаційні методи та засоби математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем (стосовно до силових енергетичних установок). – На правах рукопису

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова Національної академії наук України. – Київ, 2019.

Однією з важливих проблем техніки є створення сучасних комп'ютерно-інтегрованих систем, зокрема, розвиток сучасної енергетики шляхом розроблення нових та модернізації існуючих зразків силових енергетичних установок (СЕУ), які застосовуються як автономні енергогенеруючі та рухомабезпечуючі системи різного призначення, в тому числі у виробництві та на транспорті.

Сучасний рівень комп'ютеризації СЕУ визначається розв'язуваними поточними завданнями, які і визначають можливості і потреби в комп'ютерній техніці. До розповсюджених завдань відносяться: проектування установок (при цьому широко відомий важливий недолік дорогих автоматизованих систем проектування - відсутність достатнього набору засобів модельної підтримки); обробка результатів випробувань (виконується автономними засобами); супровід результатів профілактики; реєстрація результатів вимірювань в контрольних точках при діагностиці та контролі; забезпечення процесів управління (використовуються регулятори, наприклад ПД-регулятори, які не враховують властивості об'єкта). Таким чином, клас задач, які вирішуються комп'ютером, є досить обмеженим, має обмежену складність, і не забезпечує у повному обсязі вирішення завдань спостереження і керування режимами функціонування СЕУ. Разом з тим, сучасні тенденції даного напрямку розвитку СЕУ передбачають вирішення саме цих задач. Комп'ютерно-інтегровані системи з необхідними властивостями повинні задовольняти принципу «Full responsibility systems» (системи з повною відповідальністю). Створення таких систем з урахуванням

комп'ютерно-інтегрованого виконання з властивими їм обмеженнями на ресурси вимагає вирішення нових проблем побудови математичних моделей динаміки установки, підсистем управління і діагностики, що забезпечують ефективне функціонування СЕУ. Рішення даних проблем потребує проведення фундаментальних досліджень в області процесів моделювання, управління, діагностування, алгоритмічного і програмного забезпечення. Задоволення вказаних вимог призводить до нагальної необхідності розробки адаптаційних методів моделювання та забезпечення процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем з використанням процесів оптимізації.

Існуючі наукові досягнення в області математичного моделювання динамічних систем, здебільшого, базуються на застосуванні апарату диференціальних рівнянь. На основі цього підходу створено та активно застосовується чимало методів і засобів комп'ютерного моделювання. Проте, такий підхід може мати деякі обмеження. Серед них можна виділити питання забезпечення стійкості обчислювального процесу при наявності значних рівнів високочастотних спектрів шумів у вихідних даних, розповсюджений прояв ефекту Гіббса при моделюванні об'єктів з розподіленими параметрами, обмежене застосування традиційних (не адаптованих) алгоритмів та ін. Для розв'язання вказаних питань необхідно, в доповнення до існуючих, створювати нові способи побудови і числової реалізації математичних моделей. Ефективним кроком у цьому напрямку є використання інтегральних операторів та рівнянь. Такий вибір обумовлений тим, що інтегральні моделі володіють низкою позитивних властивостей, зокрема високою універсальністю (структура моделі є незмінною для різних класів динамічних об'єктів, а властивості задаються однією функцією — ядром інтегрального оператора), потенційно високою адекватністю процесів моделювання, властивістю згладжування при виконанні обчислень та використанні у реальних системах із значним рівнем спектрів високочастотних шумів, високою стійкістю обчислювальних процесів, можливістю ефективної побудови моделі за експериментальними даними тощо. Разом з тим, використання інтегральних моделей має ряд особливостей, врахування яких вимагає проведення низки

теоретичних і практичних досліджень та розробок. Зокрема, це стосується проблеми отримання еквівалентних інтегральних моделей на основі відомої диференціальної моделі, оскільки значна частина фізичних законів записується в диференціальній формі.

Насичення установок вмонтованими комп'ютерними засобами дозволяє розв'язувати комплекс вказаних задач та забезпечення інтелектуальних функцій. Поява можливості вирішення складних та специфічних задач обумовлює необхідність розробки ефективних математичних та комп'ютерних моделей даного класу об'єктів. Ця обставина породжує таку вимогу до комп'ютерних моделей, як здатність роботи в реальному часі при обмежених обчислювальних ресурсах.

Отже, для розв'язування задач проектування, управління, контролю, діагностики виникає необхідність розвинення методів і засобів математичного і комп'ютерного моделювання таких систем і їх складових елементів, які здатні враховувати зазначені особливості. Аналіз публікацій у напрямку створення таких методів свідчить про існування певних позитивних тенденцій, але розв'язання проблеми в цілому не можна вважати завершеним.

Відмінною рисою технічних комп'ютерно-інтегрованих систем є різноманітність елементів, що входять до складу фізичної частини, що, породжує неоднорідність у математичному описі системи та надає відповідні особливості методів і засобів математичного моделювання, що створюються.

Таким чином, у зв'язку з інтенсивним якісним розвитком, ускладненням структур і суттєвим розширенням області застосування комп'ютерно-інтегрованих систем актуальною є науково-технічна проблема створення адаптаційних методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання процесів їх функціонування для дослідження і забезпечення якісних показників вказаного класу систем, ефективного розв'язання задач аналізу, синтезу та побудови засобів керування і діагностики з урахуванням обмежень до інформаційних ресурсів.

Ефективне розв'язання вказаної проблеми може досягатись шляхом розширення класу математичних моделей для врахування особливостей окремих типів ланок систем, що моделюються, в тому числі із залученням інтегральних

динамічних моделей і макромоделей, створення та застосування методів еквівалентних та апроксимаційних перетворень моделей, отримання та застосування швидкодіючих алгоритмів для реалізації динамічних моделей, підвищення рівня адекватності відтворення процесів як в окремих ланках, так і в цілому в системі, структурно-алгоритмічної організації програмних засобів комп'ютерного моделювання. Урахування особливостей комп'ютерно-інтегрованих систем приводить до необхідності придання методам і засобам моделювання адаптуючих можливостей.

Для розв'язання вказаної проблеми доцільним є структурно-орієнтований підхід в моделюванні, на якому традиційно ґрунтуються дослідження та інженерні розробки при створенні зразків нової техніки, який є основою для створення нових методів математичного моделювання з використанням принципу декомпозиції, а також засобів комп'ютерного моделювання шляхом організації сучасних моделюючих програмних комплексів. Підхід дозволяє використовувати, в тому числі одночасно, різні види динамічних моделей, створювати розгалужене алгоритмічне забезпечення з можливістю розробки і застосування відповідного набору програмних модулів, використовувати опис системи, що моделюється, в природній і зручній для розробника графічній формі.

Таким чином, в дисертаційній роботі вирішена важлива науково-технічна проблема – створення, розвитку та підвищення ефективності методів і засобів математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих технічних систем з адаптаційним забезпеченням можливостей дослідження і побудови засобів керування та діагностики.

Розроблені адаптаційні методи формування динамічних моделей комп'ютерно-інтегрованих систем з урахуванням альтернативностей їх можливих форм, що забезпечує адаптаційну побудову необхідної моделі за принципом мінімальної складності при заданих вимогах до показників якості (точності). Запропоновано новий метод еквівалентного перетворення диференціальних динамічних моделей до інтегральних (метод розділення з аналітичним розв'язком), який узагальнює відомі методи та дозволяє отримувати не тільки еквівалентні

інтегральні рівняння, але низку еквівалентних моделей у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь, що значно підвищує можливості адаптаційного вибору моделі.

Розроблені та досліджені методи редукції основних математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними. Розроблено новий інтерполяційний метод апроксимаційного перетворення (опорних перерізів) моделей об'єктів з розподіленими параметрами у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними до скалярних моделей у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь, що дозволяє отримати наближену модель із значно меншою складністю та забезпечити суттєве зменшення вимог до швидкодії комп'ютерних засобів при реалізації моделей.

Запропоновано принцип побудови та проведено моделювання процесів функціонування адаптивних систем керування з використанням еталонної моделі об'єкта керування. Удосконалено модельний підхід до організації систем керування на основі еталонної динамічної моделі, запропоновані параметричний, сигнальний та комбінований способи налаштування керуючого блоку у зворотному зв'язку системи, а також новий метод побудови керуючого каналу зворотного зв'язку з використанням еталонної моделі, що формує керуючий вплив за принципом неперервного відслідковування поведінки моделі без застосування оптимізаційних обчислень.

Запропоновані нові модельно-орієнтовані методи і відповідні структури систем діагностування на основі ідентифікаційного підходу. Розроблено новий ідентифікаційний (модельний) метод діагностування неперервних систем за принципом виявлення несправності шляхом побудови (ідентифікації) моделі поточного стану несправного фрагменту системи і порівняння значень її параметрів з їх номінальними значеннями, який забезпечує виявлення широкого класу можливих несправностей при обмеженому доступі до внутрішніх елементів системи. Розроблені основні теоретичні положення методу та основи алгоритмічної реалізації.

Розвинуто інтегральний підхід до математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем на основі застосування одновимірних непараметричних інтегральних динамічних моделей у вигляді операторів і рівнянь Вольтерра, які можуть бути побудовані як шляхом аналітичних перетворень, так і за експериментальними даними та забезпечують можливість моделювання об'єктів з зосередженими і розподіленими параметрами і чисельну реалізацію засобами структурно-алгоритмічного програмування. Розроблені ефективні та швидкодіючі квадратурні алгоритми чисельної реалізації інтегральних динамічних моделей у вигляді рівнянь Вольтерра II роду на основі резольвенти, що забезпечують можливість реалізації явних інтегральних динамічних макромоделей.

Набув подальшого розвитку оптимізаційний підхід до вибору та адаптації чисельних методів при створенні алгоритмів моделювання процесів в комп'ютерно-інтегрованих системах. Розроблений метод адаптаційного визначення алгоритмів чисельної реалізації диференціальних динамічних моделей у вигляді звичайних диференціальних рівнянь на основі запропонованих критеріїв оптимальності обчислювальних схем.

Запропоновані методи моделювання та комп'ютерні засоби дозволяють забезпечити якісне відтворення властивостей, характеристик і параметрів широкого класу комп'ютерно-інтегрованих систем. Розроблено пакет прикладних програм, реалізований в моделюючому середовищі Матлаб і призначений для дослідження та забезпечення процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем як в лабораторних дослідженнях, так і в умовах застосування в реальних системах із забезпеченням умов керування та діагностики.

Створені засоби алгоритмічного та програмного забезпечення процесів моделювання динаміки комп'ютерно-інтегрованих систем забезпечують ефективну комп'ютерну реалізацію отриманих видів динамічних моделей з можливістю адаптивного вибору алгоритмів відповідно до властивостей конкретних задач, можливість використання швидких стійких рекурентних і високоточних процедур чисельного розв'язання задіяних видів інтегральних

рівнянь. Запропоновані методи моделювання та комп'ютерні засоби дозволяють забезпечити якісне відтворення властивостей, характеристик і параметрів широкого класу комп'ютерно-інтегрованих систем. В роботі вирішено наступні прикладні задачі: «Побудова спрощених математичних моделей при дослідженні силової установки з газовим приводом і системою керування»; «Комп'ютерне моделювання бурильної колони бурової установки»; «Моделювання електромагнітних процесів та енергетично ефективних режимів роботи надпровідникових СЕУ»; «Точностна параметрична редукція моделі динаміки літака»; «Розробка спрощеної математичної моделі газотурбінного двигуна за каналом подачі палива». Основні результати роботи та основні положення, які виносяться на захист, пройшли апробацію при розв'язанні модельних і практичних задач. Результати роботи отримали практичне впровадження.

Ключові слова: комп'ютерно-інтегровані системи, еквівалентне перетворення моделей, апроксимаційне перетворення моделей, параметрична редукція моделей, інтерполяційний метод моделювання об'єктів з розподіленими параметрами, адаптивні системи, еталонна модель, алгоритми моделювання, програмний комплекс.

ANNOTATION

Verlan' A.A. Adaptive methods and means of mathematical modeling of the computer-integrated systems' functioning processes (in relation to power plants). – As the manuscript.

Dissertation for obtaining a scientific degree of Doctor of Technical Sciences in specialty 01.05.02 - mathematical modeling and calculation methods. - Pukhov Institute for Modelling in Energy Engineering National Academy of Sciences of Ukraine. - Kyiv, 2019.

One of the important problems of technology is the creation of modern computer-integrated systems, in particular, the development of modern energy through the development of new and modernization of existing models of power plants (PP), which

are used as autonomous power generating and supply systems of various purpose, including in production and transport.

The current level of computerization of the computer system is determined by the current tasks, which determine the opportunities and needs for computer technology. Common tasks include: plant design (the important drawback of expensive automated design systems - the lack of a sufficient set of model support tools) is widely known; processing of test results (performed by autonomous means); support of prevention results; registration of measurement results at checkpoints during diagnosis and control; management processes (regulators such as PIDs that do not take into account the properties of the object are used). Thus, the class of tasks that are solved by the computer is quite limited, has limited complexity, and does not fully solve the problems of observing and managing the modes of operation of the computer. At the same time, the current tendencies of this direction of the PP development provide the solution of these problems. Computer-integrated systems with the necessary properties must comply with the principle of "Full responsibility systems" (systems with full responsibility). The creation of such systems, taking into account the computer-integrated execution with their inherent limitations on resources, requires the solution of new problems in the construction of mathematical models of the dynamics of installation, subsystems of management and diagnostics, which ensure the effective functioning of the PP. Solving these problems requires basic research in the areas of modeling, control, diagnosis, algorithmic and software. Satisfaction of these requirements leads to the urgent need to develop adaptation modeling methods and ensure the processes of functioning of computer-integrated systems using optimization processes.

The existing scientific advances in the field of mathematical modeling of dynamical systems are mainly based on the application of the apparatus of differential equations. Based on this approach, many computer simulation methods and tools have been created and actively applied. However, this approach may have some limitations. These include the stability of the computational process in the presence of significant levels of high-frequency noise spectra in the raw data, a common manifestation of the Gibbs effect in modeling objects with distributed parameters, limited use of traditional

(not adapted) algorithms, etc. To address these issues, in addition to existing ones, it is necessary to create new ways of constructing and numerically implementing mathematical models. An effective step in this direction is to use integral operators and equations. This choice is due to the fact that integral models have a number of positive properties, in particular high versatility (the structure of the model is unchanged for different classes of dynamic objects, and the properties are given by one function - the kernel of the integral operator), potentially high adequacy of modeling processes, property smoothing of calculations and use in real systems with a high level of high-frequency noise spectra, high stability of computational processes, possibility of efficient construction of experimental data and more. However, the use of integrated models has a number of features, the consideration of which requires a number of theoretical and practical research and development. In particular, this concerns the problem of obtaining equivalent integral models on the basis of the known differential model, since a large part of the physical laws is written in the differential form.

Saturation of installations with embedded computer means allows to solve a complex of the specified tasks and to provide intelligent functions. The emergence of the ability to solve complex and specific problems necessitates the development of effective mathematical and computer models of this class of objects. This creates the requirement for computer models such as the ability to work in real time with limited computing resources.

Therefore, in order to solve the problems of design, control, control, diagnostics, it is necessary to develop methods and tools for mathematical and computer simulation of such systems and their constituent elements, which are able to take into account these features. Analyzing publications towards the creation of such methods indicates that there are some positive trends, but the resolution of the problem as a whole cannot be considered complete. A distinctive feature of technical computer-integrated systems is the heterogeneity of the elements that make up the physical part, which generates heterogeneity in the mathematical description of the system and provides the corresponding features of the methods and tools of mathematical modeling that are created.

Thus, due to the intensive qualitative development, complication of structures and significant expansion of the field of application of computer-integrated systems, the scientific and technical problem of creating adaptation methods and means of mathematical and computer modeling of their functioning processes for research and provision of high-quality indicators of the specified class of systems, effective solution of problems of analysis, synthesis and construction of control and diagnostics tools, taking into account restrictions on information resources.

Effective solution of this problem can be achieved by extending the class of mathematical models to take into account the peculiarities of the individual types of links of the systems being modeled, including by involving integral dynamic models and macromodels, creation and application of methods of equivalent and approximate transformations of models, obtaining and applying fast-moving models for realization of dynamic models, increase of the level of adequacy of reproduction of processes both in separate links, and in the whole in the system, structural-algorithmic organization of computer simulation software. Taking into account the features of computer-integrated systems leads to the need to provide methods and tools for modeling adaptive capabilities.

To solve this problem, it is advisable to have a structurally oriented approach in modeling, which traditionally based research and engineering on the creation of samples of new technology, which is the basis for the creation of new methods of mathematical modeling using the principle of decomposition, as well as computer simulation by organizing modern modeling software complexes. The approach allows to use, including at the same time, different types of dynamic models, to create branched algorithmic software with the possibility of developing and applying a corresponding set of software modules, to use the description of the simulated system in a natural and developer-friendly graphical form.

Thus, in the dissertation the important scientific and technical problem is solved - creation, development and increase of efficiency of methods and means of mathematical modeling of processes of functioning of computer-integrated technical systems with adaptation providing of possibilities of research and construction of control and diagnostic tools.

Adaptation methods for the formation of dynamic models of computer-integrated systems with consideration of alternatives of their possible forms have been developed, which provides adaptive construction of the necessary model on the principle of minimal complexity with the set requirements for quality indicators (accuracy). A new method of equivalent transformation of differential dynamic models to integral ones is proposed (the method of separation with analytical solution), which generalizes known methods and allows to obtain not only equivalent integral equations, but a number of equivalent models in the form of integro-differential equations, which significantly increases the possibility of adaptation models.

Methods of reduction of basic mathematical models of objects with distributed parameters in the form of partial differential differential equations have been developed and investigated. A new interpolation method of approximation (reference cross sections) of models of objects with distributed parameters in the form of differential equations with partial derivatives to scalar models in the form of systems of ordinary differential equations is developed, which allows to obtain an approximate model with much less complexity and to provide a significant reduction of the performance requirements computer tools in the implementation of models.

The principle of construction is proposed and simulations of processes of functioning of adaptive control systems using the reference model of object of management are carried out. The model approach to the organization of control systems based on the standard dynamic model is improved, the parametric, signal and combined ways of setting the control unit in the system feedback are offered, as well as a new method of construction of the control channel feedback using the model model that generates the control influence on the principle of continuous tracking of model behavior without the use of optimization calculations.

New model-oriented methods and corresponding structures of diagnosis systems based on identification approach are proposed. A new identification (model) method of diagnosing continuous systems based on the principle of fault detection by constructing (identifying) a model of the current state of a faulty system fragment and comparing the values of its parameters with their nominal values, which provides detection of a wide

class of possible faults with limited access to the internal elements of the system. The basic theoretical provisions of the method and the basics of algorithmic realization are developed.

An integrated approach to mathematical modeling of the processes of functioning of computer-integrated systems is developed based on the use of one-dimensional nonparametric integral dynamic models in the form of Volterra operators and equations, which can be constructed both by analytical transformations and by experimental data and provide the possibility of modeling objects with concentrated and distributed parameters and numerical implementation by means of structural-algorithmic programming. Effective and high-speed quadrature algorithms for the numerical implementation of integral dynamic models in the form of Volterra II-type equations based on resolvents are developed, which provide the possibility of realizing explicit integral dynamic macromodels.

The optimization approach to the selection and adaptation of numerical methods for creating process modeling algorithms in computer-integrated systems has been further developed. The method of adaptation determination of algorithms for numerical implementation of differential dynamic models in the form of ordinary differential equations is developed based on the proposed optimality criteria of computational schemes.

The proposed modeling techniques and computer aids provide a quality reproduction of the properties, characteristics and parameters of a wide range of computer integrated systems. A suite of applications has been developed, implemented in Matlab's modeling environment, and is designed to investigate and provide processes for the operation of computer-integrated systems, both in the laboratory and in real-world applications, with control and diagnostic conditions.

The created algorithmic and software tools for computer-integrated systems dynamics modeling processes provide efficient computer implementation of the obtained types of dynamic models with the possibility of adaptive choice of algorithms according to the properties of specific tasks, the ability to use fast, stable recurrent and high-precision numerical solution procedures integral equations. The proposed modeling

techniques and computer aids provide a quality reproduction of the properties, characteristics and parameters of a wide range of computer integrated systems. The following applied problems are solved in the work: "Construction of simplified mathematical models in the study of a gas-powered power plant and control system"; "Computer simulation of drilling rig drill string"; "Modeling of electromagnetic processes and energy efficient modes of operation of superconducting ACS"; "Precision parametric reduction of the model of aircraft dynamics"; "Development of a simplified mathematical model of a gas turbine engine through the fuel supply channel." The main results of the work and the main provisions presented in the defense were tested when solving model and practical tasks. The results of the work were put into practice.

Keywords: computer-integrated systems, equivalent model transformation, model approximation, parametric model reduction, interpolated modeling method of distributed parameter objects, adaptive systems, reference model, modeling algorithms, software complex.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Монографії.

1. Верлань А. А. Интегральные динамические модели электромеханических объектов: Монография / А. А. Верлань, М. В. Сагатов, В. А. Федорчук.– Т.: IQTISOD-MOLYA ISBN 978-9943-13-581, 2015.– 328 с.

Наукові статті в фахових журналах.

2. Верлань А.А. Об энергоэффективности сверхпроводящих устройств для запитки магнитных систем // Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 3.– Львів, Світ, 1998.– С. 173–184.
3. Верлань А.А. Алгоритм моделирования нелинейных периодических процессов на основе решения уравнения Урысона / А.А. Верлань, Л.А. Митько., А.Б. Руденко // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 3. Київ, 1999.– С. 3–7.
4. Верлань А.А. Квадратурные алгоритмы моделирования измерительных преобразователей с распределенными параметрами / А.А. Верлань, М.В. Сагатов,

- А.А. Сітник // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 6. Київ, 2000.– С. 131–136.
5. Верлань А.А. Интегральные модели однопараметрических первичных преобразователей / М.В. Сагатов, А.А. Верлань // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 8, 2001.– С. 38–43.
6. Верлань А.А. Интегральные модели многопараметрических первичных преобразователей / М.В. Сагатов, А.А. Верлань // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 9, 2001.– С. 30–34.
7. Верлань А.А. Способ упрощения динамической модели / А.А. Верлань, М.В. Сагатов, В.Ф. Юзвенко // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 10.– 2001.– С. 98–101.
8. Верлань А.А. Способы получения интегральных динамических моделей измерительных преобразователей с распределенными параметрами / М.В. Сагатов, А.А. Верлань // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 12.– 2001.– С. 138–145.
9. Верлань А.А. Розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь у системі Матлаб / А.Б. Волощенко, А.А. Верлань, Д.Е. Контрерас // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 11.– Київ: 2001.– С. 78–82.
10. Верлань А.А. Вероятностно-физическое моделирование отказов радиоэлектронных устройств при воздействии мощных радиационных и электромагнитных излучений / А.А. Верлань, Т.П. Гушель, В.И. Борковец // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 11.– Київ: 2001.– С. 99–105.
11. Верлань А.А. Определение информативных признаков по сигналам акустической эмиссии при диагностике конструкций / В.И. Борковец, А.А. Верлань, Т.П. Гушель, В.Ф. Юзвенко. // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 13.– Київ: 2001.– С. 58–70.

12. Верлань А.А. Коллокационный алгоритм решения уравнения Вольтерры I рода / А.А. Верлань, А.Б. Волощенко, М.В. Сагатов // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 13.– Київ: 2001.– С. 97–100.
13. Верлань А.А. Модель системы защиты от емкостных токов утечки в шахтных электрических сетях / А.Ф. Верлань, А.А. Верлань, Т.П. Гушель // Электронное моделирование. ISSN 0204-3572. ИПМЭ НАНУ. Том 24. №6: ноябрь–декабрь 2002.– С. 11–16.
14. Верлань А.А. Математические модели моментов трения в уравнениях динамики управляемого движения / А.А. Верлань А.А. Сытник // Зб. Наук. Праць. ІПМЕ НАНУ Вип.. 15.–2002.– С. 71–75.
15. Верлань А.А. Алгоритм моделирования периодических режимов схем преобразовательной техники / А.А. Верлань // Зб. Наук. Праць, ІПМЕ НАНУ. Вип. 18.– 2002.– С. 77–87.
16. Верлань А.А. Моделирование динамики электропривода (линейные модели 1) / А.А. Сытник, А.А. Верлань, С.М. Первунинский // Вісник Черкаського державного технологічного університету. №1.– Прилади і радіотехніка: 2002.– С. 36–40.
17. Верлань А.А. Моделирование динамики электропривода (линейные модели 2) / А.А. Сытник, А.А. Верлань, С.М. Первунинский // Вісник Черкаського державного технологічного університету. №2.– Прилади і радіотехніка: 2002.– С. 74–79.
18. Верлань А.А. Некоторые варианты математических описаний электропривода (нелинейные модели 3) / А.А. Сытник, А.А. Верлань, С.М. Первунинский // Вісник Черкаського державного технологічного університету. №3.– Прилади і радіотехніка: 2002.– С. 39–42.
19. Verlan Andrey. Model support of technical diagnostics systems design / Alexey Oletsky, Ivan Goroshko, Andrey Verlan // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 20.– Київ: 2003.– С. 108–112.
20. Верлань А.А. Подход к моделированию систем энергообеспечения сверхпроводниковых магнитных комплексов // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 19.– Київ: 2003.– С. 149–160.

21. Верлань А. А. Сравнение методов упрощения динамических моделей посредством модельных экспериментов / Т.П. Гушель, А.А. Верлань, В.Ф. Юзвенко // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 20.— Київ: 2003.— С. 108–112.
22. Верлань А.А., Гази А. Интегральные динамические модели нестационарных непрерывных объектов // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 22.— Київ: 2003.— С. 82–91.
23. Верлань А. А. Алгоритм идентификации непрерывных объектов на основе интегральных динамических моделей / А. А. Верлань, А. Гази // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 25.— 2003.— С. 105–112.
24. Верлань А. А. Построение математических моделей технологических процессов для решения задач оптимизации управления / А. А. Сытник., А. А. Верлань, Амид Гази // Вісник Черкаського державного технологічного університету №3.— Комп'ютеризовані інформаційні технології та систему.— 2003.— С. 31–37.
25. Верлань А.А. Моделирование электромагнитных процессов в сверхпроводниковых системах энергообеспечения // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 26.— Київ: 2004.— С. 111–119.
26. Верлань А.А. Анализ методов и алгоритмов моделирования сверхпроводниковых систем энергообеспечения с изменяющейся структурой // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 28.— Київ: 2004.— С. 89–94.
27. Верлань А.А. Модели нестационарных процессов в силовых криотронах систем энергообеспечения сверхпроводниковых магнитных комплексов // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 27.— 2004.— С. 101–107.
28. Верлань А.А., Контрерас Д.Э., Гази А. Интегральный алгоритм идентификации динамических объектов // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 27.— Київ: 2004.— с. 114–120.

29. Верлань А.А. Регуляризация линеаризованных систем уравнений при идентификации нелинейных объектов / А.А. Сытник, А.А. Верлань, А.Гази // Вісник Черкаського державного технологічного університету, Математичне моделювання та обчислювальні методи, №1, 2004.– С. 25–27.
30. Верлань А.А. Специализированные алгоритмы и устройства для интегрированных систем защиты информации /А.А. Верлань, Ю. Бойко // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України.– К., 2005.– В.31.– С.51–57.
31. Верлань А.А., Бойко Ю.Д. Метод декомпозиции структуры корпоративной сети // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України – К., 2006.– В.32. – С.34–41.
32. Верлань А.А., Одокиенко С.Н., Тихоход В.А. Квадратурные алгоритмы численного моделирования нелинейных динамических объектов с обратными связями // Моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України. Вип. 38.– К., 2006.– С. 89–95.
33. Верлань А.А. Интегро-дифференциальные модели многосвязных динамических объектов / А.А. Верлань, В.А. Тихоход // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації. Зб. наук праць.– Київ–Кам'янець-Подільський, 2006.– С. 120–125.
34. Верлань А.А. Декомпозиционный метод локализации неисправных электронных подсхем / А.А. Верлань, С.А. Положаєнко, И.Х. Осман // Електромашинобудування та електрообладнання. Вип. 69.– К.: Техніка, 2007.– С. 72–76.
35. Верлань А.А., Ключка К.М., Осман И.Х. Локализация неисправных подсхем в электронных устройствах в условиях разброса значений параметров шумов измерений // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України. Вип. 38.– К.: 2007.– С. 94–101.
36. Верлань А.А., Осман И.Х. Метод идентификационных экспериментов для диагностирования электронных устройств // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України. Вип. 42.– К., 2007.– С. 98–105.

37. Верлань А.А., Митько Л.А., Дячук А.А., Федорчук В.А. О выборе численных методов решения дифференциальных уравнений для систем моделирования и управления // Моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України. Вип. 44.– К., 2007.– С. 90 –95.
38. Верлань А.А. Об одном способе синтеза нелинейных регуляторов управляемых динамических систем / А.А. Верлань, В.А. Федорчук, Ю.Д. Бойко // Електромашинобудування та електрообладнання.– К.: Техніка, 2008.– Вип. 70 – С. 132–137.
39. Верлань А.А. Локализация неисправных электронных подсхем методом обучающих и проверочных характеристик / А.А. Верлань, С.А. Положаенко, И.Х. Осман // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки: зб. наук. праць.– Кам'янець-Подільський, 2008.– Вип. 1.– С. 140–144.
40. Верлань А.А. Анализ диагностируемости объектов с перестраиваемой структурой / А.А. Верлань // Моделювання та інформаційні технології: збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України.– К., 2008.– Вип. 45.– С. 3 –9.
41. Верлань А.А. Метод формування інтегральних рівнянь нелінійних електричних кіл / О.О. Ситник, А.А. Верлань, К.Н. Ключка // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 47.– 2008.– С. 59–70.
42. Верлань А.А. Достаточные условия сходимости рядов Вольтерра для определенных классов нелинейных цепей / А.А. Верлань, К.Н. Ключка // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України.– К., 2008.– Вип. 45.– С. 8 –16.
43. Верлань А.А. Семантична інформація та лінгвістичні змінні в інформаційних технологіях / О.В. Нечипоренко, А.А. Верлань, Ю.О. Фуртат // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць.– Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009.– Вип. 2.– С. 128–136.
44. Верлань А.А. Об одном подходе к расчету переходных процессов в сложных полупроводниковых и сверхпроводниковых преобразователях / А.А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки. Зб. наук. праць. Вип. 3.– Кам'янець-Подільський.– 2010.– С. 26 – 37.

45. Верлань А.А. Численное решение двумерного уравнения теплопроводности с использованием технологии OPENMP / А.А. Верлань, Д.С. Смаковский., И.Ю. Михайлова // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки. Зб. наук. праць. Вип. 4.– Кам'янець-Подільський.– 2010.– С. 56–64.
46. Верлань А.А. Способ параметрического контроля численного моделирования динамических объектов // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки. Зб. наук. праць. Вип. 5.– Кам'янець-Подільський.– 2011.– С. 21–26.
47. Верлань А.А. Способы локализации и идентификации элементов электрических устройств в задачах диагностики // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки. Зб. наук. праць. Вип. 7.– Кам'янець-Подільський.– 2012.– С. 20–27.
48. Верлань А.А. Об одном способе построения системы контроля вторичных источников электропитания / А.А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2013.– Вип. 8.– С. 22–31.
49. Верлань А.А. Об организации структуры источников электропитания с защитой и автоматизированной системой контроля / А.А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2013.– Вип. 9.– С. 14–23.
50. Верлань А.А. Аппроксимационные модели нестационарных тепловых процессов в неограниченной пластине с несимметричными граничными условиями / А.А. Верлань, А.И. Махович // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.– Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2014.– Вип. 10.– С. 42–55.
51. Verlan A.A. On the Representation of Non-Linear Functions by Fractional-Power Series / A. A. Verlan, Jo Sterten // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія:

Технічні науки : зб. наук. праць.— Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.— Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.— Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.— 2014.— Вип. 11.— С. 194–199.

52. Верлань А.А. Диагностирование сложных электронных схем на основе метода обучающих и проверочных характеристик / А.А.Верлань, Ю Стертен // ISSN 2221-3805 International Scientific and Technical Conference Electrotechnic and Computer Systems: Theory and Practice, Odesa National Polytechnic university, July 20–24, 2015.— Scientific and Technical Journal Electrotechnic and Computer Systems.— No. 19 (95).— P.272–276.

53. А.А. Верлань, Ю. Стертен, С.А. Положаенко. Формализация представления последовательности тестовых гипотез при диагностировании электронных схем // Информатика та математичні методи в моделюванні. Одеський національний політехнічний університет, 2016. Т. 6. № 4. С. 315–321.

54. Верлань А. А. Алгоритмизация методов точностной параметрической редукции математических моделей / А.Ф. Верлань, А.А. Верлань, С.А. Положаенко // Информатика та математичні методи в моделюванні.— Одеський національний політехнічний університет.— 2017.— Т. 7, № 1-2.— С. 7–18.

55. Верлань А. А. Алгоритм реализации интегральных макромоделей явного вида / А. А. Верлань, Ю Стертен, С. А. Положаенко // ISSN 2221-3805 Scientific and Technical Journal Electrotechnic and Computer Systems.— Odesa “Astroprint”.— 2017.— Vol. 24 (100).— P.143–150.

56. Верлань А. А. Спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами на основі методу розщеплення / А.А. Верлань, В.А. Іванюк // Информатика та математичні методи в моделюванні.— Одеський національний політехнічний університет.— 2017.— Т. 7, № 4.— С. 285–291.

Статті у фахових виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз – Google Scholar, Norwegian Register for Scientific Journals, Series and Publishers database NSD, Ulrich's Web, BASE, Citefactor, Cosmos Impact Factor, GIF, InfoBase Index, International Citation Index of Journal Impact Factor & Indexing, OpenAIRE, PKP, ResearchBib, SIS, WorldCat.

57. Verlan A.A. Mathematical modeling of mixing micro jets of gas applied to the flaw detection problems / A. A. Verlan, Jo Sterten // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.— Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.— Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.—Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.— 2015.— Вип. 12.— С. 5–14 (*фахове видання представлено в реферативних базах даних "Україніка наукова", Google Scholar та включене до Norwegian Register for Scientific Journals, Series and Publishers database NSD*)..
58. Verlan A.A. Principles of Precision Parametric Reduction for Mathematical Models / A. A. Verlan, Jo Sterten, O. Ogorodnyk // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць.— Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.— Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.— Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.— 2015.— Вип. 12.— С. 15–23.
59. Верлань А. А. Підходи до побудови скалярних динамічних моделей розподілених ланок керованих електромеханічних систем / А. А. Верлань, В. А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.— Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.— Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.—Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.— 2016.— Вип. 13.— С. 49–61.
60. Verlan A.A. An approach to the precision parametric reduction of mathematical models / A.A. Verlan // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.—Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, .— Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.—Кам'янець-Подільський : К-ПНУ, 2016.— Вип. 14.— С. 26–36
61. Verlan A.A. Algorithms for Dynamic Correction of the Thermal Flows' Measuring Systems / A.A. Verlan, Jo Sterten, Yu.O. Furtat Yu.O. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.— Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України.— Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка.—Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2016.— Вип. 14.— С. 36–48.

62. Verlan A.A. On the choice of numerical methods for solving dynamic equations for control systems with embedded calculating tools / A. A. Верлань, В. А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2017.– Вип. 15.– С. 37–43.
63. Verlan A.A. Method of construction of specialized algorithms for solving differential equations / A. A. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.– Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2017.– Вип. 16.– С.30–35.
64. Verlan Andriy. Method of Regularizing the problem of recovery of input signals of dynamic objects / AndriyVerlan, Jo Sterten, Yurii Furtat // Computational Problems of Electrical Engineering.– .Lviv Polytechnic National University.– 2016.– Vol.6, N 2.– P.113–116 (*фахове видання включене до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Ulrich's Web та Index Copernicus*).
65. Verlan Andrey, Sterten Jo. Implementation of Integral Explicit Macromodels by Means of Quick-Acting Algorithms / Andriy Verlan, Jo Sterten // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2018.– Вип. 18, С.26–33.
66. Верлань А.А. Параметрическая редукция математических моделей динамических систем / А.А. Верлань, А.А. Дячук, Е.А. Палагина, В.В. Палагин // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2018.– Вип. 18.– С.39–55.

Роботи, що опубліковані в матеріалах всеукраїнських та міжнародних конференцій.

67. Verlan Andrey. Power Circuits Dynamic Analysis using Generalized State-Space Model / Anatoliy Verlan, Andrey Verlan, Ivan Goroshko, Tatyana Gushel // NEU-CEE-2004, Second International Symposium on Electrical, Electronic & Computer Engineering. IEEE. TRNC. Lefkosa: 2004.– P. 323–327 (*IEEE*).
68. Verlan A.A. Singular systems theory application in power systems dynamics simulation / A.F. Verlan, A.A. Verlan, T.P. Gushel // 6^t International Conference Control of Power System.– Slovakia, 2004.– P.1–4.
69. Верлань А.А., Одокиенко С.Н. Быстродействующие алгоритмы численной реализации неявных интегральных динамических моделей // Тр. междунар. конф. "Информационные технологии в управлении энергетическими системами" ИТУЭС-2005, 18–19 окт. 2005г.– Киев, Украина.– С. 82.
70. Verlan A.A. Analysis of power circuits' dynamics using generalized state-space model / A.A. Verlan, B.B. Abdusatarov, Miraziz Sagatov, A.A. Sytnik // Fourth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation WCIS-2006, Tashkent, Uzbekistan. November 21–22, 2006.– P. 168–176.
71. Verlan A.A. Application of singular systems theory in power systems dynamics simulation / A.A. Verlan, B.B. Abdusatarov, D.E Kontreras // Fourth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation WCIS-2006, Tashkent, Uzbekistan. November 21–22, 2006.– P. 163–167.
72. Verlan Andriy. Simulation of electrical systems for supplying superconducting magnetic energy storage / Andriy Verlan, Anatoliy Verlan, Aleksand Sytnik // ISEECE 2006, 3rd International Symposium on Electrical, Electronic and Engineering. IEEE.– November 23–25, 2006.– Nicosia, North Cyprus.– P.214–220 (*IEEE*).
73. Верлань А.А. Approach to mathematical simulation of electrical systems for supplying superconducting magnetic energy storage / А.А. Верлань // Современное состояние и перспективы развития информационных технологий: Доклады республиканской научно-технической конференции. Институт математики и информационных технологий АН РУз.– Ташкент, 2011.– Т.2.– С.8–18.
74. Верлань А.А. Идентификация динамического объекта с переменными параметрами на основе метода «формирующего фильтра» / А.А. Верлань, В.В.

Палагин, Т.А. Носик. // IV міжнародна наукова конференція “Моделювання-2012 / Simulation-2012” : Зб. наук. праць.— Київ: ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України.— 2012.— С.318–321.

75. Верлань А.А. Интегральный метод моделирования и анализа автономных систем энергообеспечения на основе полупроводниковых и сверхпроводниковых преобразователей / А.А. Верлань // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей V міжнар. наук. конф. / [редкол.: І. В. Бейко та ін.].— Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012.— С. 20–21.

76. Верлань А.А., Махович А.И. Интегральные модели переходных процессов в электрических цепях, содержащих звенья с распределенными параметрами / А.А. Верлань, В.А., Федорчук А.И. Махович // Проблемы энерго и ресурсосбережения. Доклады республиканской научно-технической конференции АНРУз.— Ташкент, 22–23 декабря.— 2014.

77. A.A.Verlan, J. Sterten, O. Ogorodnyk. Mathematical Modelling of Complex Singular Power Systems’ Dynamics // The 11th International Conference on Multimedia Information Technology and Applications, June 30–July 2 2015. Tashkent. Uzbekistan. Organized by the Korea Multimedia Society (KMMS), the Republic of Korea. IEEE.— P. 43–46 (*IEEE*).

78. Verlan A.A. Power energy units dynamic models development and program implementation / A. A. Verlan, Jo Sterten. // 5th International Scientific Conference «Signal and non-Gaussian noise processing».— Cherkasy State Technological University, May 20 – 22, 2015.— P. 140 – 142.

79. Verlan Andriy. Inverse method of restoring distributed signals in surveillance systems / Jo Sterten, Andriy Verlan , Dmitriy Verlan. // XX International Scientific Practical Conference “Innovation-2015”, October 23–24, 2015.— Tashkent. Uzbekistan. — P.32–39.

80. A.A.Verlan’, Jo Sterten. Algorithm for Modelling a Dynamic Object by Means of the Convolution Operation // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей 7-ї Міжнародної наукової

конференції OPTIMA. Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 21–22 квітня 2016.– С. 32–33.

81. Verlan' A.A. Adaptation and Implementation of Modern Learning Techniques in Master of Sustainable Manufacturing: Cultural Challenges, Effects and Potential for Improvement / Jo Sterten, Kari Nordskogenb, A.A.Verlan' // The 6th Conference on Learning Factories. Norwegian University of Science and Technology.– published by Elsevier, – 2016.– Procedia CIRP.– Volume 54.– P. 170–174. (*Published by Elsevier, ScienceDirect ® and Scopus® are registered trademarks of Elsevier, Web of Science*).

82. Verlan' A.A. Moving Objects' Full-Scale Simulators' Composition / A.A.Verlan', A.F.Verlan' // Ninth World Conference "Intelligent systems for industrial automation".– WCIS-2016.–Abu Rayhan Beruni Tashkent State Technical University.– Oct. 25–27, 2016.– Tashkent.– P. 144–146.

83. Verlan A.A. On the choice of numerical methods for solving dynamic equations for control systems with embedded calculating tools / А. А. Верлань, В. А. Федорчук // Міжнародна наукова конференція. Питання оптимізації обчислень ISCOPT-2017. Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ. Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.– 26–28 вересня 2017 р. Київ: 2017.– С. 8.

84. Verlan A.A. Models of Dynamic Objects with Distributed Parameters / A.A. Verlan, Jo. Sterten // Proceeding of the XXII International Scientific and Practical Conference "Innovation-2017". Tashkent State Technical University. Center for Strategic Innovation and Informatization. Uzbekistan: Navruz, Oct.26–27.– 2017, P. 252–254.

85. Andriy Verlan, Jo Sterten. Advanced Structural Organization of the Signal Recovery Processes in Measuring Systems // 7TH International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE 2017). University of National and World Economy (UNWE). Sofia, Bulgaria. November 3–4.– 2017.

86. Верлань А.А. Методы редукции математических моделей динамических систем / А.А. Верлань, В.В. Палагін // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : тези доповідей 8-ї Міжнародної наукової

конференції.– Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка.– 18–20 квітня 2018 р.–С. 18–19.

87. Verlan, Andriy; Fedorchuk, V.A. Computer modelling of drill string of an oilwell drilling rig. *IEEE Proceedings of 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*. February 20 – 24, 2018, Lviv, Ukraine. IEEE 2018 ISBN 978-1-5386-2556-9.– P. 346–350 (*IEEE, видання включене до міжнародної наукометричної бази SCOPUS*).

Статті в іншому виданні.

88. Верлань А. А. Моделирование электромагнитных и теплофизических процессов в надпроводниковых системах энергозабезпечення із структурою, що змінюється / А.Ф Верлань, В.М. Владимиров, А.А. Верлань, И.О. Горошко та ін. // Структурно-алгоритмические методы и средства компьютерного моделирования сложных энергетических объектов с распределенными и переменными параметрами. Заключит. отчет. № г/р 0101U000024.– Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова НАН Украины.– К., 2004.– Разд. 8.– С. 285–306.

89. Верлань А.А Алгоритмические основы реализации интегрального метода идентификации динамических объектов. Интегральные методы и компьютерные средства решения задач моделирования сложных динамических систем / А.Ф. Верлань, А.А., Верлань, И.О., Горошко, В.М. Бондаренко та ін. // Математические методы и компьютерные средства повышения разрешающей способности систем технологического контроля и управления энергогенерирующего оборудования: Заключит. отчет. № г/р 0103U000218.– Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова НАН Украины.– К., 2006.– Разд. 3, 5.– С. 120–146, 200–231.

90. Верлань А.А. Математические и компьютерные методы исследования нелинейных и многосвязных динамических систем, описываемых интегральными и интегро–дифференциальными моделями / А.А.Верлань, И.М. Гвоздева, Л.А. Митько, А.А. Дячук, В.А. Тихоход, В.Ф. Миргород // Математическое и компьютерное моделирование неоднородных динамических систем с сингулярными свойствами применительно к задачам управления и экологической

безопасности в энергетике: Отчет о НИР (заключительный).– ИПМЭ им. Г.Е. Пухова НАН Украины.– № ГР 0106U000622.– К., 2009.– С. 64–91.

91. Верлань А.А. Моделирование процессов в сложных полупроводниковых и сверхпроводниковых преобразователях / Uzbek Journal of the problems of Informatics and Energetics. «Издательство «Фан», Институт математики и информационных технологий АН РУз.– Ташкент, 2011.– Т.5.– С.15–23.

92. Верлань А.А. Моделирование техногенного риска для опасных производственных объектов газотранспортных предприятий с использованием ГИС технологий / Верченев А.Д, Верлань А.А., Михайленко А.Г, Янчук А.В, Волкодав С.В., Марков А.С. // Вчені записки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського. Серія: Географія.– 2012.– Т. 61, № 1.– С. 38–47.

93. Верлань А.А. Вибір та адаптація чисельних методів при створенні алгоритмічних основ реалізації задіяних математичних моделей / А.Ф. Верлань В.А. Федорчук, Ю. Стертен // Створення методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання динамічних процесів в автономних енергетичних силових установках при побудові сучасних систем керування, діагностики і випробування.– Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України.– № Держреєстрації 0111U007792.– К., 2017.– С. 114–155.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	2
ВСТУП.....	32
РОЗДІЛ 1. ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧНОГО І КОМП'ЮТЕР- НОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ ТЕХНІЧНИХ КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ.....	47
1.1 Особливості комп'ютерно-інтегрованих систем як об'єктів моделювання.....	47
1.2 Традиційні підходи до математичного моделювання динаміки силових енергетичних установок.....	56.
1.3 Основні підходи до побудови методів моделювання та функціонального забезпечення об'єктів, що розглядаються.....	63
1.4 Висновки до першого розділу.....	69
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ФОРМУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ.....	74
2.1 Основні види динамічних моделей.....	74
2.2 Методи еквівалентного перетворення скалярних динамічних моделей.....	83
2.3 Методи апроксимаційного перетворення динамічних моделей.....	90
2.4 Висновки до другого розділу.....	100
РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ ПАРАМЕТРИЧНОЇ РЕДУКЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ.....	101
3.1 Способи спрощення математичних моделей.....	101
3.2 Принцип «точностної» параметричної редукції математичних моделей.....	105
3.3 Алгоритмізація процесів «точностної» параметричної редукції.....	115
3.4 Підхід до програмної реалізації процесів редукції моделей динамічних систем.....	127

3.5 Висновки до третього розділу.....	130
РОЗДІЛ 4. РОЗРОБКА МЕТОДУ СТРУКТУРНОГО СПРОЩЕННЯ БАЗОВИХ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	
4.1 Інтерполяційний метод (опорних перерізів) для моделювання об'єктів з розподіленими параметрами.....	131
4.2 Нестационарні об'єкти з несиметричними граничними умовами.....	143
4.3 Дослідження ефективності методу. Обчислювальні експерименти.....	156
4.4 Висновки до четвертого розділу.....	167
РОЗДІЛ 5. ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ АДАПТИВНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З ЕТАЛОННОЮ МОДЕЛЛЮ.....	
5.1 Математичний опис адаптивної системи з еталонною моделлю.....	170
5.2 Метод параметричного настроювання системи.....	173
5.3 Метод сигнального настроювання системи.....	180
5.4 Метод комбінованого настроювання системи.....	185.
5.5 Висновки до п'ятого розділу.....	190
РОЗДІЛ 6. МОДЕЛЬНО-ОРІЄНТОВАНІ МЕТОДИ І СИСТЕМИ ДІАГНОСТУВАННЯ.....	
6.1 Задачі ідентифікації і діагностики комп'ютерно-інтегрованих систем (на прикладі силових енергетичних установок).....	192
6.2 Аналіз і вибір методів ідентифікації.....	200
6.3 Процедура модельного діагностування динамічних систем.....	212
6.4 Висновки до шостого розділу.....	229
РОЗДІЛ 7. ВИБІР ТА АДАПТАЦІЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ПРИ СТВОРЕННІ АЛГОРИТМІВ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В КОМП'ЮТЕРНО- ІНТЕГРОВАНІХ СИСТЕМАХ.....	
7.1 Адаптація обчислювальних алгоритмів реалізації диференціальних динамічних моделей.....	231
7.2. Вибір оптимального алгоритму.....	246
7.3 Моделювання задач аналізу динамічних об'єктів на основі рівнянь	

типу Вольтерри II роду (прямі задачі).....	257
7.4 Висновки до сьомого розділу.....	268
РОЗДІЛ 8. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ	
АЛГОРИТМІВ.....	270
8.1 Обґрунтування вибору середовища моделювання.....	270
8.2 Блок програм для перетворення динамічних моделей.....	274
8.3 Засоби формування і реалізації моделей об'єктів із розподіленими параметрами.....	280
8.4 Програми для реалізації динамічних макромоделей.....	293
8.5 Висновки до восьмого розділу.....	300
ВИСНОВКИ.....	301
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	310
ДОДАТКИ (РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ).....	336
Додаток А Побудова спрощених математичних моделей при дослідженні силової установки з газовим приводом і системою керування».....	336
Додаток Б Комп'ютерне моделювання бурильної колони бурової установки».....	360
Додаток В Моделювання електромагнітних процесів та енергетично ефективних режимів роботи надпровідникових СЕУ.....	375
Додаток Г Точностна параметрична редукція моделі динаміки літака»	430
Додаток Д Розробка спрощеної математичної моделі газотурбінного двигуна за каналом подачі палива.....	450
Додаток Е Акти впровадження.....	459

Вступ

Актуальність теми. Однією з важливих проблем техніки є створення сучасних комп'ютерно-інтегрованих систем, зокрема, розвиток сучасної енергетики шляхом розроблення нових та модернізації існуючих зразків силових енергетичних установок (СЕУ), які застосовуються як автономні енергогенеруючі та рухомабезпечуючі системи різного призначення, в тому числі у виробництві та на транспорті.

Сучасний рівень комп'ютеризації СЕУ визначається розв'язуваними поточними завданнями, які і визначають можливості і потреби в комп'ютерній техніці. До розповсюджених завдань відносяться: проектування установок (при цьому широко відомий важливий недолік дорогих автоматизованих систем проектування – відсутність достатнього набору засобів модельної підтримки); обробка результатів випробувань (виконується автономними засобами); супровід результатів профілактики; реєстрація результатів вимірювань в контрольних точках при діагностиці та контролі; забезпечення процесів управління (використовуються регулятори, наприклад ПД-регулятори, які не враховують властивості об'єкта) [115]. Таким чином, клас задач, які вирішуються комп'ютером, є досить обмеженим і має обмежену складність, і не забезпечує вирішення завдань повного спостереження і керування режимами функціонування СЕУ. Тоді як сучасні тенденції даного напрямку передбачають вирішення саме цих задач. Комп'ютерно-інтегровані системи з необхідними властивостями повинні задовольняти принципу «Full responsibility systems» (системи з повною відповідальністю) [122]. Створення таких систем з урахуванням комп'ютерно-інтегрованого виконання з властивими їм обмеженнями на ресурси вимагає вирішення нових проблем побудови математичних моделей динаміки установки, підсистем управління і діагностики, що забезпечують ефективне функціонування СЕУ [116]. Рішення даних проблем потребує проведення фундаментальних досліджень в області процесів моделювання, управління, діагностування, алгоритмічного і програмного забезпечення. Задоволення вказаних вимог

призводить до нагальної необхідності розробки адаптаційних методів з використанням процесів оптимізації [12, 214].

Існуючі наукові досягнення в області математичного моделювання динамічних систем, здебільшого, базуються на застосуванні апарату диференціальних рівнянь. На основі цього підходу створено та активно застосовується чимало методів і засобів комп'ютерного моделювання. Проте, такий підхід може мати деякі обмеження. Серед них можна виділити питання забезпечення стійкості обчислювального процесу при наявності значних рівнів високочастотних спектрів шумів у вихідних даних, розповсюджений прояв ефекту Гіббса при моделюванні об'єктів з розподіленими параметрами, обмежене застосування традиційних (не адаптованих) алгоритмів та ін. Для розв'язання вказаних питань необхідно, в доповнення до існуючих, створювати нові способи побудови і числової реалізації математичних моделей. Ефективним кроком у цьому напрямку є використання інтегральних операторів та рівнянь [22]. Такий вибір обумовлений тим, що інтегральні моделі володіють низкою позитивних властивостей, зокрема високою універсальністю (структура моделі є незмінною для різних класів динамічних об'єктів, а властивості задаються однією функцією – ядром інтегрального оператора), потенційно високою адекватністю процесів моделювання, властивістю згладжування при виконанні обчислень та використанні у реальних системах із значним рівнем спектрів високочастотних шумів, високою стійкістю обчислювальних процесів, можливістю ефективної побудови моделі за експериментальними даними тощо. Разом з тим, використання інтегральних моделей має ряд особливостей, врахування яких вимагає проведення низки теоретичних і практичних досліджень та розробок. Зокрема, це стосується проблеми отримання еквівалентних інтегральних моделей на основі відомої диференціальної моделі, оскільки значна частина фізичних законів записується в диференціальній формі [195].

Насичення установок вмонтованими комп'ютерними засобами дозволяє розв'язувати комплекс вказаних задач із забезпеченням інтелектуальних функцій [7]. Поява можливості вирішення складних та специфічних задач обумовлює

необхідність розробки ефективних математичних та комп'ютерних моделей даного класу об'єктів [118]. Ця обставина породжує таку вимогу до комп'ютерних моделей, як здатність роботи в реальному часі при обмежених обчислювальних ресурсах [2, 3].

Отже, для розв'язування задач проектування, управління, контролю, діагностики виникає необхідність розвинення методів і засобів математичного і комп'ютерного моделювання таких систем та їх складових елементів, які здатні враховувати зазначені особливості. Аналіз публікацій у напрямку створення таких методів свідчить про існування певних тенденцій, але розв'язання проблеми в цілому не можна вважати завершеним.

До найбільш відомих центрів, які здійснюють розробки в цьому напрямку відносяться підрозділи провідних світових фірм: "Дженерал Електрик", "Сіменс", "Елекрісіте де Франс", "Вестингауз", "Бабкок", "Тошіба", "Хітачі". В Україні подібними роботами займаються у СКТБ ВАТ "Турбоатом", ДП "Івченко-Прогрес", ВАТ "Мотор-Січ", ВАТ Мінпромполітики України "Елемент", ДП НВКГ «Зоря» – «Машпроект» .

Відмінною рисою технічних комп'ютерно-інтегрованих систем є різноманітність елементів, що входять до складу фізичної частини, що, породжує неоднорідність у математичному описі системи, що надає відповідні особливості методів і засобів математичного моделювання, що створюються.

Таким чином, у зв'язку з інтенсивним якісним розвитком, ускладненням структур і суттєвим розширенням області застосування комп'ютерно-інтегрованих систем [7, 102, 103, 123] актуальною є *науково-технічна проблема створення адаптаційних методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання процесів їх функціонування для дослідження і забезпечення якісних показників вказаного класу систем, ефективного розв'язання задач аналізу, синтезу та побудови засобів керування і діагностики з урахуванням обмежень до інформаційних ресурсів.*

Ефективне розв'язання вказаної проблеми може досягатись шляхом розширення класу математичних моделей для врахування особливостей окремих

типів ланок систем, що моделюються, в тому числі із залученням інтегральних динамічних моделей і макромоделей, створення та застосування методів еквівалентних та апроксимаційних перетворень моделей, отримання та застосування швидкодіючих алгоритмів для реалізації динамічних моделей, підвищення рівня адекватності відтворення процесів як в окремих ланках, так і в цілому в системі, структурно-алгоритмічної організації програмних засобів комп'ютерного моделювання. Урахування особливостей комп'ютерно-інтегрованих систем приводить до необхідності придання методам і засобам моделювання адаптуючих можливостей.

Для розв'язання вказаної проблеми доцільним є застосування структурно-орієнтованого підходу в моделюванні, на якому традиційно ґрунтуються дослідження та інженерні розробки при створенні зразків нової техніки, та який є основою для створення нових методів математичного моделювання з використанням принципу декомпозиції, а також засобів комп'ютерного моделювання шляхом організації сучасних моделюючих програмних комплексів. Підхід дозволяє використовувати, в тому числі одночасно, різні види динамічних моделей, створювати розгалужене алгоритмічне забезпечення з можливістю розробки і застосування відповідного набору програмних модулів, використовувати опис системи, що моделюється, в природній і зручній для розробника графічній формі.

Суттєвий внесок в проблему створення методів і засобів математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем внесли результати праць Бублика Б.М. [19], Верланя А.Ф. [95-97], Гаращенко Ф.Г. [100], Горбаня А.В. [101], Дячука О.А. [111, 112], Жученка А.І. [119-121], Євдокимова В.Ф. [33], Задираки В.К. [122; 123], Іванова В.В. [124], Квєтного Р.Н. [196, 203, 204], Кириченка М.Ф. [19], Кисельова Н. В. [129], Клепікова В.Б. [130], Кубрака А.І. [1, 119, 120], Лозинського О. Ю. [114, 139], Мороза В.І. [135, 139, 148], Москвіної С.М. [132], Святного В.А. [208. 209], Стахіва П.Г. [165], Федорчука В.А. [169, 170], Хіміча О.М. [153, 173], Ali-Zade P.G. [210], Baker C.T.H. [178], Bird J.

[170], Cinlar E. [183], Harvill Lawrence R. [188], Hoffman J.D. [191], Lyshevski S. E. [198], Moon F. C. [200] та ін.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в Інституті проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України в рамках науково-дослідних робіт: «Структурно-алгоритмические методы и средства компьютерного моделирования сложных энергетических объектов с распределенными и переменными параметрами», № держреєстрації 0101U000024; «Математическое и компьютерное моделирование неоднородных динамических систем с сингулярными свойствами применительно к задачам управления и экологической безопасности в энергетике», № держреєстрації 0106U000622; «Математические методы и компьютерные средства повышения разрешающей способности систем технологического контроля и управления энергогенерирующего оборудования», № держреєстрації 0103U000218; «Створення методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання динамічних процесів в автономних енергетичних силових установках при побудові сучасних систем керування, діагностики і випробування» (шифр "Модус"), № держреєстрації 0111U007792; «Створення методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання процесів інверсної обробки сигналів у вимірювальних каналах систем моніторингу енергетичних об'єктів» (шифр "Інверсія"), № держреєстрації 0114U003949.

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є створення методів і засобів математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих технічних систем з адаптаційним забезпеченням можливостей дослідження і побудови засобів керування та діагностики.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- аналіз сучасного стану і особливостей проблеми дослідження, створення і вдосконалення технічних комп'ютерно-інтегрованих систем (на прикладах силових енергетичних установок), вибір та обґрунтування перспективних підходів до її вирішення;

- розробка адаптаційних методів формування динамічних моделей комп'ютерно-інтегрованих систем з урахуванням альтернативностей їх можливих форм;
- аналіз можливостей та розвиток методів параметричної редукції математичних моделей задач динаміки з урахуванням вимог до їх адаптації до особливостей об'єкта моделювання;
- розробка та дослідження метода спрощення базових математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- побудова та моделювання процесів функціонування адаптивних систем керування з використанням еталонної моделі об'єкта керування;
- розробка модельно-орієнтованих методів і структур систем діагностування на основі ідентифікаційного підходу;
- вибір та адаптація чисельних методів при створенні алгоритмів моделювання процесів в комп'ютерно-інтегрованих системах;
- розробка та апробація програмних засобів для реалізації обчислювальних алгоритмів моделювання.

Об'єктом дослідження є процеси функціонування комп'ютерно-інтегрованих динамічних систем.

Предметом дослідження є адаптаційні методи і засоби математичного та чисельного моделювання процесів функціонування технічних комп'ютерно-інтегрованих систем.

Методи дослідження. Для розв'язування поставлених задач у дисертації використовуються методи математичного моделювання динамічних систем; методи еквівалентного та апроксимаційного перетворення форм динамічних моделей, зокрема, методи математичної редукції; методи обчислювальної математики; методи теорії керування і діагностики; методи організації засобів комп'ютерного моделювання динамічних систем; методи обчислювальних експериментів при числовому дослідженні динамічних моделей.

Наукова новизна одержаних результатів. В рамках розв'язання проблеми створення методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання

процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем з урахуванням обмежених інформаційних ресурсів отримані наступні наукові результати.

Вперше запропоновано:

- метод еквівалентного перетворення диференціальних динамічних моделей до інтегральних (метод розділення з аналітичним розв'язком), який узагальнює відомі методи та дозволяє отримувати не тільки еквівалентні інтегральні рівняння, але низку ($n-1$, n – порядок рівняння) еквівалентних моделей у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь, що значно підвищує можливості адаптаційного вибору моделі;
- метод опорних перерізів апроксимаційного перетворення за інтерполяційним принципом моделей об'єктів з розподіленими параметрами у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними до скалярних моделей у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь, розмір яких дорівнює кількості обраних опорних перерізів, що дозволяє отримати наближену модель із значно меншою складністю, ніж у випадку вихідної моделі та забезпечити суттєве зменшення вимог до швидкодії комп'ютерних засобів при реалізації моделей;
- ідентифікаційний (модельний) метод діагностування неперервних систем за принципом виявлення наявності, місця і виду несправності шляхом побудови (ідентифікації) моделі поточного стану несправного фрагменту системи і порівняння значень її параметрів з їх номінальними значеннями; метод забезпечує виявлення широкого класу можливих несправностей при обмеженому доступі до внутрішніх елементів системи; розроблені основні теоретичні положення методу та основи алгоритмічної реалізації.

Удосконалено:

- підхід до вибору або створенню математичного опису об'єкта моделювання на основі альтернативності задіяних форм динамічних моделей, що забезпечує адаптаційні можливості побудови необхідної моделі за принципом «складність – якість», тобто отримання моделі мінімальної складності при заданих вимогах до показників якості (точності);

- модельний підхід до організації систем керування технічними об'єктами із застосуванням еталонної динамічної моделі, згідно з яким запропоновані параметричний, сигнальний та комбінований способи настроювання керуючого блоку у зворотному зв'язку системи, а також новий метод побудови керуючого каналу зворотного зв'язку з використанням еталонної моделі об'єкта керування, що формує керуючий вплив за принципом неперервного відслідковування поведінки моделі без застосування оптимізаційних обчислень;
- інтегральний підхід до математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем на основі застосування одновимірних непараметричних інтегральних динамічних моделей у вигляді операторів і рівнянь типу Вольтерра, які можуть бути побудовані як шляхом аналітичних перетворень, так і за експериментальними даними та забезпечують можливість моделювання об'єктів з зосередженими і розподіленими параметрами та чисельну реалізацію засобами візуального (структурно-алгоритмічного) програмування.

Набули подальшого розвитку:

- метод адаптаційного визначення алгоритмів чисельної реалізації диференціальних динамічних моделей у вигляді звичайних диференціальних рівнянь на основі запропонованих критеріїв оптимальності обчислювальних схем, що відповідають заданим вимогам щодо швидкодії засобів комп'ютерної реалізації та точності результатів обчислень;
- ефективні та швидкодіючі квадратурні алгоритми чисельної реалізації інтегральних динамічних моделей у вигляді рівнянь Вольтерра II роду на основі застосування резольвенти, що забезпечують можливість побудови і реалізації явних інтегральних динамічних макромоделей, які реалізуються у вигляді сукупності числових масивів, зв'язаних між собою відповідними обчислювальними операціями; задіяний резольвентний чисельний метод розв'язання інтегральних рівнянь дозволяє при апроксимації дискретних залежностей отримувати явні моделі у аналітичній формі.

Практичне значення отриманих результатів.

Створені засоби алгоритмічного та програмного забезпечення процесів моделювання динаміки комп'ютерно-інтегрованих систем забезпечують ефективну комп'ютерну реалізацію отриманих видів динамічних моделей з можливістю адаптивного вибору алгоритмів відповідно до властивостей конкретних задач, можливість використання швидких стійких рекурентних і високоточних процедур чисельного розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь. Запропоновані методи моделювання та комп'ютерні засоби дозволяють забезпечити якісне відтворення властивостей, характеристик і параметрів широкого класу комп'ютерно-інтегрованих систем. Розроблений пакет прикладних програм, реалізований в моделюючому середовищі Матлаб і призначений для дослідження та забезпечення процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем як у лабораторних дослідженнях, так і в умовах застосування в реальних системах із забезпеченням умов керування та діагностики. В роботі вирішено наступні прикладні задачі, що представлені у додатках: «Побудова спрощених математичних моделей при дослідженні силової установки з газовим приводом і системою керування» (додаток А); «Комп'ютерне моделювання бурильної колони бурової установки» (додаток Б); «Моделювання електромагнітних процесів та енергетично ефективних режимів роботи надпровідникових СЕУ» (додаток В); «Точностна параметрична редукція моделі динаміки літака» (додаток Г); «Розробка спрощеної математичної моделі газотурбінного двигуна за каналом подачі палива» (додаток Д). Основні результати роботи та основні положення, які виносяться на захист, пройшли апробацію при розв'язанні модельних і практичних задач.

Результати теоретичних та експериментальних досліджень, а також розроблені методи знайшли практичне використання та впровадження (акти впровадження наведено у додатку Е) у Науково-виробничому ТОВ «Прайм енерджи 2019», ТОВ «Мікросистеми експрес телеком», Науково-виробничому ТОВ "Інфотех", ТОВ «Оліс», а також впроваджені у навчальний процес Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Одеського національного політехнічного

університету.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи, що винесені на захист, отримано автором самотійно. Роботи [2, 15, 20, 25, 26, 27, 40, 44, 46, 47, 48, 49, 60, 63, 73, 75, 92] написано самотійно. В опублікованих із співавторами здобувачеві належить наступний особистий внесок: [1] – методи чисельної реалізації інтегральних динамічних моделей мехатронних комп'ютерно-інтегрованих систем; [3] – алгоритм реалізації методу послідовних наближень при вирішенні нелінійного інтегрального рівняння Урисона; [4] – підхід до побудови квадратурних алгоритмів; [5] – підхід до моделювання однопараметричних первинних перетворювачів; [6] – підхід до моделювання багатопараметричних первинних перетворювачів; [7] – метод пониження порядку моделі, що забезпечує стаціонарно точну модель без використання методів пошуку; [8] – підхід до побудови інтегральних моделей систем з розподіленими параметрами; [9] – підхід до розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь з використанням квадратурної формули; [10] – методи побудови фізико-статистичних моделей відмов радіоелектронних пристроїв; [11] – методи класифікації дефектів емісії в задачі моделювання систем діагностики; [12] – аспекти використання методу коллокації для розв'язання інтегральних рівнянь; [13] – математична модель системи захисту від ємнісних струмів витоку; [14] – безперервна кусочно-лінійна модель в рівняннях динаміки керованого руху; [16] – лінійні моделі електроприводу – моделі замкнутих систем; [17] – лінійні моделі електроприводу – моделі систем з фільтрами в ланцюзі зворотного зв'язку; [18] – нелінійні моделі електроприводу – нелінійні моделі із урахуванням нелінійностей системи управління тиристорами; [19] – об'єктно-орієнтована організація інтелектуальних систем комп'ютерного моделювання; [21] – метод спрощення динамічної моделі із забезпеченням умови стаціонарної точності за допомогою модельних експериментів; [22] – спосіб послідовного інтегрування при моделюванні нестаціонарних безперервних об'єктів; [23] – обчислювальні алгоритми розрахунку лінійних інтегральних динамічних моделей на основі квадратурних формул; [24] – автоматична побудова математичної моделі технологічних процесів та їх

оптимізація; [28] – інтегральний метод при вирішенні задач параметричної ідентифікації за наявності похибки у вихідних даних; [29] – метод регуляризації введенням множника за заданим правилом, що забезпечує стійкий, достовірний розв’язок; [30] – спеціалізовані програмно-апаратні засоби інтегрованої системи захисту; [31] – метод розв’язання задачі декомпозиції структури комп’ютерної мережі; [32] – квадратурні алгоритми відкритого типу; [33] – розвиток підходу, заснованого на комп’ютерній реалізації багатозв’язних динамічних систем; [34] – метод локалізації несправних електронних модулів на основі принципу декомпозиції; [35] – метод статистичного моделювання та алгоритм обробки його результатів; [36] – основні теоретичні положення модельного методу ідентифікаційних експериментів; [37] – підхід до вибору оптимального методу розв’язання диференціальних рівнянь для систем моделювання; [38] – процедура модельного конструювання оптимальних регуляторів для нелінійних динамічних систем; [39] – модельний метод локалізації несправних електронних підсистем; [41] – спосіб формування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду; [42] – розвиток методу рядів Вольтерра для моделювання нелінійних систем з ввідними періодичними сигналами; [43] – RID-моделі в логіко семантичному представленні нечіткої системи; [45] – спосіб розпаралелювання чисельного рішення двовимірного неоднорідного рівняння теплопровідності; [50] – високоточностний метод чисельної реалізації математичних моделей нестационарних теплових процесів при несиметричних граничних умовах I-II роду; [51] – швидкодіючий метод апроксимації функцій поліномами, що містять дрібно-степеневі члени в проблемі моделювання динаміки складних систем; [52] – метод локалізації несправних підсхем за принципом декомпозиції; [53] – розвиток модельно-орієнтованого методу діагностування технічних систем; [54] – алгоритмів редукції в просторі параметрів; [55] – досліджено можливість підвищення точності моделювання при застосуванні квадратурних формул для реалізації інтегральних макромоделей у вигляді рівнянь Вольтери; [56] – обґрунтування використання квадратурних алгоритмів для чисельної реалізації моделей об’єктів з розподіленими параметрами, застосування вироджених ядер; [57] – математична

модель процесу відтоку газового струменя; [58] – підходи до редукції математичних моделей за коефіцієнтом узгодженості характеристик моделей і точності вихідних даних; [59] – способи отримання спрощених моделей за критерієм адекватності і точності по відношенню до базової моделі; [61] – інтегро-квадратурний алгоритм в проблемі моделювання динаміки систем вимірювання; [62] – підхід до оптимального вибору чисельних методів розв'язання динамічних рівнянь в проблемах моделювання систем управління з вбудованими інструментами обчислення; [64] – спосіб вибору параметрів регуляризованих зв'язків ланцюгів обчислювальних засобів, що моделюються; [65] – клас моделей динамічних об'єктів у формі інтегральних макромоделей, що побудовані на принципі «вхід-вихід»; [66] – метод моделювання, що відрізняється від відомих урахуванням додаткового руху і узгодження точності вихідних даних і збурень параметрів з необхідною точністю оцінок показників якості; [67] – підхід до моделювання динаміки силових ланцюгів з використанням узагальненого простору станів моделі; [68] – використання неявних моделей при моделюванні динаміки енергосистем; [69] – чисельна реалізація неявних інтегральних моделей динамічних об'єктів в реальному часі; [70] – підхід до моделювання динаміки силових систем енергетичного призначення з використанням узагальненої моделі простору-стану; [71] – розвиток чисельних методів для сингулярних систем; [72] – моделі енергетично ефективних режимів роботи надпровідникових систем енергозабезпечення; [74] – модельний метод формуючого фільтра стосовно до задачі ідентифікації; [76] – адаптивні квадратурні алгоритми в проблемі моделювання складних енергетичних систем; [77] – підхід до формування динамічних моделей складних сингулярних енергетичних систем; [78] – модель динаміки силової газової установки у вигляді системи нелінійних диференціальних і алгебраїчних рівнянь; [79] – математична модель систем спостереження у вигляді системи трьох інтегральних рівнянь Фредгольма I роду; [80] – квадратурна реалізація динамічної моделі у вигляді оператора згортки з експоненційно-ступеневими ядрами; [81] – підхід до адаптації сучасних методів та засобів моделювання систем навчання; [82] – організація повномасштабних імітаторів

рухомих об'єктів у нелінійній постановці, включаючи вибір математичної моделі; [83] – підхід до оптимального вибору чисельних методів розв'язання рівнянь динаміки в проблемах моделювання систем управління з вбудованими інструментами обчислення; [84] – редукційний підхід до вирішення задачі математичного та комп'ютерного моделювання об'єктів з розподіленими параметрами; [85] – підхід до побудови математичних моделей вимірювальних систем на основі алгоритму цифрової фільтрації; [86] – принцип спрощення моделей динаміки; [87] – апроксимаційна модель бурильної колони у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь, комп'ютерна оборотна модель; [88] – розвиток методу моделювання динамічних процесів в енергетичних системах з урахуванням реальних характеристик складових елементів; [89] – чисельні перешкодостійкі алгоритми, що реалізують інтегральний метод ідентифікації динамічних об'єктів; [90] – математичні та комп'ютерні методи дослідження процесів в нелінійних і багатозв'язкових динамічних системах, що описуються інтегральними та інтегро-диференціальними моделями; [92] – математичні моделі функціонування газотранспортних установок енергетичного призначення; [93] – адаптація чисельних методів при створенні алгоритмічних основ реалізації математичних моделей динамічних процесів в автономних енергетичних силових установках.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних, всеукраїнських та регіональних конференціях: NEU-CEE-2004, Second International Symposium on Electrical, Electronic & Computer Engineering, IEEE, TRNC. Lefkosa: 2004; 6^t International Conference Control of Power System, Slovakia, 2004; междунар. конф. "Информационные технологии в управлении энергетическими системами" ИТУЭС-2005; Fourth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation WCIS-2006, Tashkent, Uzbekistan, November 21–22, 2006; ISEECE 2006, 3rd International Symposium on Electrical, Electronic and Engineering, IEEE, November 23–25, 2006. Nicosia, North Cyprus; Современное состояние и перспективы развития

информационных технологий: Республиканская научно-техническая конференция, Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, 2011; IV міжнародна наукова конференція “Моделювання-2012 / Simulation-2012”, Київ: ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України, 2012 р.; Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: V міжнар. наук. конф., Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012; Проблемы энерго и ресурсосбережения, Республиканская научно-техническая конференции АНРУз, Ташкент, 22–23 декабря 2014 г.; The 11th International Conference on Multimedia Information Technology and Applications, June 30–July 2, 2015, Tashkent, Uzbekistan, organized by the Korea Multimedia Society (KMMS), the Republic of Korea, IEEE; 5th International Scientific Conference «Signal and non-Gaussian noise processing», Cherkasy State Technological University, May 20–22, 2015; XX International Scientific Practical Conference “Innovation-2015”, October 23–24, 2015, Tashkent, Uzbekistan; Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: 7-ма Міжнародна наукова конференція OPTIMA, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 21–22 квітня 2016; The 6th Conference on Learning Factories. Norwegian University of Science and Technology, published by Elsevier, 2016, *Procedia CIRP (Published by Elsevier, ScienceDirect ® and Scopus® are registered trademarks of Elsevier, Web of Science)*; Ninth World Conference “Intelligent systems for industrial automation”, WCIS-2016, Abu Rayhan Beruni Tashkent State Technical University, Oct. 25–27, 2016, Tashkent; Міжнародна наукова конференція Питання оптимізації обчислень ISCOPT-2017, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ, Кам’янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 26–28 вересня 2017 р., Київ: 2017; The XXII International Scientific and Practical Conference "Innovation-2017", Tashkent State Technical University, Center for Strategic Innovation and Informatization, Uzbekistan: Navruz, Oct.26–27 2017; 7TH International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE 2017), University of National and World Economy (UNWE), Sofia, Bulgaria, November 3–4, 2017; Сучасні проблеми математичного

модельовання, прогнозування та оптимізації, 8-ма Міжнародна наукова конференція, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 18–20 квітня 2018 р.; IEEE 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET), February 20–24, 2018, Lviv, Ukraine. IEEE 2018 ISBN 978-1-5386-2556-9. (IEEE, видання включене до наукометричної бази SCOPUS).

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 93 наукових праць, 1 монографія, 65 статей у наукових фахових виданнях (з них 10 статей у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз), 21 тези доповідей в збірниках матеріалів конференцій, 6 статей в іншому виданні (4 публікації проіндексовані в IEEE, 2 публікації проіндексовані в Scopus), одноосібних публікацій 16.

Структура та обсяг роботи. Робота складається із вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел (234 найменування) та 6-ти додатків. Загальний обсяг дисертації складає 467 сторінок, в тому числі 293 сторінки основного тексту, включаючи 20 таблиць та 44 рисунки; обсяг додатків складає 130 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧНОГО І КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ ТЕХНІЧНИХ КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ

1.1 Особливості комп'ютерно-інтегрованих систем як об'єктів моделювання

Особливості сучасних комп'ютерно-інтегрованих систем доцільно розглянути на прикладах таких силових енергетичних установок як електромеханічні системи, які широко використовуються в машинобудуванні, енергетиці, при видобутку корисних копалин, в металургії, на транспорті тощо [115]. Оскільки під час функціонування електромеханічних систем спостерігається значне споживання електричної енергії, протягом багатьох років інтенсивно ведуться роботи по покращенню їх енергетичних характеристик [14]. Також актуальними залишаються задачі покращення динамічних характеристик завдяки використанню систем автоматичного керування [161, 165]. В залежності від поставленої задачі автоматизована система керування повинна забезпечувати необхідні режими функціонування електромеханічної системи з контролем швидкості, потужності, механічного моменту, частоти тощо [147]. Зараз для сучасних електромеханічних систем визначилась стійка тенденція зростання вимог щодо точності відпрацювання складних рухів виконавчих механізмів при умові збільшення швидкості їх переміщення [214]. Це стало можливим з появою потужних напівпровідникових силових перетворювачів та високоточних цифрових систем керування, які поклали початок розвитку мехатронних систем [28, 66, 107, 139, 146].

Показовою є функціональна схема електромеханічної системи мехатронного типу, що приведена на рис. 1.1. Вона включає три підсистеми: 1 — інформаційну, 2 — енергоелектронну і 3 — електромеханічну [205, 209, 210, 233].

Інформаційна підсистема містить систему керування, контролю і діагностики (СККД), набір сенсорних пристроїв (НСП), локальний інтерфейс (ЛІ) та зовнішній інтерфейс (ЗІ). *Енергоелектронна* підсистема включає силовий

напівпровідниковий перетворювач (СНП) і силовий блок живлення (СБЖ). Електромеханічна підсистема містить виконавчий механізм (ВМ) і електромеханічний перетворювач (ЕМП). Слід відзначити, що в деяких мехатронних системах функціональні блоки можуть відрізнятись від приведених на схемі. Так, наприклад, електромеханічний перетворювач може бути конструктивною ланкою виконавчого механізму, або в деяких мехатронних системах може бути відсутній зовнішній інтерфейс, якщо не передбачається робота в складі групи пристроїв з централізованим управлінням.

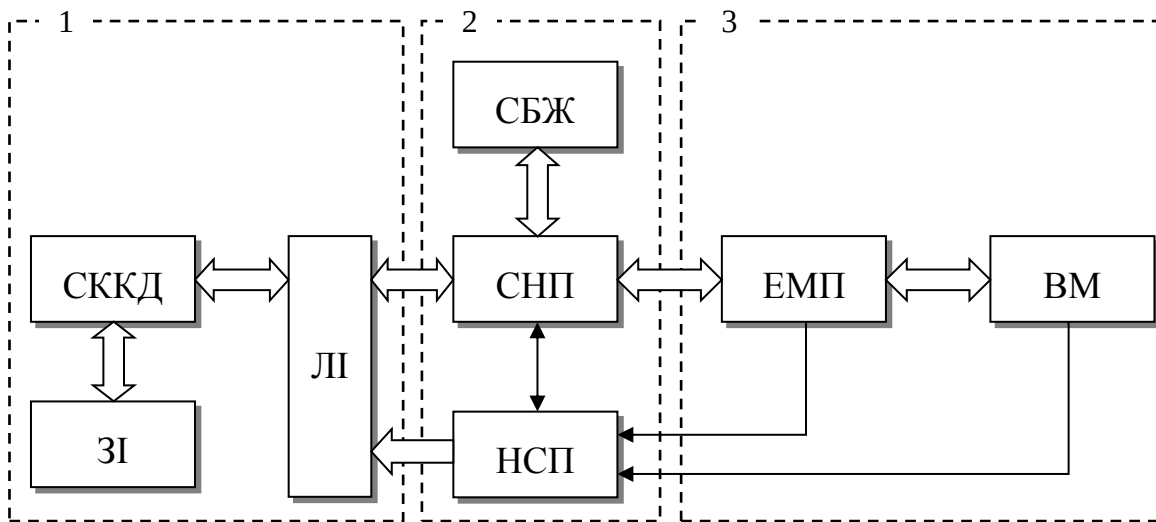


Рис. 1.1. Електромеханічна система мехатронного типу

Особливістю мехатронних систем є те, що вони охоплюють широкий клас задач завдяки універсальності комп'ютеризованих систем керування, контролю та діагностики. В залежності від особливостей виконавчого механізму (об'єкта керування) в мехатронній системі може використовуватись різний набір сенсорних пристроїв та різні алгоритми вироблення керуючих впливів. Наприклад, для керування асинхронними електродвигунами широкого розповсюдження набуває векторний метод, який передбачає використання моделі електродвигуна і виконавчого механізму (рис.1.2). Для підвищення ефективності керування складними багатоканальними та багатозв'язними об'єктами планується використання їх еталонних та прогнозних моделей (рис. 1.3). До таких моделей висуваються додаткові вимоги, зокрема здатність функціонування в режимах

реального та прискореного часу, високої надійності, можливості синхронізації поточного стану моделі відносно реально діючого об'єкта тощо [61, 62].

Використання в мехатронних пристроях комп'ютеризованих систем керування дозволяє не лише підвищувати показники якості керування, але й розв'язує комплекс задач, пов'язаних з управлінням складними системами із великою кількістю електромеханічних перетворювачів [106]. Специфіка цих задач полягає в тому, що при виробленні сигналів керування необхідно враховувати їхню взаємозв'язність через спільність об'єкта керування, який може мати складну структуру. Для розв'язування таких задач виникає необхідність створення математичних моделей багатозв'язних об'єктів керування. Ефективним підходом до побудови математичних моделей багатозв'язних динамічних об'єктів є використання математичного опису у вигляді інтегральних рівнянь та їх систем [58, 135, 157].

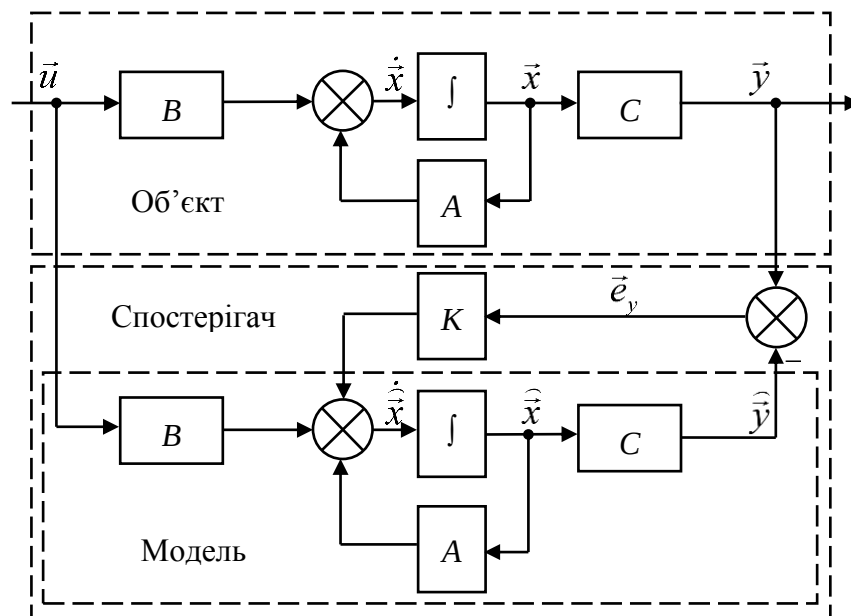


Рис. 1.2. Структура системи векторного керування

Відмінною особливістю сучасних мехатронних систем є використання принципів уніфікації, агрегування та типізації. Це дає змогу проводити конструювання мехатронної системи на основі уніфікованих блоків, які, при потребі, можуть замінюватись аналогічними типовими блоками. Така гнучкість

структури мехатронної системи дозволяє оперативно проводити в ній зміни з метою оптимізації структури для конкретного класу задач. В доповнення до структурної гнучкості, мехатронні системи володіють також програмною гнучкістю, завдяки використанню в системах керування, контролю і діагностики програмованих мікроконтролерів та мікрокомп'ютерів. Зміна алгоритмів керування в мехатронних системах, в переважній більшості випадків, проводиться шляхом зміни програмних модулів. Також позитивним напрямком для розвитку мехатронних систем є суттєве підвищення ефективності алгоритмів керування, контролю та діагностики при використанні математичних моделей об'єктів керування. При цьому, на сучасному етапі розвитку таких систем виникла необхідність створення ефективних високошвидкісних алгоритмів для моделювання динаміки різноманітних виконавчих механізмів як об'єктів керування.

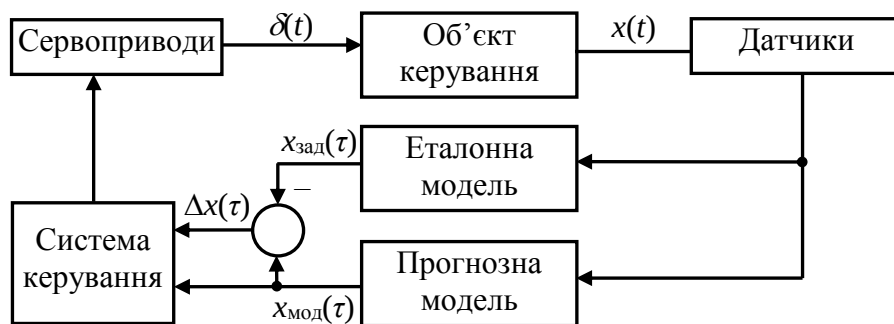


Рис. 1.3. Схема контролера з використанням еталонної та прогнозної моделей

Отже, особливості сучасних електромеханічних систем слід шукати в площині аналізу властивостей виконавчих механізмів (об'єктів керування) з метою отримання для них відповідних математичних залежностей у такому вигляді, який би давав змогу ефективно розв'язувати задачі їх моделювання.

Різнманітність способів математичного опису електромеханічних систем, доцільність комбінування різних підходів до моделювання різнотипних елементів — все це приводить до необхідності врахування специфіки математичного опису кожного елемента системи [97, 100, 131]. Так, при описі динаміки складних механічних елементів (довгих кінематичних передач, просторових рамних

конструкцій і механізмів), які складаються як з однорідних так і з неоднорідних елементів (балок, стержнів, пластин, оболонок тощо) з різними типами зв'язку між собою (з'єднання через пружні і демпферні елементи, жорсткі та рухомо-шарнірні з'єднання тощо) застосування традиційного методу математичного опису (на основі різних закономірностей) викликає значні труднощі. Крім того, наявність різнотипних зв'язків та різних типів руху між елементами (повздовжнього, поперечного, крутильних коливань) також ускладнюють задачу математичного опису. Така різноманітність способів взаємодії може бути відтворена за допомогою структурних моделей, які можуть складатися з різнотипних ланок, об'єднаних в єдину блочно-структурну схему.

Істотною особливістю кінематики приводу платформи *маніпулятора* для *армування* є те, що в деяких точках розподілено-пружного кільцевого елемента присутні жорстко зв'язані з ним зосередженні маси (двигун, редуктор, платформа маніпулятора, натяжна станція). Таким чином, задача математичного опису ланки з розподіленими параметрами приводу платформи маніпулятора зводиться до пошуку передатної функції одновимірного повздовжньо-пружного замкнутого в кільце елемента, навантаженого n масами, які зосереджені в окремих його точках (рис. 1.4).

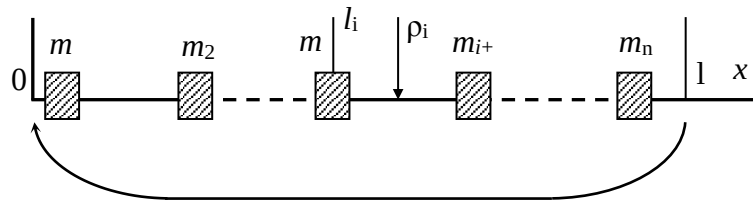


Рис. 1.4. Кільцева система з n зосередженими масами

Труднощі моделювання в цьому випадку полягають в тому, що крайова задача для одновимірного точково-неоднорідного об'єкта, як об'єкта з розподіленими параметрами (ОРП), записується у наступному вигляді [20, 21]:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t);$$

$$u(x, 0) = u_0(x); u(0, t) = u(l, t);$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x); \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x};$$

$$0 \leq x \leq l; \rho(x) > 0; E > 0,$$

де $u(x, t)$ — зміщення точки за координатою x розподіленого об'єкта в момент часу t ; $E = \text{const}$ — лінійний модуль пружності матеріалу; $f(x, t)$ — розподілений зовнішній вплив; $u_0(x)$, $u_1(x)$ — зміщення і швидкість перерізу x розподіленого об'єкта в момент часу $t = 0$; l — довжина кільця; $\rho(x)$ — лінійна густина матеріалу об'єкта в точці x .

Маси m_j , зосереджені у точках l_j , зручно враховувати з допомогою δ -функції як нескінченні стрибки густини матеріалу стержня в точках l_j , тоді

$$\rho(x) = \rho_l + \sum_{i=1}^n m_i \delta(x - l_i), \quad \rho_l = \text{const},$$

де ρ_l — лінійна густина об'єкта, який ненавантажений масами.

Колони бурильних труб бурових установок. За останні роки у зв'язку з ростом глибини буріння особливої актуальності набула проблема автоматизації подачі долота, як у випадку створення працездатних конструкцій автоматичних регуляторів, так і у випадку розробки теоретичних питань, пов'язаних зі специфікою застосування регуляторів у бурових установках. Основним процесом під час буріння є робота долота по заглибленню стовбура свердловини. Показовою рисою систем автоматичного регулювання подачі долота є наявність колони бурильних труб, через яку здійснюється замір параметрів вибою (осьового навантаження та швидкості переміщення долота), а також передача з поверхні на забій регулюючої дії. Вплив бурильної колони проявляється в істотному спотворенні і запізненні інформації, яка отримується з вибою, і керуючої дії, яка передається у зворотному напрямку. Тому організація процесу управління подачі долота пов'язана зі значними труднощами. Підвищення продуктивності бурових установок може бути досягнуто шляхом врахування динамічних характеристик бурильної колони при передачі механічних зусиль від устя свердловини до вибою.

Спрощена структурна схема регулятора подачі долота бурових установок приведена на рис. 1.5, де 1 — колона бурильних труб; 2 — забійний двигун; 3 —

долото; 4 — нерухомий кінець талевого канату; 5 — датчик навантаження; 6 — барабан лебідки; 7 — редуктор; 8 — електродвигун подачі долота; 9 — силовий перетворювач; 10 — керуючий пристрій.

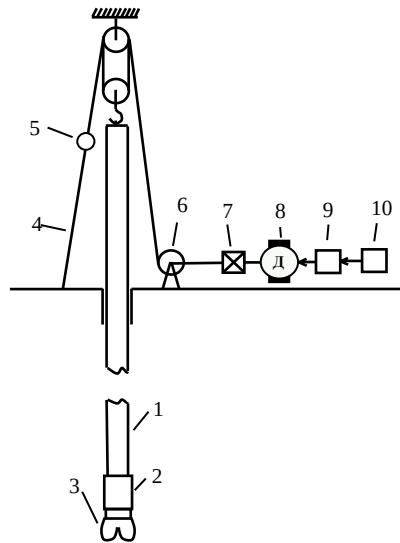


Рис. 1.5. Спрощена схема механізму подачі долота бурової установки

До нижнього кінця колони прикладена осьова реакція вибою і реакція долота, а по довжині розподілено сили ваги, в'язкого тертя, інерції. Колону бурильних труб, із врахуванням ряду допущень, можна вважати пружним однорідним стержнем з розподіленою масою, пружністю та в'язким тертям. Зміщення перерізів елементів колони описується диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h \frac{\partial u}{\partial t} = Es \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

або при введенні позначень $a = h / (2m)$, $c = \sqrt{Es / m}$ рівнянням

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, де m — маса одиниці довжини колони; u — зміщення перерізу колони відносно положення рівноваги; E — модуль пружності; s — площа перерізу колони; x — координата перерізу колони; a — коефіцієнт затухання; h — коефіцієнт демпфування на одиницю довжини колони; c — швидкість розповсюдження зміщення вздовж колони. Швидкість переміщення перерізу

колони бурильних труб v і приріст сили P визначаються виразами $v = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$,

$$P = -Es \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

При використанні наземного регулятора подачі долота керуючим впливом для колони бурильних труб є швидкість зміщення верхнього кінця колони $v_0(t)$.

Гранична умова для цього кінця колони має вигляд

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{x=0} = v_0(t).$$

Граничні умови для нижнього кінця колони бурильних труб мають вигляд

$$P(l, t) = -Es \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = zv_l(t),$$

де l — довжина колони; v_l — швидкість долота; z — параметр, що визначає взаємодію долота з породою (при абсолютно твердому забої $z \rightarrow \infty$). Наведені рівняння відображають той факт, що реальні бурильні колони складаються із різних за фізичними властивостями частин, а також є системами, що розвиваються. Для забезпечення необхідної адекватності математичної моделі колони бурильних труб необхідно залучати нові підходи до її побудови, зокрема структурно-орієнтований підхід, який передбачає представлення моделі складного динамічного об'єкта у вигляді такої сукупності математичних описів, яка дає змогу врахувати особливості кожного структурного елемента при його математичному описі та числовій реалізації. Можна бачити, що суттєвою є проблема побудови і числової реалізації моделей динамічних розподілених об'єктів.

Наведені приклади об'єктів моделювання свідчать про те, що суттєвими особливостями сучасних автономних силових установок, поряд із зростанням складності структур і режимів і підвищенням вимог до якості функціонування, є неоднорідність їх складу, наявність ланок з розподіленими параметрами, зміна параметрів в процесі функціонування, наявність комп'ютерних компонентів керування, контролю та діагностики. Характерною рисою керованих автономних енергетичних силових установок є різноманітність елементів, що входять до їх

складу. Це, в свою чергу, породжує, зазвичай, неоднорідність у математичному описі системи. Фізична неоднорідність викликана наявністю різних за фізичною сутністю елементів (механічні, електричні, оптичні, магнітні та електромагнітні і т. д.). Функціональна неоднорідність проявляється у присутності різних за призначенням сигналів (керуючі, вимірювальні, дублюючі, допоміжні та ін.). Таким чином, сучасні автономні енергетичні силові установки відносяться до класу складних неоднорідних динамічних систем.

Вказані обставини, природно, потребують суттєвого вдосконалення існуючих методів і засобів розв'язування задач моделювання динаміки автономних силових енергетичних установок, що ґрунтуються на традиційному застосуванні диференціальних моделей, для реалізації яких в переважній більшості застосовуються розповсюджені типові програмні пакети моделювання загального призначення [124]. Відомо, що виникаючі при цьому утруднення стосуються: можливої нестійкості обчислювальних процесів, накопичення похибок та складностей, які виникають при моделюванні ланок з розподіленими параметрами; має місце висока трудомісткість процедур зміни структур комп'ютерних моделей при відображенні відповідних змін в об'єкті моделювання; дослідження систем в цілому чи окремих компонентів, в тому числі при наявності зворотних зв'язків; не використовується можливість підвищення адекватності моделей при залученні експериментальних даних.

Попередній досвід проведення досліджень і практичних розробок в галузі математичного моделювання енергетичних силових установок свідчить про те, що до ефективних шляхів розв'язання зазначених проблем відноситься розвиток та розширене застосування оптимізаційного підходу до формування алгоритмів та програмних засобів, залучення динамічних моделей у вигляді інтегральних операторів та інтегральних рівнянь.

Практичне значення очікуваних результатів визначається тим, що розроблені методи та засоби моделювання повинні забезпечувати оперативне розв'язування задач дослідження, аналізу, керування, контролю та діагностики складних динамічних об'єктів з можливістю раціонального вибору математичних описів

ланок і систем в цілому та відповідних програмних модулів; отримані моделі призначаються для забезпечення високої швидкодії, точності та стійкості обчислювального процесу при їх числовій реалізації. Тим самим створюються можливості для досягнення нового рівня технічної, економічної і енергетичної ефективності силових енергетичних установок, а також їх надійності та безпеки.

1.2 Традиційні підходи до математичного моделювання динаміки силових енергетичних установок

Традиційні підходи до математичного опису задач динаміки силових енергетичних установок доцільно розглянути на прикладах об'єктів газотурбінного типу, які відносяться до розповсюдженого виду силових установок. При дослідженні динамічних характеристик газотурбінних силових установок математичні моделі являють собою системи нелінійних звичайних диференціальних і алгебраїчних рівнянь. Вони описують баланс між характеристиками елементів газотурбінної силової установки у вигляді рівнянь неперервності потоків маси, збереження енергії, зміни моменту кількості руху. В алгебраїчній формі вони визначають статичну частину моделі, а у вигляді диференціальних рівнянь – динамічну модель. Число визначальних параметрів у таких моделях залежить від схеми силової установки і ступеня її деталізації [143].

При побудові детальних нелінійних динамічних моделей газотурбінних силових установок необхідно здійснити аналіз нестационарних (перехідних) процесів, у тому числі в нештатних режимах їх функціонування. Хоча такі моделі можуть бути використані для аналізу роботи систем керування, однак велика кількість розрахунків, які при цьому потребуються, роблять такий підхід малопродуктивним, і звичайно для цих цілей застосовуються спрощені математичні моделі, приклади яких представлені нижче.

Моделювання динамічних процесів у газотурбінних силових установках на основі лінійних (лінеаризованих в околі робочої точки) математичних моделей. Для керованих систем у просторі станів лінійні моделі з постійними коефіцієнтами мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \Delta x &= A \Delta x + B \Delta u, \\ y &= C \Delta x + D \Delta u,\end{aligned}\tag{1.1}$$

де Δx – вектор відхилень від стаціонарного стану (збурень) змінних стану системи, Δu – вектор відхилень керувань, y – вектор спостережень, а A , B , C і D – матриці відповідної розмірності. Аналогічний вигляд мають кусково-лінійних моделі. Згідно з традиційною практикою, моделі у вигляді рівнянь (1.1) отримуються шляхом ідентифікації. Приклади отриманих моделей наводяться нижче.

Задачі ідентифікації параметрів математичних моделей. Нехай, виходячи з попередніх уявлень про структуру та характеристики досліджуваної динамічної системи, обрана певна форма операторного представлення її математичної моделі, зокрема у наступному загальному вигляді.

$$A(\vec{x}, \vec{u}, t \mid \vec{p}) = 0.\tag{1.2}$$

Тут A — оператор (диференціальний або інтегральний чи інтегро-диференціальний), $\vec{x} = \vec{x}(t) \in R^n$ — вектор стану (фазовий вектор) динамічної системи, що розглядається, $\vec{u} = \vec{u}(t) \in R^m$ — вектор управління (зовнішніх дій), t — час, а $\vec{p} \in R^l$ — вектор параметрів, який визначає характеристики моделі динамічної системи. Якщо компоненти вектора $\vec{p}$ (параметри системи) не залежать від часу, то така система називається стаціонарною, в іншому ж випадку — нестаціонарною.

Крім того, для виділення з множини розв’язків рівняння (1.2) розв’язку, який відповідає конкретним умовам, необхідно визначити початкові умови, які в загальному операторному вигляді представляються у формі

$$B(\vec{x}(0) \mid \vec{c}) = 0,\tag{1.3}$$

де B — оператор початкових умов, $\vec{x}(0)$ — вектор стану динамічної системи, що розглядається, у початковий (нульовий) момент часу, а $\vec{c} \in R^n$ — вектор параметрів початкових умов.

Рівняння (1.2) з умовами (1.3) визначають початкову задачу (задачу Коші) для динамічної системи. У випадку інтегрального формулювання початкової задачі початкові умови включаються безпосередньо до оператора задачі A , що є однією з переваг інтегрального метода моделювання.

Для знаходження параметрів математичної моделі динамічної системи, яка досліджується, за даними експерименту (фізичного або математичного) розв'язується наступна задача ідентифікації.

Нехай в результаті проведення певних експериментальних досліджень динамічної системи, яка розглядається, ми маємо деякий набір X_{exp} (у багатьох випадках – декілька наборів $\{X_{\text{exp } j}\}_{j=1}^k$) значень вектора стану динамічної системи, що розглядається, $\vec{X}_{\text{exp}} = \{\vec{x}(t_i)\}$, де $t_i, i = \overline{1, M}$ – дискретні значення часу, в яких фіксувались значення вектора $\vec{x}$ (часові ряди).

Для (наближеного) визначення за $\vec{X}_{\text{exp}}$ невідомих компонент вектора параметрів $\vec{p}$ математичної моделі динамічної системи і, якщо потрібно, параметрів початкових умов $\vec{c}$, необхідно розв'язати задачу параметричної ідентифікації, яка за своєю суттю, взагалі кажучи, є задачею операторної апроксимації часових рядів, які у даному випадку представляють експериментальні дані $\vec{X}_{\text{exp}}$.

Таким чином, нехай ми маємо операторне рівняння (1.2) з початковими умовами (1.3), а також множину наборів експериментальних даних $\{X_{\text{exp } j}\}_{j=1}^k$. Для визначення невідомих компонент $\{p_i^u\}$ вектора параметрів $\vec{p}$ моделі динамічної системи і, при необхідності, невідомих компонент $\{c_i^u\}$ вектора параметрів початкових умов $\vec{c}$ необхідно (у явному чи неявному вигляді) розв'язати наступну задачу мінімізації на множині невідомих параметрів $\{\{p_i^u\}_{i=1}^r \cdot \{c_i^u\}_{i=1}^s\}$ деякого функціонала, в загальному вигляді монотонно (не обов'язково лінійно) зв'язаного з відстанню в деякому метричному просторі F між обчисленими за математичною

моделлю динамічної системи, яка ідентифікується, і часовими рядами з множини наборів експериментальних даних $\{X_{\text{exp } j}\}_{j=1}^k$:

$$\arg \min_{\{\{p_i^u\}_{i=1}^r, \{c_j^u\}_{j=1}^s\}} \Phi[\{d(\vec{x}_{\text{comp } j}(t_i), \vec{x}_{\text{exp } j}(t_i))\}_{j=1}^k], \quad i = \overline{1, M}. \quad (1.4)$$

Розглянемо цю задачу на прикладі ідентифікації параметрів нелінійної моделі компресорної секції ГТСУ. Структурна схема моделі компресора наведена на рис. 1.6, де $L_{\text{comp}}, L_{\text{thr}}, L_{\text{bl}}$ — довжина компресора, дроселя і перепускного каналу [м], $V_{\text{pl}}, T_{\text{pl}}, p_{\text{pl}}$ — об'єм [м³], температура [К] і тиск [Па] у камері тиску.

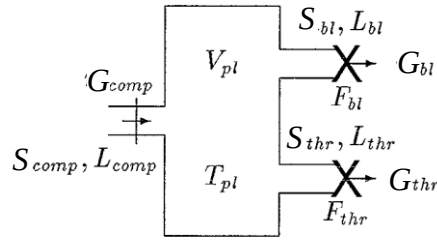


Рис. 1.6. Структура базової моделі компресора

В результаті ідентифікації отримано, що динамічні процеси в системі компресорної секції ("компресор-камера тиску") описуються базовою системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку

$$\begin{aligned} \frac{dG_{\text{comp}}}{dt} &= \frac{S_{\text{comp}}}{L_{\text{comp}}} (\Delta p_{\text{compSS}} - p_{\text{pl}} + p_{\text{in}}), \\ \frac{dG_{\text{thr}}}{dt} &= \frac{S_{\text{thr}}}{L_{\text{thr}}} (p_{\text{pl}} - p_{\text{out}} - \Delta p_{\text{thr}}), \\ \frac{dG_{\text{bl}}}{dt} &= \frac{S_{\text{bl}}}{L_{\text{bl}}} (p_{\text{pl}} - p_{\text{out}} - \Delta p_{\text{bl}}), \\ \frac{dp_{\text{pl}}}{dt} &= \frac{\gamma R T_{\text{pl}}}{V_{\text{pl}}} (G_{\text{comp}} - G_{\text{thr}} - G_{\text{bl}}), \end{aligned} \quad (1.5)$$

де $G_{\text{comp}}, G_{\text{thr}}, G_{\text{bl}}$ — масові потоки через компресор, дросель і перепускний канал [кг/с]; $S_{\text{comp}}, S_{\text{thr}}, S_{\text{bl}}$ — площі перерізів компресора, дроселя і перепускного каналу [м²]; Δp_{compSS} — стаціонарне підвищення тиску відповідно до статичних робочих характеристик компресора [Па]; $\Delta p_{\text{thr}}, \Delta p_{\text{bl}}$ — падіння тиску на клапані дроселя і

перепускному клапані [Па]; p_{out} — тиск на виході [Па]; η_{comp} — ККД компресора [б/р]; γ — відношення теплоємностей c_p/c_v [б/р].

Величина підвищення тиску на компресорі

$$\Delta p_{compSS} = \Delta p_{compSS} (G_{comp}) \quad (1.6)$$

визначається за його статичними характеристиками, а падіння тиску у дросельному і перепускному клапанах – за формулами

$$\Delta p_{thr} = \frac{G_{thr}^2}{2\rho S_{thr}^2}, \quad \Delta p_{bl} = \frac{G_{bl}^2}{2\rho S_{bl}^2}, \quad (1.7)$$

де ρ — густина повітря (при атмосферних умовах) [кг/м³]. У багатьох випадках можна вважати, що $p_{out} = p_{in}$.

Ступінь зростання температури у камері тиску (відносно підвищення температури) при цьому обчислюється у вигляді

$$\theta_{pl} = \frac{T_{pl}}{T_{in}} = \left(\frac{p_{pl}}{p_{in}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma n_{comp}}}, \quad (1.8)$$

а

$$a_{pl} = \sqrt{\gamma R T_{pl}}. \quad (1.9)$$

являє собою швидкість звуку в ній. Тут R — газова постійна [дж/(кг К)].

В результаті ідентифікації у даному випадку оператор у рівнянні (1.2) абстрактної математичної моделі конкретизується у вигляді системи чотирьох ЗДР першого порядку, а параметри системи — площі перерізів компресора, дроселя та перепускного каналу, їх довжини та об'єм камери тиску, котрі можуть бути ідентифіковані, складають вектор

$$\vec{p} = [S_{comp}, S_{thr}, S_{bl}, L_{comp}, L_{thr}, L_{bl}, V_{pl}]. \quad (1.10)$$

При здійсненні ідентифікації шляхом розв'язання задачі мінімізації (1.3) цільовий функціонал Φ , який характеризує відстань між обчисленим розв'язком та експериментальним даними, найчастіше вибирається у вигляді суми квадратів відхилень (тобто квадрату евклідової норми), хоча у деяких випадках застосовуються також зважені квадратичні суми і навіть більш складні

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{tbin}}{dt} &= \frac{\gamma_T R_T}{V_{cc}} \left[G_{thr} T_{ccin} \frac{c_{pcomp}}{c_{pT}} - G_{tb} T_{tbin} + \frac{P_{cc}(u_f)}{c_{pT}} \right], \\
\frac{dT_{tbin}}{dt} &= \frac{R_T T_{tbin}}{p_{tbin} V_{cc}} \left[\gamma_T \left(G_{thr} T_{ccin} \frac{c_{pcomp}}{c_{pT}} - G_{tb} T_{tbin} + \frac{P_{cc}(u_f)}{c_{pT}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - T_{tbin}(G_{thr} - G_{tb}) \right], \\
\frac{dN}{dt} &= [G_{tb} c_{pT}(T_{tbin} - T_{tbout}) - G_{comp} c_{pcomp}(T_{cpout} - T_{in})] \frac{1}{NI}, \quad (1.11)
\end{aligned}$$

де індексом *cpout* позначено величини на виході компресора, *comp* — величини у камері компресора, індекси *tbin*, *tbout* позначають величини на вході і виході турбіни, P_{cc} — потужність, що подається до камери згоряння, об'єм якої V_{cc} , при спалюванні палива, I — параметр, що визначає момент інерції ротора ГТУ, а індексом T позначено параметри газу у камері згоряння,

$G_{comp} = f_{comp}(N, p_{comp}, p_{in}, T_{in})$ — залежність масового розходу повітря через компресор від швидкості обертання та інших параметрів,

$G_{bl} = f_{bl}(u_{bl}, p_{comp}, T_{comp}, p_{in})$ — залежність масового розходу повітря через перепускний канал від положення регулятора перепускного клапана u_{bl} та інших

параметрів, $G_{pl} = \sqrt{\frac{2p_{comp} S_{comp}^2 (p_{comp} - p_{pl})}{\xi R T_{comp}}}$ — масовий розхід повітря, що надходить

до камери тиску (ξ — поправочний коефіцієнт),

$G_{thr} = f_{thr}(u_{thr}, p_{comp}, T_{comp}, p_{in})$ — залежність масового розходу повітря через дросельний клапан на вході до камери згоряння перепускний канал від положення його регулятора u_{thr} та інших параметрів, $G_{tb} = f_{tb}(p_{tbin}, T_{tbin}, p_{tbout})$ — розхід газу в турбіні, а

$$\begin{aligned}
T_{cpout} &= T_{in} \left(\frac{p_{comp}}{p_{in}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma \eta_{comp}}}, \\
T_{plin} &= T_{comp} \left(\frac{p_{pl}}{p_{comp}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \\
T_{ccin} &= T_{pl} \left(\frac{p_{tbin}}{p_{pl}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \\
T_{tbout} &= T_{tbin} \left(\frac{p_{tbout}}{p_{tbin}} \right)^{\frac{(\gamma_T-1)\eta_{tb}}{\gamma_T}},
\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$P_{cc} = e^{13,421718 - \frac{0,756721}{\sqrt{u_f}}}, \tag{1.13}$$

u_f — положення регулятора подачі палива до камери згоряння.

В даному випадку математична модель являє собою систему диференціальних рівнянь першого порядку. а параметри системи, які можуть бути ідентифіковані — площа перерізу, довжину та об'єм компресора об'єм камери тиску і камери згоряння, а також характеристику обертової інерції ротора — складають вектор

$$\vec{p} = [S_{comp}, L_{comp}, V_{comp}, V_{pl}, V_{cc}, I]. \tag{1.14}$$

Таким чином, наведені приклади свідчать, що традиційні підходи до побудови динамічних моделей об'єктів, що розглядаються в роботі, базуються на отриманні моделей у вигляді звичайних диференціальних рівнянь.

1.3 Основні підходи до побудови методів моделювання та функціонального забезпечення об'єктів, що розглядаються

Моделювання процесів в комп'ютерно-інтегрованих системах. Інтенсивний розвиток комп'ютерних і комп'ютеризованих засобів обробки інформації в сучасних технічних системах характеризується постійно зростаючою складністю їх структур і режимів, підвищенням вимог до якості функціонування (швидкодія, точність, надійність, економічність тощо). Ці чинники викликають нові вимоги до методів і засобів математичного моделювання динамічних процесів у вказаних

системах. Але особливості комп'ютерно-інтегрованих систем, що мають у своєму складі фізичні об'єкти, приклади яких розглянуті вище (п.1.2), потребують додаткових якостей методів математичного і комп'ютерного моделювання. Це викликано, головним чином, обмеженими часовими та апаратними ресурсами, які обумовлені вимогами до засобів інформаційного забезпечення процесів функціонування відповідних об'єктів (силових енергетичних установок) у реальному часі. При цьому необхідно враховувати, що сучасні методи організації комп'ютерно-інтегрованих систем передбачають, що засоби інформаційної підтримки забезпечують відпрацювання режимів з "повною відповідальністю". Тобто, передбачається виконання процесів керування, діагностики і контролю технічних об'єктів. Саме ці задачі повинні розв'язуватись в комп'ютерній частині систем [173].

Відмічені обставини повинні відображатися в методах і засобах математичного і комп'ютерного моделювання, що розробляються та досліджуються в даній роботі. Це в свою чергу потребує певного розвитку методології моделювання вказаного класу систем. Згідно з аналізом публікацій у даному напрямку досліджень і розробок методики моделювання базуються, головним чином, на використанні динамічних моделей фізичної (технічної) частини систем у вигляді диференціальних рівнянь, що отримуються за допомогою відповідних фізичних закономірностей. Алгоритмічне забезпечення комп'ютерної частини будується на основі застосування чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь. Таким чином, пошук можливостей для покращення існуючих методик моделювання пов'язаний з необхідністю вирішення задач побудови динамічних моделей процесів в фізичній частині комп'ютерно-інтегрованої системи, вибору та удосконаленні методів побудови підсистеми керування та діагностики (контролю), а також розробки відповідних чисельних алгоритмів для реалізації математичних моделей та розробки необхідних прикладних засобів. При цьому необхідно враховувати, що як математичні моделі так і алгоритми повинні мати можливості для врахування вимог до комп'ютерно-інтегрованих систем.

Напрямки удосконалення процесів вибору форми та побудови конкретної структури математичної моделі фізичної частини комп'ютерно-інтегрованої системи. Широке застосування диференціальних рівнянь у задачах динаміки цілком виправдано історично (Ньютон, Лейбніц, XVII ст.). До теперішнього часу глибоко розвинута теорія цього класу динамічних моделей, а також розроблено багато діючих програмних засобів для їх числової реалізації. Але кількість і складність практичних задач неперервно і неухильно збільшується, що потребує також цього напрямку математичного моделювання. Зокрема мають місце такі фактори як складність і трудомісткість алгоритмів розв'язування рівнянь у частинних похідних; у зв'язку з певною неточністю (грубістю) вихідних даних в інженерно-технічних задачах є можливість і доцільність спрощення базових моделей, отриманих на основі фізичних закономірностей (які до речі, не завжди можуть бути отримані у зв'язку із суттєвою фізичною неоднорідністю технічних об'єктів); при чисельному розв'язанні багатьох задач має місце ефект Гібса, тобто суттєва неточність результатів; не завжди забезпечується стійкість обчислювальних процесів, особливо при розв'язуванні обернених задач динаміки.

Відмічені обставини обґрунтовують доцільність такої якості методів математичного моделювання, як альтернативність форм динамічних моделей, згідно з якою один і той же об'єкт може бути описаний різними формами математичних моделей, аналітично еквівалентних чи не еквівалентних (наближених) між собою. Для цього достатньо, щоб конкретна модель мала необхідний рівень адекватності, тобто з необхідною (заданою) точністю відповідала даним експеримента і поставленій прикладній цілі, тобто допускала можливість її практичного використання. Сучасні комп'ютерні технології забезпечують генерування та порівняння різних варіантів моделей що дозволяє створювати нові методи побудови і чисельної реалізації математичних моделей [194].

Досвід свідчить, що ефективним підходом є використання певних видів інтегральних операторів і рівнянь, що мають ряд таких позитивних властивостей: універсальність, яка полягає в тому, що на відміну від диференціальних рівнянь,

структура інтегральної моделі є незмінною для різних класів динамічних об'єктів, а властивість моделі задається однією функцією, тобто ядром інтегрального оператора (ще, до речі, означає, що дані моделі є непараметричними); властивість згладжування при чисельній реалізації і обробці сигналів з шумами, а також висока збіжність інтегральних процесів, можливість отримання моделей, зокрема макромоделей, безпосередньо за експериментальними даними [189]. Слід відзначити, що інтегральні рівняння, як розділ прикладної математики і як динамічні моделі почали свій розвиток значно пізніше ніж диференціальні (Вольтера, XX ст.)

Підсистема керування. При моделюванні процесів в підсистемі керування [114] основними задачами, що розв'язуються при цьому, є аналіз заданої системи з метою визначення характерних реакцій на дії і перешкоди; керування, яке полягає в знаходженні керуючого сигналу, в результаті впливу якого на досліджувану систему її реакція відповідає вимогам, що пред'являються до якості процесу керування [17, 103, 104].

Методи розв'язання вказаних задач істотно залежать від того, якого роду математичний опис процесу управління використовується. У класичній теорії автоматичного регулювання математичною моделлю системи є звичайне диференціальне рівняння, що залежить від похідних вхідного і вихідного сигналів певних порядків. Якщо досліджувана система лінійна і стаціонарна, то для розробки найбільш раціональних методів розв'язання основних задач теорії керування вводяться також і інші еквівалентні способи опису, засновані на використанні передатних функцій, частотних і часових характеристик. Для математичного опису лінійних систем зі змінними параметрами використовуються або параметричні моделі у вигляді диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, або все частіше непараметричні моделі. Причиною підвищеного інтересу до пошуку математичних моделей, адекватних розв'язуванню в теорії керованих систем задачам, є широке впровадження в практику процесів управління об'єктів з розподіленими параметрами, коли є необхідність побудови такої математичної моделі керованого процесу, яка дозволила б із єдиних позицій

ефективно розв'язувати основні задачі теорії керування всіх можливих класів неперервних систем. В якості математичних описів у багатьох випадках доцільно використовувати інтегральні рівняння, що в багатьох випадках дозволяє будувати стійкі методи розрахунку вихідних сигналів, спрощення математичних моделей, аналізу основних типів з'єднань ланок і перевірки стійкості системи. Тобто, є важливі підстави для ефективного використання інтегрального підходу при розв'язанні проблем, що мають істотне значення для теорії і практики керування.

Одним із перспективних напрямків розвитку методів організації систем керування є їх побудова з використанням моделі об'єкту, що керується, тобто еталонної моделі. Застосування такого підходу, хоча і потребує проведення додаткових досліджень, дає можливість максимально враховувати характеристики об'єкта керування, спростити задачу синтезу безпосередньо регулятора, використати алгоритми та програмні засоби моделювання об'єкту. Подібний підхід по суті наділяє систему керування адаптивними властивостями, забезпечує універсальність і спрощення задачі синтезу, можливість досягнення необхідної якості процесу керування в умовах зміни характеристик об'єкта керування. Разом з тим, при застосуванні відомих методів синтезу систем керування, пов'язаних з досягненням умов стійкості, отримуються складні структури, що потребує розробки певних удосконалень.

Підсистема діагностування. Існуючі методи та засоби діагностування технічних об'єктів в більшості випадків будуються на оцінюванні стану об'єкту за результатами вимірювання деяких значень внутрішніх сигналів (змінних процесу) у контрольних точках. Даний підхід потребує значної кількості таких точок, що достатньо складно забезпечити, особливо у випадках сучасних об'єктів діагностування, що характеризуються значною складністю. Крім того, в багатьох випадках доступ до необхідних контрольних точок взагалі неможливий.

Виходячи з такої ситуації, в роботі розглядається підхід, заснований на розвитку єдиної модельно-орієнтованої теорії діагностування широкого класу об'єктів, особливо при обмеженому доступі до їх внутрішніх елементів, з можливістю охоплення значної групи допустимих несправностей. Звичайно

елементам (фрагментом) моделі об'єкта можна поставити у відповідність його конструктивні елементи, що дозволяє задачу визначення місця дефекта звести до задачі визначення місця зміни моделі об'єкта. Можна вибачити, що така постановка задачі діагностування схожа до задачі ідентифікації, але відмінна в тому, що при ідентифікації необхідно визначити модель об'єкта, а при діагностуванні – відхилення моделі від деякого еталону, тобто моделі справжнього об'єкта. Розглянуті принципові положення дають загальний підхід до побудови алгоритмів діагностування об'єктів вхідним і вихідним сигналам.

Алгоритмічне і програмне забезпечення. Створення алгоритмів та розробка програмних засобів [228] призначені для забезпечення необхідних обчислювальних експериментів при побудові відзначених вище методів математичного моделювання. Зокрема, необхідно передбачити створення алгоритмів, що супроводжують методи побудови математичних моделей і їх чисельної реалізації. При цьому можуть бути використані уже відомі обчислювальні схеми і програмні засоби для реалізації моделей у вигляді диференціальних рівнянь. Але є необхідність у виконанні нових розробок стосовно до проведення обчислювальних експериментів при отриманні і реалізації інтегральних динамічних моделей.

В цілому, з урахуванням сумісності наукового та інженерно-технічного характеру досліджень в розробках методів моделювання, доцільне застосування структурного підходу при створенні засобів алгоритмічного і програмного забезпечення [177].

Оскільки при числовій реалізації математичної моделі задача зводиться до числової реалізації окремих структурних елементів моделі, які, в свою чергу, отримано на основі базової множини математичних моделей підсистем, тоді є сенс в розробці для кожного елемента базової множини алгоритмів його числової реалізації [230]. В результаті отримаємо базову множину алгоритмів для числової реалізації моделей підсистем, що дає можливість синтезу моделей складних систем із певного базового набору скалярних моделей-алгоритмів. При цьому важливою задачею є забезпечення алгоритмічної сумісності програмних модулів незалежно від методів їх внутрішньої алгоритмічної реалізації [135].

Що до задач побудови програмних засобів, то слід враховувати, що при математичному моделюванні доцільним є використання пакетів прикладних програм, які є цілісними програмними продуктами і забезпечують необхідну функціональність [118]. З огляду на доступність пакетів прикладних програм і результатів проведення тестів, можна зробити висновок, що найбільш прийнятними пакетами для чисельного аналізу є MATLAB, Mathematica і MathCAD [102]. Однак, жоден з відомих і проаналізованих пакетів не містить вбудованих можливостей для реалізації інтегральних операторів та розв'язання інтегральних рівнянь. По набору функцій, необхідних для чисельної реалізації інтегральних динамічних моделей, найбільш потужним прикладним пакетом є MATLAB, основними відмінними рисами якого є наступні: модульна структура пакету дозволяє нарощувати його потужність шляхом включення нових програмних модулів, в тому числі програм користувача; внутрішня мова пакету дозволяє здійснювати операції у векторно-матричній формі; можливість викликати підпрограми, написані на С і Фортран, як вбудовані функції MATLAB.

1.4 Висновки до першого розділу

1. Аналіз сучасного стану розвитку електромеханічних систем показує зростання їх рівня складності. Від систем з простими аналоговими регуляторами електромеханічні системи розвинулись до сучасних мехатронних систем з комп'ютерним керуванням та використанням імпульсних силових перетворювачів і, як наслідок, з новими можливостями, зокрема, гнучкістю алгоритмів функціонування, забезпеченням віддаленого контролю і керування, можливістю роботи у складі робототехнічних комплексів тощо. Такі особливості вимагають подальшого розвитку як самої методології автоматичного керування, так і методів числової реалізації математичних моделей сучасних електромеханічних систем.

2. Нові задачі, пов'язані з розширенням сфери застосування електромеханічних систем, обумовлюють необхідність підвищення вимог щодо їх точності та надійності, покращення динамічних характеристик, наявності функцій контролю та діагностики під час функціонування, розширення функцій керування, зокрема забезпечення адаптивного та інтелектуального керування. Для зниження

металомісткості обладнання шляхом зниження вимог до характеристик механічної частини виникають задачі удосконалення функцій керування (компенсація системами керування шкідливих резонансних та нелінійних проявів, вібрацій, автоколивань тощо).

3. Наявність у складі електромеханічних систем різнотипних елементів (електричних, магнітних, електромагнітних, електронних, механічних, одновимірних та багатовимірних, лінійних та нелінійних, із зосередженими та розподіленими параметрами та ін.), різного роду зв'язків між ними (пружні, гідравлічні, пневматичні, електричні та ін.) породжує їх суттєву неоднорідність. Врахування особливостей різнорідних елементів із збереженням комплексного підходу до моделювання системи в цілому можливе за умови її декомпозиції з отриманням ланок, які об'єднуються в певну структуру (граф-топологічну схему), яка є джерелом додаткової інформації при знаходженні розв'язків.

4. Складність та неоднорідність сучасних електромеханічних систем, що досліджуються, вимагає розробки нових підходів до організації процесу моделювання. В основу методики моделювання електромеханічних систем доцільно покласти структурно-орієнтований підхід, який дозволяє максимально враховувати їх особливості та надати розробнику можливість вибору способу математичного подання та числової реалізації компонент структурної моделі.

5. Існуючі досягнення в області математичного моделювання динамічних систем базуються, здебільшого, на застосуванні апарату диференціальних рівнянь, простору станів та передатних функцій, які мають певну область ефективного застосування. В інших областях, зокрема при моделюванні об'єктів з розподіленими параметрами, дискретних та імпульсних елементів, доцільно застосування інших підходів, а саме — застосування інтегральних моделей.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ФОРМУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ КОМП'ЮТЕРНО ІНТЕГРОВАНІХ СИСТЕМ

2.1 Основні види динамічних моделей

При розв'язуванні практичних задач моделювання комп'ютерно інтегрованих систем доводиться шукати компроміс між складністю отриманої математичної моделі та необхідною точністю [129, 169, 222]. При цьому вибір моделі може вестися в рамках одного виду рівнянь, або шляхом порівняння моделей, які належать різним видам рівнянь [130, 184, 219]. Математичний опис таких систем базується, головним чином, на скалярних динамічних моделях [1, 4, 5, 143].

Для отримання математичної моделі в цілому прийнято здійснювати математичний опис динамічної системи як сукупності окремих ланок [109, 125, 126]. Класичною моделлю, що зв'язує вхід і вихід лінійної динамічної системи зі змінними зосередженими параметрами, є система диференціальних рівнянь кінцевого порядку k :

$$\begin{aligned} a_k(t)y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = \\ = b_l(t)x^{(l)}(t) + b_{l-1}(t)x^{(l-1)}(t) + \dots + b_0(t)x(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де набори $\{a_k(t), a_{k-1}(t), \dots, a_0(t)\}$ і $\{b_l(t), b_{l-1}(t), \dots, b_0(t)\}$ складаються з матриць розмірності $n \times n$ і $n \times m$ відповідно. Будемо вважати, що вхідний сигнал і коефіцієнти системи рівнянь (2.1) такі, що вона має єдиний розв'язок при заданих початкових умовах

$$y(t_0) = y_0, \quad y^{(1)}(t_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y_0^{(k-1)},$$

а вхідний сигнал має достатню гладкість для справедливості подальших перетворень [146, 156, 168]. Припустимо також, що система (2.1) фізично реалізується, тобто $l \leq k$. Для зручності надалі не розрізнятимемо скалярний і векторний випадки, якщо це не зазначено окремо. Тому, говорячи про коефіцієнти виразів (2.1), маємо на увазі як скалярні величини так і матриці відповідної розмірності.

Широке застосування в теорії керування знайшли методи простору станів [171, 172]. У випадку лінійної неперервної системи зі змінними використовується наступна математична модель [179, 201]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(t)y(t) + B(t)x(t) \\ z(t) &= C(t)y(t) + D(t)x(t) \end{aligned} \right\}, \quad (2.2)$$

де $y(t)$ — вектор стану; $x(t)$ — вектор керування; $z(t)$ — вектор виходу; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ — відомі матриці відповідної розмірності.

Рівняння (2.1) завжди може бути записане у вигляді (2.2), у той час як зворотний перехід можливий лише при певних обмеженнях, які накладаються на параметри системи (2.2).

Іншою формою математичного опису лінійних систем, яка часто застосовується завдяки поширенню частотних методів аналізу та синтезу систем управління, є опис за допомогою передатних функцій виду [200]:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad (2.3)$$

де Y — зображення вихідної змінної $y(t)$; X — зображення вхідного впливу $x(t)$; s — комплексна змінна Лапласа.

Для скалярних лінійних стаціонарних динамічних об'єктів із зосередженими параметрами математична модель (2.3) має вигляд дробово-раціональної передатної функції

$$W(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad a_0 = 1, \quad n \geq m, \quad (2.4)$$

де a_i , b_j — дійсні сталі коефіцієнти.

Якщо прийняти $s = j\omega$, то отримаємо амплітудно-фазову характеристику

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}, \quad (2.5)$$

яка може бути записана в алгебраїчній або показниковій формі як:

$$H(j\omega) = \operatorname{Re}[H(j\omega)] + j\operatorname{Im}[H(j\omega)] = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

де $A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}[H(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}[H(j\omega)]^2}$ — амплітудно-частотна характеристика,

$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im}[H(j\omega)]}{\operatorname{Re}[H(j\omega)]}$ — фазочастотна характеристика. Чисельник і знаменник

передатної функції (2.4) є поліномами змінної s . Корені полінома чисельника перетворюють вираз в нуль, тому їх називають нулями (Zero), а корені полінома знаменника перетворюють вираз в нескінченність і називаються полюсами (Pole) передатної функції. Передатна функція, записана при використанні нулів (z) і полюсів (p), подається у вигляді:

$$W(s) = K \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \cdots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \cdots (s - p_1)}, \quad (2.6)$$

де K — коефіцієнт підсилення. При описі дискретних (цифрових) систем використовують дискретну z -передатну функцію

$$D(z) = \frac{x[nT]}{u[nT]} = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \cdots + A_k z^{-k}}{B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \cdots + B_l z^{-l}}. \quad (2.7)$$

Використавши властивість, що добутку двох функцій-зображень в просторі Лапласа відповідає згортка їхніх оригіналів в часовому просторі, з (2.4) отримаємо інтегральну модель [95]:

$$y(t) = \int_0^t v(t-s)x(s)ds, \quad (2.8)$$

де $v(t)$ — вагова функція (імпульсна перехідна характеристика) об'єкта.

Фізичні теорії складних розподілених об'єктів (полів і середовищ) приводять до моделей у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних, які у самому загальному випадку є функціональними рівняннями виду

$$\Phi(x, y, z, \dots, u, u_x, u_y, u_z, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0, \quad (2.9)$$

що містять одну або більше частинних похідних (у тому числі вище першого порядку) від шуканої функції декількох змінних $u = (x, y, z, \dots)$ і які зв'язані деякою функціональною залежністю Φ . Описові можливості моделей цього виду винятково великі, а самі моделі найчастіше є наслідком фізичних законів, які представлені у диференціальній формі. Відомі також великі труднощі, що зустрічаються на шляху реалізації моделей цього виду, особливо при розв'язуванні

нелінійних задач. Цим пояснюється застосування великої кількості прийомів спрощення або перетворення їх до інших видів моделей як на фізичному, так і на математичному рівнях. Зокрема, такими прийомами є спрощення постановок задач (зниження розмірності), використання фізичних законів в інтегральній формі, лінеаризації тощо. Граничні умови, що накладаються на шукані функції і їх похідні у сукупності з рівнянням (2.9) утворюють велику різноманітність постановок задач, для розв'язування яких застосувати який-небудь загальний, універсальний підхід неможливо [13].

Для опису передатних властивостей елементів з розподіленими параметрами можна використовувати функцію Гріна (вагову функцію) $v(x, \xi, t - \tau)$, яка відтворює реакцію розподіленого елемента в точці x в момент часу t при нульових початкових та однорідних крайових умовах, на імпульсний сигнал, прикладений в кожній точці ξ та в кожен момент часу τ . Тоді лінійний стаціонарний розподілений блок описується інтегральним оператором:

$$Q(x, t) = \int_{t_0}^t \int_{D_1} v(x, \xi, t - \tau) \omega(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (2.10)$$

де D_1 — область в r -вимірному евклідовому просторі; $\omega(\xi, \tau)$ — вхідна дія.

Зв'язок між передатною і ваговою функцією $v(x, \xi, t)$ задається співвідношенням

$$W(x, \xi, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v(x, \xi, t) dt. \quad (2.11)$$

Значно менш систематизованою і дослідженою в технічних застосуваннях є область використання інтегральних рівнянь, які в загальному нелінійному випадку можуть представлятись у вигляді

$$\int_Q K(x, y, u(y)) dy = F(x, u(x)), \quad (2.12)$$

де інтеграл береться по області Q , а шукана функція u може залежати як від однієї, так і від багатьох змінних $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in Q(x)$; функції K (ядро) і F — наперед відомі. Математичні моделі виду (2.12) мають ряд переваг, зокрема, вони містять в

собі повну постановку задачі, що відповідає моделям (2.10) разом з їх граничними умовами, завдяки незмінності своєї структури допускають більш універсальний підхід при числовій реалізації, ніж у випадку диференціальних моделей.

Динамічні макромоделі [154]. Складність сучасних технічних об'єктів в багатьох випадках розв'язування практичних задач призводить до труднощів отримання якісних і кількісних результатів [8, 144, 145]. Ці труднощі найбільш притаманні задачам моделювання об'єктів з розподіленими параметрами, для математичного опису яких застосовуються диференціальні рівняння з частинними похідними, які відносяться до найбільш складних видів математичних моделей [9]. Задача побудови та числової реалізації ефективних динамічних моделей об'єктів з розподіленими параметрами додатково ускладнюється в тих розповсюджених випадках, коли модель «вбудовується» в діючі системи керування, контролю або діагностування і повинна враховувати необхідність функціонування в реальному часі [96].

Ефективним підходом для подолання вказаних ускладнень є використання макромodelей. При цьому передбачається, що макромodelі задовольняють вимогам адекватності і, разом з тим, мають більш зручну форму чи структуру, або спрощують процес числової (комп'ютерної) реалізації з досягненням необхідної точності результатів [97, 111].

Грунтовною основою для побудови макромodelей об'єктів з розподіленими параметрами є аналітичні методи інтегральних представлень розв'язків низки класів диференціальних рівнянь з частинними похідними, які можуть бути доповнені використанням досягнень в галузі числових методів із застосуванням сучасних комп'ютерних засобів [8].

Прагнення підвищити продуктивність комп'ютерних засобів, забезпечити високу точність, мінімізувати ресурси комп'ютера призводить до доцільності дослідження можливостей застосування різноманітних видів математичного опису в якості моделей динамічних об'єктів. Зокрема, не повністю розв'язаною залишається проблема дослідження і використання можливостей динамічних макромodelей у вигляді інтегральних рівнянь та операторів. Інтегральні

макромоделі є самостійним і своєрідним видом математичного опису задач динаміки [165]. На відміну від параметричних моделей, для формування яких в якості вихідних даних використовуються задані параметри (постійні або змінні) структурованого об'єкта, динамічні макромоделі формуються на основі заданих динамічних характеристик об'єкта, його ланок або елементів. Динамічні характеристики являють собою функціональні залежності (функції), які можуть бути отримані у вигляді експериментальних даних або в аналітичному вигляді, якщо існує розвинена теорія досліджуваного об'єкта. Слід відмітити, що сучасні розповсюджені пакети програм поки що не достатньо охоплюють своїми можливостями інтегральні динамічні моделі. Крім того, користувач має обмежені можливості здійснити такі операції, як диференційований вибір числових алгоритмів реалізації тих чи інших видів моделей, зокрема, при реалізації математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами. Важливу роль при цьому відграють методи отримання спрощених описів об'єктів з розподіленими параметрами, тобто макромоделей.

Використання інтегральних операторів та рівнянь в якості макромоделей об'єктів з розподіленими параметрами відповідає інтегральному методу математичного моделювання, як сукупності способів визначення інтегральних відношень між вихідними даними і динамічними характеристиками вивчаємого об'єкта, а також методів еквівалентних перетворень отриманих інтегральних моделей і числової чи комп'ютерної реалізації.

Під макромоделлю в даній роботі розуміється математичний опис процесів у динамічному об'єкті (системі), що представлений в загальному випадку у довільній математичній формі, має необхідний рівень адекватності, мінімальну складність серед можливих альтернативних варіантів та забезпечує завдяки цьому ефективну числову (комп'ютерну) реалізацію. Виходячи з такого визначення, можна вважати, що макромоделю динаміки деякого об'єкта може відображати його поведінку як реакцію певної просторової частини об'єкта чи певного місця в його структурі, не торкаючись в цьому відображенні, повністю або частково, поведінки іншого зовнішнього чи внутрішнього «змісту» об'єкта. Крім того, макромоделю може

відображати (безпосередньо аналізувати) лише частину властивостей чи характеристик об'єкта, тобто ту їх частину, яка відповідає реальній, обмеженій за своїм обсягом, меті дослідження. Тому до макромоделей відносяться: достатньо розповсюдженні моделюючі вирази типу «вхід-вихід» при описі об'єктів з розподіленими і зосередженими параметрами; спрощенні моделі, отримані шляхом еквівалентних або апроксимаційних перетворень вихідної «повної» моделі, зокрема спрощеними є лінеаризовані математичні описи; структурні представлення об'єктів (структурні моделі), що інтегрують в собі велику кількість елементів «первинної» розгалуженої структури об'єкта; моделі, отримані за експериментальними даними, тобто на основі методів та засобів ідентифікації, зокрема до цього класу макромоделей пропонується відносити спрощенні математичні описи, отримані шляхом обчислювальних експериментів з вихідною моделлю.

З іншої сторони, розвиток загальної теорії систем і, зокрема, систем керування об'єктами з розподіленими параметрами, призвело до створення структурної теорії такого роду систем. В основі цієї теорії лежить ідея розподіленого блоку, який відповідає визначеному фізичному процесу в суцільному середовищі і який в лінійному випадку однозначно і повністю описується відповідною функцією Гріна або передатною функцією.

З точки зору структурної теорії автоматичного керування, кожна задача для рівнянь математичної фізики відповідає деякій «елементарній» системі або «елементарному» блоку, який однозначно описується функцією Гріна (імпульсною перехідною функцією) або передатною функцією (у стаціонарному випадку) даної задачі для рівнянь математичної фізики.

Існуючі досягнення в області числових методів, інформаційних технологій і програмної інженерії дозволяють ефективно користуватись апаратом вказаних характеристик для розв'язку задач комп'ютерного моделювання при дослідженні і проектуванні широкого класу технічних систем, в тому ж числі при автоматизації процесів керування [37, 213].

Структурні (структурно-функціональні) моделі. Найбільш часто структурно-

функціональними моделями відображуються системи автоматичного керування (рис.2.1), які містять наступні компоненти, що забезпечують їх функціонування: об'єкт (керований процес); виконуючі пристрої (ВикП); пристрої вимірювання (ПВим); пристрої керування (ПК). Стан об'єкта характеризується змінними стану $x_i = x_i(t)$; вихідними змінними $y_j = y_j(t)$; зовнішній вплив: похибки вимірювання $\delta_j(t)$, збурюючі дії $f_j(t)$ або зовнішньо задані дії $y_j^*(t)$.

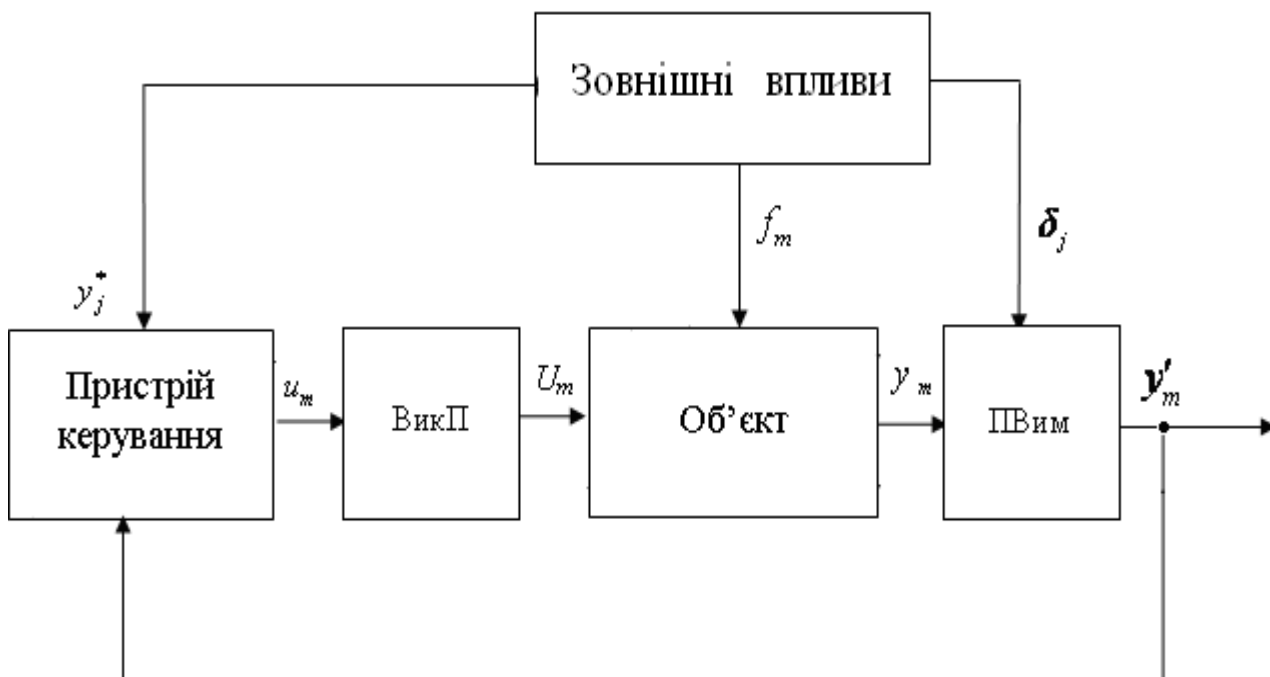


Рис. 2.1. Структурно-функціональна схема системи автоматичного керування

Інтегральні рівняння динамічної системи. Одним із шляхів отримання можливостей для покращення якості процесів моделювання, є використання інтегральних динамічних моделей у вигляді інтегральних операторів і рівнянь типу Вольтерри [178]. Ці моделі мають властивість універсальності, зокрема їх структура не залежить від того, моделюється об'єкт із зосередженими чи з розподіленими параметрами. Крім того, вони дають змогу враховувати такі особливості, як необхідність побудови математичних моделей за експериментальними даними, можливість застосування макромоделей для окремих фрагментів систем, наявність

високочастотних завад у вихідних даних, які використовуються для формування математичних описів [36, 142].

Лінійна багатоканальна система керування описується багатовимірним лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри II роду [49, 51, 52, 86]

$$k(t)y(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)y(\tau)d\tau = l(t)x(t) + \int_{t_0}^t L(t, \tau)x(\tau)d\tau + f(t, t_0), \quad (2.13)$$

де $y(t) = (y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t))^T$ — n -вимірний вектор вихідних сигналів (реакцій) системи; $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t))^T$ — m -вимірний вектор вхідних (керуючих) впливів на систему;

$$K(t, \tau) = \begin{pmatrix} K_{11}(t, \tau) & K_{12}(t, \tau) & \dots & K_{1n}(t, \tau) \\ K_{21}(t, \tau) & K_{22}(t, \tau) & \dots & K_{2n}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}(t, \tau) & K_{n2}(t, \tau) & \dots & K_{nn}(t, \tau) \end{pmatrix};$$

$$L(t, \tau) = \begin{pmatrix} L_{11}(t, \tau) & L_{12}(t, \tau) & \dots & L_{1m}(t, \tau) \\ L_{21}(t, \tau) & L_{22}(t, \tau) & \dots & L_{2m}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1}(t, \tau) & L_{n2}(t, \tau) & \dots & L_{nm}(t, \tau) \end{pmatrix};$$

$K(t, \tau)$, $L(t, \tau)$ — ядра інтегральних операторів Вольтерри, що відображають динамічні характеристики ланок системи;

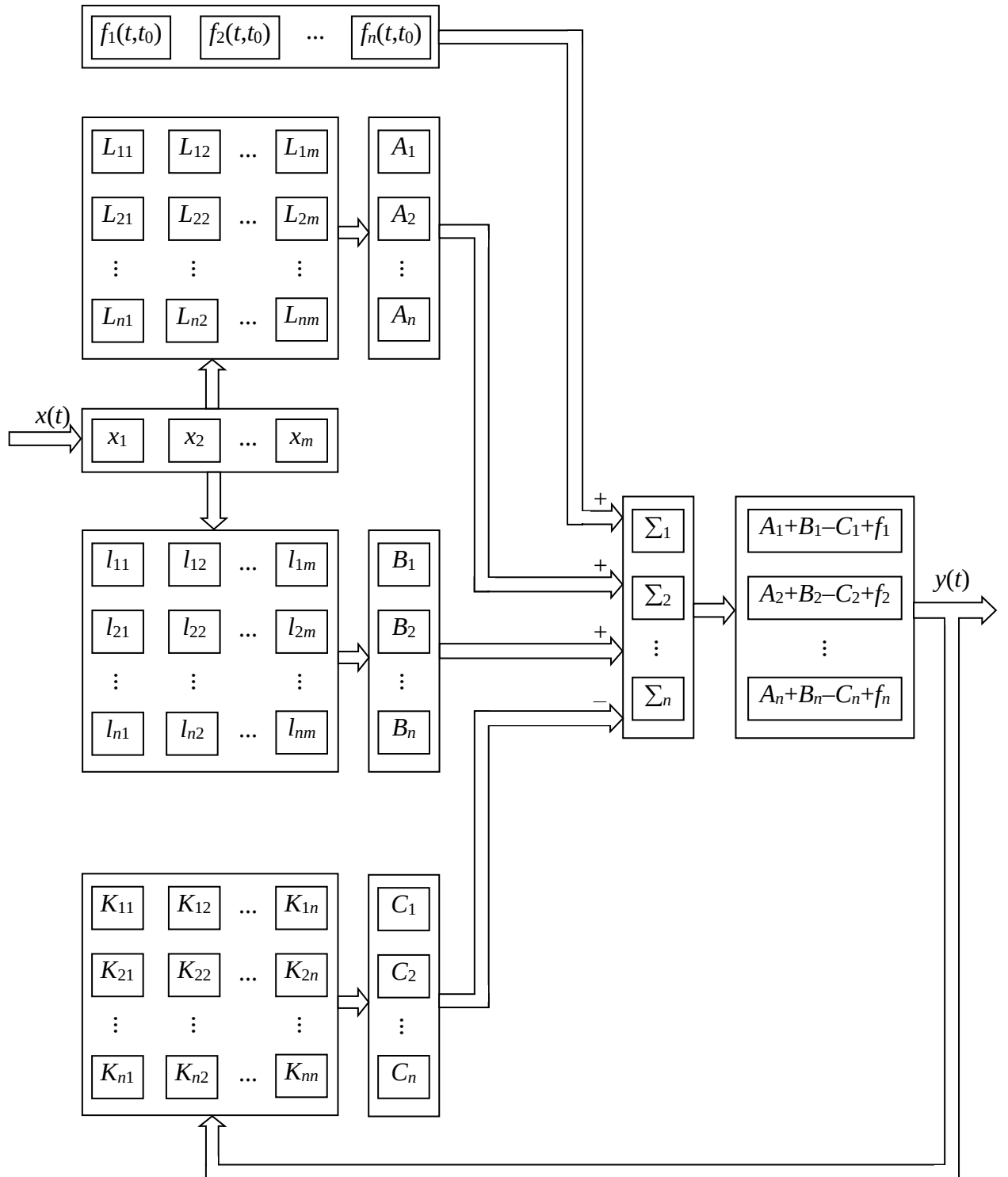
$$k(t) = \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & \dots & k_{1n}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & \dots & k_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1}(t) & k_{n2}(t) & \dots & k_{nn}(t) \end{pmatrix}; \quad l(t) = \begin{pmatrix} l_{11}(t) & l_{12}(t) & \dots & l_{1m}(t) \\ l_{21}(t) & l_{22}(t) & \dots & l_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1}(t) & l_{n2}(t) & \dots & l_{nm}(t) \end{pmatrix};$$

$k(t)$, $l(t)$ — змінні матриці, причому, якщо не зазначено додатково, матриця $k(t)$ вважається рівною одиничній матриці I ; t_0 — момент початку функціонування системи (подачі керуючого впливу); t — поточний момент часу.

$f(t, t_0) = (f^1(t, t_0), f^2(t, t_0), \dots, f^n(t, t_0))^T$ — вільний член, що містить всю інформацію, необхідну для однозначного знаходження $y(t)$ для всіх $t \geq t_0$.

Рівняння (2.13) описує лінійну систему і має властивість лінійної залежності розв'язку від правої частини рівняння і, отже, від вхідного впливу. Вираз (2.13) описує систему, що фізично реалізується, так як значення вихідного сигналу в момент t обумовлюється лише значеннями вхідного впливу в цей і в попередній моменти і не залежить від наступних змін сигналу $x(t)$. Рівняння (2.13) можна реалізувати у вигляді структури, зображеної на рис. 2.3. Типовим блоком приведеної структурної моделі є матриця $n \times m$ модулів (рис. 2.3), кожен з яких реалізує інтегральний оператор Вольтерри з ядром $L_{nm}(t, \tau)$.

Порівняємо інтегральну модель (2.13) із відомими методами математичного опису лінійних систем. Ясно, що вигляд моделі (2.13) і конкретні алгоритми її аналізу не пов'язані з порядком досліджуваної системи, який визначається як найвищий порядок похідної вихідного сигналу, що входить у рівняння. У багатьох задачах важливою є і та обставина, що у рівнянні (2.13) використовуються лише сигнали $x(t)$ і $y(t)$ і не потрібні їхні похідні. І, нарешті, при переході від моделі в просторі станів до моделі (2.13) в загальному випадку розмірність векторів $x(t)$ і $y(t)$ не лише не зростає, але практично може виявитися меншою [58].



$$A_i = \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t L_{ij}(t, \tau) x_j(\tau) d\tau, \quad B_i = \sum_{j=1}^m l_{ij}(t) x_j(t),$$

$$C_i = \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t K_{ij}(t, \tau) y_j(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n}$$

Рис. 2.2. Блок-схема рівняння (2.13)

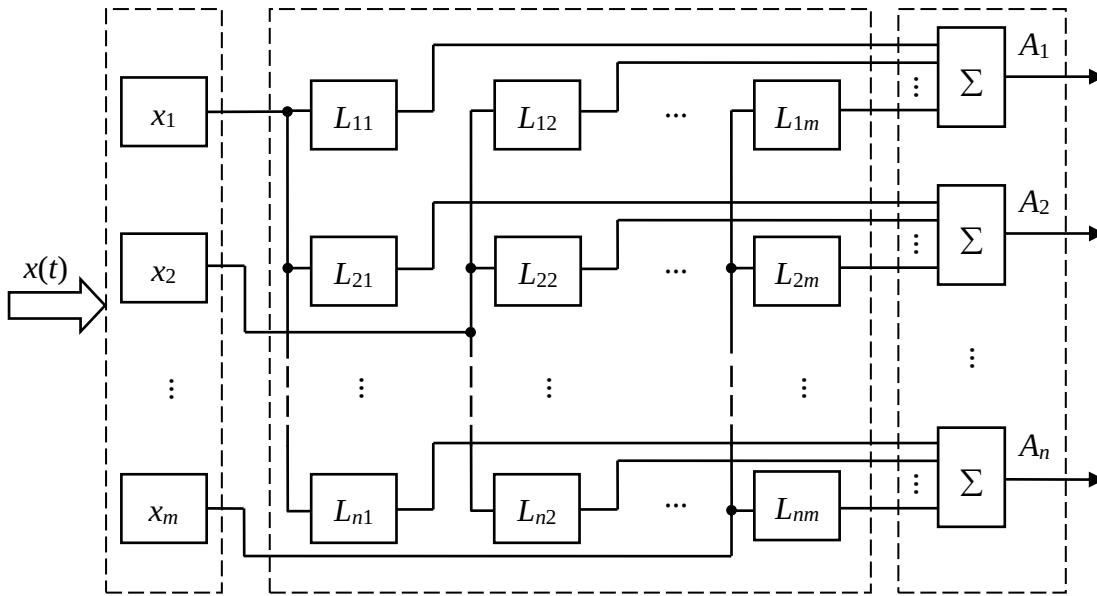


Рис. 2.3. Структура інтегрального модуля моделі багатоканальної керованої електромеханічної системи

З'ясуємо тепер сенс введення у рівняння (2.13) вільного члена $f(t, t_0)$. Нехай $\theta \in [t_0, t]$ — деякий довільний момент часу. Замінімо у рівнянні (2.13) t_0 на θ і запишемо

$$k(t)y(t) + \int_{\theta}^t K(t, \tau)y(\tau)d\tau = l(t)x(t) + \int_{\theta}^t L(t, \tau)x(\tau)d\tau + f(t, \theta).$$

Вилучаючи цей вираз із рівняння (2.13), після еквівалентних перетворень отримаємо

$$f(t, \theta) = f(t, t_0) - \int_{t_0}^{\theta} [K(t, \tau)y(\tau) - L(t, \tau)x(\tau)]d\tau. \quad (2.14)$$

З формули (2.14) випливає, що функція $f(t, \theta)$ характеризує вплив попередньої історії функціонування системи до моменту θ на вихідний сигнал у момент часу t . Інакше кажучи, значення вільного члена у рівнянні (2.13) визначається запасом енергії, яка була накопичена системою до початку дослідження.

Клас систем, поведінка яких описується інтегральними моделями, включає в себе системи, які вивчаються в класичній теорії регулювання (системи в просторі станів, з нейтральним аргументом та аргументом, що запізнюється тощо), і зводиться до останніх лише при визначеній структурі виразу (2.13).

2.2 Методи еквівалентного перетворення скалярних динамічних моделей

При моделюванні динамічних систем важливим методом вияву їх специфічних властивостей і можливостей чисельної реалізації є представлення моделей в різних еквівалентних формах, що само собою потребує розвитку методів еквівалентного перетворення [188]. Використання еквівалентних форм динамічних моделей є загальноприйнятим підходом при дослідженні систем управління (часові моделі, операторні у вигляді передатних функцій, частотні), які використовуються для аналізу різних властивостей заданої системи. Часто отримання моделі, виходячи з її фізичних властивостей, зручно в одній формі, а її чисельна реалізація в іншій, еквівалентній вихідній.

Для еквівалентного (аналітичного) перетворення динамічних моделей можна виділити наступні методи:

1. Методи еквівалентного перетворення диференціальних моделей в інтегральні моделі, що включають в себе:
 - метод перетворення з розчепленням;
 - метод послідовного інтегрування;
 - метод старшої похідної.
2. Метод еквівалентного перетворення диференціального рівняння n -го порядку до системи диференціальних рівнянь 1-го порядку.
3. Метод еквівалентного перетворення диференціальної моделі в модель у вигляді передатних функцій.
4. Метод еквівалентного перетворення інтегральної моделі Вольтерра II з ядром, що розділяється в диференціальну модель.

Особливості методів еквівалентного перетворення динамічних моделей можна розглянути на наступних прикладах.

Метод перетворення з розщепленням. Нехай відома модель динамічного об'єкта у вигляді звичайного диференціального рівняння [77]

$$D[y] = y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)}(x) = f(x), \quad y^{(i)}(0) = C_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (2.15)$$

або в операторній формі

$$D[y] = f. \quad (2.16)$$

Для отримання ряду еквівалентних інтегральних динамічних моделей, тобто залежностей, що містять інтегральний оператор, може бути застосований досить загальний прийом, що базується на різноманітних розщепленнях вихідного диференціального оператора. Дійсно, розщиплюючи оператор D на два оператори, тобто записуючи $D = D_1 + D_2$, отримуємо диференціальне рівняння

$$D_1[y] = \psi, \quad (2.17)$$

де $\psi(x) = f(x) - D_2[y]$. Вибираючи такий спосіб розщеплення, щоб допустимим був аналітичний розв'язок рівняння (1.23), отримаємо розв'язок

$$y = D_1^{-1}[\psi], \quad (2.18)$$

який є інтегральним або інтегро-диференціальним рівнянням, оскільки оператор D_1^{-1} як обернений по відношенню до D_1 є інтегральним оператором.

Розглядуваний метод еквівалентного перетворення може бути застосований в нелінійних задачах. Якщо, наприклад, задано нелінійне диференціальне рівняння $D_H = D_1 + D_{2H}$, де D_1 — лінійний оператор. Тоді вихідне рівняння також зводиться до виду (2.18), тобто в загальному випадку до нелінійного інтегро-диференціального рівняння.

Розглянемо даний метод дещо детальніше на прикладі рівняння (2.15), яке запишемо у вигляді

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^m a_i y^{(n-i)}(x) = f(x) - \sum_{i=m+1}^n a_i y^{(n-i)}(x), \quad (2.19)$$

Після заміни змінних

$$u(x) = y^{(n-m)}(x), \quad u'(x) = y^{(n-m+1)}(x), \dots, u^{(m)}(x) = y^{(n)}(x) \quad (2.20)$$

отримуємо рівняння m -го порядку

$$u^{(m)}(x) + \sum_{i=1}^m a_i u^{(n-i)}(x) = \psi(x), \quad (2.21)$$

де

$$\psi(x) = f(x) - \sum_{i=m+1}^n a_i y^{(n-i)}(x). \quad (2.22)$$

Переходячи від (2.21) до еквівалентної системи диференціальних рівнянь і використовуючи фундаментальний розв'язок стосовно канонічної системи диференціальних рівнянь, отримуємо рівняння з ядром експоненціального виду

$$u(x) = e^{Ax} u_0 + \int_0^x e^{A(x-s)} \Phi(a, u, s) ds, \quad (2.23)$$

де $u(x) = [u'(x), u''(x), \dots, u^{(m)}(x)]$, $u_0 = [u'(0), u''(0), \dots, u^{(m)}(0)]$, $\Phi(a, u, s) = [0, 0, \dots, \psi(x)]$, а матриця A порядку m має вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи залежність

$$y(x) = \underbrace{\int_0^x \dots \int_0^x}_{n-m} u(s) ds = \frac{1}{(n-m-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-m-1} u(s) ds \quad (2.24)$$

можна бачити, що перехід від одного варіанту моделі до іншого відбувається шляхом зміни значення $m \in \overline{1, n}$.

Метод послідовного інтегрування. Якщо в розглянутому вище методі прийняти $m = n$, то розчеплення оператора D зводиться до розв'язання вихідного рівняння відносно старшої похідної. В такому випадку розв'язок рівняння полягає в послідовному n -кратному інтегруванні, в результаті якого отримаємо інтегральне рівняння виду

$$y(x) + \int_0^x K(x-s) y(s) ds = F(x),$$

де

$$K(x-s) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x-s)^{(i-1)}}{(i-1)!},$$

$$F(x) = \int_0^t \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds + \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{x^i}{i!} + C_0 \sum_{i=1}^{n-1} q_i \frac{x^i}{i!} + \dots + C_1 \sum_{i=1}^{n-2} q_i \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} + \dots + C_{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Метод старшої похідної. Даний метод є частковим випадком методу розчеплення, в якому використовується заміна

$$\begin{cases} u(x) = y^{(n)}(x), \\ \int_0^x u(s) ds + C_1 = y^{(n-1)}(x) \text{ і т.д.}, \end{cases} \quad (2.25)$$

$$y(x) = C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 x + C_0 + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-s)^{n-1} u(s) ds, \quad (2.26)$$

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{(x-s)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & f(x) - C_{n-1} a_1(x) - (C_{n-1} x + C_{n-2}) a_2(x) - \\ & - \left(C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 x + C_0 \right) a_n(x). \end{aligned} \quad (2.28)$$

При отриманні даних виразів виконуються інтегрування виразів (2.25) і використовується формула (2.24).

Можна побачити, що диференціальна модель задачі (2.15) еквівалентна усім інтегральним моделям у вигляді рівнянь Вольтерра II роду з частковим видом ядра (2.27). Вибір однієї з двох еквівалентних форм запису задачі Коші залежить від самої постановки задачі, що розв'язується, і від її властивостей при чисельному розв'язанні.

Метод послідовного інтегрування лінійного інтегро-диференціального рівняння має вигляд

$$u^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i u^{(n-i)} + a_n \int_a^x ((x-s)^m + R) u(s) ds = f(x), \quad (2.29)$$

з початковими умовами $u^{(i)}(0) = C_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

Для знаходження еквівалентного інтегрального рівняння за допомогою даного методу передбачається послідовне n -кратне інтегрування вхідного інтегро-

диференціального рівняння виду (2.29). При цьому використовуються рекурентні формули для знаходження ядра інтегрального рівняння

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x-s)^{i-1}}{(i-1)!} a_i + \frac{(x-s)^{(n+m-1)}}{(n+m-1)!} a_n + \frac{R(x-s)^{(n-1)}}{(n-1)!}, \quad (2.30)$$

та правої його частини

$$\varphi(x) = \underbrace{\int_0^x \dots \int_0^x}_{n \text{ раз}} f(x) - C_{n-1} a_1(x) - \left(C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 x + C_0 \right) a_n(x). \quad (3.31)$$

Для розв'язування інтегральних рівнянь, отриманих шляхом еквівалентних перетворень, є велика кількість чисельних методів, в основі більшості з них лежить заміна інтегралу квадратурними формулами. Крім цього, широке застосування знаходять ітераційні методи, методи Рунге-Кутта, методи основані на використанні сплайнів і кусково-гладких поліномів. У випадку нелінійних рівнянь, ефективним є використання спеціалізованих ітераційних методів.

Еквівалентне перетворення інтегральних моделей в диференціальні моделі. Перехід від інтегральних рівнянь до диференціальних, як один з підходів до розв'язання лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра, можливий лише в частковому випадку, що є наслідком високої універсальності рівнянь Вольтерра II роду як форми опису задачі Коші. Одним з таких часткових, але розповсюджених випадків є випадок виродженого або близького до нього ядра. Такий підхід може бути цілком аргументованим як при математичній постановці задачі, так і при їх розв'язуванні, оскільки методи розв'язування диференціальних рівнянь досить добре розроблені і широко застосовуються.

Метод структурно-функціонального перетворення моделей. Загальна структурно-функціональна схема об'єкта керування зі зворотнім зв'язком може бути самостійною системою або частиною більш складної системи управління.

На рис. 2.4 зображено вигляд структурно-функціональної схеми системи управління, в якому вона задається в Simulink. В цій моделі мають місце наступні позначення: u — вхідний сигнал; T_1 і T_2 — елементи, що регулюються; T_{oy} —

об'єкт управління; $T_{33}^{(1)}$ і $T_{33}^{(2)}$ — елементи зворотного зв'язку; $T_{зб}$ — об'єкт збудження; y — сигнал системи на виході.

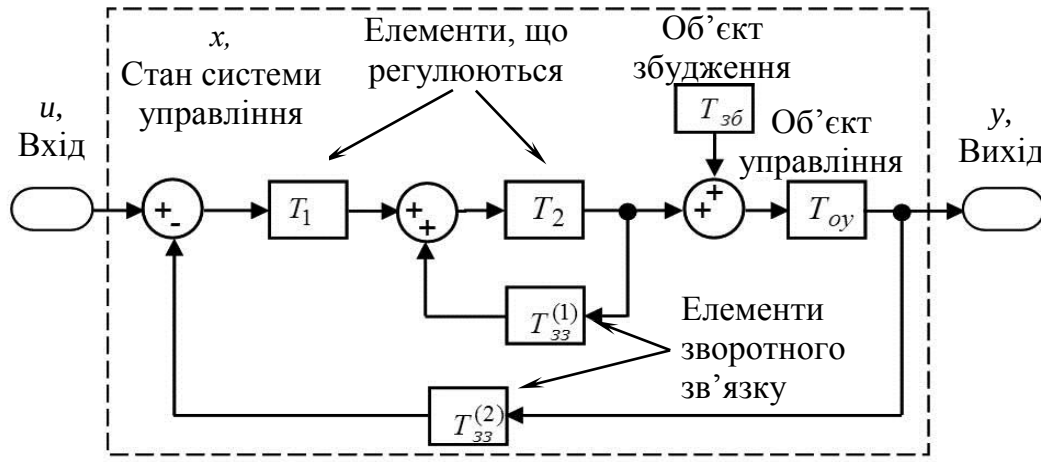


Рис. 2.4. Структурно-функціональна simulink-модель типової системи управління зі зворотнім зв'язком

Кожний simulink-блок однозначно описується наборами вхідних параметрів u , змінними стану x і вихідними змінними y . В математичній формі блок можна описати змішаною системою диференціальних, різницевих та алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = f_c(t, x, u), \\ x_d(k) = f_d(t, x, u), \\ x = x_c + x_d, \\ y = g(t, x, u), \end{cases}$$

де x_c — вектор змінних стану; $\dot{x}_c$ — вектор похідних змінних стану; x_d — вектор дискретних змінних стану; y — вектор вихідних змінних; f_c — функція обчислення похідних вектора стану; f_d — функція обчислення дискретних змінних; g — функція обчислення виходів системи.

Будь-якій лінійній simulink-моделі “вхід-вихід” однозначно відповідає математична модель в просторі станів:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases}$$

де x , u та y вектори стану, входу та виходу системи відповідно. A , B , C та D – сталі матриці, наперед задані, або отримані експериментально.

Аналіз систем управління, що мають багато контурів, часто виявляється досить громіздким із-за наявності взаємозв'язаних контурів, що мають загальні елементи. При експериментальних дослідженнях може виявитись корисним заміна моделі динамічного об'єкту чи її частини - макромоделлю, яка має найпростіший вигляд та є менш енергоємною. Тому актуальною постає задача побудови макромоделі, що зображена на рис. 2.5, яка мала б досить точно відтворювати поведінку початкової системи.



Рис. 2.5. Макро модель системи управління

В макромоделі вхідний вектор u залишається тим самим що і у початковій моделі, а сама система управління засобами Simulink-Matlab перетворюється так, що її можна описати за допомогою однієї передатної функції H . На виході отримується вектор y , що наближено дорівнює вектору y , з наперед заданою або з отриманою задовільною точністю.

Виходячи з вище сказаного, можна запропонувати наступний комп'ютерний алгоритм побудови спрощеної макромоделі динамічної системи стосовно складних лінійних simulink-моделей. При цьому, для пониження розмірності моделі в просторі станів використовуються методи виділення домінантних власних значень. Основна їх ідея полягає в тому, що при пониженні розмірності початкової моделі можна знехтувати тими елементами системи, що характеризують перехідні процеси, які швидко спадають. Алгоритм запропонованого методу побудови спрощеної макромоделі динамічної системи має наступний вигляд.

1. В середовищі Simulink, яке виконує блочно-ситуаційне моделювання, будується та зберігається структурно-функціональна модель складної динамічної системи.

2. За допомогою пакету Matlab отримується еквівалентна диференціальна модель, яка є неперервною або дискретною лінійною моделлю, що задана в просторі станів матрицями A, B, C, D .

3. Після отримання моделі в просторі станів, якщо це потрібно, її розмірність знижується. Для цього можна використати методи виділення домінантних власних значень, такі як перший, другий і модифікований методи Девісона [54-57], метод Маршала [56-58] або методи, що представлені в пакеті Matlab — MatchDC та Truncate [59-62] та інші методи, які дозволяють, при задовільній похибці апроксимації, будувати спрощені моделі.

4. Отримавши апроксимаційну модель засобами Matlab перетворюємо представлену модель в просторі станів в рівноцінну їй модель у вигляді передатної функції.

5. У якості критерію ефективності методів апроксимації динамічної системи регулювання можуть бути вибрані такі показники як комп'ютерний час побудови спрощеної моделі, похибки апроксимації, оцінка амплітудно-фазово-частотної характеристики або реакції системи на заданий вхідний сигнал, а також певний комбінований показник.

Таким чином, на основі застосування запропонованих у розділі методів може бути побудований та ефективно реалізований у вигляді програм ряд алгоритмів.

2.3 Методи апроксимаційного перетворення динамічних моделей

Принцип спрощення і корегування математичних моделей. Задачі спрощення і корегування математичних моделей [112] припускають, що є відома деяка математична модель об'єкта

$$Y = L(A)X, \quad (2.31)$$

де $L(A)$ — у загальному випадку деякий відомий оператор. У випадку корегування задача полягає в уточненні числових параметрів $A = (a_1, \dots, a_s)$ математичної моделі, виходячи з даних про функціонування об'єкта. Дана задача відома також як задача оцінювання параметрів математичної моделі або задача параметричної ідентифікації.

До необхідності коригування математичної моделі можуть призводити наступні випадки. Математична модель, отримана аналітичним способом, часто включає ряд числових параметрів, які потребують подальшого уточнення або визначення на діючому об'єкті. В іншому випадку для об'єкта зі структурою, яка змінюється з часом, може бути прийнята математична модель зі сталими параметрами, з якими вона задовольняє вимогам точності для інтервалу $(t_0, t_0 + T]$, а для наступного інтервалу $(t_0 + T, t_0 + 2T]$ у зв'язку із зміною структури об'єкта може виникнути необхідність уточнення цих параметрів.

Для задач корегування або оцінювання параметрів математичної моделі важливим є характер взаємозв'язку між вихідними змінними $Y(t)$ і оцінюваними параметрами A . Характер цього зв'язку визначається як вихідною математичною моделлю, так і обраною функцією неузгодженості або якості математичної моделі

$$\delta(A) = \|Y_0(t) - L(A)X\|, \quad (2.32)$$

де $Y_0(t)$ — вектор виходів об'єкта, $\|\cdot\|$ — знак норми вектор-функції. З точки зору оцінювання параметрів математична модель називається лінійною, якщо $\delta(A)$ лінійна відносно параметрів. Тому математична модель може бути нелінійною в звичайному сенсі і лінійною відносно оцінюваних параметрів. Оскільки задача оцінювання параметрів A формулюється як екстремальна задача пошуку

$$\delta(A^*) = \min_{A \in \Theta} \delta(A), \quad (2.33)$$

де Θ — допустима множина векторів A , то складність алгоритмів пошуку точки мінімуму $A^* \in \Theta$ буде визначатися властивостями $\delta(A)$. На практиці функцію $\delta(A)$, зазвичай, вибирають так, щоб $\delta(A)$ була лінійною відносно A або зводилася до

лінійної задачі визначення A . Для того, щоб точка мінімуму A^* була єдиною, бажано, щоб $\delta(A)$ була опуклою або хоча б унімодальною функцією.

Задачу корегування математичної моделі $Y(t) = L(A_0)X(t)$ можна поставити як задачу уточнення вихідних числових параметрів A_0 за X, Y , які належать заданій області D , до таких значень $\tilde{A} \in \Theta$, для яких критерій якості $\delta(A)$ задовольняє умові

$$\delta(\tilde{A}) \leq \Delta, \quad (2.34)$$

де Δ — необхідна точність. Для задачі корегування параметрів A_0 суттєвим є те, що при використанні ітераційних алгоритмів пошуку $\tilde{A}$ в якості початкового наближення параметрів A слід брати лише $A = A_0$, тому що, зазвичай, достатньо вести пошук в околі вихідних значень A_0 . Крім того, ітераційні алгоритми можна завершувати не по досягненню точки мінімуму функції $\delta(A)$, а в точці $\tilde{A}$, в якій виконується (2.34). Проте не виключено, що навіть у точці глобального мінімуму A^* не буде досягнуто необхідної точності, тобто $\delta(A^*) > \Delta$. Це вказує на те, що вибрана структура математичної моделі погано описує реальний об'єкт і необхідно для підвищення точності моделі шукати її в іншому класі. Можливий також випадок, коли необхідна точність буде досягнута при тому ж $L(A)$, але при зміні обмежень D, Θ .

Задачу корегування параметрів A математичної моделі статички

$$Y = f(X, A_0) \quad (2.35) \text{ можна сформулювати наступним чином. За}$$

спостережуваними в статичному режимі на об'єкті значеннями $X^{(v)}$ і $Y_0^{(v)}$ та

відповідним значенням моделі $Y^{(v)} = f(X^{(v)}, A_0)$ необхідно уточнити вихідні

числові параметри A_0 . Задачу корегування математичної моделі статички нерідко

можна звести до розв'язання системи лінійних або нелінійних рівнянь. Якщо,

наприклад, математична модель статички записується у вигляді

$$Y_j = \sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \varphi_{ij}(X), \quad j = \overline{1, n}, \quad \left(\sum_{j=1}^n s_j = s \right), \quad (2.36) \text{ де } \varphi_{ij}(X) \text{ — задані координатні}$$

функції, або шляхом перетворення змінних її можна звести до такого вигляду, то

за відсутності обмежень на A і за умови, що функція неузгодженості математичної моделі має вигляд

$$\delta(A) = \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^n q_{vj} \left[Y_{0j}^{(v)} - Y_j(X^{(v)}) \right]^2, \quad Y_0^{(v)} = Y_0(X^{(v)}), \quad (2.37)$$

де задані вагові коефіцієнти $q_{vj} \geq 0$, необхідна умова мінімуму $\frac{\partial \delta(A)}{\partial a_{ij}} = 0$

приводить до n систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \sum_{v=1}^N \varphi_{ij}(X^{(v)}) \varphi_{kj}(X^{(v)}) = \sum_{v=1}^N Y_{0j}^{(v)} \varphi_{kj}(X^{(v)}), \quad k = \overline{1, s_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.38)$$

Проте при коригуванні параметрів не завжди вдається математичну модель звести до лінійного вигляду відносно A , і у цих випадках та у випадку функції (2.38) необхідна умова мінімуму призводить до нелінійної відносно A системи рівнянь. Часто виявляється, що замість розв'язування нелінійної системи прийнятніше розв'язувати безпосередньо задачу мінімізації (2.33).

У динаміці корегування параметрів математичної моделі (2.31) здійснюється за спостережуваними значеннями входів $X(t)$ і виходів $Y_0(t)$ об'єкта на деякому проміжку часу $[t_0, t_0 + T]$ і значеннями $Y(t)$ математичної моделі на цьому ж проміжку за такими ж значеннями входів $X(t)$. Зазвичай припускається, що в початковому стані Y_0 та Y співпадають.

На практиці розповсюджені математичні моделі динаміки, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dt} = F(t, X, Y; A_0), \quad Y|_{t=t_0} = Y^0, \quad (2.39)$$

де параметри A_0 необхідно корегувати. Ця задача навіть для лінійних диференціальних рівнянь є доволі складною. Наприклад, у випадку одного лінійного диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dt} = a_0 y(t) + x(t), \quad y(0) = y^0, \quad (2.40)$$

для якого розв'язок можна записати в явному вигляді

$$y(t, a_0) = y^0 e^{a_0 t} + \int_0^t x(\tau) e^{a_0(t-\tau)} d\tau, \quad (2.41)$$

задача коригування одного параметра a_0 на основі критерію

$$\min_a \int_0^T [y(t, a) - y_0(t)]^2 dt \text{ є лінійною задачею.}$$

Нелінійної задачі вдається позбутися, якщо експеримент поставлений так, що крім $Y_0(t)$ вимірюється також і $\frac{dY_0}{dt}$. Тоді для математичної моделі, заданої системою рівнянь виду (2.40), а також для систем нелінійних диференціальних рівнянь, в праві частини яких A входить лінійно:

$$\frac{dY_j}{dt} = \sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \varphi_{ij}(t, X, Y), \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.42)$$

задачу визначення A можна звести до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, для цього функція якості моделі береться у вигляді

$$\delta(A) = \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^n \left[Y_{0j}^{(v)} - \sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \varphi_{ij}(t_v, X^{(v)}, Y^{(v)}) \right]^2 \quad (2.43)$$

і всі її похідні по a_{ij} прирівнюються до нуля. До лінійної системи зводиться задача і тоді, коли $Y_0(t)$ не вимірюється, а визначається чисельними методами за наближеними експериментальними даними $Y_0(t_v)$. Цей підхід не можна вважати задовільним без належної обережності, оскільки чисельне диференціювання наближених експериментальних даних може внести великі похибки.

У випадку впливу на об'єкт деякого вектора завад, коли вхідні і вихідні величини доцільно розглядати як випадкові, корегування параметрів моделі за спостережуваними $X^{(v)}$, $Y^{(v)}$ можна провести, базуючись на алгоритмах теорії оцінок математичної статистики або за допомогою процедур стохастичної апроксимації.

У задачі спрощення математичної моделі вважається, що вихідна математична модель відома із надлишковою точністю, причому використання цієї моделі пов'язане із певними труднощами — складністю алгоритмів, неприйнятним часом їх реалізації та ін. Для практичного застосування більш доцільно мати не

лише точну, але і просту для реалізації математичну модель. Тому виникає задача за рахунок зниження точності отримати, базуючись на вихідній математичній моделі, спрощену математичну модель об'єкта.

Питання спрощення математичної моделі можна розв'язувати на різних етапах моделювання. Дійсно, нехай ступінь адекватності математичної моделі M об'єкту O характеризується функцією $\rho_1(O, M)$, а точність чисельної реалізації математичної моделі M у вигляді програми P — функцією $\rho_2(M, P)$. Будемо вважати, що функція неузгодженості $\rho(O, P)$ результатів, виміряних на об'єкті O і розрахованих програмою P , задовольняє нерівність

$$\rho(O, P) \leq \rho_1(O, M) + \rho_2(M, P) \leq \varepsilon, \quad (2.44)$$

де число ε може бути збільшене. З (2.44) випливає, що $\rho(O, P)$ можна збільшити двома шляхами: зробити спрощуючі допущення, гіпотези і припущення про фізичний процес, і тим самим перейти від математичної моделі M процесу до більш грубої математичної моделі M_1 ; взяти більш «грубі», а значить, і простіші чисельні методи реалізації алгоритмів математичної моделі M у вигляді програми P_1 .

Таким чином, надмірна точність математичної моделі M дає можливість перейти до простіших математичних моделей процесу M_1 і простіших чисельних методів для її реалізації. Природно, що такий перехід у кожному конкретному випадку повинен здійснюватися із врахуванням специфіки математичної моделі.

Підходи до спрощення динамічних об'єктів з розподіленими параметрами. В практиці розв'язування рівнянь із частинними похідними досить поширеними є ті чи інші прийоми спрощення вихідних залежностей. У тому числі методи апіорного подання форми (структури) шуканого розв'язку, такі як методи Фур'є, Гальоркіна та ін. Сюди ж слід віднести метод розділення змінних або розщеплення, тобто метод аналітичного подання шуканої функції двох і більше змінних у вигляді добутку функцій одного аргументу. Відомі також методи кускового наближення функцій та ряд інших методів. Вказані методи можуть служити основою для структурного спрощення моделей об'єктів із розподіленими параметрами. Проте слід зазначити, що при використанні цих методів, як правило, ставиться за мету

отримання спрощеної моделі для подальшого її самостійного застосування в якості основи функціонування комп'ютеризованих систем технічного призначення, таких як системи вимірювання, контролю, діагностики, керування, а також сучасних і перспективних систем моніторингу, які інтенсивно розвиваються. Завдання, поставлені за мету, відносились, як було сказано вище, до отримання чисельного результату для конкретної обчислювальної задачі. Таким чином, напрямок досліджень, який розглядається, потребує подальшого розвитку шляхом пошуку і створення ефективних методів спрощення моделей об'єктів із розподіленими параметрами, розробки відповідних алгоритмів та програмних засобів моделювання.

Спрощення складної моделі завжди ґрунтується на деякій близькості або еквівалентності складної і спрощеної моделей. У зв'язку з тим, що оцінка близькості моделей суттєвим чином визначається цілями дослідження системи і специфікою складної моделі, класифікація методів спрощення моделей є достатньо складною. Достатнє уявлення про різноманіття способів і прийомів спрощення математичних моделей дає їх розгляд з точки зору простору змінних, в якому відбувається спрощення моделі. Відповідно двом основним просторам, які використовуються при аналізі систем, маємо дві наступні множини підходів до спрощення моделей.

Побудова спрощеної моделі за критерієм близькості показників якості вихідної і спрощеної моделі в просторі зображень. При цьому отримують: канонічні форми редукційних моделей, в яких зберігаються визначені власні значення вихідної системи, або задаються деякі полюси і зберігаються декілька марковських параметрів і (або) часових моментів; спрощені моделі зі збереженням домінантних власних значень, полюсів або нулів вихідної моделі; спрощені моделі, що отримуються інтерполяцією Коші передатної функції $W(p)$ системи; апроксимацією передатної функції $W(p)$ системи поліномами Гурвіца, неперервними дробами (апроксимація Паде), поліномами Чебишева, формами Кауера, — з контролем положення полюсів, нулів, сталих часу, часових границь та (або) моментних характеристик перехідного процесу спрощених моделей. До

методів перетворення в просторі зображень відносять частотні методи спрощення моделей, що використовують: перетворення змінних в комплексній площині, причому на високих частотах s — площина перетворюється в область всередині одиничного кола, а нові передатні функції перетворюються до модифікованих поліномів Чебишева; мінімізацію інтеграла від різниці дійсних і уявних частотних характеристик вихідної і спрощеної моделей у визначеному інтервалі частот; мінімізацію вагової міри відхилень частотних реакцій вихідної і спрощеної моделей на всьому діапазоні частот; квадратично-амплітудну частотну характеристику і методи Чебишева при апроксимації передатної функції ланцюговими дробами.

Побудова спрощеної моделі за критерієм близькості показників якості складної і спрощеної моделі в просторі станів. В цю множину методів спрощення моделей входять всі методи, які ґрунтуються на операціях над змінними в просторі станів. Різноманіття використовуваних показників якості систем обумовлює багаточисельність способів спрощення цієї групи. Значна їх кількість ґрунтується на мінімізації різноманітних мір відхилень перехідних процесів, імпульсних і перехідних характеристик або деяких функціоналів від різниці вихідних координат складної і спрощеної моделей тощо.

При постановці і розв'язанні задачі спрощення моделей як у просторі зображень, так і в просторі станів не можна обійтися без інженерних, евристичних прийомів спрощення, що враховують специфіку конкретної задачі дослідження системи і відомості про порівняльну важливість факторів (або фрагментів), отримані в результаті попереднього досвіду використання спрощеної моделі. Прикладом такого роду евристичного прийому при спрощенні математичного опису електроенергетичних систем є використання того факту, що в складних системах вплив збудження по мірі віддалення від місця його виникнення зменшується в силу розсіювання енергії та інших причин.

Інженерний підхід використовується також і при спрощенні моделі, що отримується при послідовному нехтуванні деякими фрагментами в початковій моделі і оцінці їх значимості. Інженерним способом визначається і допустима

похибка при спрощенні математичних моделей. Відзначимо деяку складність цієї задачі при врахуванні похибок вхідної інформації і потрібної точності отриманих результатів. Як при використанні будь-яких методів спрощення, що не враховують параметричну чутливість моделей, після спрощення вихідної моделі алгебраїчними методами також необхідна оцінка точності отриманої спрощеної моделі із врахуванням збурень параметрів системи.

Системний підхід при спрощенні моделей має на увазі не тільки задовільну точність спрощеної моделі, що отримується, але й задоволення інших вимог, пов'язаних з її практичним застосуванням. Такими вимогами можуть бути спрощення обладнання і підвищення надійності — при апаратній реалізації спрощення моделі, мінімізація машинного часу і об'єму пам'яті, що використовується при програмній реалізації.

Для прикладу розглянемо спосіб структурного спрощення математичної моделі об'єкта з розподіленими параметрами. Математичний опис об'єкта з розподіленими параметрами задано у прямокутній області G з границею $\Gamma\{\alpha < x < \beta; t_0 < t < t_0 + l\}$ у вигляді диференціального рівняння із частинними похідними

$$a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + d(x,t)u = f(x,t), \quad a, b > 0 \text{ у } G + \Gamma, \quad (2.45)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} u(x_0, t) = \varphi_0(t); & u(x_0 + l, t) = \varphi_l(t); & (t_0 \leq t \leq T), \\ u(x, t_0) = \psi_0(x); & u(x, T) = \psi_T(x); & (x_0 \leq x \leq x_0 + l), \end{cases} \quad (2.46)$$

де $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$, $\psi_0(x)$, $\psi_T(x)$ — задані функції.

Застосувавши метод прямих до рівнянь (2.45)-(2.46), отримаємо систему з n звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} a_k(t)\ddot{u}_k(t) - \frac{b_k(t)}{h^2}[u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)] + c_k(t)\dot{u}_k(t) + \\ + d_k(t)u_k(t) = f_k(t) + O(h^2), \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.47)$$

де $x_k = x_0 + kh$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$, $h = \frac{l}{n+1}$, $x_k(t) = u(t, x_k)$.

Нехтуючи у (2.47) членами $O(h^2)$ та позначивши через $U_k(t)$ наближені значення розв'язку $u(t, x)$ на прямій $x = x_k$ для їх визначення, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} a_k(t)\ddot{U}_k(t) - \frac{b_k(t)}{h^2}[U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] + c_k(t)\dot{U}_k(t) + \\ + d_k(t)U_k(t) = f_k(t), \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Використовуючи граничні умови на Γ , маємо:

$$\left. \begin{aligned} U_0(t) &= \varphi_0(t), & (\alpha \leq t \leq T); \\ U_{n+1}(t) &= \varphi_l(t), & (\alpha \leq t \leq T); \\ U_k(t_0) &= \psi_0(x_k), & U_k(T) = \psi_T(x_k); \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Отримана модель у вигляді системи диференціальних рівнянь (2.48) з граничними умовами (2.49) апроксимує з точністю до $O(h^2)$ диференціальне рівняння (2.45) з граничними умовами (2.46). Слід відзначити, що за допомогою методу прямих, по суті, проводиться декомпозиція вихідної моделі на n структурних елементів, кожен з яких реалізує диференціальне рівняння другого порядку.

Отже, на основі проведеної декомпозиції здійснюється побудова структурних моделей об'єктів з розподіленими параметрами. При цьому слід враховувати, що заміна моделі з нескінченною кількістю степенів свободи скінченновимірною приводить до розходжень значень їх власних частот. Для оцінки точності апроксимаційної моделі можна скористатися визначенням величини відмінності власних частот вихідної та апроксимаційної моделі.

Аналіз існуючих в публікаціях методів спрощення складних математичних моделей дозволяє визначитись з вибором підходу і методів розв'язування дослідницьких задач і досягнення мети, що відносяться до даної дисертаційної роботи.

2.4 Висновки до другого розділу

При вирішенні задачі формування робочої динамічної моделі принцип альтернативності моделей надає можливості широкого вибору однієї із форм можливих математичних залежностей, яку, не дивлячись на аналітичну еквівалентність, можуть суттєво розрізнятися за критерієм обчислювальності складності, оскільки реалізуються за допомогою різних за своєю якістю обчислювальних схем. При цьому вибір моделі здійснюється шляхом обчислювальних експериментів. Для застосування інтегральних динамічних моделей, які володіють згладжуючими властивостями при побудові моделей за експериментальними даними, запропоновані відповідні форми у вигляді явних моделей, тобто інтегральних операторів, які мають однакову структуру для об'єктів із зосередженими і розподіленими параметрами. Моделі цього виду відносяться також до класу економічних макромodelей. Крім того, запропонована загальна форма інтегральних моделей у вигляді системи інтегральних рівнянь Вольтерра II роду для опису багатозв'язних динамічних систем, що забезпечує безпосередню структурну реалізацію програмними засобами.

Для отримання широкого кола моделюючих виразів запропонований узагальнений метод еквівалентного перетворення диференціальних рівнянь – у інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння, що включає відомі методи послідовного інтегрування. Для побудови спрощених динамічних моделей сформульовано відповідний принцип спрощення і корегування моделюючих залежностей, що базується на введенні функції неузгодженості (критерію якості) математичної моделі та оптимізаційному пошуку необхідного результату. Наведені шляхи реалізації процесів спрощення моделей. У випадку об'єктів з розподіленими параметрами запропоновано метод структурного спрощення, який здійснює перехід від базових рівнянь з частинними похідними до спрощеної моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь на основі інтерполяційного підходу; метод забезпечує значну перевагу спрощеної моделі при обмежених часових ресурсах інформаційної частини комп'ютерно-інтегрованої системи.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ ПАРАМЕТРИЧНОЇ РЕДУКЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Природне прагнення дослідників до збільшення точності математичного моделювання досліджуваних явищ призводить до зростання обчислювальної складності моделей, які використовуються. Стосовно задач, які розглядаються в даній роботі, ступінь складності математичних описів динаміки досліджуваних об'єктів спричиняє значний вплив на можливості моделювання в реальному часі процесів комп'ютерно-інтегрованих систем. У зв'язку з цим, при створенні останніх, реальним шляхом зниження вимог до швидкодії комп'ютерної частини є застосування замість складних математичних моделей якихось більш простих, але таких, що зберігають в певному сенсі, інформативність результатів моделювання. Іншими словами, таких, які зберігають *властивість адекватності* об'єкту, що моделюється. Саме наявність сенсу адекватності спрощеної та вихідної моделей визначає різноманіття підходів до спрощення складних моделей [74, 212].

Питання спрощення (або *редукції*) математичних описів об'єктів або явищ тісно пов'язане із задачею *ідентифікації* [27]. Тому різноманітні прийоми, які використовуються при ідентифікації, з успіхом застосовуються і для побудови спрощених описів (математичних моделей) динамічних об'єктів за наявного складного об'єкта (явища) [85]. Основні з цих прийомів це: пониження порядку системи рівнянь; поділ руху на «швидкий» та «повільний»; зменшення числа незалежних змінних ; лінеаризація вихідних нелінійних рівнянь; нехтування впливом окремих факторів, а також ряд інших [162, 167, 227].

3.1 Способи спрощення математичних моделей

Відомі підходи до спрощення математичних моделей [111] в порядку убування апріорних відомостей про «фізичну» значущість тих частин моделі, які в процесі спрощення видаляються з неї, можна розташувати в наступній послідовності [81, 229]:

- послідовне нехтування деякими фрагментами у початковій математичній моделі та оцінка його значущості ;
- збереження в моделі фрагментів, змінні в яких є значущими за фізичним смислом , та мінімізація певної міри нев'язок у спрощеній моделі для заданого класу входів системи ;
- побудова спрощеної моделі за близькістю показників якості початкової та спрощеної моделей в просторі зображень; різноманітні варіанти цього підходу дуже широко використовуються при редукції лінійних систем [32, 197].

При побудові спрощеної моделі за близькістю показників якості початкової та спрощеної моделей в просторі зображень значне різноманіття показників якості, що використовуються, зумовлює багаточисельність способів цієї групи. В якості прикладів мінімізації різних мір відхилення змінних початкової та спрощеної моделей в просторі станів можна назвати способи мінімізації середньоквадратичних відхилень перехідних процесів, імпульсних або перехідних характеристик [59, 100, 199].

Аналіз публікацій з питань редукції моделей, свідчить про наступні напрямки досліджень: редукція моделей шляхом апроксимації типових відгуків систем високого порядку відповідними відгуками моделей більш низького порядку; *рівномірної апроксимації*, тобто такі, що використовують мінімізацію міри похибки, яка вноситься апроксимацією, коли входи системи приймають всі припустимі значення [182, 183]. Незалежна від входів системи міра рівномірної апроксимації пропонується у вигляді

$$E = \sup_{u \in U} \frac{\|y_s - y_m\|}{\|u\|}, \quad (3.1)$$

де u, y_s, y_m — загальний вхід (для системи и моделі), а також виходи системи и моделі, відповідно. Можна зазначити, що мінімізація цієї міри узагальнює багато класичних критеріїв, які використовуються при редукції, а алгоритми редукції із застосуванням міри E можуть застосовуватися для апроксимації багатовимірних нестационарних систем і систем з розподіленими параметрами.

Системний підхід при дослідженні об'єктів, які моделюються, має на увазі не тільки мінімізацію похибки спрощеної моделі, але й задоволення вимог до редуційованої (тобто такої, що зазнала редукції) моделі, пов'язаних з її застосуванням. Такими вимогами можуть бути зменшення обладнання та підвищення надійності (при апаратурній реалізації), мінімізація машинного часу та обсягу пам'яті (при програмній реалізації) та інші.

Стосовно до даної роботи задачу корегування моделі об'єкта з n входами $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)$ та m виходами $\mathbf{y} = \mathbf{y}(y_1, \dots, y_m)$ доцільно ставити як задачу про уточнення або визначення параметрів α оператора A математичної моделі

$$\mathbf{Y} = A(\alpha) \mathbf{x},$$

причому α визначається з умови

$$\inf_{\alpha} \|\mathbf{Y}_0 - A(\alpha) \mathbf{x}\|$$

близькості моделі та об'єкта, точна модель якого — вектор-функція

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_0(x) = \begin{cases} y_1^0(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ y_m^0(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Якщо математична модель об'єкта відшукується у вигляді вектор-функції

$$\mathbf{Y}_M = \mathbf{Y}_M(x, A) = \begin{cases} y_1^M(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p), \\ \dots \\ y_m^M(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p), \end{cases}$$

то умова

$$\inf_A \|\mathbf{Y}_M - \mathbf{Y}_0\| = \Delta_0 \quad (3.2)$$

найкращого визначення параметрів $A\{a_k\}_1^p$ оптимальної за точністю зкоригованої моделі замінюється більш простою

$$\|\mathbf{Y}_M - \mathbf{Y}_0\| \leq \Delta. \quad (3.3)$$

В останньому співвідношенні Δ — вектор, який визначає (забезпечує) необхідну точність зкоригованої моделі.

В якості міри наближення вектора $\mathbf{Y}_M$ до вектора $\mathbf{Y}_0$ обирається найбільш підходяща міра в залежності від вимог, що висуваються до моделі. Це може бути :

— *рівномірна* міра точності

$$\max_j |y_j^M - y_j^0|_{x \in D} \leq \delta, \quad (3.4)$$

де D — область зміни $x(x_1, \dots, x_n)$, δ — елемент вектора Δ , який відповідає певному, наперед прийнятому критерію (наприклад, мінімальний з усіх, тобто.

$$\delta = \min_j (\delta_j), \quad j = \overline{1, m};$$

— *середньоквадратична* міра точності

$$\max_j \sum_{i=1}^N (y_j^M(x^{(i)}) - y_i^0(x^{(i)}))^2 \leq \delta, \quad (3.5)$$

де $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in D$;

— *ймовірнісна* міра точності

$$\min_A M[\rho(\mathbf{Y}_M, \mathbf{Y}_0)], \quad (3.6)$$

де $M[\cdot]$ — символ математичного очікування, $\rho(\mathbf{Y}_M, \mathbf{Y}_0)$ характеризує неузгодження між векторами $\mathbf{Y}_M$ и $\mathbf{Y}_0$.

При постановці задачі корегування моделі показник Δ слід обирати з умови

$$\Delta \geq \Delta \mathbf{Y}_u + \Delta \mathbf{Y}_c + \Delta_0, \quad (3.7)$$

прийнято наступні позначення: $\Delta \mathbf{Y}_u$ — оцінка похибки вимірювання координат системи, яка визначається як

$$\Delta \mathbf{Y}_u \geq \|\mathbf{Y}_{\text{ист}}^u - \mathbf{Y}_{\text{изм}}^u\|,$$

де $\mathbf{Y}_{\text{ист}}^u$ — істинне значення вектора $\mathbf{Y}_u$; $\mathbf{Y}_{\text{изм}}^u$ — виміряне значення вектора $\mathbf{Y}_u$,

$\Delta \mathbf{Y}_c$ — обчислена похибка при використанні спрощеної математичної моделі, яка визначається як

$$\Delta \mathbf{Y}_c = \Delta \mathbf{Y}_m + \Delta \mathbf{Y}_H + \Delta \mathbf{Y}_a,$$

де, в свою чергу,

$$\Delta \mathbf{Y}_m = \|\tilde{\mathbf{Y}}^m(\mathbf{x}, \tilde{A}) - \mathbf{Y}^M(\mathbf{x}, A)\|$$

— вектор похибки методу внаслідок заміни моделі $\mathbf{Y}^M(\mathbf{x}, A)$ моделлю $\tilde{\mathbf{Y}}^m(\mathbf{x}, \tilde{A})$ з наближеними методами реалізації;

$$\Delta \mathbf{Y}_H = \|\tilde{\mathbf{Y}}^M(\mathbf{x}^u, \tilde{A}) - \mathbf{Y}^M(\mathbf{x}, \tilde{A})\|$$

— похибка, що не усувається (спадкова), зумовлена використанням значень, які вимірюються з похибками значень $\mathbf{x}^u$;

$$\Delta \mathbf{Y}_a = \|\tilde{\mathbf{Y}}_\alpha^M(\mathbf{x}^u, \tilde{A}) - \tilde{\mathbf{Y}}^M(\mathbf{x}^u, \tilde{A})\|$$

— похибка округлення (при числовій реалізації) або інструментальна похибка (при апаратурній реалізації).

На відміну від задачі корегування математичної моделі, в задачі параметричної редукції моделей динамічних об'єктів, що розглядається нижче, відомі параметри ρ моделі, яка спрощується і рівняння стану об'єкта. В задачі ж корегування стан об'єкта задається в дискретні моменти часу значеннями векторів входу $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)$ та виходу $\mathbf{y} = \mathbf{y}(y_1, \dots, y_m)$ збуджень, які реєструються.

3.2 Принцип «точностної» параметричної редукції математичних моделей

Як витікає з попереднього викладу, за звичай, задача спрощення моделі ставиться як задача *мінімізації* певної міри відхилення виходів початкової та спрощеної моделей при заданому характері спрощення. При цьому, як правило, передбачається, що параметри вихідної моделі відомі точно. Природно, що на практиці ця обставина не має місця, у зв'язку з чим питання спрощення математичних моделей може ставитись як питання узгодження виду моделі з характеристиками точності (можна вважати за припустимий термін «точностні» характеристики) вихідних даних. Інтуїтивно ясно, що немає сенсу використовувати складні в структурному відношенні моделі, якщо їх параметри відомі з достатньо великою похибкою. Ця обставина і зумовлює необхідність узгодження таких характеристик моделей як складність та точність вихідних даних. Не дивлячись на те, що така постановка задачі спрощення моделей відома, виявляючись наслідком

техніки наближення обчислень, визначення конструктивних шляхів її розв'язування має важливе значення при дослідженні складних об'єктів і, зокрема, при розробці алгоритмічного та програмного забезпечення обчислювально-управляючих систем різного призначення.

Точність та швидкодія є основними показниками якості, моделювання процесів в комп'ютерно-інтегрованих системах. Спрощення моделей досліджуваних об'єктів дозволяє зменшити величину необхідної швидкодії, знижуючи, в загальному випадку, точність моделювання. Вирішення виникаючого при цьому протиріччя між тенденціями збільшення точності моделювання та зменшення необхідної швидкодії може бути досягнуте саме на основі узгодження математичного опису досліджуваного об'єкта з «точностними» характеристиками вихідних даних.

Достатньо загальна і конструктивна постановка задачі спрощення математичних моделей на основі ідеї узгодження виду моделі з точністю вихідних даних формулюється як задача мінімізації функціоналу складності на класі моделей, які формально можна співставити за точністю зі спостереженнями (вихідними даними). Клас моделей, які формально можна співставити, визначається обмеженням типу нерівності на міру точності.

В рамках вказаної загальної постановки задачі спрощення математичних моделей може бути сформульовано ряд частинних постановок, одна з яких, а саме — *«точностна» параметрична редукція моделей* — та основні підходи до її розв'язування розглядаються нижче.

Нехай задано певний математичний опис (модель) M явища, яке моделюється, та нехай вихідні дані (зазвичай це числові значення параметрів) задано з певною похибкою, мірою якої слугує ε_p . Ясно, що, якщо $\varepsilon_p \rightarrow \infty$, то вихідний математичний опис M може бути замінено деяким іншим описом M' (в тому числі більш простим) за умови, що $\varepsilon_{yp} \rightarrow \infty$. В даному випадку ε_{yp} — міра похибки вихідних (початкових) змінних вихідної моделі, зумовленої неточністю вихідних даних, тобто наявністю ε_p . Уявімо, що $\varepsilon_p = 0$, тоді заміна вихідного

опису будь-яким іншим (в тому числі більш простим) призведе до появи похибки $\varepsilon_{yM} \neq 0$. В цьому випадку питання щодо можливості застосування спрощеної моделі повинно вирішуватися на основі аналізу вимог щодо точності моделювання досліджуваного явища. Інакше кажучи, застосування спрощеної моделі допустимо, якщо $\varepsilon_{yM} \leq \varepsilon_3$, де ε_3 — задане значення міри похибки моделювання, і навпаки. Якщо ж має місце досить сильна нерівність $\varepsilon_{yM} < \varepsilon_3$, то це свідчить про можливість подальшого спрощення вихідної (початкової) моделі.

В загальному випадку можливість застосування математичної моделі M або M' визначається умовою

$$\varepsilon_{yM} + \varepsilon_{y\rho} \leq \varepsilon_3. \quad (3.8)$$

Тут ε_{yM} — або міра похибки опису досліджуваного явища моделлю M , або міра похибки, зумовленої заміною заданої моделі M на якусь іншу M' (в тому числі більш просту).

Оскільки в даній роботі розглядається питання щодо спрощення математичних моделей, то у подальшому під ε_{yM} будемо розуміти саме міру похибки, зумовлену заміною початкової моделі більш простою.

В якості характеристики узгодження з похибкою вихідних даних математичної моделі M' , що заміняє модель M , приймемо величину

$$\alpha = \varepsilon_{yM} / \varepsilon_{y\rho}, \quad (3.9)$$

яку будемо називати *коефіцієнтом узгодженості*. При цьому умова застосування (3.8) моделі M' набуває вигляду

$$(\alpha + 1) \varepsilon_{y\rho} \leq \varepsilon_3. \quad (3.10)$$

Визначення. Математична модель M' називається α -узгодженою з похибкою вихідних даних ε_p моделі M , якщо $\varepsilon_{yM} = \alpha \varepsilon_{y\rho}$ та $\alpha > 0$.

Задача узгодження моделі M з точністю вихідних даних означає отримання моделі M' з певним значенням коефіцієнту узгодженості. При цьому в якості обмеження знизу може бути прийнято значення $\alpha = 0,01$, оскільки подальше зменшення коефіцієнту узгодженості, означає використання моделей, що мало

відрізняються від початкової, і не призведе до відчутного виграшу в точності моделювання. З іншого боку, якщо $\alpha > 10$, то загальна похибка моделювання майже цілком буде визначатися ε_{yM} , причому в даному випадку при моделюванні складних об'єктів задовільні значення ε_{yM} майже неможливі. Таким чином, коефіцієнт узгодженості математичних моделей практично слід обмежувати інтервалом $(0,01...10)$.

При розв'язуванні практичних задач максимальне значення коефіцієнту узгодженості визначається умовою застосування (3.10) як

$$\alpha_{\max} = (\varepsilon_z / \varepsilon_{yp}) - 1. \quad (3.11)$$

Нехай тепер N_M — міра обчислювальної складності математичної моделі M (для динамічних об'єктів, наприклад, таких, що описуються звичайними диференціальними рівняннями у нормальній формі, в якості N_M може бути прийнято число приведених до одного типу операцій, необхідних для обчислення правої частини), μ_α — множина математичних моделей, коефіцієнт узгодженості яких з похибкою вихідних даних не перевищує α .

Якщо $\alpha < \alpha_{\max}$, то всі моделі з μ_α еквівалентні в сенсі можливості застосування, оскільки для будь-якої моделі виконується умова застосування (3.10). В той самий час, моделі з μ_α , можуть бути нееквівалентними в сенсі обчислювальної складності. Саме при цій умові і з'являється можливість спрощення заданої моделі M шляхом її заміни на модель $M' \in \mu_\alpha$, для якої $N_{M'} < N_M$.

Визначення. Математична модель M'_0 називається *оптимально спрощеною*, якщо

$$N_{M'_0} = \min_{M' \in \mu_\alpha} N_{M'}. \quad (3.12)$$

Очевидно, що міра обчислювальної складності $N_{M'}$ є спадаючою функцією від коефіцієнту узгодженості. Звідси витікає, що коефіцієнт узгодженості оптимальної спрощеної моделі M'_0 перевищує α .

Побудова α -узгоджених, а також оптимальних спрощених моделей переслідує двояку мету. З одного боку — це обґрунтування тих або інших припущень, які дозволяють спростити модель, а з іншого — зниження вимог до швидкодії обчислювального блоку, що моделює систему. Практичний же розв'язок задачі, що розглядається, стикається зі значними ускладненнями, зумовленими, в основному, складністю задачі оцінки величин ε_{yM} , $\varepsilon_{y\rho}$ а також складностями формалізації множини μ_α .

Реальним шляхом подолання труднощів є використання *параметричного підходу* до побудови спрощених моделей. Сутність його полягає у заміні значень певних параметрів початкової моделі M на такі значення, які зменшують значення міри обчислювальної складності. Зазвичай ця заміна заданих значень певних параметрів початкової моделі на нульові (як для адитивних, так і для мультиплікативних параметрів) та/або одиничні (для мультиплікативних параметрів). Такого роду параметричне спрощення доцільно застосовувати в тих випадках, коли математичні моделі досліджуваних процесів або явищ містять достатньо значну кількість параметрів, значення яких визначаються за експериментальними даними. До таких моделей можуть бути віднесені моделі у вигляді систем лінійних та нелінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності, системи диференціальних рівнянь (як у звичайних, так і у частинних похідних) з коефіцієнтами, що являють собою складні функції змінних на вході та виході, інтегральних рівнянь з ядрами, вид яких визначається реальними характеристиками досліджуваних об'єктів та інші.

Теоретичне обґрунтування можливості параметричного спрощення математичних моделей щодо побудови α -узгоджених та оптимальних спрощених моделей базується на результатах теорії точності стосовно до аналізу похибки, яка не усувається.

Нехай $M(y, V, \rho)$ — математична модель; y, V, ρ — вектори змінних на вході та на виході об'єкта, а також параметрів, відповідно, які належать нормованим

просторам з метриками ρ_y, ρ_v, ρ_p , що визначаються відповідними нормами; N_p — міра обчислювальної складності.

Нехай $\mathbf{p}_0$ — невідомий вектор точних значень параметрів моделі, а $\mathbf{p}_3$ — вектор заданих значень параметрів. При цьому відомо, що

$$\rho_p(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_0) \leq \varepsilon_p. \quad (3.13)$$

Умова (3.13) визначає множину Ω_p таку, що з $\rho \in \Omega_p$ витікає $\rho_p(\mathbf{p}_3, \rho) \leq \varepsilon_p$. Тим самим визначено множину μ можливих моделей

$$\mu = \{M(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \rho) : \rho \in \Omega_p, \rho_p(\mathbf{p}_3, \rho) \leq \varepsilon_p\},$$

причому модель $M(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \rho)$ являє собою вихідний (початковий) математичний опис.

Нехай $\rho_p(\mathbf{p}_3, \rho)$ — міра похибки в просторах змінних на виході, зумовлена неточністю завдання вектора ρ_3 ; $\rho_y(\rho_3, \rho)$ — міра похибки, зумовлена заміною заданої моделі $M(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \rho)$ на деяку, зокрема, більш просту модель; $M(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \rho_r)$; $\rho_y(\mathbf{p}_3, \rho)$ — міра похибки, яка характеризує відмінність точної моделі $M(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \rho_0)$ від моделі $M(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \rho_r)$.

Для вказаних похибок може бути визначено оцінки

$$[\rho_y(\mathbf{p}_3, \rho) / \rho] \in \Omega_p, \mathbf{V} \in \Omega_p \leq \varepsilon_{yp}, \quad (3.14)$$

$$[\rho_y(\mathbf{p}_3, \rho_r) / \mathbf{V}] \in \Omega_v \leq \varepsilon_{ym}, \quad (3.15)$$

$$[\rho_y(\mathbf{p}_0, \rho_r) / \mathbf{V}] \in \Omega_v \leq \varepsilon_{yr}. \quad (3.16)$$

(Ω_v — область можливих значень змінних на вході), а нерівність трикутника визначає зв'язок між ними

$$\varepsilon_{yr} \leq \varepsilon_{ym} + \varepsilon_{yp} = (\alpha + 1) \varepsilon_{yp}, \quad \varepsilon_{yr} \leq \varepsilon_{ym}. \quad (3.17)$$

Якщо $\rho_r \in \Omega_p$, то $\varepsilon_{ym} \leq \varepsilon_{yr}$ і, таким чином, множина μ можливих моделей являє собою множину α -узгоджених моделей (зокрема, при $\alpha = 1$, тобто $\mu = \mu_1$). Однак застосування параметричного підходу для пошуку спрощених моделей в

множині μ має обмежені можливості. Дійсно, множина Ω_ρ , як правило, не містить точок, які належать координатним осям, в зв'язку з чим, при такому спрощенні моделей, можна розраховувати лише на скорочення числа значущих цифр в представленні заданих параметрів. Зазначимо, що такого роду спрощення знаходить застосування в техніці наближених обчислень, а також може бути використано при організації обчислювальних процесів в системах моделювання та етапі вибору обчислювальних засобів, зокрема, для обґрунтування використання аналогових підпрограм.

В загальному випадку, якщо $\rho_r \in \Omega_\rho$, то $\varepsilon_{yM} \leq \varepsilon_{yr}$ і, таким чином, коефіцієнт узгодженості відповідної моделі буде більшим за одиницю. Тим не менш існує принципова можливість визначення множини α -узгоджених моделей при $\alpha \leq 1$ і $\rho_r \in \Omega_\rho$. Наявність такої можливості зумовлено тим, що похибка в просторі параметрів на виході об'єкта, викликана неточністю завдання вектора ρ_3 , оцінюється в метриці ρ_y .

Невизначеність значень вектора параметрів вихідної (початкової) моделі (наявність Ω_ρ) призводить до невизначеності в значеннях змінних на виході, кількісна міра якої слугує похибка

$$\Delta y = y(\rho, V) - y(\rho_3, V) / V \in \Omega_V. \quad (3.18)$$

Область $\Omega_{\Delta y}$ можливих значень похибки Δy має складну конфігурацію в просторі змінних на виході, яка залежить від виду Ω_ρ , властивостей математичного опису $M(y, V, \rho)$ і визначається рівнянням для похибки, що не усувається. Детальна характеристика $\Omega_{\Delta y}$ методами аналізу похибки, що не усувається, які розвинуто в теорії точності, може бути отримано лише для найпростіших задач. Зазвичай область приналежності похибки характеризується певною сферою S (в заданій метриці ρ_y), радіус якої (в даному випадку $\varepsilon_{y\rho}$) визначається на основі оцінки зверху (3.14) для відповідної метрики ρ_y норми. Внаслідок грубості оцінок, що застосовуються, має місце $S \supset \Omega_{\Delta y}$. Сфері S в просторі змінних на виході

відповідає певна область Ω'_ρ в просторі змінних така, що $\Omega'_\rho \supset \Omega_\rho$ та $\rho \in \Omega'_\rho$, звідки витікає $\rho_y(\rho_3, \rho) \leq \varepsilon_{y\rho}$.

Через наявність включення Ω'_ρ застосування параметричного підходу до спрощення вихідного (початкового) опису в класі моделей μ' має більше можливостей у порівнянні з класом μ . Пояснюється це тим, що для складних задач з більшим числом параметрів, що задаються з не дуже високою точністю, область Ω'_ρ містить точки, які належать координатним осям простору параметрів. Звідси випливає, що в якості вектора ρ_r може бути обрано вектор з деякими нульовими компонентами, чим і досягається зменшення міри обчислювальної складності N_{pr} .

В загальному випадку Ω'_ρ може не перетинатися з координатними осями, однак і при цих умовах, як це не складно показати, існує множина $\Omega'_\rho(\alpha) = \{\rho : \rho_y(\rho_3, \rho) \leq \alpha \varepsilon_{y\rho}, \alpha > 1\}$, яка містить точки координатних осей та така, що визначає множину моделей μ'_α , які узгоджено з похибкою вихідних (початкових) даних з коефіцієнтом узгодження $\alpha > 1$. Дійсно, нехай $\Omega'_\rho(\beta) = \{\rho : \rho_p(\rho_3, \rho) \leq \rho \varepsilon_\rho\}$. Ясно, що $\Omega_\rho(1) = \Omega_\rho$ і існує таке значення $\beta_0 = 1$, що при $\beta > \beta_0$ сфера $\Omega_\rho(\beta)$ перетинається, що найменше, з однією з координатних осей простору параметрів. Множина $\Omega_\rho(\beta)$ визначає деяку область можливих значень похибок змінних на виході $\Omega_{\Delta y}(\beta)$, яка в метриці ρ_y оцінюється сферою радіусу $\alpha(\beta) \varepsilon_{y\rho}$, тобто

$$[\rho_y(\rho_3, \rho) / \rho] \in \Omega'_\rho(\beta) \leq \alpha(\beta) \varepsilon_{y\rho}. \quad (3.19)$$

Тут $\alpha(\beta)$ — невід'ємна не спадаюча функція, причому $\alpha(1) = 1$; будемо вважати, що функція $\alpha(\beta)$ — зростаюча та обмежена. Перше припущення означає, що зі зростанням похибки вихідних даних похибка змінних на виході зростає (для практичних задач можна вважати цю умову такою, що виконується). Друга умова

означає коректність всіх моделей з параметрами з $\Omega_\rho(\beta)$, що є обмеженням застосування параметричного підходу до спрощення моделей.

Нехай тепер $\Omega'_\rho(\alpha) = \{\rho : \rho_y(\rho_z, \rho) \leq \alpha(\beta) \varepsilon_{y\rho}\}$ прообраз в просторі параметрів сфери S_α . Оскільки $\Omega'(\alpha) \supset \Omega(\beta)$ то множина $\Omega'_\rho(\alpha)$ також перетинається щонайменше з однією з координатних осей, що і необхідно було показати. Таким чином, доведено наступну теорему.

Твердження 3.1. Для будь-якого $\Omega_\rho = \{\rho : \rho_\rho(\rho_z, \rho) \leq \varepsilon_\rho, \varepsilon_\rho > 0\}$ існує $\alpha_0 > 0$ таке, що при $\alpha > \alpha_0$ в множині μ_α α -узгоджених з похибкою вихідних даних коректних моделей $M(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \rho)$, що визначається множиною параметрів $\Omega_\rho(\alpha) = \{\rho : \rho_y(\rho_z, \rho) \leq \alpha \varepsilon_{y\rho}\}$, міститься непуста множина $\bar{\mu}_\alpha$, моделей $M(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \bar{\rho})$ для яких $(N_{\bar{\rho}} < N_\rho / \rho) \in \Omega_\rho$.

Сформульоване твердження є теоретичним обґрунтуванням можливості застосування параметричного підходу до побудови спрощених математичних моделей на основі узгодження виду моделей з точністю вихідних даних. А факт існування α -узгоджених моделей з меншим значенням міри обчислювальної складності ніж вихідна (початкова) модель, що визначається даним твердженням, складає сутність принципу «точностної» параметричної редукції математичних моделей, який може бути сформульовано наступним чином.

Для будь-якої моделі з неточно заданими параметрами, за умови, що похибка змінних на виході є зростаючою та обмеженою функцією від похибки параметрів, існує більш проста α -узгоджена модель, яка відрізняється від початкової значеннями деяких параметрів, що зменшують міру обчислювальної складності.

Природно, що придатність параметрично спрощених моделей, які можна отримати в результаті «точностної» параметричної редукції, визначається умовою (3.10), так, що практичний інтерес являє отримання більш простих, ніж початкові математичні описи з не дуже великим значенням коефіцієнту узгодженості. Тому

бажано вміти достатньо просто апіорі оцінювати коефіцієнт узгодження параметрично спрощених моделей.

Оцінка похибки, яка не усувається, в рамках лінійної теорії точності для широкого класу об'єктів (математичні описи яких являють собою спрощені моделі) призводить до лінійної форми залежності $\varepsilon_{y\rho}$ від ε_ρ , тобто

$$\varepsilon_{y\rho} = C_M \varepsilon_\rho, \quad (3.20)$$

де C_M — константа, що визначається властивостями задачі (для коректних задач — норма зворотного оператора лінійних рівнянь похибки, що не усувається).

В цьому випадку нескладно отримати гарантовану оцінку зверху для значення α_0 коефіцієнту узгодженості моделей, які можуть бути отримані в результаті «точностної» параметричної редукції.

Твердження 3.2. Для мінімального значення α_0 коефіцієнта узгодження параметрично спрощеної моделі $M(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \bar{\rho})$ справедлива оцінка

$$\alpha_0 \leq \frac{\min_{i=1,m} \rho_\rho(\rho_3, \wp_i)}{\varepsilon_\rho} = \alpha_b, \quad (3.21)$$

де $\wp_i, i = \overline{1, m}$ — координатні осі в просторі параметрів.

Доведення. Умова (3.20) означає, що функція $\alpha(\beta)$ має вид $\alpha(\beta) = \beta$. Значення β_0 визначимо з умови, що сфера $\Omega_\rho(\beta)$ радіусу $\beta_0 \varepsilon_\rho$ торкається найближчої з координатних осей простору $\wp_i, i = \overline{1, m}$ параметрів, тобто

$$\beta_0 \leq \frac{\min_{i=1,m} \rho_\rho(\rho_3, \wp_i)}{\varepsilon_\rho}.$$

З включення $\Omega'(\alpha(\beta_0)) \supset \Omega(\beta_0)$ витікає $\alpha_0 \leq \beta_0$. Твердження доведено.

Оцінка (3.21) є, по суті, критерієм застосування «точностної» параметричної редукції математичних моделей. Так великі значення α_b (порядку десятків) свідчать про недоцільність параметричного спрощення моделей і навпаки, малі

значення α_b (порядку одиниць) означають припустимість застосування «точностної» параметричної редукції для побудови прийнятних моделей.

Параметричне спрощення моделей, яке розглядається, охоплює і той випадок, коли здійснюється лінеаризація складних функціональних залежностей. При цьому використання лінійних членів означає «обнуління» коефіцієнтів для всіх інших членів розкладання.

Крім того, використання принципу «точностної» параметричної редукції можливо також і для оцінки окремих фрагментів моделі, які не можна визначити, шляхом уведення фіктивних мультиплікативних параметрів (що номінально дорівнюють одиниці) при досліджуваних фрагментах з наступною оцінкою незначущості цих параметрів, тобто можливості заміни їх номінальних значень на нульові.

3.3 Основа алгоритмізації «точностної» параметричної редукції

Використання принципу «точностної» параметричної редукції математичних моделей має на увазі розробку відповідних алгоритмів, придатних з обчислювальної точки зору. В загальному випадку, в залежності від виду моделей, які спрощуються, можливі різні шляхи конструювання алгоритмів «точностної» параметричної редукції. Відповідні алгоритми утворюють декілька груп, що відрізняються обчислювальною складністю в залежності від інформації щодо характеристик точності спрощених моделей, яка використовується.

Розглянемо коротко сутність основних підходів до побудови алгоритмів «точностної» параметричної редукції.

1. *Алгоритми побудови області $\Omega'(\alpha)$.* Вони розробляються на основі безпосереднього визначення прообразу в просторі параметрів сфери S_α , яка оцінює в просторі змінних на виході область можливих значень похибок. Ці алгоритми потребують знання оцінок ε_{yM} і виконання перетворення сфери S_α радіусу $\alpha \varepsilon_{y\rho}$ в область $\Omega'(\alpha)$.

2. *Алгоритми параметричної редукції в просторі параметрів.* Дані алгоритми будуються на основі визначення еквівалентного вектору параметрів

$\rho_y \in \Omega(\alpha)$ такого, що реакція моделі, яка зазнала редукції, з вектором параметрів ρ_r , що задається апіорі, відрізняється від реакції вихідної (початкової) моделі з вектором параметрів ρ_y на величину, якою можна знехтувати у порівнянні з ε_{yM} . Алгоритми потребують знання оцінки ε_{yM} та розв'язку задачі мінімізації $[\rho_y(\rho, \rho_r) / \mathbf{V}] \in \Omega_V$ по ρ за умови $\rho \in \Omega(\alpha)$.

3. *Алгоритми параметричної редукції в просторі змінних на виході.* Сутність алгоритмів цієї групи полягає в оцінці приналежності редукційованої моделі області $\Omega_{\Delta y}$ (або певній її оцінці) можливих значень похибок змінних на виході початкової моделі. Алгоритми потребують побудови оцінки області $\Omega_{\Delta y}$ та визначення похибки (або її оцінки) редукційованої моделі.

При розробці будь-якого алгоритму з вказаних груп виникає необхідність розв'язування низки частинних задач, які визначають їх обчислювальну складність та можливість практичного застосування.

Для алгоритмів першої групи найбільш складним в обчислювальному відношенні є перетворення S_α в $\Omega'_\rho(\alpha)$. Можливість практичного застосування обмежується простими задачами, для яких можливо отримання явних аналітичних описів області $\Omega_{\Delta y}$.

Для алгоритмів другої групи найбільш складним етапом є пошук $\min[\rho_y(\rho, \rho_r) / \mathbf{V}] \in \Omega_V$. Практичне застосування алгоритмів можливо у випадках, коли можуть бути отримані в явному вигляді рівняння для похибки Δy , що не усувається.

Можливість застосування алгоритмів третьої групи визначається можливістю побудови області $\Omega_{\Delta y}$.

Суттєвий вплив на складність алгоритмів «точностної» параметричної редукції моделей справляє рішення і таких питань як оцінка ε_{yM} (для алгоритмів першої та третьої груп), призначення або визначення ρ_r (для алгоритмів другої та третьої груп).

При оцінці ε_{yM} подолання обчислювальної складності досягається шляхом аналізу ε_{yM} в одній точці простору змінних на виході, що відповідає обраному режиму моделювання, який, в свою чергу, володіє екстремальними властивостями.

При оцінці реальним шляхом є використання лінійної теорії точності, яка дає можливість практично оцінювати міру похибки координат на виході моделі, зумовленої неточністю завдання вектору параметрів. При цьому може використовуватися або апарат теорії чутливості, або організовуватися визначення частинних внесків в загальну похибку окремих похибок компонент вектору параметрів з наступним їх підсумовуванням.

Значення функції чутливості або частинних внесків похибок компонент вектору параметрів дозволяє розв'язувати задачу призначення або визначення $\mathbf{p}_r$ шляхом ранжування компонент вектора $\mathbf{p}_3$ по чутливості або частинному внескові.

Для алгоритмів другої групи необхідно апріорі призначити $\mathbf{p}_r$. Практична реалізація цієї процедури ґрунтується як на попередньому досвіді процесів, які моделюються, так і на апріорному аналізі значущості окремих параметрів.

У зв'язку з обмеженими можливостями алгоритмів першої групи більш детальний аналіз властивостей «точностної» параметричної редукції проведемо лише для алгоритмів третьої групи.

Структура алгоритмів редукції в просторі параметрів в загальному випадку визначається сукупністю наступних основних блоків:

1. Визначення $\mathbf{y}_3$ — реакції початкової моделі з параметрами $\mathbf{p}_3$ на обраному режимі моделювання.
2. Призначення вектора параметрів $\mathbf{p}_3$ за умови $\|\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_r\| \ll \|\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_r\|$, де $\mathbf{y}_3$ — реакція початкової моделі з параметрами на режимі моделювання.
3. Визначення $\mathbf{y}_r$ — реакції редуційованої моделі на обраному режимі моделювання.
3. Визначення вектора параметрів $\mathbf{p}_3$ за умови $\|\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_r\| \ll \|\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_r\|$, де $\mathbf{y}_3$ — реакція початкової моделі з параметрами на режимі моделювання.

5. Оцінка виконання умови $\rho_s \in \Omega(\alpha)$, що еквівалентно оцінці коефіцієнту узгодженості α за умови малості Ω_ρ .

6. Аналіз результатів редукції. У випадку, якщо результати редукції задовільні, то здійснюється завершення алгоритму, інакше — повернення до другого блоку.

Розглянемо представлені основні блоки алгоритму «точностної» параметричної редукції з точки зору їх практичної реалізації.

Перший блок. Практична реалізація залежить від виду моделі та зводиться до застосування відповідних числових методів аналізу.

Другий блок. Основна складність реалізації полягає у відсутності формалізованих прийомів визначення значень ρ_r .

Використання попереднього дослідницького досвіду дозволяє визначити варіанти структурної редукції вихідних математичних моделей, які зводяться, як правило, до заміни яких-небудь функціональних залежностей їх лінійними членами розкладання в степеневий ряд. Наприклад, щодо рівнянь динаміки польоту літака подібні варіанти структурної редукції часто полягають у заміні окремих тригонометричних функцій лінійними членами за уявної пропозиції щодо малості відповідних величин [...]. В цих випадках розв'язання задачі «точностної» параметричної редукції дає можливість обґрунтувати припустимість тих або інших структурних спрощень.

Апріорний аналіз значущості параметрів ґрунтується на порівнянні порядку величин адитивних складових, що входять у рівняння динаміки. Виявлені при такому аналізі члени, внесок яких в значення деякої величини достатньо малий у порівнянні з іншими членами, що утворюють ту ж саму величину, ігноруються.

Здійснений будь-яким чином вибір підозрюваних на незначущість параметрів визначає і вибір вектору ρ_r апіорі редукційованої моделі. Слід, однак, зазначити, що вибір конкретного значення ρ_r неоднозначний, оскільки формування ρ_r може здійснюватися за допомогою будь-якої підмножини апіорної множини підозрюваних на незначущість параметрів. З практичної точки

зору привабливою є «максималістична» стратегія формування $\mathbf{p}_r$, в результаті чого $\mathbf{p}_r$ призначається з урахуванням всієї апіорної множини підозрюваних на незначущість параметрів.

Третій блок. Реалізується аналогічно першому блоку.

Четвертий блок. Даний блок найбільш складний у обчислювальному відношенні, оскільки являє собою розв'язок задачі відновлення параметрів моделі $M(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \mathbf{p})$. В загальному випадку реалізація блоку ґрунтується на використанні алгоритмів мінімізації відхилення реакції $\mathbf{y}_r$ редуційованої моделі на обраному режимі моделювання від реакції $\mathbf{y}_r$ редуційованої моделі початкової моделі шляхом варіювання параметрів останньої.

Для динамічних об'єктів в математичному плані задача часто може бути зведеною до розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{p}) = 0, \quad (3.23)$$

вид яких визначається типом моделі, відносно невідомих $\mathbf{p}$ за умови, що $\mathbf{y} = \mathbf{y}_r$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$ та $\mathbf{p} \in \Omega(\alpha)$. Остання умова є принциповою, оскільки, в силу самої постановки задачі, розв'язок системи (3.23) існує, він єдиний і визначається умовою $\mathbf{p} \in \Omega(\alpha)$. Таким чином, видно, що мова йде не просто про відновлення параметрів, а про наближення розв'язку $\mathbf{y}_r$ редуційованої системи розв'язуванням вихідної системи при допустимих значеннях її параметрів. Інакше кажучи, питання ставиться про еквівалентну заміну впливу на точність моделювання підозрюваних на незначущість параметрів початкової моделі. Саме ця обставина зумовлює обчислювальну складність даного блоку алгоритмів розв'язування задачі параметричної редукції простору параметрів.

За уявної пропозиції щодо малості відхилень $\Delta \mathbf{p}$ від заданого значення вектору параметрів $\mathbf{p}_3$ початкової моделі рівняння відносно похибки $\Delta \mathbf{y}$ має вид

$$\mathbf{f}_y(\Delta \mathbf{y}) + \mathbf{f}_p(\Delta \mathbf{p}) + \varphi = 0, \quad (3.24)$$

де $\mathbf{f}_y$, $\mathbf{f}_p$ — матриці Якобі вектор-функції $f(\mathbf{y}, \mathbf{V}, \mathbf{p})$ по відповідних аргументах, φ — відома функція.

Якщо $\Delta \mathbf{y}_r = \mathbf{y}_z - \mathbf{y}_r$ мале, то шуканий вектор прирощень повинен задовольняти системі

$$\mathbf{f}_y(\Delta \mathbf{y}_r) + \mathbf{f}_\rho(\Delta \boldsymbol{\rho}) + \varphi = 0 \quad (3.25)$$

і за умови максимальності рангу матриці $\mathbf{f}_\rho$, що на практиці зазвичай й буває, може бути визначений з (3.25) як

$$\Delta \boldsymbol{\rho} = -(\mathbf{f}_\rho^T \mathbf{f}_\rho)^{-1} \mathbf{f}_\rho^T \mathbf{f}_y(\Delta \mathbf{y}_r) + \varphi = 0, \quad (3.26)$$

де $\mathbf{f}_\rho^T$ означає транспоновану матрицю $\mathbf{f}_\rho$.

Інший підхід до розв'язування задачі базується на перетворенні заданої множини Ω_ρ в еквівалентну, в смислі точності множини $\Omega_{\bar{\rho}}$, де $\bar{\rho}$ — усічений вектор параметрів вихідної (початкової) моделі, компоненти якого обираються з урахуванням апіорної значущості параметрів, лінійності системи (3.23) відносно $\bar{\rho}$, а також мінімальності розмірності. При виборі $\bar{\rho}$ корисною може виявитися концепція *фіктивності параметрів* та низка інших ідей, які використовуються при організації контролю процесів моделювання з використанням методів параметричної ідентифікації. Перетворення Ω_ρ в $\Omega_{\bar{\rho}}$ само по собі являє достатньо складну задачу, розв'язування якої потребує залучення апарату теорії точності. Тим не менш, його застосування може виявитися доцільним, якщо дане перетворення виконано за яких-небудь причин (наприклад, з метою організації контролю, про який згадувалося вище).

П'ятий блок. Оцінка виконання умови $\rho_z \in \Omega(\alpha)$ не являє собою складності і є очевидною, причому у випадку лінійної залежності $\varepsilon_{y\rho}$ от ε_ρ коефіцієнт узгодження визначається як

$$\alpha_r = [\rho_\rho(\rho_z, \rho_r)] / \varepsilon_\rho.$$

Шостий блок. Результатом виконання попередніх блоків є значення вектору параметрів ρ_r редуційованої моделі та її вектору узгодженості α_r з похибкою вихідних даних. Якщо позначити нижню та верхню границі векторів коефіцієнту узгодження як α_n та α_b , то задача вважається розв'язаною при виконанні умови

$\alpha_n \leq \alpha_r \leq \alpha_b$. В іншому випадку здійснюється повернення до другого блоку. При цьому, якщо $\alpha_n < \alpha_r$, то формування нового значення вектору параметрів $\mathbf{p}_r$ повинно здійснюватися зі збільшенням числа апріорно незначущих параметрів і навпаки, у випадку, якщо $\alpha_r < \alpha_b$.

Оцінюючи в цілому практичну цінність алгоритмів розв'язування задачі параметричної редукції в просторі параметрів, слід відзначити, що вузловим моментом, який визначає можливість його застосування, є необхідність переобчислення відхилень реакції редуційованої моделі від реакції, заданої в області початкових даних. Трудомісткість цього процесу в основному і визначає обчислювальну складність алгоритмів.

Структура алгоритмів «точностної» параметричної редукції моделей в просторі координат на виході визначається сукупністю наступних основних блоків:

1. Визначення реакції початкової моделі на обраному режимі.
2. Оцінка області можливих розв'язків вихідної системи, зумовленої неточністю завдання вектору параметрів $\mathbf{p}_3$, тобто, оцінка ϵ_{yp} .
3. Визначення вектору параметрів $\mathbf{p}_3$ такого, що $N_{pr} < N_{pz}$ або, іншими словами — вибір редуційованої моделі.
4. Визначення реакції редуційованої моделі.
5. Оцінка відхилення $\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_r$ і визначення значення коефіцієнта узгодженості.
6. Аналіз результатів редукції у випадку, якщо результати задовільні, з наступним переходом на сьомий блок, інакше — повернення до третього блоку.
7. Корекція редуційованої моделі.

Розглянемо деякі із вказаних блоків алгоритму з точки зору їх практичної реалізації.

Перший блок. Реалізується аналогічно реалізації першого блоку алгоритмів простору параметрів.

Другий блок. Є самим складним у обчислювальному відношенні. Дійсно, задача оцінки області можливих значень координат заданої моделі, зумовленої

неточністю завдання параметрів, являє собою класичну задачу теорії точності з оцінювання похибки, яка не усувається. Обчислювальна складність розв'язування даної задачі добре відома. В теорії точності розроблено різні підходи до аналізу похибки, яка не усувається. Використання того або іншого підходу залежить від виду моделі та постановки задачі аналізу точності, яка здійснюється з урахуванням як мети аналізу, так і вихідної інформації щодо похибки завдання параметрів.

Мета аналізу зазвичай віднаходить відображення у вимогах до числових характеристик множини $\Omega_{\Delta y}$. Початковою інформацією про похибку завдання параметрів зазвичай є сукупність як властивостей векторів $\mathbf{p} \in \Omega_p$, так і відповідних числових характеристик. Так, вектор $\mathbf{p}$ може розглядатися як випадковий або детермінований, змінний або постійний. У випадку статистичного аналізу необхідно задавати розподіл вектору $\mathbf{p}$ по $\mathbf{p} \in \Omega_p$, або моменти цього розподілу. При детермінованому аналізі основною вихідною числовою інформацією є завдання області Ω_p .

При статистичному завданні вектора $\mathbf{p} \in \Omega_p$ виникає задача оцінювання статистичних характеристик множини $\Omega_{\Delta y}$ (зазвичай деякі числові значення, або моментні характеристики розподілу). В загальному випадку розв'язування цієї задачі можливе за допомогою апарату функцій чутливості, *інтерполяційними методами*, а також методом статистичних випробовувань. Задля досягнення мети «точностної» параметричної редукції при статистичному завданні вектора параметрів $\mathbf{p} \in \Omega_p$ достатньо знання перших двох моментів розподілу розв'язків редуційованої моделі — математичного очікування та дисперсії, наявність яких дозволяє побудувати оцінку ε_{yp} області $\Omega_{\Delta y}$. Необхідно зауважити, що статистичне подання вектору параметрів само по собі являє складну задачу. На практиці визначення параметрів математичних моделей, тобто параметрична ідентифікація. Є складним обчислювальним процесом зі значним числом первісних похибок. Аналіз розподілу цих похибок, який значно перевищує по складності задачу параметричної ідентифікації, як правило не здійснюється. Таким чином, при

розробці алгоритмів «точностної» параметричної редукції необхідно орієнтуватися на наявність мінімальної вихідної інформації відносно похибки завдання параметрів, а саме, на значення будь-якої міри ε_ρ області Ω_ρ . За цих умов реалізація другого блоку алгоритму параметричної редукції, що розглядається, зводиться до аналізу похибки, яка не усувається, в детермінованій постановці.

За умови достатньої малості ε_ρ , тобто при достатньо високій точності завдання параметрів, оцінювання міри $\varepsilon_{y\rho}$ області $\Omega_{\Delta y}$ може бути здійснено методами лінійної теорії точності на основі як отримання і аналізу рівнянь для похибок, так і при використанні апарату функцій чутливості, причому останнє є більш пріоритетним в сенсі можливості обчислювання та точності результатів, які отримуються.

Для моделей, рівняння стану яких є такими, що диференціюються по y та ρ в рамках лінійної теорії точності, похибка Δy , зумовлена похибками $\Delta \rho$ вектору параметрів, визначається наступним чином

$$\Delta y = S \Delta \rho, \quad (3.27)$$

де S — $(n \times m)$ -матриця функцій чутливості.

Опис $\Omega_{\Delta y}$ можна отримати з (3.27) при використанні векторних мір $\vec{\varepsilon}_{y\rho}$, які дозволяють покомпонентно описати область можливих значень реакції початкової моделі. Практичний інтерес являє собою використання в якості компонент вектора $\vec{\varepsilon}_{y\rho}$ оцінок зверху для компонент вектора Δy . На основі (3.27) можна записати

$$|\Delta y_i| \leq \sum_{j=1}^m |S_{ij} \Delta \rho_{j \max}|, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.28)$$

де $\Delta \rho_{j \max}$ — максимально можливі прирощення параметрів початкової моделі; S_{ij} — функції чутливості i -ої змінної на виході по j -ому параметру.

Практичне визначення елементів матриці S базується на кінцево-різницевій апроксимації. Так, якщо

$$\Delta y^{(j)} = y_3 - y^{(i)}$$

$(\mathbf{y}^{(j)})$ — реакція моделі, коли j -а компонента вектора $\mathbf{p}_3$ отримує прирощення $\Delta \mathbf{p}_j$, то

$$\mathbf{S}_{ij} \approx (\Delta \mathbf{y}^{(j)} / \Delta \mathbf{p}_j) \quad (3.29)$$

і, таким чином, наближені значення функції чутливості може бути визначено при відомому $\mathbf{y}_3$ шляхом m -кратного аналізу вихідної (початкової) моделі з параметрами, що послідовно збуджуються.

Як витікає з (3.28) для побудови оцінки області можна обмежитися обчисленням функцій $|\mathbf{S}_{ij} \Delta \mathbf{p}_{j \max}|, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$, які являють собою оцінки внеску похибки j -го параметра в оцінку похибки i -ої координати.

Третій блок. Вибір вектора параметрів редуційованої моделі може реалізовуватися на основі застосування наступних способів.

Перший спосіб полягає у апіорному призначенні вектору $\mathbf{p}_r$ з урахуванням дослідницького досвіду та апіорної значущості оцінки параметрів. Реалізація його аналогічна реалізації другого блоку алгоритму «точностної» параметричної редукції в просторі параметрів.

В основі другого способу лежить використання інформації, яку можна отримати при виконанні другого блоку даного алгоритму, з метою виділення сукупності підозрюваних на незначущість параметрів.

Праву частину оцінки (3.28) може бути представлено у вигляді двох доданків, які суттєво відрізняються за своєю величиною, тобто:

$$\sum_{j=1}^m |\mathbf{S}_{ij} \Delta \mathbf{p}_{j \max}| = \delta_{1i} + \delta_{2i}, i = \overline{1, n}, \quad (3.30)$$

причому $[\delta_{2i} / (\delta_{1i} + \delta_{2i})] \leq \kappa, \kappa > 0$.

Нехай I_{2i} — множина параметрів, прирощення яких утворює суму δ_{2i} . Тоді перетинання $\bigcap_i I_{2i} = I_k$ визначить множину параметрів, внесок яких в оцінку міри множини не перевищує 100%. Якщо $I_k \neq 0$ і воно досить велике, то малість оцінки внеску відповідних параметрів свідчить про малий їх вплив на значення координат

на виході. Звідси витікає. Що такі параметри, в першу чергу може бути віднесено до підозрюваних на незначущість.

При виборі значення k — коефіцієнта внеску апіорі незначущих параметрів — на початковій стадії «точностної» параметричної редукції доцільно керуватися лінійною теорією точності. Так, якщо уявити, що відхилення $\Delta \mathbf{y}_r$ реакції редукційованої моделі від реакції початкової моделі може бути оцінено як

$$|\Delta \mathbf{y}_{ri}| \leq \sum_{j:P} \sum_{j \in I_k} |\mathbf{s}_{ij} \mathbf{p}_j| \approx \frac{\|\mathbf{p}_3\|}{\epsilon_\rho} \sum_{j:P} \sum_{j \in I_k} |\mathbf{s}_{ij} \mathbf{p}_{j \max}| \leq \frac{\|\mathbf{p}_3\|}{\epsilon_\rho} \delta_{2i}, i = \overline{1, n}, \quad (3.31)$$

то умова $\mathbf{y}_r \in \Omega_y$ буде виконуватися, якщо

$$|\Delta \mathbf{y}_{ri}| \leq (\delta_{2i} / k), i = \overline{1, n},$$

що з урахуванням (3.31) дає $k \approx (\epsilon_\rho / \|\mathbf{p}_3\|)$.

Таким чином, початкове значення k_0 коефіцієнту внеску апіорі незначущих параметрів визначається мірою похибки завдання параметрів моделі, яка підлягає редукції, і може бути прийнятим таким, що дорівнює $(\epsilon_\rho / \|\mathbf{p}_3\|)$.

Процес «точностної» параметричної редукції являє собою, в загальному випадку, ітераційну процедуру, причому, на кожній ітерації повинна відбуватися зміна множини підозрюваних на незначущість параметрів. У зв'язку з цим, реалізація третього блоку алгоритму, який розглядається, повинна містити ранжування множин апіорі незначущих параметрів.

Викладений другий спосіб призначення незначущих параметрів достатньо просто алгоритмізується. Тому, на його основі, достатньо просто здійснюється ранжування параметрів.

Реалізація процесу ранжування апіорі незначущих параметрів базується на тому очевидному фактові, що $I_{k1} \supseteq I_{k2}$ при $k_1 > k_2$. Таким чином, забезпечивши формування послідовності значень коефіцієнта внеску k_2 апіорі незначущих параметрів і визначення відповідних цим значенням множин I_{kl} , можна організувати розв'язування задачі «точностної» параметричної редукції у вигляді

процесу послідовних наближень. Значення ж k_0 слід рекомендувати в якості початкового.

Практичний інтерес являє вибір вектору параметрів редуційованої моделі шляхом комбінування описаних двох способів. При цьому апріорі незначущі параметри, призначені на основі апріорної оцінки значущості, повинні фіксуватися в наборах I_{kl} сум δ_{2i} , а інші параметри наборів I_k повинні визначатися виходячи з умови заданого внеску в загальну оцінку похибки. Також як і попередньому випадку, при реалізації комбінованого способу призначення апріорі незначущих параметрів може бути проведено ранжування множин незначущих параметрів та організовано процес послідовних наближень розв'язку задачі «точностної» параметричної редукції.

Четвертий блок. Для оцінки реакції y_r редуційованої моделі за методом параметричної редукції в просторі координат на виході, слід, в першу чергу, з'ясувати принципову можливість зведення процесу розв'язування задачі у вигляді машинного процесу послідовних наближень. Це означає наявність можливості повної автоматизації «точностної» параметричної редукції складних моделей.

Аналіз наведених структур алгоритмів «точностної» параметричної редукції в просторах параметрів та координат на виході дозволяє зробити порівняльну оцінку їх властивостей в смислі обчислювальної складності. Основним якісним показником при цьому є те, що для алгоритмів простору параметрів самий складний у обчислювальному відношенні блок — визначення вектору $\mathbf{p}_3$ — розташовано в ітераційному циклі, в той же час як основний за складністю блок алгоритмів простору координат на виході — оцінка $\varepsilon_{y\rho}$ — в ітераційний цикл не входить. Крім того, слід врахувати, що неможливість формалізації прийомів визначення вектору $\mathbf{p}_r$ (методу проб та похибок), притаманна алгоритмам простору параметрів, ускладнює організацію машинного процесу і, таким чином, автоматизацію «точностної» параметричної редукції

Зазначене дозволяє зробити висновок про пріоритетність алгоритмів «точностної» параметричної редукції в просторі координат на виході при спрощенні достатньо складних математичних моделей.

3.4 Підхід до програмної реалізації процесів редукції моделей динамічних систем

Викладені принцип та алгоритми «точностної» параметричної редукції математичних моделей свідчать про складний характер процесу побудови відповідних спрощених моделей у випадках, що становлять практичний інтерес. Ця обставина зумовлює необхідність застосування обчислювальної техніки для проведення редукції моделей, яка розглядається, що передбачає розробку машинної методики шляхом програмної реалізації основних положень та алгоритмів.

Обмежені можливості алгоритмів «точностної» параметричної редукції першої групи (можливість застосування лише для простих в смислі аналізу похибки моделей, яка не усувається) дозволяють виключити їх з числа алгоритмів, що реалізуються машинним способом. Щодо алгоритмів редукції в просторі параметрів і координат на виході, то, в загальному випадку, їх машинна реалізація необхідна. При цьому основними програмними блоками є наступні: блоки оцінки чутливості та корекції моделі, яка підлягає редукції, а також блок варіації параметрів, що забезпечує їх роботу. Останній використовується для реалізації алгоритмів редукції в просторах координат на виході. Також в число програмних блоків входять: блок визначення еквівалентних значень параметрів редуційованої моделі (для реалізації алгоритмів редукції в просторі параметрів); блок визначення незначущих параметрів (для обох типів алгоритмів). Такі блоки алгоритмів редукції як блок визначення реакцій початкових і блок спрощених моделей породжують загальний програмний блок визначення реакції моделі

Сукупність, таким чином визначених основних програмних блоків разом з управляючою програмою, складає основу комплексу програм «точностної» параметричної редукції математичних моделей. Структуру комплексу

представлено блок-схемою, наведеною на рис.3.1. В ній відображено чотири рівні основних програмних блоків, що реалізують розв'язок задачі редукції. Перший рівень цієї ієрархії — керуюча програма. Вона ініціює програмні блоки інших рівнів, організовує черговість їх роботи та обмін даними (на рисунку стрілками позначено управління та зв'язки між програмними блоками, причому штриховими стрілками виділено обмін даними). До другого рівня віднесено основні блоки алгоритмів редукції як в просторі параметрів, так і в просторі координат на виході.

Третій рівень представлено блоком визначення реакції моделі, який використовується для обчислення реакції початкової та редуційованої моделей як з не збудженими параметрами, так і з параметрами, що зазнали збуджень.

Четвертий рівень в структурній схемі складають допоміжні програмні блоки завдання режиму та варіації параметрів моделей. В блоці оцінки чутливості обчислюються функції чутливості $(\partial y_i / \partial p_j)$ координат на виході y_i , $i = \overline{1, n}$ моделі по відношенню до параметрів p_j , $j = \overline{1, m+n}$, які у подальшому використовуються як для оцінки області невизначеності $\Omega_{\Delta y}$ координат на виході моделі, так і для оцінки внеску параметра, що розглядається, в цю невизначеність та їх ранжування. Характерною рисою блоку є включення до вектору параметрів моделі вектору початкових умов рівнянь динаміки для оцінки функцій чутливості координат за початковими умовами та оцінки внеску збуджень останніх в область невизначеності координат на виході.

При використанні для визначення функцій чутливості розділених різниць першого порядку (числового диференціювання координат на виході по параметрах) оцінка точності обчислень функцій чутливості здійснюється на основі оцінки похибки обчислення розділених різниць координат. Точність обчислення останніх задається величиною Δ_c , яка є оцінкою повної похибки розв'язку рівнянь динаміки та стає відомою після оптимального вибору числового методу інтегрування. Практично достатня точність оцінки функцій чутливості досягається у випадку, коли збуджені значення координат y та p відрізняються від не збуджених на величину порядку $10\Delta_c$.

Блок визначення незначущих параметрів моделі дає на виході номери параметрів, що виявляються «кандидатами» в незначущі. Визначення цих претендентів на незначущість може бути здійснено з використанням емпірико-евристичних підходів. Якщо до складу параметрів моделі включено початкові умови, то в блоці, який розглядається, повинно бути вилучено обнуління початкових умов при інтегруванні рівнянь динаміки. Це ж відноситься і до параметрів, обнуління яких не має фізичного смислу. Інші блоки другого рівня являють собою програмну реалізацію описаних в параграфі 3.3. прийомів визначення еквівалентних значень параметрів моделі, яка зазнала редукції, та її корекції.

Призначення та програмна реалізація блоків третього та четвертого рівнів коментарів не потребують.

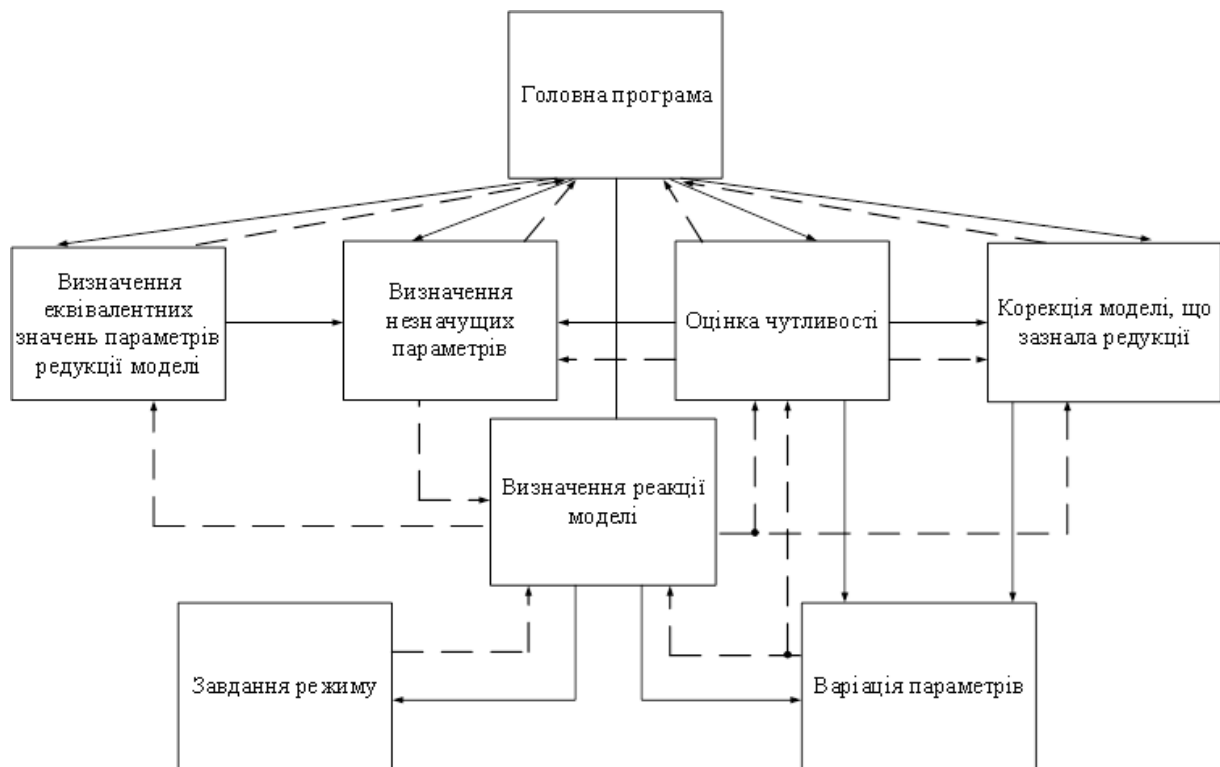


Рис 3.1. Структура програмного комплексу «точностної» параметричної редукції математичних моделей

3.5 Висновки до третього розділу

Необхідність забезпечення процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем у реальному часі, а також відповідні вимоги до апаратної частини підсистем керування і контролю, обсягу пам'яті, надійності та безпеки суттєво впливають на рівень складності математичних описів динамічних процесів у системах. Це потребує застосування замість складних математичних описів більш простих моделей, призначених для задач побудови систем і моделювання. Виходячи з практичних міркувань задачу корегування динамічної моделі пропонується ставити як задачу уточнення або визначення параметрів моделі. Спираючись на ідею узгодження виду моделі з точністю вихідних даних, формулюється задача «точностної» редукції як задача мінімізації функціоналу складності на класі моделей, які можна співставити за точністю зі спостереженнями. Конструктивність процедури спрощення моделі за принципом «точностної» редукції забезпечується запропонованим визначенням коефіцієнта узгодженості α , як точностної характеристики редукційованої моделі. Застосування міри складності моделі при цьому дозволяє отримати практичний вираз для визначення оптимально спрощеної моделі. У випадку ускладнень, пов'язаних з оцінкою сигнальних показників точності моделей, доцільне використання параметричного підходу до побудови спрощених моделей, сутність якого полягає у заміні значень певних параметрів вихідної моделі на такі значення, які зменшують значення міри обчислювальної складності спрощених моделей. Введені поняття дозволяють отримати суттєвий теоретичний результат для методів редукції моделей, а саме: для будь-якої моделі з неточно заданими параметрами, за умови, що похибка змінних на виході є зростаючою та обмеженою функцією від похибки параметрів, існує спрощена α -узгоджена модель, яка відрізняється від початкової значеннями деяких параметрів, що зменшують міру обчислювальної складності. Отримані результати забезпечують можливість алгоритмічної ті програмної організації процесів математичної редукції.

РОЗДІЛ 4. РОЗРОБКА МЕТОДУ СТРУКТУРНОГО СПРОЩЕННЯ БАЗОВИХ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.1. Інтерполяційний метод (опорних перерізів) для моделювання об'єктів з розподіленими параметрами

Одним із найбільш відомих методів спрощення моделей об'єктів з розподіленими параметрами (ОРП, рівнянь із частинними похідними) є метод прямих [119], який ґрунтується на дискретизації області розв'язку за просторовою змінною з деяким кроком h і отриманні апроксимуючої системи N (кількість кроків) звичайних диференціальних рівнянь [159, 216]. Як правило, для отримання досить точного шуканого розв'язку за допомогою даної системи значення h має бути невеликим, а кількість N рівнянь системи має бути значною [33, 83].

Для дослідження багатьох типів об'єктів з розподіленими параметрами [105, 120, 121] використання інтерполяційного підходу [20, 21, 202], до якого відноситься метод прямих, дозволяє будувати ефективні моделі з більш простою структурою, тобто системи з невеликою кількістю скалярних диференціальних рівнянь, отриманих для малої кількості опорних перерізів. Відповідний метод побудови спрощених моделей — метод опорних перерізів розглядається в даному розділі. Враховуючи дуже велике розмаїття об'єктів з розподіленими параметрами за фізичним змістом і математичними описами [128], метод розглядається без обмеження загальності стосовно широко розповсюджених об'єктів з розподіленими параметрами теплотехнічного призначення (вимірювальні перетворювачі, джерела і перетворювачі тепла як об'єкти керування і т.п.), які відносяться до об'єктів як гіперболічного, так і параболічного типу [25, 137, 157].

Задачі із розв'язком, який має властивість симетрії за просторовими координатами складають окремий клас задач та зустрічаються при дослідженні пружних коливань, теплопровідності, теорії потенціалу, акустики [30, 39, 223]. Наприклад, нестационарне температурне поле ізотропної пластинки, яка знаходиться в потоці рідини із внутрішнім джерелом тепла сталої потужності. Запропонований метод розглянемо стосовно задачі моделювання нестационарних

теплових процесів у необмеженій пластині з симетричними граничними умовами першого роду у наступній постановці [44, 132, 158].

Температура $T(x,t)$ на краях необмеженої пластини примусово змінюється за законом $F_{cp1}(t) \equiv T(x,t)|_{x=\pm 1}$, який задається функцією часу (рис. 4.1). Всередині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна $f(t)$. У початковий момент задано розподіл температури по товщині $F_{itv}(x) \equiv T(x,t)|_{t=0}$. Необхідно знайти розподіл температури в пластині.

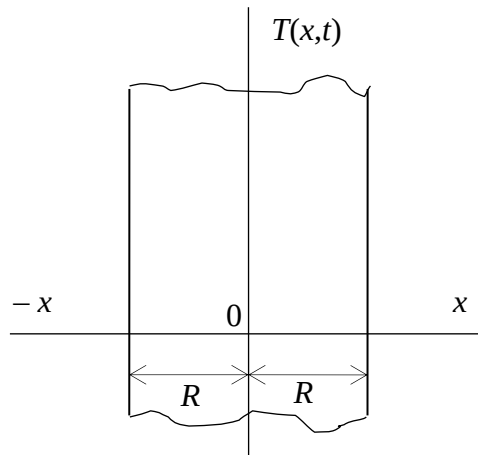


Рис. 4.1. Схематичне зображення об'єкта моделювання.

У цьому випадку нестационарний тепловий процес у даному об'єкті з розподіленими параметрами описується одномірним гіперболічним рівнянням теплопровідності [84, 141, 164, 167]:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) + f(t), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

де $c(x)$ — питома теплоємність; $\rho(x)$ — густина; $k(x)$ — коефіцієнт теплопровідності; $f(t)$ — внутрішнє джерело тепла; x — просторова координата, значення якої $x = -1$ і $x = 1$ відповідають координатам входу і виходу об'єкта; t — час. Оскільки час релаксації τ_r теплового потоку є малою величиною (для газів та металів має порядок відповідно 10^{-9} с і 10^{-11} с), то для багатьох практичних розрахунків (при відсутності високої інтенсивності зміни теплового потоку)

додатковим доданком $\tau_r \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}$, який враховує скінченну швидкість переносу

теплоти, можна знехтувати, що дозволяє отримати модель теплоперенесення у вигляді рівняння параболічного типу:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + q(x) f(t), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (4.1)$$

у якому $b(x) = \frac{k'(x)}{c(x)\rho(x)}$, $q(x) = \frac{1}{c(x)\rho(x)}$, а коефіцієнт температуропровідності

$$a(x) = \frac{k(x)}{c(x)\rho(x)}.$$

Припустимо, що розв'язок $T(x,t)$ рівняння (4.1) може бути апроксимований рядом

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) Q_n(x), \quad (4.2)$$

в якому функції $V_n(t)$ і $Q_n(x)$ підлягають визначенню, причому $Q_n(x)$ повинні мати похідні другого порядку. Тоді похідні $\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ можуть бути розвинені в ряд

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \frac{dQ_n(x)}{dx}; \quad \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \frac{d^2 Q_n(x)}{dx^2}. \quad (4.3)$$

Для апроксимації функції $T(x,t)$ обмежимо ряд (4.3) і побудуємо інтерполяційний поліном Лагранжа за п'ятьма опорними точками $\{x_i\} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ (інтервал $[-1,1]$ розбиваємо рівномірно на 4 частини):

$$T(x,t) \approx L_4(x,t) = \sum_{i=0}^4 T(x_i,t) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^4 \frac{x - x_k}{x_i - x_k}. \quad (4.4)$$

Спростивши (4.4) та беручи до уваги, що $T(-1,t) \equiv F_{sp1}^-(t)$ та $T(1,t) \equiv F_{sp1}^+(t)$, отримаємо

$$T(x,t) \approx \frac{1}{6} x (4x^3 - 4x^2 - x + 1) F_{sp1}^-(t) - \frac{4}{3} x (2x^3 - x^2 - 2x + 1) T\left(-\frac{1}{2}, t\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + (4x^4 - 5x^2 + 1)T(0, t) - \frac{4}{3}x(2x^3 + x^2 - 2x - 1)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \\
& + \frac{1}{6}x(4x^3 + 4x^2 - x - 1)F_{ep1}^+(t).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Продиференціювавши (4.5) відповідну кількість разів за координатою x , отримаємо вирази для частинних похідних першого та другого порядку

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} & \approx \left(\frac{8}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)F_{ep1}^-(t) - \left(\frac{32}{3}x^3 - 4x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{4}{3}\right)T\left(-\frac{1}{2}, t\right) + \\
& + 2x(8x^2 - 5)T(0, t) - \left(\frac{32}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{4}{3}\right)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \\
& + \left(\frac{8}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right)F_{ep1}^+(t),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} & \approx \left(8x^2 - 4x - \frac{1}{3}\right)F_{ep1}^-(t) - \left(32x^2 - 8x - \frac{16}{3}\right)T\left(-\frac{1}{2}, t\right) + \\
& + 2(24x^2 - 5)T(0, t) - \left(32x^2 + 8x - \frac{16}{3}\right)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \\
& + \left(8x^2 + 4x - \frac{1}{3}\right)F_{ep1}^+(t).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Підставивши в (4.1) вирази частинних похідних (4.6) і (4.7), отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} & = W_1(x, a(x), b(x))F_{ep1}^-(t) + W_2(x, a(x), b(x))T\left(-\frac{1}{2}, t\right) + \\
& + W_3(x, a(x), b(x))T(0, t) + W_4(x, a(x), b(x))T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \\
& + W_5(x, a(x), b(x))F_{ep1}^+(t) + q(x)f(t),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

де функції $W_1 - W_5$ визначаються шляхом зведення спільних доданків і мають вигляд многочленів третього степеня змінної x .

Вважаючи у (4.8) послідовно $x \in \{x_i\} = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$, $i = \overline{1,3}$, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку для визначення невідомих $T\left(-\frac{1}{2}, t\right)$, $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$:

$$\begin{aligned} \frac{dT(x_i, t)}{dt} = & W_2(x_i, a(x_i), b(x_i))T\left(-\frac{1}{2}, t\right) + W_3(x_i, a(x_i), b(x_i))T(0, t) + \\ & + W_4(x_i, a(x_i), b(x_i))T\left(\frac{1}{2}, t\right) + W_1(x_i, a(x_i), b(x_i))F_{ep1}^-(t) + \\ & W_5(x_i, a(x_i), b(x_i))F_{ep1}^+(t) + q(x_i)f(t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Система (4.9) диференціальних рівнянь розв'язується з початковими умовами $F_{ny}(x_i)$, які обчислюються із початкової умови задачі при відповідних значеннях $x \in \{x_i\} = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$, $i = \overline{1,3}$. Розв'язок системи (4.9) дозволяє обчислити, скориставшись формулою (4.5), наближені значення функції $T(x, t)$ у будь-якій точці.

Для задач, що мають симетричний розв'язок і симетричні граничні умови, виберемо функцію $Q_n(x) = x^{2n}$ і ряд (4.3) обмежений трьома членами із опорними точками $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$. Тоді розв'язок $T(x, t)$ можна наблизити інтерполяційним поліном Лагранжа $L_2(x, t)$:

$$T(x, t) \approx L_2(x, t) = \sum_{i=0}^2 T(x_i, t) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^2 \frac{x^2 - x_k^2}{x_i^2 - x_k^2} \quad (4.10)$$

за трьома заданими точками x_0, x_1, x_2 (вирази частинних похідних отримуються шляхом диференціювання (4.10) за змінною x). Після розкриття (4.10) маємо:

$$T(x, t) \approx (4x^4 - 5x^2 + 1)T(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1 - x^2)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2 - 1)F_{ep1}(t). \quad (4.11)$$

Продиференціювавши (4.11) за координатою x , отримуємо вираз для частинної похідної першого порядку

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \approx 2x(8x^2 - 5)T(0, t) - \frac{32}{3}x(2x^2 - 1)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{2}{3}x(8x^2 - 1)F_{ep1}(t), \quad (4.12)$$

звідки отримуємо

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \approx (48x^2 - 10)T(0, t) - \left(64x^2 - \frac{32}{3}\right)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right)F_{ep1}(t). \quad (4.13)$$

Підставивши в (4.1) вирази частинних похідних (4.13) і (4.12), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = & \left[16x^2(3a(x) + xb(x)) - 10(a(x) + xb(x))\right]T(0, t) + \\ & + \left[-64x^2\left(a(x) + \frac{1}{3}xb(x)\right) + \frac{32}{3}(a(x) + xb(x))\right]T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \\ & + \left[16x^2\left(a(x) + \frac{1}{3}xb(x)\right) - \frac{2}{3}(a(x) + xb(x))\right]F_{ep1}(t) + \\ & + q(x)f(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Вважаючи послідовно $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$, отримуємо систему двох звичайних

диференціальних рівнянь першого порядку для визначення $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dT(0, t)}{dt} &= -10a(0)T(0, t) + \frac{32}{3}a(0)T\left(\frac{1}{2}, t\right) - \frac{2}{3}a(0)F_{ep1}(t) + \\ &+ q(0)f(t); \\ \frac{dT\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} &= \left[2a\left(\frac{1}{2}\right) - 3b\left(\frac{1}{2}\right)\right]T(0, t) - \frac{8}{3}\left[2a\left(\frac{1}{2}\right) - b\left(\frac{1}{2}\right)\right]T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \\ &+ \frac{1}{3}\left[10a\left(\frac{1}{2}\right) + b\left(\frac{1}{2}\right)\right]F_{ep1}(t) + q\left(\frac{1}{2}\right)f(t). \end{aligned} \right. \quad (4.15)$$

До системи диференціальних рівнянь задаються відповідні початкові умови

$$F_{ny}(0) \text{ та } F_{ny}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Розв'язавши систему (4.15) та скориставшись формулою (4.11), отримаємо можливість обчислення наближеного значення функції $T(x, t)$ у будь-якій точці.

Процес розв'язування розглянемо на модельному прикладі конкретної задачі, для якої:

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 - a_2x^2)}{2a_2}, a_0 - a_2x^2 > 0, 0 < a_2 \leq a_0, b_2 > 0, b(x) \equiv 0, q(x) \equiv 1, \\ f(t) = b_1e^{-b_1t}, F_{\text{гп1}}(t) = 1 - e^{-b_1t} + (a_0 - a_2)e^{-b_2t}, F_{\text{гп2}}(x) = a_0 - a_2x^2. \quad (4.16)$$

Задача (4.1), (4.16) має точний аналітичний розв'язок

$$T(x, t) = 1 - e^{-b_1t} + (a_0 - a_2x^2)e^{-b_2t}. \quad (4.17)$$

Із врахуванням (4.16) система (4.15) має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dT(0, t)}{dt} = a(0) \left[-10T(0, t) + \frac{32}{3}T\left(\frac{1}{2}, t\right) - \frac{2}{3}F_{\text{гп1}}(t) \right] + f(t); \\ \frac{dT\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = a\left(\frac{1}{2}\right) \left[2T(0, t) - \frac{16}{3}T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{10}{3}F_{\text{гп1}}(t) \right] + f(t). \end{cases} \quad (4.18)$$

До диференціальних рівнянь задаються відповідні початкові умови, отримані із (4.16):

$$F_{\text{гп2}}(0) = a_0, F_{\text{гп2}}\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 - \frac{a_2}{4}. \quad (4.19)$$

Можна бачити, що в методі, який розглядається, просторовий інтервал, на якому шукається розв'язок вихідних рівнянь з частинними похідними, може бути розбитий рівномірно або нерівномірно на будь-яку кількість ділянок (інтерполяційних кроків), що також визначає порядок полінома, який апроксимує розв'язок. Для вибору способу розбиття можна скористатись апріорними даними, отриманими в результаті фізичного або обчислювального експерименту. За необхідності процес вибору опорних перерізів може бути оптимізований відповідно виразу (4.12).

Обчислювальний експеримент. Апробація методу проведена шляхом обчислювального експерименту [235] для задачі (4.1), (4.16) за кроку

дискретизації $\tau = 10^{-4}$ с за часовою змінною при наступних значеннях коефіцієнтів: $a_0 = 300$; $a_2 = 0,5$; $b_1 = 0,1$; $b_2 = 0,5$. Тоді $a(0) = 150$, $a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2399}{16}$,

$$f(0,t) = f\left(\frac{1}{2},t\right) = 0,1e^{-0,1t}, \quad F_{\text{гп1}}(t) = 1 - e^{-0,1t} + 299,5e^{-0,5t}, \quad t \in [0,5], \quad x \in [-1,1].$$
 Для

просторової координати вибрано крок дискретизації 0,05.

Система (4.18) чисельно розв'язувалась у середовищі Matlab за допомогою стандартної функції *ode15s*. Отримані результати використовувались для обчислення розв'язків для будь-яких значень просторової координати і для будь-якого моменту часу за допомогою формули (4.11), яка із врахуванням вибраних коефіцієнтів набуває вигляду

$$\begin{aligned} T(x,t) \approx & \left(4x^4 - 5x^2 + 1\right)T(0,t) + \frac{16}{3}x^2(1-x^2)T\left(\frac{1}{2},t\right) + \\ & + \frac{1}{3}x^2(4x^2 - 1)(1 - e^{-0,1t} + 299,5e^{-0,5t}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Результати розв'язування модельної задачі представлені на рис. 4.2. В експерименті досліджувалась відносна похибка розв'язку. Наближений розв'язок задачі (4.1), (4.16) порівнювався із точним (4.17). Значення відносної похибки не перевищувало $\delta \leq 0,01$. Вигляд функції відносної похибки $\delta(x,t)$ представлений на рис. 4.3.

Отримана вище формула (4.11) справедлива для симетричних граничних умов першого роду. Якщо ж задано симетричні граничні умови другого роду

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} \equiv \pm F_{\text{гп2}}(t), \quad (4.21)$$

то апроксимаційний вираз функції $T(x,t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} T(x,t) \approx & \frac{1}{7}T(0,t)(16x^4 - 32x^2) + \frac{1}{7}T\left(\frac{1}{2},t\right)(-16x^4 + 32x^2) + \\ & + T(0,t) + \frac{2}{7}x^2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)F_{\text{гп2}}(t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Продиференціювавши (4.22) за змінною x , отримаємо вираз частинної похідної першого порядку:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \approx \frac{64}{7} x(x^2 - 1) \left(T(0,t) - T\left(\frac{1}{2}, t\right) \right) + \frac{1}{7} x(8x^2 - 1) F_{2p2}(t). \quad (4.23)$$

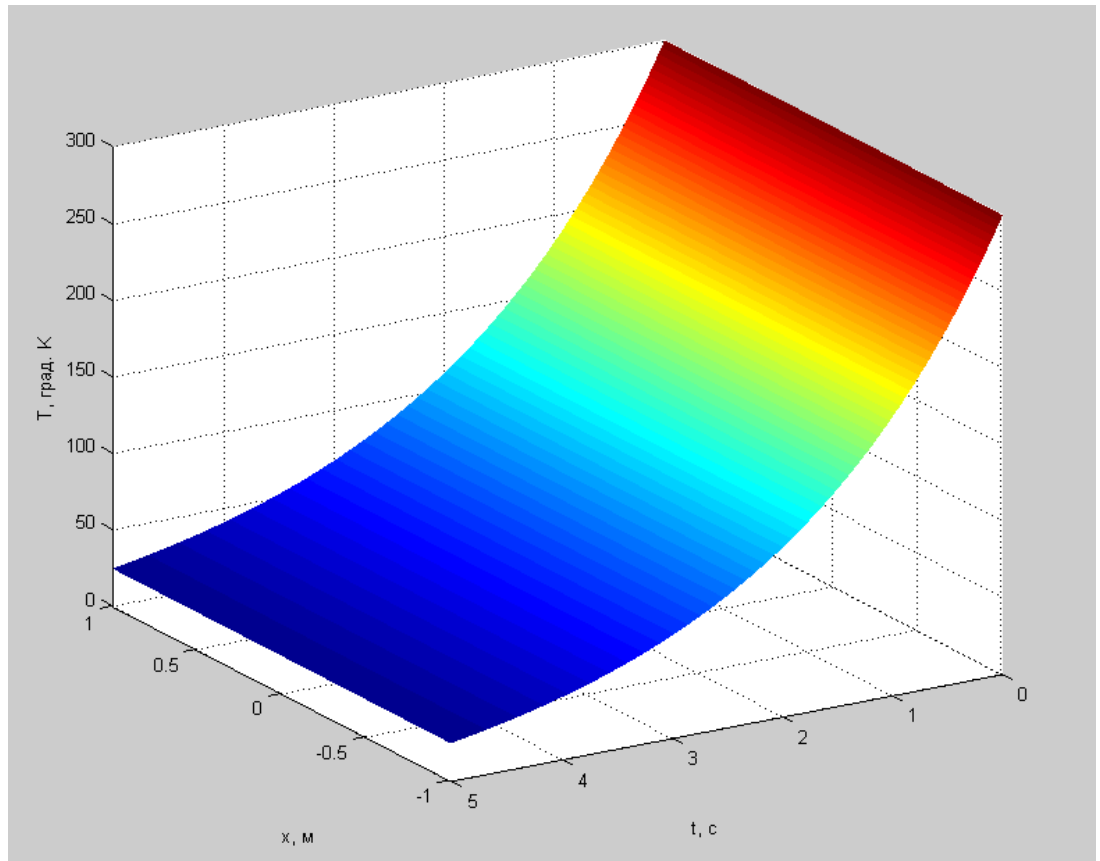


Рис. 4.2. Розподіл температури по товщині пластини із плином часу.

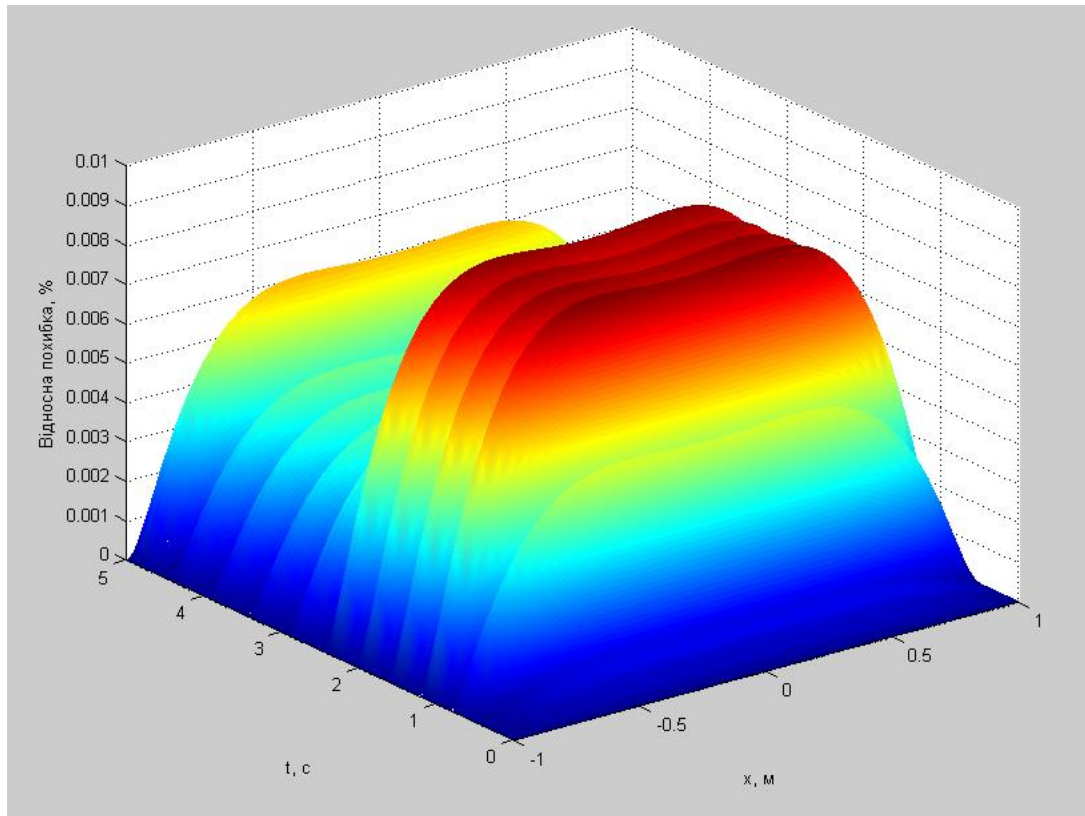


Рис. 4.3. Залежність відносної похибки від просторової та часової координат.

Апроксимація частинної похідної другого порядку за змінною x функції $T(x, t)$ має вигляд:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{64}{7}(3x^2 - 1) \left[T(0, t) - T\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \frac{1}{7}(24x^2 - 1) F_{sp2}(t). \quad (4.24)$$

Безпосередньою перевіркою шляхом підстановки переконуємось, що в точках $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$ вираз (4.22) перетворюється в тотожність.

Підставивши в (4.1) вирази частинних похідних (4.24) і (4.23), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = & \frac{64}{7} \left[x^2 (3a(x) + xb(x)) - a(x) - xb(x) \right] \left[T(0, t) - T\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \\ & + \frac{1}{7} \left[8x^2 (3a(x) + xb(x)) - a(x) - xb(x) \right] F_{sp2}(t) + q(x) f(t). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Система диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$ має вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dT(0,t)}{dt} &= \frac{1}{7}a(0) \left[64 \left(T\left(\frac{1}{2},t\right) - T(0,t) \right) - F_{ep2}(t) \right] + q(0)f(t); \\ \frac{dT\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt} &= \frac{8}{7} \left[2a\left(\frac{1}{2}\right) + 3b\left(\frac{1}{2}\right) \right] \cdot \left[T\left(\frac{1}{2},t\right) - T(0,t) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{7} \left[5a\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}b\left(\frac{1}{2}\right) \right] F_{ep2}(t) + q\left(\frac{1}{2}\right)f(t). \end{aligned} \right. \quad (4.26)$$

У випадку задання граничних умов третього роду

$$\left[\pm \alpha T(x,t) + \beta \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right]_{x=\pm 1} \equiv F_{ep3}(t), \quad (4.27)$$

апроксимаційний вираз для наближеного обчислення значень функції набуде вигляду:

$$\begin{aligned} T(x,t) \approx & \left[\frac{4(3\alpha + 8\beta)x^4 - (15\alpha + 64\beta)x^2}{3\alpha + 14\beta} \right] T(0,t) + \\ & + \left[\frac{16(\alpha + 4\beta)x^2 - 16(\alpha + 2\beta)x^4}{3\alpha + 14\beta} \right] T\left(\frac{1}{2},t\right) + \\ & + \frac{x^2(4x^2 - 1)}{3\alpha + 14\beta} F_{ep3}(t) + T(0,t). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Продиференціювавши (4.28) за змінною x , отримаємо вираз для апроксимації частинної похідної першого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \approx & \left[\frac{16(3\alpha + 8\beta)x^3 - 2(15\alpha + 64\beta)x}{3\alpha + 14\beta} \right] T(0,t) + \\ & + \left[\frac{32(\alpha + 4\beta)x - 64(\alpha + 2\beta)x^3}{3\alpha + 14\beta} \right] T\left(\frac{1}{2},t\right) + \frac{2x(8x^2 - 1)}{3\alpha + 14\beta} F_{ep3}(t). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Апроксимаційний вираз для частинної похідної другого порядку за змінною x набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \approx & \left[\frac{48(3\alpha + 8\beta)x^2 - 30\alpha - 128\beta}{3\alpha + 14\beta} \right] T(0, t) + \\ & + 32 \left[\frac{\alpha + 4\beta - 6(\alpha + 2\beta)x^2}{3\alpha + 14\beta} \right] T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{48x^2 - 2}{3\alpha + 14\beta} F_{\text{гp3}}(t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Після підстановки відповідних значень переконаємось, що в точках $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$ вираз (4.28) перетворюється в тотожність, приймаючи значення $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$ відповідно.

Для визначення невідомих функцій $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$ потрібно: підставити в (4.1) вирази (4.30) та (4.29), отримати

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = W_1(x)T(0, t) + W_2(x)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + W_3(x)F_{\text{гp3}}(t) + q(x)f(t), \quad (4.31)$$

де

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \frac{16x^2(3\alpha + 8\beta)(3a(x) + xb(x)) - 2(15\alpha + 64\beta)(a(x) + xb(x))}{3\alpha + 14\beta}, \\ W_2(x) &= \frac{32(\alpha + 4\beta)(a(x) + xb(x)) - 64x^2(\alpha + 2\beta)(3a(x) + xb(x))}{3\alpha + 14\beta}, \\ W_3(x) &= \frac{(16x^2 - 2)(3a(x) + xb(x)) + 4a(x)}{3\alpha + 14\beta}; \end{aligned}$$

отримати систему двох звичайних диференціальних рівнянь для визначення шуканого розв'язку на лініях $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} \frac{dT(0, t)}{dt} = W_1(0)T(0, t) + W_2(0)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + W_3(0)F_{\text{гp3}}(t) + q(0)f(t), \\ \frac{dT\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = W_1\left(\frac{1}{2}\right)T(0, t) + W_2\left(\frac{1}{2}\right)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + W_3\left(\frac{1}{2}\right)F_{\text{гp3}}(t) + q\left(\frac{1}{2}\right)f(t); \end{cases}$$

розв'язати систему.

Апроксимаційні формули для частинних похідних, отриманих з використанням граничних умов третього роду, є найбільш універсальними. Поклавши в них $\beta = 0$ або $\alpha = 0$, отримаємо випадки, що відповідають граничним умовам першого або другого роду відповідно і які співпадають із (4.11) та (4.22).

Аналіз запропонованого методу показав, що відносна похибка методу не перевищує 0,01%. Отримана точність узгоджується з точністю реальних вимірювань, а універсальність формул, які можна застосовувати для випадків симетричних граничних умов I, II, III роду і простота алгоритмів, за якими проводяться обчислення, дає змогу застосовувати метод у системах із обмеженими обчислювальними ресурсами (наприклад, для систем із вбудованими мікроконтролерами) або для розв'язування оптимізаційних задач, де є необхідність багаторазового знаходження розв'язків.

4.2 Нестационарні об'єкти з несиметричними граничними умовами

Розглянемо задачу побудови скалярної моделі процесів теплопровідності при несиметричних граничних умовах першого і другого роду у наступній постановці. Розглянемо необмежену пластину з несиметричними граничними умовами першого роду. Температура $T(x, t)$ на границях необмеженої пластини примусово змінюється за різними законами $F_{\pm 1}^{\pm}(t) \equiv T(x, t)|_{x=\pm 1}$, які задані своїми функціями часу (рис. 4.). В середині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна $f(t)$. В початковий момент часу маємо заданий по товщині розподіл температури $F_{IV}(x) \equiv T(x, t)|_{t=0}$. Необхідно знайти розподіл температури в пластині.

В цьому випадку, враховуючи обмеження, прийняті п. 4.1, параметрично спрощена модель теплоперенесення описується рівнянням в частинних похідних параболічного типу (4.1).

Для зведення задачі до випадку симетричних граничних умов представимо шукану функцію у вигляді суми

$$T(x, t) = V(x, t) + U(x, t), \quad (2.32)$$

де $V(x, t)$ задовольняє однорідним граничним умовам, а

$$U(x, t) = \frac{x+1}{2} F_{ep1}^+(t) - \frac{x-1}{2} F_{ep1}^-(t) \quad (2.33)$$

задовольняє умовам $F_{ep1}^\pm(t)$.

Введення змінної $U(x, t)$ дозволяє усунути несиметричність граничних умов і перейти до симетричного розв'язування задачі методом опорних перерізів відносно $V(x, t)$.

Продиференціювавши (2.32) один раз за змінною t і двічі за змінною x та підставивши отримані вирази в (4.1), із врахуванням

(2.33) отримаємо рівняння

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + z(x, t), \quad (4.34)$$

в якому

$$z(x, t) = \frac{1}{2} b(x) [F_{ep1}^+(t) - F_{ep1}^-(t)] + \frac{x-1}{2} [F_{ep1}^-(t)]' - \frac{x+1}{2} [F_{ep1}^+(t)]' + q(x) f(t),$$

відносно допоміжної змінної $V(x, t)$ з однорідними граничними умовами

$$F_{ep1}(t) \equiv V(x, t)|_{x=\pm 1} = 0. \quad (4.35)$$

Замінивши в (4.34), згідно методу перерізів для випадку симетричних граничних умов, першу похідну виразом

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx 2x(8x^2 - 5)u(0, t) + \frac{32}{3}x(1 - 2x^2)u\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{2}{3}x(8x^2 - 1)F_{rp1}(t), \quad (4.36)$$

другу похідну виразом

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx (48x^2 - 10)u(0, t) + \left(\frac{32}{3} - 64x^2\right)u\left(\frac{1}{2}, t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right)F_{rp1}(t), \quad (4.37)$$

із врахуванням (4.35), маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = & \left[a(x)(48x^2 - 10) + b(x)(16x^3 - 10x) \right] V(0,t) + \\ & + \left[a(x) \left(\frac{32}{3} - 64x^2 \right) + b(x) \left(\frac{32}{3}x - \frac{64}{3}x^3 \right) \right] V\left(\frac{1}{2}, t\right) + z(x,t). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Вважаючи $x=0$ та $x=\frac{1}{2}$, отримуємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь, які визначають величини $V(0,t)$ и $V\left(\frac{1}{2}, t\right)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV(0,t)}{dt} &= -10a(0)V(0,t) + \frac{32}{3}a(0)V\left(\frac{1}{2}, t\right) + z(0,t), \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} &= \left(2a\left(\frac{1}{2}\right) - 3b\left(\frac{1}{2}\right) \right) V(0,t) + \\ &+ \frac{1}{3} \left(8b\left(\frac{1}{2}\right) - 16a\left(\frac{1}{2}\right) \right) V\left(\frac{1}{2}, t\right) + z\left(\frac{1}{2}, t\right), \end{aligned} \right. \quad (4.39)$$

в якій

$$\begin{aligned} z(0,t) &= \frac{1}{2}b(0)[F_{zp1}^+(t) - F_{zp1}^-(t)] - \frac{1}{2} \left[(F_{zp1}^-(t))' + (F_{zp1}^+(t))' \right] + q(0)f(t), \\ z\left(\frac{1}{2}, t\right) &= \frac{1}{2}b\left(\frac{1}{2}\right)[F_{zp1}^+(t) - F_{zp1}^-(t)] - \frac{1}{4}(F_{zp1}^-(t))' - \frac{3}{4}(F_{zp1}^+(t))' + q\left(\frac{1}{2}\right)f(t). \end{aligned}$$

Початкові умови для системи (4.39) мають вигляд

$$\begin{aligned} V(0,t)\Big|_{t=0} &= F_{ny}(0) - \frac{1}{2}(F_{zp1}^+(0) + F_{zp1}^-(0)), \\ V\left(\frac{1}{2}, t\right)\Big|_{t=0} &= F_{ny}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}F_{zp1}^+(0) - \frac{1}{4}F_{zp1}^-(0). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Для наближеного обчислення $V(x,t)$ скористаємось відповідною формулою методу опорних перерізів:

$$V(x,t) \approx (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0,t) + \frac{16}{3}x^2(1-x^2)V\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2 - 1)F_{zp1}(t).$$

Наближений розв'язок задачі в довільній точці отримуємо підстановкою в

(2.32) отриманого виразу для $V(x, t)$ із врахуванням (4.35) та для

$U(x, t)$ у відповідності з (2.33):

$$\begin{aligned} T(x, t) = U(x, t) + V(x, t) \approx & \frac{x+1}{2} F_{ep1}^+(t) - \frac{x-1}{2} F_{ep1}^-(t) + \\ & + (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3} x^2 (1 - x^2) V\left(\frac{1}{2}, t\right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Процес реалізації отриманої моделі розглянемо на модельному прикладі задачі, для якої:

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 + a_1 x - a_2 x^2)}{2a_2}, \quad a_0 + a_1 x - a_2 x^2 > 0, \quad b_2 > 0, \quad a_2 > 0, \quad (4.42)$$

$$b(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \quad f(t) = b_1 e^{-b_1 t}, \quad (4.43)$$

$$F_{ep1}^\pm(t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 \pm a_1 - a_2) e^{-b_2 t}, \quad (4.44)$$

$$F_{HV}(x) = a_0 + a_1 x - a_2 x^2. \quad (4.45)$$

Задача (4.1), (4.42) – (4.45) має точний аналітичний розв'язок

$$T(x, t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 + a_1 x - a_2 x^2) e^{-b_2 t}. \quad (4.46)$$

З урахуванням (4.45) – (4.44) система (4.39) приймає вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dV(0, t)}{dt} = a(0) \left[-10V(0, t) + \frac{32}{3} V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + b_2(a_0 - a_2) e^{-b_2 t}; \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = a\left(\frac{1}{2}\right) \left[2V(0, t) - \frac{16}{3} V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + b_2 \left(a_0 + \frac{a_1}{2} - a_2 \right) e^{-b_2 t}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Початкові умови (4.40) для системи (4.47) будуть

$$V(0, t)|_{t=0} = a_2, \quad V\left(\frac{1}{2}, t\right)|_{t=0} = \frac{3}{4} a_2. \quad (4.48)$$

Наближений розв'язок (4.41) задачі в довільній точці приймає вигляд:

$$\begin{aligned} T(x, t) \approx & 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 + a_1 x - a_2) e^{-b_2 t} + \\ & + (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3} x^2 (1 - x^2) V\left(\frac{1}{2}, t\right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Обчислювальні експерименти. Апробація методу проведена шляхом обчислювальних експериментів для ряду значень кроку дискретизації $\tau_0 = 10^{-4}$ с, $\tau_i = i \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ с, $i = \overline{1..1000}$ по часовій змінній t при наступних значеннях коефіцієнтів: $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0.5$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.5$. При цьому $a(0) = 1$, $a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{16}$, $t \in [0, 10]$, $x \in [-1, 1]$. Для просторової координати обрано крок дискретизації 0,01.

Система (4.47) чисельно розв'язувалась за допомогою стандартної функції в середовищі Matlab. Отримані результати використовувались для обчислення результатів для довільних значень просторової координати та для довільного моменту часу згідно виразу (4.49).

Результат розв'язування модельної задачі для кроку $\tau = 0,2945$ с представлений на рис. 4.4.

В експериментах досліджувалась залежність відносної похибки розв'язку від кроку дискретизації. Наближений розв'язок задачі (4.1), (4.42)–(4.45) порівнювався з точним розв'язком (4.46). Залежність максимального значення відносної похибки розв'язку $\delta(\tau) = \max_x \left(\max_t [T(x, t)] \right)$ від кроку дискретизації τ наведена на рис. 4.5. Для кроку дискретизації $\tau = 0,2945$ с отримано найменше значення відносної похибки $\delta = 0,0086$. Вигляд функції відносної похибки $\delta(t, x)$ для даного кроку наведено на рис. 4.6.

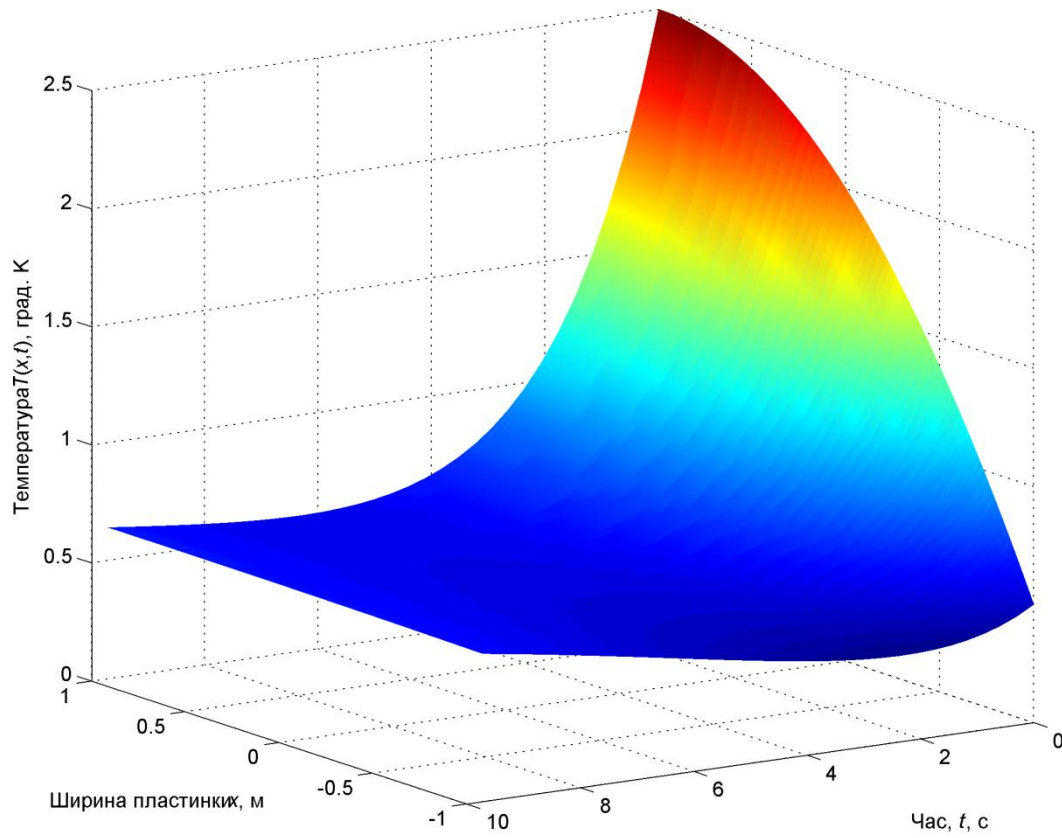


Рис. 4.4 Залежність температури від просторової координати і часу.

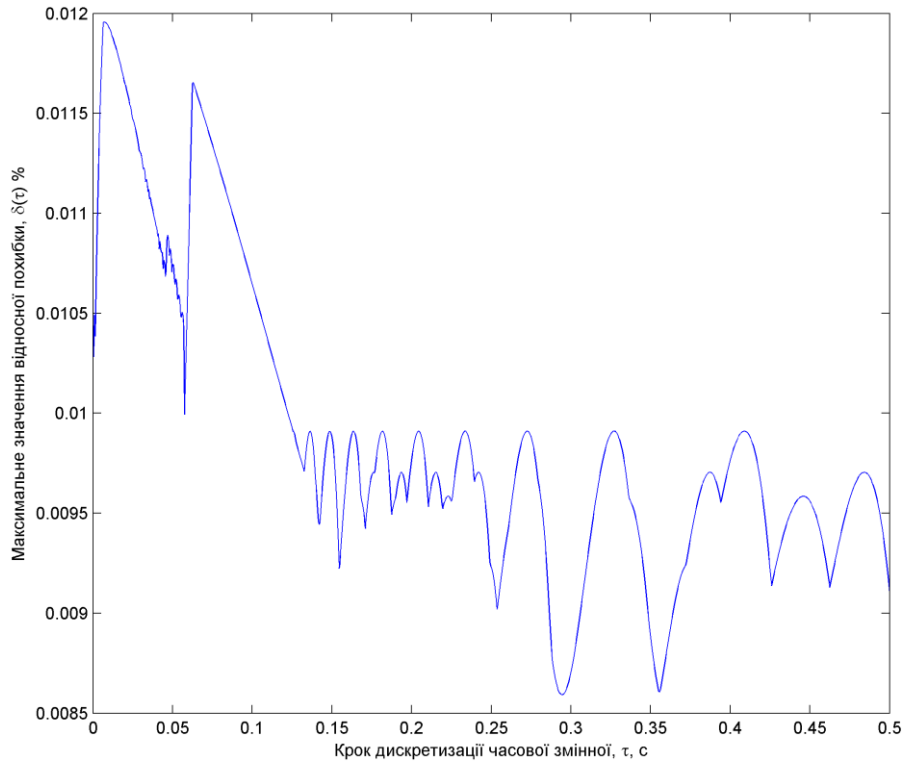


Рис. Залежність максимального значення відносної похибки розв'язку від кроку дискретизації.

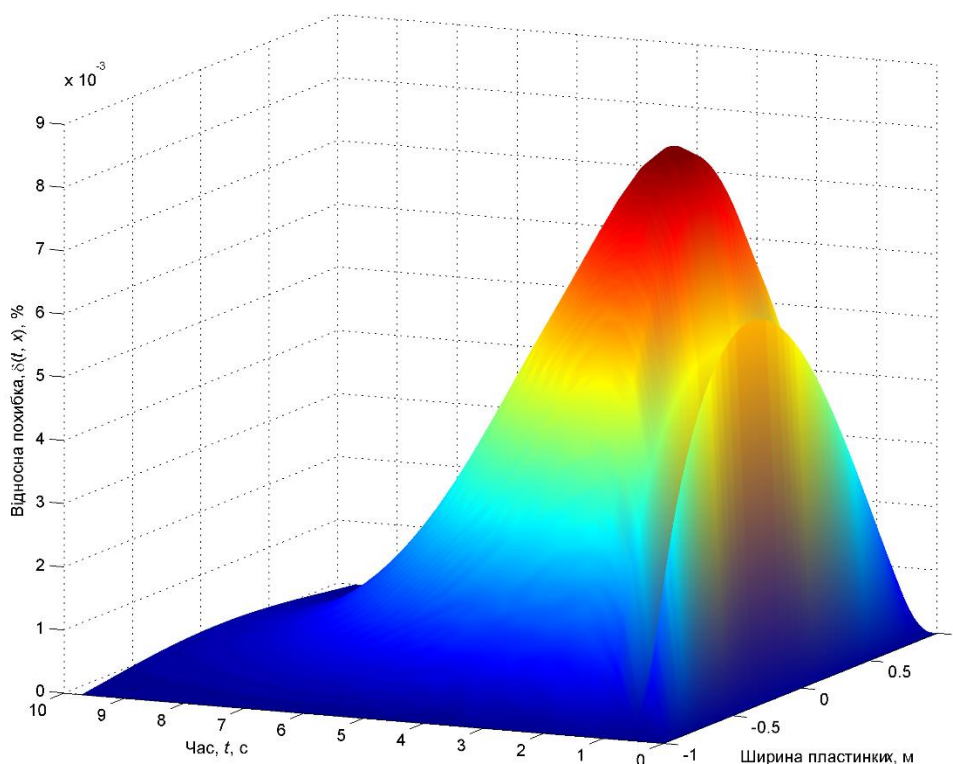


Рис. 4.6. Залежність відносної похибки розв'язку від просторової та часової координат.

Необмежена пластинка з несиметричними граничними умовами другого роду. Розглянемо наступний варіант задачі моделювання об'єктів з розподіленими параметрами. Необмежена пластинка (рис. 4.) з коефіцієнтом температуропровідності $a(x)$ нагрівається з обох сторін різними джерелами зі змінними у часі тепловими потоками, які задані своїми функціями часу

$$F_{\text{гр}2}^{\pm}(t) \equiv \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1}.$$

Всередині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна $f(t)$. В початковий момент часу задано розподіл температури по товщині $F_{\text{IV}}(x) \equiv T(x, t)|_{t=0}$. Необхідно знайти розподіл температури $T(x, t)$ в пластині. Таким чином, досліджується нестационарний тепловий процес, який, враховуючи зауваження, зроблені у п. 4.1, описується одномірним рівнянням теплопровідності (4.1) з несиметричними граничними умовами другого роду.

Перейдемо до задачі з однорідними граничними умовами аналогічно випадку, розглянутому в п. 4.1. Подамо розв'язок $T(x,t)$ у вигляді суми

$$T(x,t) = U(x,t) + V(x,t), \quad (4.50)$$

де $V(x,t)$ задовольняє однорідним граничним умовам, а

$$U(x,t) = m_1(t)x^2 + m_2(t)x. \quad (4.51)$$

Величини $m_1(t)$ та $m_2(t)$ вибираємо такими, щоб задовольнялися граничні умови $F_{\text{гп}2}^{\pm}(t)$. Продиференціювавши (4.51) за координатою x , отримаємо

$$m_1(t) = \frac{1}{4}(F_{\text{сп}2}^{+}(t) - F_{\text{сп}2}^{-}(t)), \quad m_2(t) = \frac{1}{2}(F_{\text{сп}2}^{+}(t) + F_{\text{сп}2}^{-}(t)). \quad (4.52)$$

Звідси

$$U(x,t) = \frac{x}{4}[(x+2)F_{\text{сп}2}^{+}(t) + (2-x)F_{\text{сп}2}^{-}(t)], \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{x}{4}[(x+2)[F_{\text{сп}2}^{+}(t)]' + (2-x)[F_{\text{сп}2}^{-}(t)]'], \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \frac{x+1}{2}F_{\text{сп}2}^{+}(t) + \frac{1-x}{2}F_{\text{сп}2}^{-}(t), \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(F_{\text{сп}2}^{+}(t) - F_{\text{сп}2}^{-}(t)). \quad (4.56)$$

Підставивши (4.50) в (4.1) із врахуванням (4.54) – (4.56), маємо:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + z(x,t), \quad (4.57)$$

де

$$z(x,t) = \frac{1}{2}[a(x) + (x+1)b(x)]F_{\text{сп}2}^{+}(t) + \frac{1}{2}[(1-x)b(x) - a(x)]F_{\text{сп}2}^{-}(t) - \frac{x}{4}[(x+2)[F_{\text{сп}2}^{+}(t)]' + (2-x)[F_{\text{сп}2}^{-}(t)]'] + q(x)f(t).$$

Оскільки функція $U(x,t)$ вибрана таким чином, щоб задовольняти граничним умовам, то рівняння (4.57) має розв'язуватись з однорідними граничними умовами

$$F_{\text{сп}2}(t) \equiv \left. \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} = 0. \quad (4.58)$$

Замінивши в (4.57), відповідно до методу опорних перерізів для симетричних граничних умов другого роду, частинні похідні першого і другого порядку на апроксимуючі їх вирази

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &\approx \frac{64}{7}x(x^2-1)\left[u(0,t)-u\left(\frac{1}{2},t\right)\right]+\frac{1}{7}x(8x^2-1)F_{\text{rp2}}(t), \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &\approx \frac{64}{7}(3x^2-1)\left[u(0,t)-u\left(\frac{1}{2},t\right)\right]+\frac{1}{7}(24x^2-1)F_{\text{rp2}}(t),\end{aligned}$$

і, вважаючи $x=0$ і $x=\frac{1}{2}$, отримаємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь, що визначають величини $V(0,t)$ и $V\left(\frac{1}{2},t\right)$:

$$\begin{cases} \frac{dV(0,t)}{dt} = \frac{64}{7}\left(V(0,t)-V\left(\frac{1}{2},t\right)\right)a(0)+z(0,t) \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt} = \frac{64}{7}\left(V(0,t)-V\left(\frac{1}{2},t\right)\right)\left(-\frac{1}{4}a\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}b\left(\frac{1}{2}\right)\right)+z\left(\frac{1}{2},t\right), \end{cases} \quad (4.59)$$

де

$$\begin{aligned}z(0,t) &= \frac{1}{2}(a(0)+b(0))F_{\text{cp2}}^+(t)+\frac{1}{2}(b(0)-a(0))F_{\text{cp2}}^-(t)+q(0)f(t), \\ z\left(\frac{1}{2},t\right) &= \frac{1}{2}\left(a\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}b\left(\frac{1}{2}\right)\right)F_{\text{cp2}}^+(t)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b\left(\frac{1}{2}\right)-a\left(\frac{1}{2}\right)\right)F_{\text{cp2}}^-(t)- \\ &\quad -\frac{1}{16}\left(5[F_{\text{cp2}}^+(t)]'+3[F_{\text{cp2}}^-(t)]'\right)+q\left(\frac{1}{2}\right)f(t).\end{aligned}$$

Для системи (4.59) задані початкові умови:

$$\begin{aligned}V(0,t)\Big|_{t=0} &= F_{\text{IV}}(0), \\ V\left(\frac{1}{2},t\right)\Big|_{t=0} &= F_{\text{IV}}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{16}(5F_{\text{cp2}}^+(0)+3F_{\text{cp2}}^-(0)).\end{aligned} \quad (4.60)$$

Скориставшись формулою для обчислення $V(x,t)$ відповідно до методу опорних перерізів для випадку симетричних граничних умов другого роду

$$u(x, t) \approx \frac{16}{7} x^2 (x^2 - 2) \left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \frac{1}{7} x^2 \left(2x^2 - \frac{1}{2} \right) F_{zp2}(t) + u(0, t)$$

з урахуванням (4.58) і (4.53), отримаємо можливість обчислення довільних значень шуканого розв'язку:

$$\begin{aligned} T(x, t) = U(x, t) + V(x, t) \approx \frac{x}{4} \left[(x+2) F_{zp2}^+(t) + (2-x) F_{zp2}^-(t) \right] + \\ + \frac{16}{7} x^2 (x^2 - 2) \left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + V(0, t). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Розглянемо спрощену конкретну задачу, в якій коефіцієнт температуропровідності, внутрішнє джерело тепла і початковий розподіл температури рівні відповідно

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 + a_1x - a_2x^2)}{2a_2}, \quad a_0 + a_1x - a_2x^2 > 0, \quad b_2 > 0, \quad a_2 > 0, \quad (4.62)$$

$$b(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \quad f(t) = b_1 e^{-b_1 t}, \quad (4.63)$$

$$F_{IV}(x) = a_0 + a_1x - a_2x^2. \quad (4.64)$$

а несиметричні граничні умови мають вигляд

$$F_{rp2}^{\pm}(t) = (a_1 \pm 2a_2) e^{-b_2 t}. \quad (4.65)$$

Задача(4.1), (4.62) – (4.65) має точний аналітичний розв'язок

$$T(x, t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 + a_1x - a_2x^2) e^{-b_2 t}. \quad (4.66)$$

Система (4.59) набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV(0, t)}{dt} &= -\frac{64}{7} a^2(0) \left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] - 2a_2 a^2(0) e^{-b_2 t} + b_1 e^{-b_1 t}; \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} &= -\frac{16}{7} a^2\left(\frac{1}{2}\right) \left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \\ &+ \left[b_2 \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} \right) - 2a_2 a^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] e^{-b_2 t} + b_1 e^{-b_1 t}. \end{aligned} \right. \quad (4.67)$$

Для системи (4.67) задано початкові умови:

$$V(0,t)\Big|_{t=0} = V\left(\frac{1}{2},t\right)\Big|_{t=0} = a_0. \quad (4.68)$$

Скориставшись формулою (4.61), отримаємо можливість обчислення довільних значень шуканого розв'язку:

$$T(x,t) \approx (a_1 x - a_2 x^2) e^{-b_2 t} + \frac{16}{7} x^2 (x^2 - 2) \left[V(0,t) - V\left(\frac{1}{2},t\right) \right] + V(0,t). \quad (4.69)$$

Обчислювальні експерименти. Для різних значень кроку дискретизації $\tau_0 = 10^{-4}$ с, $\tau_i = i \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ с, $i = \overline{1..1000}$ часової змінної t задаємо наступні значення коефіцієнтів: $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0,5$, $b_1 = 0,1$, $b_2 = 0,5$. Тоді $a^2(0) = 1$, $a^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{16}$, $t \in [0,10]$, $x \in [-1,1]$.

За просторовою координатою крок дискретизації дорівнює 0,01. Система (4.67) з початковими умовами (4.69) чисельно розв'язувалась за допомогою стандартного розв'язувача в середовищі Matlab. Отримані результати використовуються для обчислення значень розв'язку згідно (4.69) при довільних значеннях аргументів. Результат розв'язання задачі для кроку $\tau = 0,01$ с представлений на рис. 4.7. Залежність максимального значення відносної похибки розв'язку $\delta(\tau) = \max_x \left(\max_t [T(x,t)] \right)$ від кроку дискретизації τ наведена на рис. 4.8.

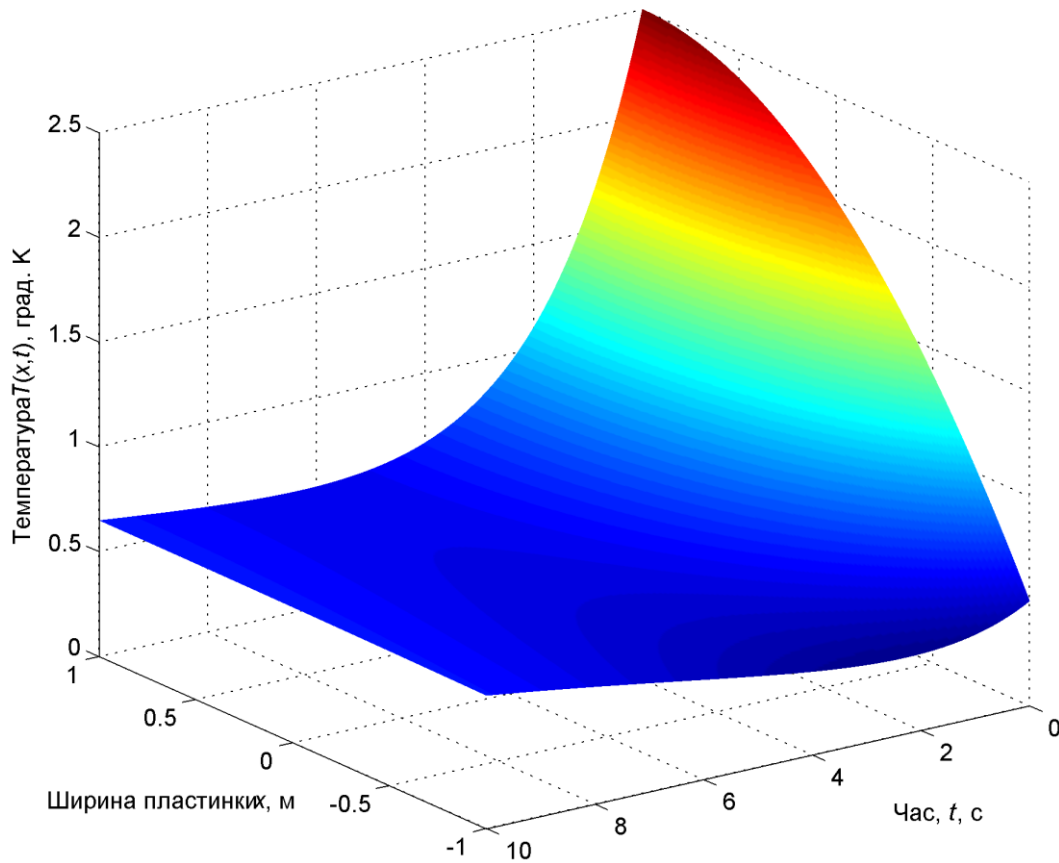


Рис. 4.7. Розподіл температури по товщині пластини із плином часу.

Результати числових експериментів засвідчили, що при кроці дискретизації $\tau = 0,01$ с отримано найменше значення відносної похибки $\delta = 0,0000117$.

Залежність $\delta(t, x)$ для даного кроку наведено на рис. 4.9.

Запропонований метод моделювання нестационарних теплових процесів при наявності несиметричних граничних умов I-II роду володіє достатньою для інженерних розрахунків точністю (відносна похибка в проведеному експерименті не перевищує 0,0086%). Метод дозволяє значно спростити обчислення в порівнянні з традиційними методами розрахунків.

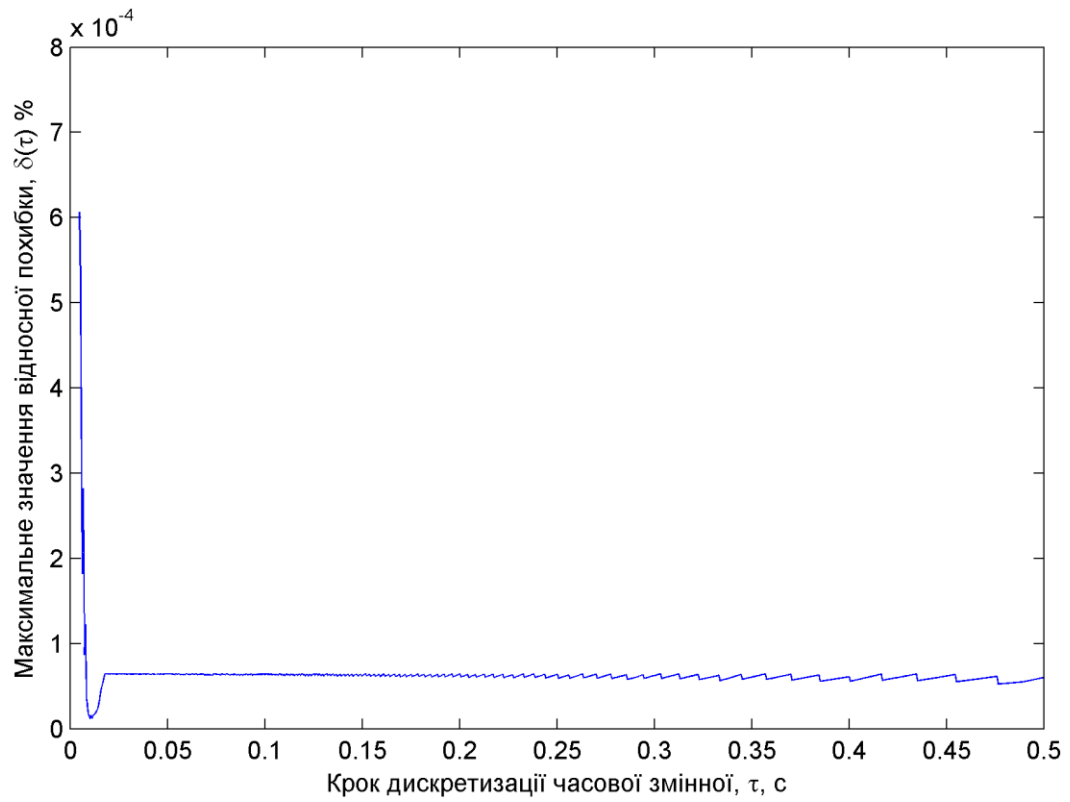


Рис.4.8. Залежність максимального значення відносної похибки розв'язку від кроку дискретизації за часовою змінною.

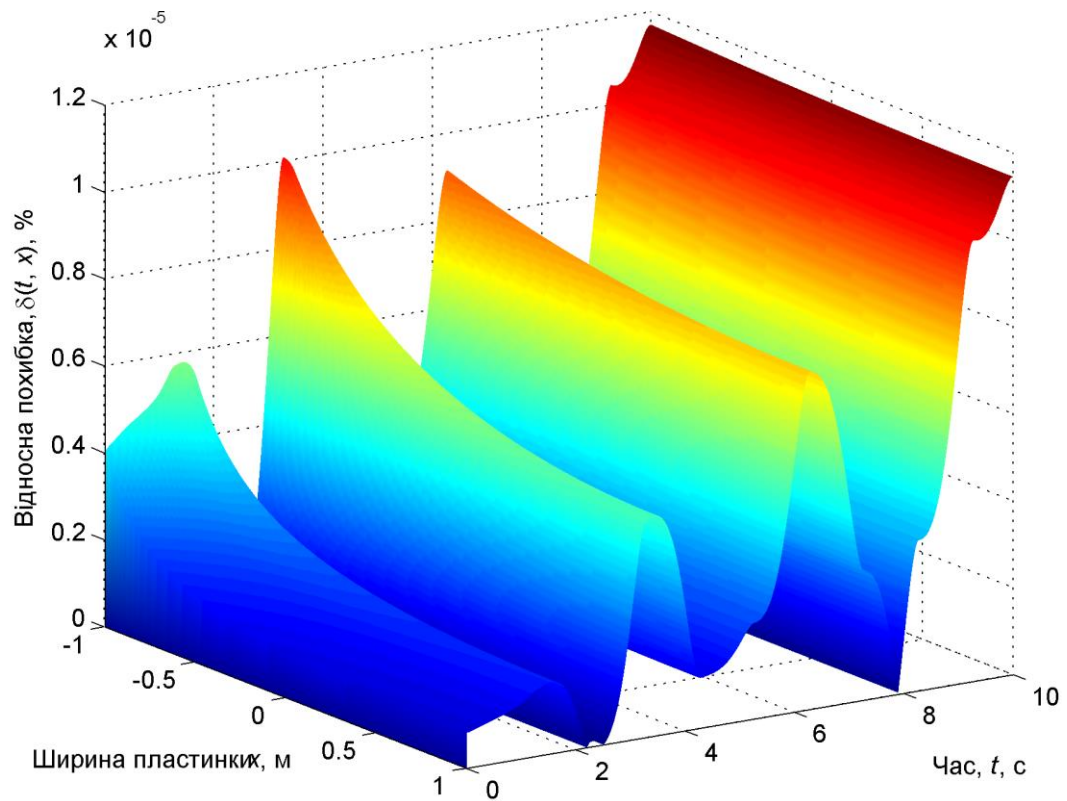


Рис. 4.9. Залежність відносної похибки розв'язку.

4.3. Дослідження ефективності методу. Обчислювальні експерименти.

З метою дослідження ефективності числової реалізації математичних моделей методом опорних перерізів у порівнянні з традиційним широковживаним методом скінченних різниць було проведено ряд обчислювальних експериментів. Для цього розв'язувалась задача моделювання нестационарного теплового процесу у необмеженій пластинці з відомим аналітичним розв'язком. Температура $T(x,t)$ на краях необмеженої пластини примусово змінюється за законом $F_{ep1}(t) \equiv T(x,t)|_{x=\pm 1}$, який задається функцією часу. В середині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна $f(t)$. У початковий момент задано розподіл температури по товщині $F_{пв}(x) \equiv T(x,t)|_{t=0}$. Необхідно знайти розподіл температури в пластині.

У цьому випадку нестационарний тепловий процес описується рівнянням з частинними похідними параболічного типу:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + q(x) f(t), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.70)$$

Процес розв'язування розглянемо на модельному прикладі розв'язування конкретної задачі, для якої:

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 - a_2 x^2)}{2a_2}, \quad a_0 - a_2 x^2 > 0, \quad 0 < a_2 \leq a_0, \quad b_2 > 0, \quad (4.71)$$

$$b(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \quad f(t) = b_1 e^{-b_1 t}, \quad (4.72)$$

$$F_{ep1}(t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 - a_2) e^{-b_2 t}, \quad (4.73)$$

$$F_{пв}(x) = a_0 - a_2 x^2. \quad (4.74)$$

Задача (4.70), (4.71)–(4.74) має точний аналітичний розв'язок

$$T(x,t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 - a_2 x^2) e^{-b_2 t}. \quad (4.75)$$

Задача розв'язувалась різницевиими методами (явна умовно стійка чотирьохточкова схема та неявна абсолютно стійка шеститочкова схема Кранка-Ніколсона) та методом опорних перерізів при наступних значеннях коефіцієнтів: $a_0 = 500$, $a_2 = 0,5$, $b_1 = 0,1$, $b_2 = 0,5$.

Вибрані різницеві схеми мають певні особливості. Явна чотирьохточкова схема у порівнянні з неявною є більш простою і вимагає меншої кількості операцій для підрахунку значень наближеного розв'язку на одному часовому шарі. Проте умова стійкості $\tau \leq \frac{h^2}{2a}$ (де τ і h — крок сітки за часовою і просторовою координатами відповідно, a — коефіцієнт теплопровідності) накладає суттєве обмеження на вибір кроку за часом. Наприклад, якщо взяти $h = 0,01$, то для забезпечення стійкості при $a = 250$ потрібно, щоб крок τ не перевищував значення $\frac{10^{-2}}{500} = 2 \cdot 10^{-7}$. А кількість вузлів сітки, в яких обчислюється розв'язок задачі для проміжку часу 1 с із вказаним кроком, дорівнює 10^9 . Таку ж саму кількість операцій потрібно виконати для розв'язування задачі. Об'єм пам'яті, необхідний для зберігання значень цих змінних, становить $\approx 7,5$ Гб. Із збільшенням величини часового проміжку кількість операцій та об'єм необхідної пам'яті зростають пропорційно.

Неявна шеститочкова різницева схема Кранка-Ніколсона, хоч і вимагає більшої кількості операцій для підрахунку значень наближеного розв'язку на одному часовому шарі (СЛАР порядку $\frac{2}{h} - 1$), проте є абсолютно стійкою. Це дає можливість використовувати її з довільними кроками h і τ . Крім того, вона має підвищену точність $O(h^2 + \tau^2)$.

Особливістю методу опорних перерізів є низька чутливість до збільшення числа точок за просторовою змінною, оскільки значення у цих точках обчислюються за допомогою інтерполяційного полінома. Основне обчислювальне навантаження лягає на розв'язання системи двох звичайних диференціальних рівнянь за часовою змінною, розв'язки якої виступають в якості коефіцієнтів інтерполяційного полінома. Результати проведених експериментів представлені в таблиці 4.1.

У першій частині дослідження (експерименти 1–6) проводились обчислення при фіксованому кроці дискретизації просторової змінної $h = 0,1$, $x \in [-1;1]$ та змінному кроці дискретизації часової змінної $\tau = \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-5}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$, $t \in [0,1]$. Фіксувався затрачений процесорний час для кожного з методів. Оскільки стійкість явної різницевої схеми не забезпечувалась за деяких значень кроків дискретизації, то затрачений час для цього методу у цих випадках не фіксувався. Результати першої частини експерименту показані на рис. 4.10.

Як видно із діаграми, обчислення за явною різницевою схемою хоч і показали кращу швидкодію, проте у половині випадків вони взагалі не могли бути проведені, оскільки порушувалась умова стійкості. З цієї причини даний метод для диференціальних рівнянь із частинними похідними параболічного типу застосовується рідко.

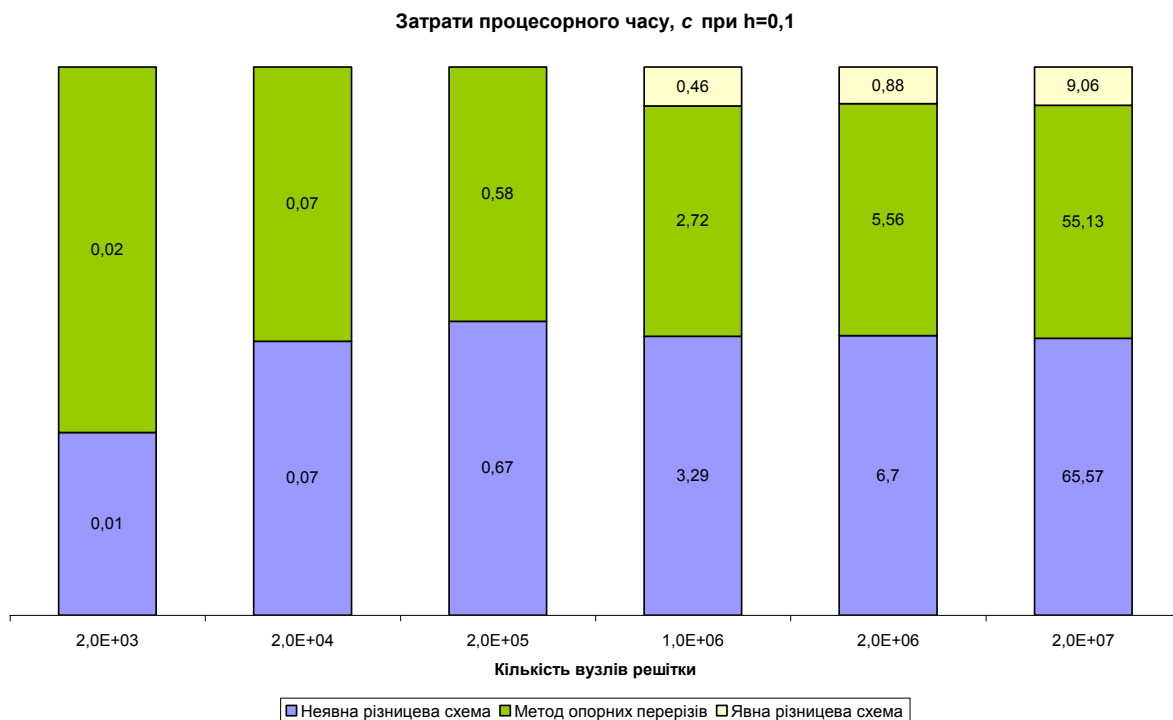


Рис. 4.10. Затрати процесорного часу при зміні кроку дискретизації τ .

Таблиця 4.1

Затрати процесорного часу при використанні різних методів

№ експерименту	Крок h дискре- тизації просто- рової змінної $x \in [-1;1]$	Крок τ дискре- тизації часової змінної t	Кількість вузлів	Час розрахунку, с			Еко- номія часу, %
				Різницеві схеми		Метод опорних перерізів	
				Явна	Неявна		
1	$h = 0,1$	$\tau = 10^{-2},$ $t \in [0,1]$	$2 \cdot 10^3$	—	0,01	0,02	-50%
2		$\tau = 10^{-3},$ $t \in [0,1]$	$2 \cdot 10^4$	—	0,07	0,07	0%
3		$\tau = 10^{-4},$ $t \in [0,1]$	$2 \cdot 10^5$	—	0,67	0,58	13%
4		$\tau = 2 \cdot 10^{-5},$ $t \in [0,1]$	10^6	0,46	3,29	2,72	-83% (17%)
5		$\tau = 10^{-5},$ $t \in [0,1]$	$2 \cdot 10^6$	0,88	6,7	5,56	-84% (17%)
6		$\tau = 10^{-6},$ $t \in [0,1]$	$2 \cdot 10^7$	9,06	65,57	55,13	-84% (16%)
7	$h = 0,01$	$\tau = 10^{-2},$ $t \in [0,1]$	$2 \cdot 10^4$	—	0,12	0,03	75%
8	$h = 0,005$		$4 \cdot 10^4$	—	0,51	0,03	94%
9	$h = 0,002$		$1 \cdot 10^5$	—	5,30	0,05	99%
10	$h = 0,001$		$2 \cdot 10^5$	—	37,39	0,07	99,8%

Таблиця 4.1, продовження

11	$h = 0,001$	$\tau = 10^{-3},$ $t \in [0,1]$	$2 \cdot 10^6$	—	381,40	0,52	99,9%
12	$h = 0,01$	$\tau = 10^{-2},$ $t \in [0,10]$	$2 \cdot 10^5$	—	1,02	0,13	87%
13	$h = 0,001$	$\tau = 10^{-3},$ $t \in [0,10]$	$2 \cdot 10^7$	—	—	5,45	99,9%

Якщо порівнювати затрачений процесорний час для розв'язування задачі за неявною різницевою схемою і апроксимаційним методом опорних перерізів, то, як видно із діаграми, за мінімального кроку дискретизації просторової змінної $h = 0,1$ апроксимаційний метод лише в одному випадку показав меншу швидкодію і ще в одному випадку було отримано однаковий результат. Проте в решті випадках було отримано незначну ($\approx 17\%$) перевагу на користь методу опорних перерізів.

У другій частині експериментів (7–10) навпаки крок τ за часовою змінною $t \in [0,1]$ фіксувався і становив $\tau = 10^{-2}$. Піддавався зміні крок h за просторовою змінною $x \in [-1;1]$: $h = \{10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 10^{-3}\}$. При цьому також фіксувався затрачений процесорний час, необхідний для розв'язання задачі на вказаних сітках. Результати другої частини експерименту показані на рис. 4.11.

З діаграми видно, що у всіх випадках апроксимаційний метод показав значну перевагу за часом числової реалізації математичної моделі перед різницевою схемою. Це пояснюється особливістю методу опорних перерізів, яка полягає в тому, що обчислення за просторовими змінними здійснюється за інтерполяційним поліномом.

Окремо проводився обчислювальний експеримент (рядок 11, табл. 4.1) із параметрами $\tau = 10^{-3}$ і $h = 10^{-3}$. У цьому випадку отримали результат 381,40 с і 0,52 с для різницевої схеми і методу опорних перерізів відповідно, який показує значну перевагу по затратах процесорного часу апроксимаційного методу для великої кількості точок за просторовою змінною.

У третій частині експерименту (12–13) досліджувались затрати процесорного часу для збільшеного часового проміжку $t \in [0, 10]$ с. Крок дискретизації для просторової та часової змінної обирався однаковим: $\tau = 10^{-2}$ і $h = 10^{-2}$ (експеримент 12), $\tau = 10^{-3}$ та $h = 10^{-3}$ (експеримент 13). Результати третьої частини експерименту представлені на рис. 4.12.

Результати експериментів показали, що застосування апроксимаційного методу опорних перерізів при числовій реалізації математичних моделей об'єктів із розподіленими параметрами, які описуються рівняннями із частинними похідними параболічного типу, дає змогу в декілька (для різних випадків від 1,16 до 733) разів зменшити машинний час для знаходження розв'язків. Запропонований метод має найвищу ефективність у випадках, коли число вузлів за просторовою змінною (у яких шукається розв'язок задачі) рівне або більше за число вузлів за часовою змінною.

Оцінка похибки методу і принцип вибору опорних перерізів. Оцінимо похибку методу, взявши в якості ряду інтерполяційний поліном Лагранжа

$$L_n(x, t) = \sum_{i=0}^n T(x_i, t) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

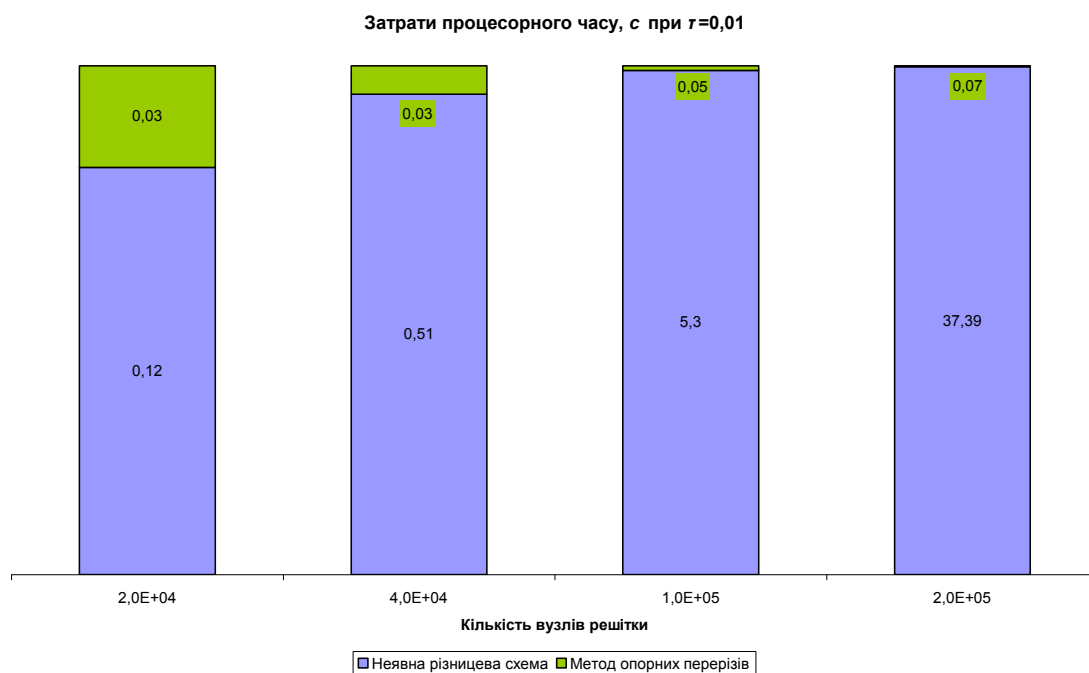


Рис. 4.11. Затрати процесорного часу при зміні кроку дискретизації h .

Для цього накладемо наступні умови на функцію $T(x, t)$: будемо вважати, що вона має неперервні похідні за змінною x до порядку n , а похідна $n+1$

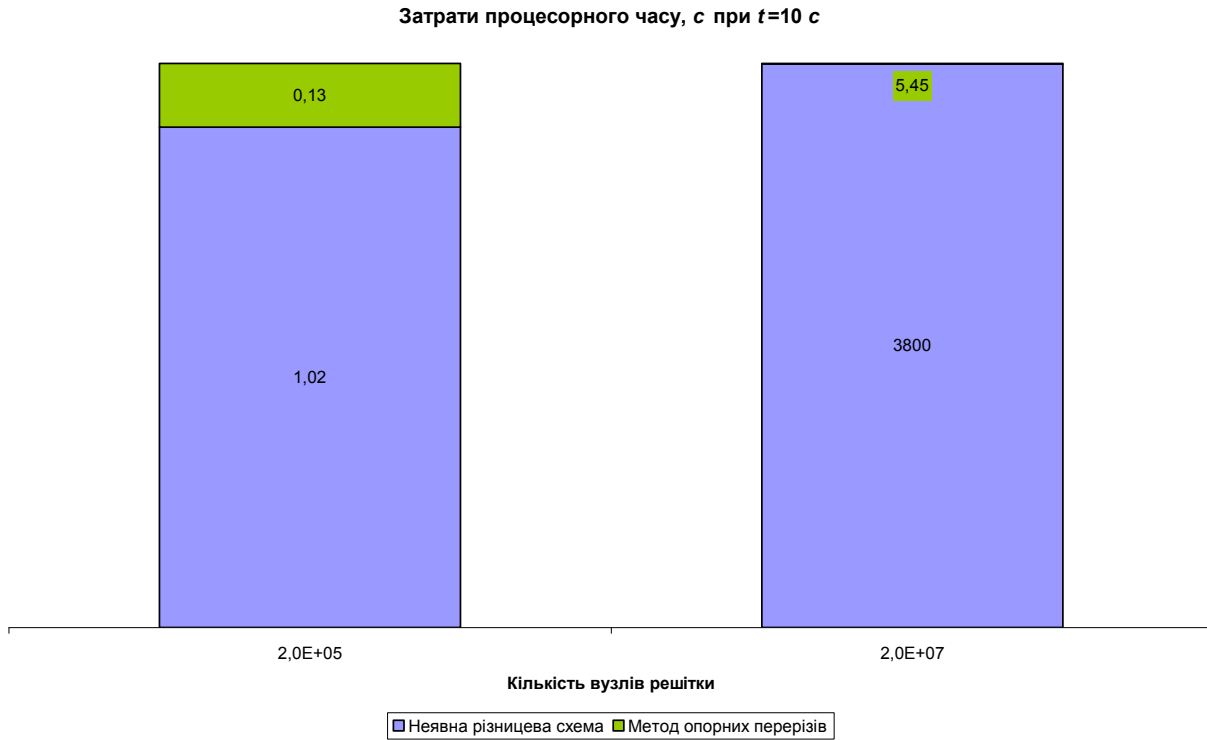


Рис. 4.12 Затрати процесорного часу при зміні часового проміжку.

порядку $\frac{\partial^{n+1}T(x, t)}{\partial x^{n+1}}$ існує. Тоді відхилення ε функції $T(x, t)$ від $L_n(x, t)$ можна

оцінити нерівністю

$$\varepsilon = |T(x, t) - L_n(x, t)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \omega(x),$$

$$\text{де } M_{n+1} = \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{\partial^{n+1}T(x, t)}{\partial x^{n+1}} \right|, \text{ а } \omega(x) = |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|.$$

Визначимо умови, за яких це відхилення буде мінімальним. Оскільки величина M_{n+1} залежить лише від властивостей шуканої функції, то змінюючи опорні точки x_i , ми можемо змінювати величину $\omega(x)$, тим самим впливаючи на відхилення ε . Взявши в якості опорних перерізів корені многочлена Чебишева

$x_i = \cos \frac{(2i+1)}{2n+2} \pi$, $i = \overline{0, n}$, та беручи до уваги, що многочлен Чебишева має найменше відхилення від нуля, отримаємо

$$\varepsilon = |T(x, t) - L_n(x, t)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}.$$

Тому будь-який інший вибір опорних точок може дати більше значення верхньої границі похибки методу.

Отже, можна зробити висновок, що викладений аналіз є основою методу оцінки точності і методики вибору опорних перерізів.

Для апробації методу вибору опорних перерізів було проведено ряд обчислювальних експериментів. Моделювався процес теплопровідності для необмеженої однорідної ізотропної пластинки, що описується в безрозмірних

змінних рівнянням із частинними похідними $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$,

$0 < t \leq 1$; з граничними і початковими умовами: $T(x, t)|_{x=\pm 1} = 1$, $T(x, t)|_{t=0} = 0$.

Розв'язок $T_{\Pi}(x, t)$, отриманий методом опорних перерізів порівнювався із розв'язком $T_P(x, t)$, отриманим методом скінченних різниць для кроків дискретизації просторової та часової змінної $0,005$ і 10^{-5} відповідно. Для отриманих

розв'язків знаходилось інтегральне відхилення $\int_0^1 \int_{-1}^1 |T_{\Pi}(x, t) - T_P(x, t)| dx dt$ при різній

кількості та способах вибору опорних точок x_i , $i = \overline{0, n}$, які обиралися трьома

способами: як корені многочлена Чебишева $x_i = \cos \frac{(2i+1)}{2n+2} \pi$; з використанням

рівномірного розподілу $x_i = -1 + \frac{2}{n} i$; як точки максимуму многочлена Чебишева

$x_i = \cos \frac{i}{n} \pi$. Використовувалось від 5 до 15 опорних перерізів. Результати

обчислювальних експериментів наведені в табл. 4.3.

Таблиця 4.2.

Абсолютне інтегральне відхилення розв'язків, отриманих методом опорних перерізів та методом скінченних різниць

Кількість опорних точок	Корені многочлена Чебишева	Точки максимуму многочлена Чебишева	Рівномірний розподіл
5	$9,1 \cdot 10^{-03}$	$7,1 \cdot 10^{-03}$	$1,27 \cdot 10^{-02}$
7	$1,7 \cdot 10^{-03}$	$1,7 \cdot 10^{-03}$	$3,5 \cdot 10^{-03}$
9	$6,34 \cdot 10^{-04}$	$6,03 \cdot 10^{-04}$	$1,6 \cdot 10^{-03}$
11	$3,31 \cdot 10^{-04}$	$3,04 \cdot 10^{-04}$	$9,13 \cdot 10^{-04}$
13	$1,49 \cdot 10^{-04}$	$1,98 \cdot 10^{-04}$	$5,79 \cdot 10^{-04}$
15	Порушення стійкості обчислювального процесу	$1,36 \cdot 10^{-04}$	$4,24 \cdot 10^{-04}$

Аналізуючи результати проведених обчислювальних експериментів, можна помітити, що спеціальний вибір опорних точок (корені, або в деяких випадках точки максимуму многочлена Чебишева), у порівнянні із рівномірним розподілом по області визначення просторової змінної, дозволяє підвищити адекватність математичної моделі. Наприклад, у випадку інтерполяції за 9 опорними точками інтегральне відхилення розв'язків для випадку рівномірного розподілу опорних точок становить $1,6 \cdot 10^{-03}$, а у випадку вибору в якості опорних точок коренів многочлена Чебишева — $6,34 \cdot 10^{-04}$. Схожа перевага спеціального вибору опорних точок зберігається і для інших випадків.

Результати проведених обчислювальних експериментів показали, що із ростом кількості опорних точок інтегральне відхилення зменшується (рис. 4.13).

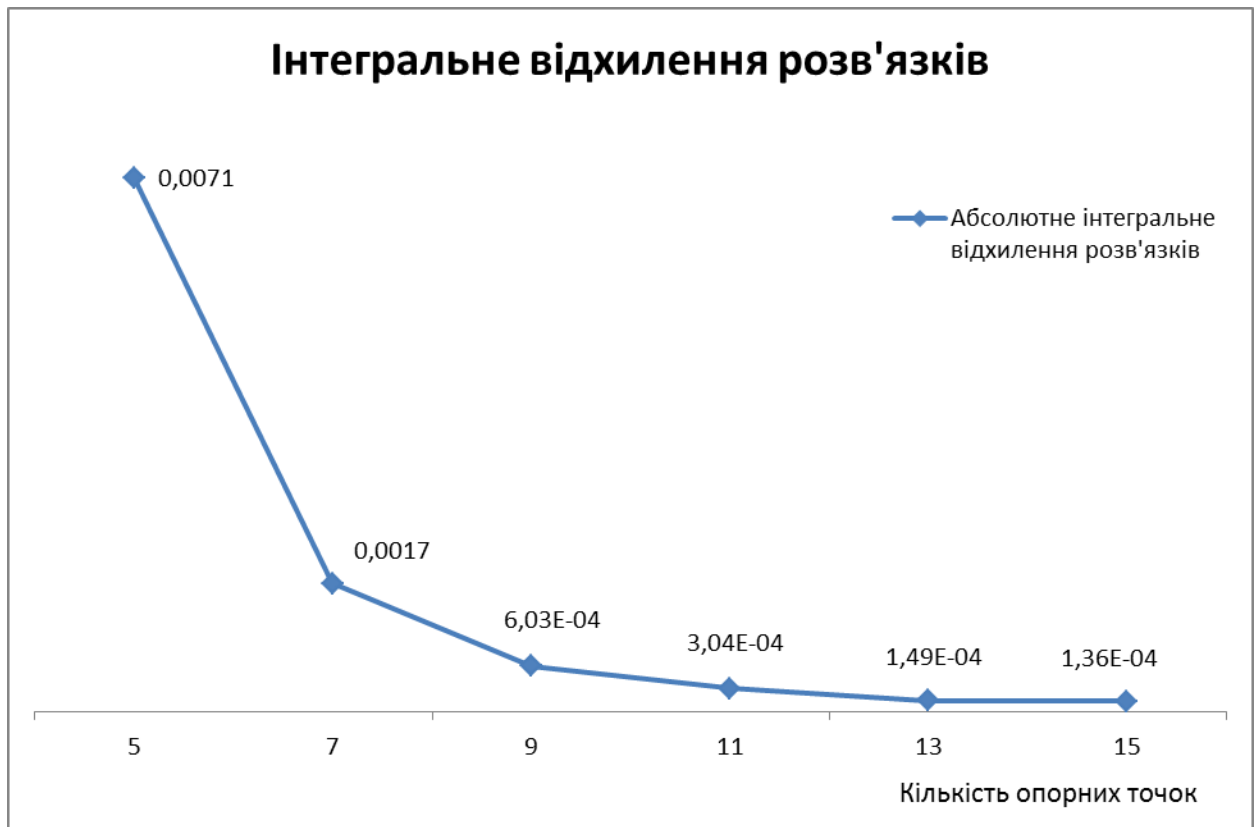


Рис. 4.13. Інтегральне відхилення розв'язків в залежності від різної кількості опорних точок.

Отже, можна зробити висновок, що завдяки вдалому вибору опорних точок можна підвищити точність числової реалізації або в деяких випадках знизити порядок інтерполяційного полінома при збереженні необхідної точності моделювання.

Моделювання динаміки нестационарного перехідного теплового процесу обмежених дво- і тривимірних тіл. Нехай маємо ізотропний необмежено довгий стержень прямокутного перерізу $2L \times 2l$ із початковою температурою $T(x, y, t)|_{t=0} = T_0$ та сталими теплофізичними характеристиками. В певний момент часу t_0 на поверхні стержня задаються деякі граничні умови $T(x, y, t)|_{\substack{x=\pm L \\ y=\pm l}} = T_{zp1}(t)$ (першого, другого, або третього роду). Покажемо, що можна виразити динаміку нестационарного теплового процесу даного двовимірного тіла як добуток розв'язків двох одновимірних нестационарних теплових задач.

Математичним описом параметрично спрощеної моделі нестационарного теплового процесу є рівняння із частинними похідними параболічного типу :

$$c\rho \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} \right), \quad (4.76)$$

в якому c — питома теплоємність, ρ — густина, k — коефіцієнт теплопровідності, t — час, а $-L \leq x \leq L$, $-l \leq y \leq l$ — просторові координати. Або після спрощення:

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} \right), \quad (4.77)$$

де $a = \frac{k}{c\rho}$ — коефіцієнт температуропровідності. Оскільки на лініях симетрії тіла

тепловий потік відсутній, то можна записати, що $\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ та

$$\left. \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Для розв'язання даної задачі можна застосувати метод Фур'є:

$$T(x,y,t) = X(x,t)Y(y,t) \quad (4.78)$$

і отримати, підставивши у (4.96):

$$\frac{1}{X(x,t)} \left(\frac{\partial X(x,t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 X(x,t)}{\partial x^2} \right) = - \frac{1}{Y(y,t)} \left(\frac{\partial Y(y,t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 Y(y,t)}{\partial y^2} \right). \quad (4.79)$$

Оскільки змінні x та y змінюються незалежно одна від одної, то кожна з двох частини (4.79) дорівнює якомусь параметру, який залежить від спільної змінної t , наприклад, $\pm \lambda^2(t)$. Однак, оскільки присутня термальна і геометрична симетрія, то задачі на власні значення за координатами x та y мають бути аналогічними. Це можливо лише за умови $\lambda^2(t) = 0$. Враховуючи це, та підставивши (4.77) в початкові та граничні умови, отримаємо наступні співвідношення.

Таблиця 4.3.

Одновимірні задачі нестационарної теплопровідності

Для функції $X(x, t)$	Для функції $Y(y, t)$
$\frac{\partial X(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial x^2},$	$\frac{\partial Y(y, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Y(y, t)}{\partial y^2},$
$X(x, t) _{t=0} = T_0,$	$Y(y, t) _{t=0} = T_0,$
$\left. \frac{\partial X(x, t)}{\partial x} \right _{x=0} = 0,$	$\frac{\partial Y(0, t)}{\partial y} = 0,$
$X(x, t) _{x=\pm L} = F_{zp1}(t),$	$Y(y, t) _{y=\pm l} = F_{zp1}(t).$

Отримані рівняння утворюють дві одновимірні задачі нестационарної теплопровідності необмежених ізотропних пластинок різної товщини ($2L$ і $2l$) та однаковими початковими і граничними умовами. Тобто розв'язок $T(x, y, t)$ вихідної двовимірної задачі (4.77) виражається через добуток (4.78) розв'язків відповідних одновимірних задач.

4.4 Висновки до четвертого розділу

У розділі запропоновано метод структурного спрощення математичних моделей ОРП з використанням інтерполяційного підходу. Метод орієнтований на простоту практичного використання та ефективну числову реалізацію. Технічна частина силових енергетичних установок, як правило, представляє собою складний фізичний об'єкт з розподіленими параметрами, базовим математичним описом яких є диференціальні рівняння з частинними похідними. У зв'язку з принциповою складністю чисельних методів і програмної реалізації цих моделей суттєво актуальною стає задача розвитку методів математичного і комп'ютерного моделювання об'єктів з розподіленими параметрами шляхом розробки, дослідження і застосування методів побудови і числової реалізації структурно-спрощених динамічних моделей вказаного класу об'єктів, які мають необхідний рівень адекватності, найменшу складність серед альтернативних варіантів та

орієнтованих на ефективну числову і комп'ютерну реалізацію. Ефективна числова реалізація числової реалізації структурно-спрощених математичних моделей динамічних об'єктів вказаного класу забезпечує створення вбудованих програмних засобів для розв'язання задач функціонування технічних систем при наявності часових і ресурсних обмежень. Аналізі результатів досліджень за тематикою, що досліджувалась, визначає основні підходи і особливості задач побудови спрощених моделей об'єктів з розподіленими параметрами, основними серед яких є принцип розділення змінних, операційні методи і метод інтегральних перетворень; перспективним є інтерполяційний підхід, для прикладної реалізації якого необхідне здійснення відповідних досліджень і розробок; реалізація інтерполяційного підходу до спрощення математичних моделей передбачає формування відповідних математичних моделей і оціночних виразів, що дозволяють обґрунтувати можливість і доцільність спрощення математичних описів, а також оцінки якості математичних моделей і можливі процедури виконання операцій спрощення. В роботі запропонований та досліджений інтерполяційний метод (метод опорних перерізів) отримання спрощених моделей об'єктів з розподіленими параметрами у вигляді скалярних диференціальних рівнянь на основі вихідних (базових) описів у формі диференціальних рівнянь з частинними похідними; отримані звичайні диференціальні рівняння визначаються залежностями для невеликої кількості перерізів об'єкта, що моделюється, а їх розв'язок дозволяє представити розв'язок вихідної задачі у вигляді простого полінома; метод практично інваріантний відносно форми базової моделі та ефективно алгоритмізується і забезпечує побудову економічних швидкодіючих програмних засобів, що підтверджуються обчислювальними експериментами. За допомогою методу опорних перерізів отримані спрощені моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь для об'єктів з розподіленими параметрами параболічного типу з симетричними і несиметричними граничними умовами, а також для аналогічних задач в циліндричній системі координат; апробація спрощених моделей шляхом тестових обчислювальних експериментів при розв'язуванні модельних задач підтверджує працездатність методу і ефективність

програм, що його реалізують; порівняння отриманих результатів спрощеного моделювання з результатами реалізації базових (повних) моделей за допомогою типових різницевих алгоритмів свідчить про значну перевагу запропонованого методу як по простоті обчислювальних процедур, так і по часу, витраченому на розв'язування.

Таким чином, розроблено метод опорних перерізів, який володіє універсальністю по відношенню до різного роду симетричних та несиметричних граничних умов базової моделі, дозволяє отримати спрощені обчислювальні вирази (поліном та допоміжна система звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки якої виступають в якості коефіцієнтів цього полінома) для числової реалізації моделі ОРП.

Застосування методу опорних перерізів для моделювання ОРП та числової реалізації отриманих моделей дозволяє на проміжних етапах скористатися засобами реалізації типових чисельних методів та готових програм комп'ютерного моделювання. Метод, як показали результати обчислювальних експериментів, володіє достатньою для інженерних розрахунків точністю.

Завдяки особливості методу опорних перерізів, яка полягає в тому, що обчислення за просторовими змінними здійснюється за інтерполяційним поліномом, ефективність числової реалізації підвищується при зростанні кількості вузлів змінної за просторовою координатою, в яких шукається розв'язок.

Розроблені способи застосування методу опорних перерізів для обмежених та напівобмежених просторових ОРП. Виведені готові для практичних розрахунків обчислювальні вирази для числової реалізації математичних моделей об'єктів даного класу, поданих у декартовій та циліндричній системах координат.

РОЗДІЛ 5. ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ АДАПТИВНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З ЕТАЛОННОЮ МОДЕЛЛЮ

5.1 Математичний опис адаптивної системи з еталонною моделлю

Адаптивна система з еталонною моделлю (ЕМ) складається з основної системи і контуру настроювання [31]. Основна частина системи являє собою сукупність об'єкта керування (ОК) і виконавчого пристрою. У контур настроювання входять комп'ютерна модель об'єкта (КМ) і керуючий пристрій (КП), тобто регулятор [11, 15, 16, 102, 104, 108].

Під задачею побудови адаптивної системи розуміється визначення алгоритму функціонування КП, тобто його структури й параметрів, при відомих рівняннях руху основної системи, КМ і характеристик вхідних сигналів [19, 36, 109, 134, 217, 218].

Щодо керованої координати об'єкти керування частіше всього можуть описуватися рівнянням виду

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} = \sum_{j=0}^m d_j(t) x^{(j)}, \quad (5.1)$$

де x — керуючий вплив; y — вихідна координата; $a_i(t)$, $d_j(t)$ — змінні в часі коефіцієнти, або в операторній формі

$$A(p, t) \cdot Y(p) = D(p, t) \cdot X(p), \quad (5.2)$$

де $A(p, t)$, $D(p, t)$ — лінійні диференціальні оператори.

Лінійна математична модель (ММ) вигляду (5.1) або (5.2) руху ОК щодо розрахункової траєкторії коректна лише при певних обмеженнях, що накладаються на сигнали й координати об'єкта, діапазони й швидкості зміни його коефіцієнтів [135]. Зазначені обмеження можна записати у вигляді нерівностей

$$B_k[p, g, y, x, a_i(t), d_j(t), t] \leq 0, \quad (5.3)$$

де B_k — деякі оператори; g — вхідний сигнал.

З урахуванням законів керування, слухних для замкненої системи, рівняння ОК приймає вигляд:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) + c_i(t)] y^{(i)} = \sum_{j=0}^m [d_j(t) + c_{xj}(t)] x^{(j)}. \quad (5.4)$$

Представимо, коефіцієнти $c_i(t)$ й $c_{xj}(t)$, що змінюються, у вигляді суми двох складових

$$\left. \begin{aligned} c_i(t) &= \bar{c}_i + \Delta c_i(t); \\ c_{xj}(t) &= \bar{c}_{xj} + \Delta c_{xj}(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

де $\bar{c}_i, \bar{c}_{xj}$ — постійні величини; $\Delta c_i(t), \Delta c_{xj}(t)$ — складові, що перебудовуються.

Вводячи позначення

$$\left. \begin{aligned} a_i &= a_i(t) + \bar{c}_i; \\ d_j &= d_j(t) + \bar{c}_{xj}, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

і, в силу (5.4), (5.5), можна записати

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} [a_i + \Delta c_i(t)] y^{(i)} = \sum_{j=0}^m [d_j + \Delta c_{xj}(t)] x^{(j)}. \quad (5.7)$$

Зміни коефіцієнтів a_i і d_j системи рівнянь (5.7), викликані зміною параметрів ОК, будуть компенсуватися відповідними змінами складових $\Delta c_i(t)$ і $\Delta c_{xj}(t)$ до значень, обумовлених ЕМ.

Рівняння ЕМ представимо в наступному виді:

$$y_M^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i y_M^{(i)} = \sum_{j=0}^m d_{jM} x^{(j)}, \quad (5.8)$$

де b_i, d_{jM} — незалежні від часу коефіцієнти рівняння ЕМ.

Якщо виділити бажані значення коефіцієнтів, рівні коефіцієнтам ЕМ, і їхні додаткові складові, то вираз (5.4) перетвориться до виду

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} [b_i + \Delta a_i(t) + \Delta c_i(t)] y^{(i)} = \sum_{j=0}^m [d_{jM} + \Delta d_j(t) + \Delta c_{xj}(t)] x^{(j)} \quad (5.9)$$

Відхилення виходу основної системи й моделі

$$\varepsilon = y - y_M \quad (5.10)$$

знаходяться із рівнянь (5.8) і (5.9)

$$\varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} = \sum_{j=0}^m [\Delta d_j(t) + \Delta c_{xj}(t)] x^{(j)} - \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta a_i(t) + \Delta c_i(t)] y^{(i)} \quad (5.11)$$

Групуючи члени в (5.11), одержуємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} b_i \varepsilon^{(i)} = & \left[\sum_{j=0}^m \Delta d_j x^{(j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta a_i y^{(i)} \right] + \\ & + \left[\sum_{j=0}^m \Delta c_{xj}(t) x^{(j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta c_i(t) y^{(i)} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

або

$$\varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} = F + u, \quad (5.13)$$

де

$$F = \left[\sum_{j=0}^m \Delta d_j x^{(j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta a_i y^{(i)} \right]$$

— еквівалентне збурювання, що діє на систему й, відповідно, що викликає помилку ε ;

$$u = \left[\sum_{j=0}^m \Delta c_{xj}(t) x^{(j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta c_i(t) y^{(i)} \right]$$

— еквівалентний вхідний вплив КП.

З метою спрощення математичних описів, доцільно, увівши позначення

$$\varepsilon^{(i)} = x_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (5.14)$$

представити рівняння похибки (13) у матричній формі

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{U}, \quad (5.15)$$

де

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-1} \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Задача синтезу системи може бути зведена в цьому випадку до вибору такого керування, при якому відбувається компенсація еквівалентного збурювання $\mathbf{F}(t)$.

Розв'язок цієї задачі ускладнюється неавтономністю системи, оскільки права частина її рівняння (5.12) явно залежить від часу. Другий метод Ляпунова, що встановлює достатні умови стійкості, дозволяє успішно подолати зазначені труднощі. Однак важливою є й задача забезпечення необхідного якості керування [70].

З метою спрощення розв'язання питань оптимізації можна припускати, що виконуються умови автономності системи. При цьому мається на увазі, що в системах із ЕМ допущення про автономність розглянутих систем є можливим при досить широкому діапазоні зміни умов їх роботи.

5.2 Метод параметричного настроювання системи

Сутність методики синтезу адаптивних систем (АС) із ЕМ і параметричним настроюванням за допомогою функцій Ляпунова доцільно спочатку розглянути на прикладі побудови системи другого порядку.

Нехай основна система й еталонна модель описуються рівняннями другого порядку, відповідно

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = k k_c g; \quad (5.17)$$

$$\ddot{y}_M + b_1 \dot{y}_M + b_0 y_M = k_M g, \quad (5.18)$$

де k — змінний у часі коефіцієнт об'єкта; k_c — коефіцієнт посилення системи, що перебудовується, k_M — коефіцієнт підсилення моделі; g — вхідний сигнал; $a_i = b_i$ (прийнято для простоти розгляду).

Необхідно знайти алгоритм настроювання коефіцієнта підсилення k_c з умови стійкості процесів у системі.

Віднімаючи з рівняння (5.17) рівняння (5.18) і вводячи позначення

$$\varepsilon^{(i)} = y_M^{(i)} - y^{(i)}, \quad (i = 0, 1, 2), \quad (5.19)$$

отримуємо рівняння помилки адаптивної системи

$$\ddot{\varepsilon} + b_1 \dot{\varepsilon} + b_0 \varepsilon = (k_M - k_c k) g \quad (5.20)$$

або

$$\ddot{\varepsilon} + b_1 \dot{\varepsilon} + b_0 \varepsilon = \gamma g, \quad (5.21)$$

де

$$\gamma = k_M - k_c k. \quad (5.22)$$

Для подальших міркувань вибирається функція Ляпунова у вигляді квадратичної позитивно визначеної форми фазових координат і різниці коефіцієнтів підсилення

$$V = \dot{\varepsilon}^2 + b_0 \varepsilon^2 + \lambda \gamma^2, \quad (5.23)$$

де γ — деяка довільна позитивна постійна.

Повна похідна за часом функції (5.23) має вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = 2\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} + 2b_0\dot{\varepsilon}\varepsilon + 2\lambda\dot{\gamma}\gamma. \quad (5.24)$$

З (5.21) можна виразити другу похідну похибки

$$\ddot{\varepsilon} = g\gamma - b_1\dot{\varepsilon} - b_0\varepsilon, \quad (5.25)$$

яка підставляється в (5.24)

$$\frac{dV}{dt} = 2\dot{\varepsilon}g\gamma - 2b_1\dot{\varepsilon}\varepsilon - 2b_0\dot{\varepsilon}\varepsilon + 2b_0\dot{\varepsilon}\varepsilon + 2\lambda\dot{\gamma}\gamma = 2\dot{\varepsilon}g\gamma - 2b_1\dot{\varepsilon}^2 + 2\lambda\dot{\gamma}\gamma \quad (5.26)$$

Як видно з отриманого виразу, для забезпечення неперервності похідної функції Ляпунова, тобто досягнення стійкості процесу настройки, досить виконати умову

$$2\dot{\varepsilon}g\gamma + 2\lambda\dot{\gamma}\gamma \leq 0.$$

З останньої нерівності випливає:

$$\dot{\gamma} \leq -\frac{\dot{\varepsilon}g}{\lambda}. \quad (5.27)$$

З іншого боку, з (5.22), у припущенні квазістаціонарної зміни коефіцієнта k , можна одержати:

$$\dot{\gamma} = -\dot{k}_c k. \quad (5.28)$$

Вирази (5.27) і (5.28) дозволяють визначити алгоритм настроювання

$$\dot{k}_c \geq \frac{1}{k\lambda} \dot{\varepsilon}g. \quad (5.29)$$

Структурна схема синтезованої АС наведена на рис. 5.1.

Поширюючи вищенаведену методику на більш загальний випадок — опису основної системи і ЕМ диференціальними рівняннями високих порядків зі змінними коефіцієнтами — можна розробити процедуру синтезу алгоритмів і законів формування параметрів, що перебудовуються.

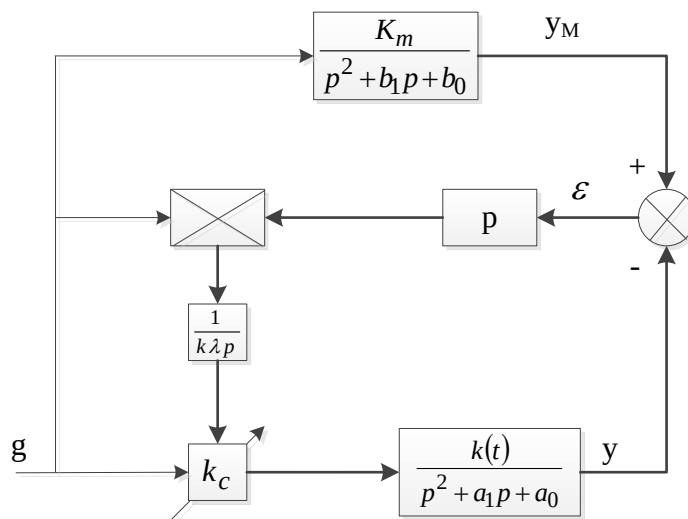


Рис. 5.1 – Структурна схема АС із коефіцієнтом підсилення, що перебудовується

При цьому рівняння основної системи і ЕМ приймуть вигляд

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} = k(t)g; \quad (5.30)$$

$$y_M^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} b_i y_M^{(i)} = k_M g, \quad (5.31)$$

де $k(t)$, $a_i(t)$ — змінні в часі коефіцієнти; k_M , b_i — постійні коефіцієнти моделі.

Рівнянням вигляду (5.30) описується досить широкий клас об'єктів і, враховуючи виконаний аналіз, модель (5.30) можна поширити на клас розглянутих ММ. Вважаючи порядки рівнянь (5.30) і (5.31) однаковими і, вводячи позначення

$$\varepsilon^{(t)} = y_M^{(i)} - y^{(i)}, \quad (5.32)$$

можна записати рівняння похибки

$$\varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + g[k_M - k(t)]. \quad (5.33)$$

Методика складання рівняння помилки суттєво не змінюється при різних порядках рівнянь (5.30) і (5.31), які можна зрівняти диференціюванням виразу (5.31). При цьому передбачається, що сигнал g є функцією, що диференціюється

Властивість адаптації в системі з моделлю може досягатися за допомогою коефіцієнтів, що перебудовуються (у виразах, наведених нижче, це, відповідно k_c , c_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$)). У такому випадку вирази (5.30) і (5.31), відповідно, приймуть вигляд:

$$y^{(n)} + [a_{n-1}(t) + c_{n-1}] y^{(n-1)} + \dots + [a_0(t) + c_0] y = k_c k g; \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} &= [k_M - k_c k(t)] g - \{b_{n-1} - [a_{n-1}(t) + k(t)c_{n-1}]\} y^{(n-1)} - \\ &- \{b_{n-2} - [a_{n-2}(t) + k(t)c_{n-2}]\} y^{(n-2)} - \dots - \{b_0 - [a_0(t) + k(t)c_0]\} y = \\ &= \gamma_{n+1} g - \gamma_n y^{(n-1)} - \gamma_{n-1} y^{(n-2)} - \dots - \gamma_1 y, \end{aligned} \quad (5.35)$$

де

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{n+1} &= k_M - k_c k(t); \\ \gamma_n &= b_{n-1} - [a_{n-1}(t) + k(t)c_{n-1}]; \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ \gamma_1 &= b_0 - [a_0(t) + k(t)c_0]. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Вводячи позначення

$$\varepsilon^{(i)} = x_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (5.37)$$

можна представити (5.35) у вигляді системи рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -b_0 x_1 - b_1 x_2 - \dots - b_{n-1} x_n + \gamma_{n+1} g - \gamma_n y^{(n-1)} - \dots - \gamma_1 y \end{aligned} \right\}. \quad (5.38)$$

Отриману систему рівнянь зручно записати в матричній формі

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{U}, \quad (5.39)$$

де

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}; \quad (5.40)$$

тут

$$u_0 = \gamma_{n+1} g - \gamma_n y^{(n-1)} - \gamma_{n-1} y^{(n-2)} - \dots - \gamma_1 y. \quad (5.41)$$

Функція Ляпунова вибирається квадратичної виразно позитивної форми

$$V = \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X} + \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i \gamma_i^2, \quad (5.42)$$

де λ_i — позитивні постійні; $\mathbf{X}^T$ — транспонована матриця $\mathbf{X}$;

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} - \quad (5.43)$$

симетрична матриця.

Відповідно до (5.40) повна похідна функції Ляпунова (5.43) має вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{X}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{X} + 2 \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n+1} 2 \lambda_i \dot{\gamma}_i \gamma_i, \quad (5.44)$$

де $\mathbf{A}^T$ — транспонована матриця $\mathbf{A}$.

За умови, що $\mathbf{A}$ є неособливою матрицею, вираз (5.44) можна представити у вигляді:

$$\frac{dV}{dt} = -\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + 2 \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n+1} 2 \lambda_i \dot{\gamma}_i \gamma_i, \quad (5.45)$$

де

$$-\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{X}.$$

Матрицю $\mathbf{Q}$ доцільно вибрати діагонального виду

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

Для забезпечення стійкості процесів настроювання коефіцієнтів адаптивної системи необхідно виконати умову

$$2 \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n+1} 2 \lambda_i \dot{\gamma}_i \gamma_i \leq 0. \quad (5.47)$$

З отриманого виразу, з врахуванням (5.41) і (5.42), випливає:

$$2(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) \cdot [\gamma_{n+1}g - \gamma_n y^{(n-1)} - \dots - \gamma_1 y] + \sum_{i=1}^{n+1} 2\lambda_i \dot{\gamma}_i \gamma_i \leq 0. \quad (5.48)$$

Остання нерівність задовольняється, якщо вибрати:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \frac{1}{\lambda_1} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) y; \\ \dot{\gamma}_2 &= \frac{1}{\lambda_2} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) y^{(1)}; \\ &\dots \\ \dot{\gamma}_n &= \frac{1}{\lambda_n} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) y^{(n-1)}; \\ \dot{\gamma}_{n+1} &= \frac{1}{\lambda_{n+1}} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) g. \end{aligned} \right\}. \quad (5.49)$$

З рівнянь (5.36) і (5.49) випливають алгоритми настроювання

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_c &= \frac{1}{k\lambda_{n+1}} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) g; \\ \dot{c}_{n-1} &= -\frac{1}{k\lambda_n} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) y^{(n-1)}; \\ &\dots \\ &\dots \\ \dot{c}_0 &= -\frac{1}{k\lambda_0} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) y. \end{aligned} \right\}. \quad (5.50)$$

Значення коефіцієнтів p_{ni} ($i=1, 2, \dots, n$) в (5.50) повинні вибиратися з умови забезпечення позитивності матриць $\mathbf{P}$ в (5.42) і $\mathbf{Q}$ в (5.46).

Отримані рівняння дозволяють синтезувати АС із еталонною моделлю й параметричним настроюванням (рис. 5.2).

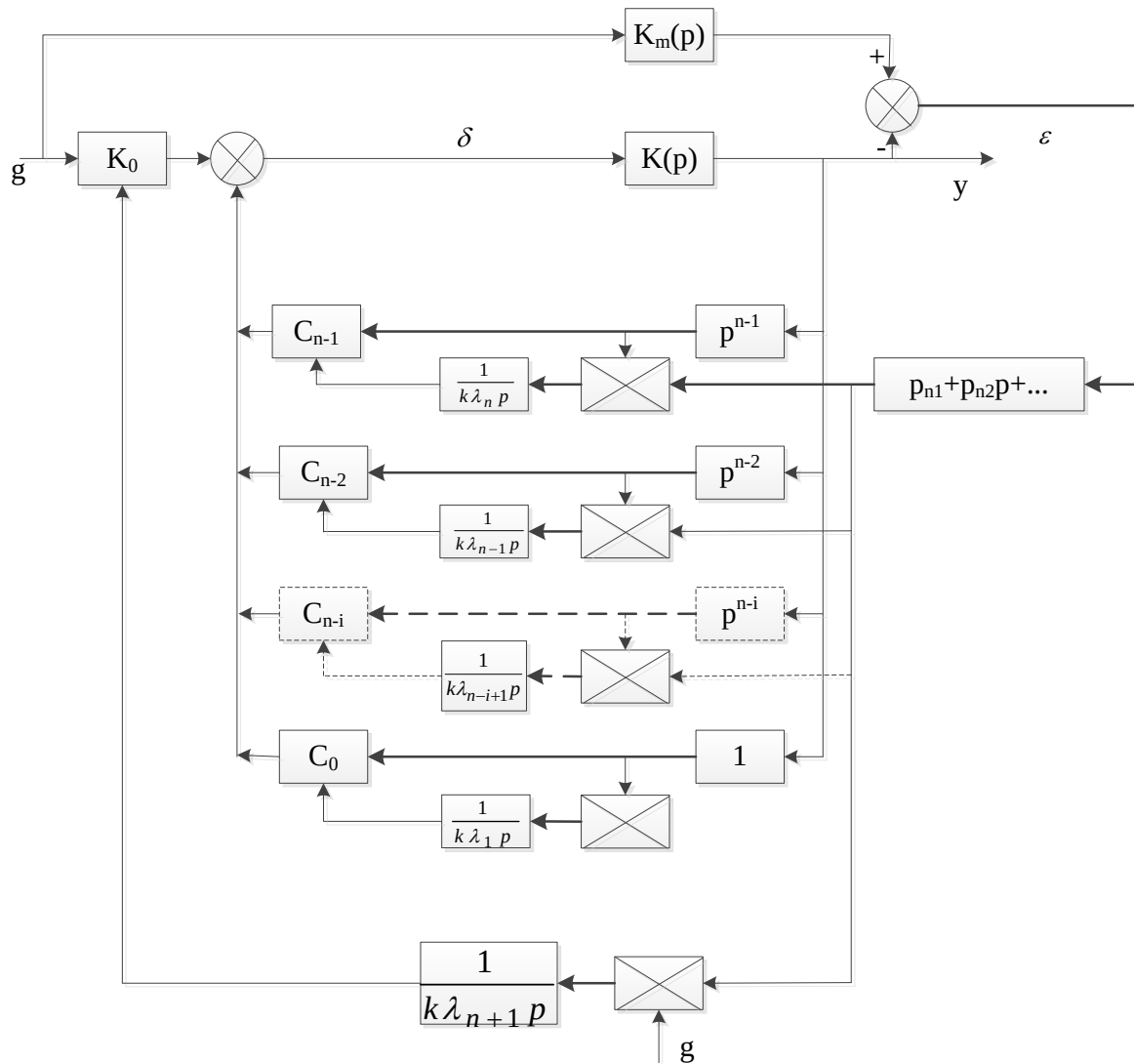


Рис. 5.2. – Структурна схема АС із еталонною моделлю і параметричним настроюванням

5.3 Метод сигнального настроювання системи

Залежно від призначення і умов роботи сигнальні ланцюги настроювання в розглянутих системах можуть використовуватися як самостійно, так і в комбінації з іншими контурами настроювання.

Нижче розглядається процедура побудови системи із сигнальним настроюванням на основі другого методу Ляпунова, який дозволяє врахувати нестационарність основної системи й деякі нелінійності, наприклад, обмеження на керуючий вплив.

Нехай ОК, що включає всі інерційності основної системи, описується рівнянням:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} = k(t) \Phi(x), \quad (5.51)$$

де $\Phi(x)$ — нелінійна функція з насиченням, що задовольняє умовам

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$x\Phi(x) > 0 \quad \text{при } x \neq 0;$$

$$\Phi(x) = M \quad \text{при } x \geq c;$$

$$M = \text{const}; \quad c = \text{const}.$$

Межі зміни змінних коефіцієнтів вважаються відомими

$$\left. \begin{aligned} k_{\min} &\leq k(t) \leq k_{\max}; \\ a_{0\min} &\leq a_0(t) \leq a_{0\max}; \\ &\dots \\ a_{(n-1)\min} &\leq a_{n-1}(t) \leq a_{(n-1)\max}. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Рівняння моделі зручно представити у формі (5.31)

$$y_M^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i y_M^{(i)} = k_M g, \quad (5.53)$$

де g — вхідний сигнал.

Віднімаючи від (5.53) рівність (5.51), і використовуючи позначення (5.32), знаходиться рівняння помилки системи

$$\varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i(t)] y^{(i)} + k_M g - k(t) \Phi(x), \quad (5.54)$$

яке, згідно (5.15) і (5.16), можна представити в матричній формі

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{U}. \quad (5.55)$$

Функція Ляпунова вибирається у вигляді квадратичної форми фазових координат

$$V = \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X},$$

де $\mathbf{P}$ — симетрична матриця (5.43).

Повна похідна функції Ляпунова, відповідно до (5.55), має вигляд:

$$\dot{V} = \mathbf{X}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{X} + 2 \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U}. \quad (5.56)$$

Якщо $\mathbf{A}$ — неособлива матриця, то справедлива рівність

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}. \quad (5.57)$$

Матрицю $\mathbf{Q}$ при синтезі АС доцільно вибрати діагональною

$$\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|_1^n, \quad q_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \quad (5.58)$$

Другий доданок у правій частині рівняння (5.56), з врахуванням (5.55), приймає вигляд:

$$2 \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} = 2(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n)u_0. \quad (5.59)$$

Якщо вибрати

$$u_0 = -h \operatorname{sign}(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n), \quad (5.60)$$

де

$$0 \leq h \leq \infty; \\ \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

то досягається непозитивність розглянутого виразу

$$2 \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} \leq 0. \quad (5.61)$$

У такому випадку похідна функції Ляпунова (5.56) непозитивна й забезпечується стійкість руху основної системи щодо руху ЕМ. З врахуванням (5.55) вираз (5.60) перетвориться до вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + k_M \delta + k_M y - k(t) \Phi(\delta + z) = \\ = -h \operatorname{sign}(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n), \end{aligned} \quad (5.62)$$

де

$$g = \delta + y, \quad x = \delta + z.$$

Знак отриманого виразу буде визначатися знаком функції $\Phi(\delta + z)$, якщо

$$|\Phi(\delta + z)| \geq \left| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)}}{k(t)} \right|_{\max} + \left| \frac{k_M y}{k(t)} \right|_{\max} + \left| \frac{k_M \delta}{k(t)} \right|_{\max}. \quad (5.63)$$

Підставляючи нелінійну функцію як добуток двох співмножників

$$\Phi(\delta + z) = \eta(\delta + z) \times (\delta + z) \quad (5.64)$$

і, враховуючи (5.63) при обмежених сигналах δ і z , умову (5.60) можна записати в наступному виді

$$|z| \geq \left| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)}}{k(t)} \right|_{\max} + \left| \frac{k_M y}{k(t)} \right|_{\max} + \left| \frac{k_M \delta}{k(t)} \right|_{\max} + |\delta|_{\max}. \quad (5.65)$$

$$\text{sign } z = \text{sign } (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n). \quad (5.66)$$

Вирази (5.65) і (5.66) дозволяють знайти алгоритм настроювання

$$z \geq \{B_0|y| + B_1|y^{(1)}| + \dots + B_{n-1}|y^{(n-1)}| + C_0|\delta|\} \text{sign } (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n), \quad (5.67)$$

де

$$B_0 = \left| \frac{a_0(t) - b_0}{k(t)\eta} \right|_{\max}; \quad B_1 = \left| \frac{a_1(t) - b_1}{k(t)\eta} \right|_{\max}; \quad \dots, \\ B_{n-1} = \left| \frac{a_{n-1}(t) - b_{n-1}}{k(t)\eta} \right|_{\max}; \quad C_0 = \left| \frac{k_M}{k(t)\eta} + 1 \right|_{\max}.$$

Для забезпечення безперервності розв'язку функцію знака $\text{sign } (\cdot)$ в (5.67) слід замінити функцією насичення

$$\text{sat } (\chi k_1) = \begin{cases} 1, & \chi k_1 > 0; \\ \chi k_1, & |\chi k_1| \leq 1; \\ -1, & \chi k_1 < 0, \end{cases} \quad (5.68)$$

де k_1 — постійний коефіцієнт, який бажано вибирати більшим, з метою наближення до релейного керування. В силу (5.68) вираз (5.67) перетвориться до вигляду:

$$z \geq \{B_0|y| + B_1|y^{(1)}| + \dots + B_{n-1}|y^{(n-1)}| + C_0|\delta|\} \text{sat} [k_1(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n)]. \quad (5.69)$$

Враховуючи раніше введене позначення $x_{i+1} = \varepsilon^{(1)}$, на основі (5.69) можна одержати:

$$z \geq \{B_0|y| + B_1|y^{(1)}| + \dots + B_{n-1}|y^{(n-1)}| + C_0|\delta|\} \text{sat} [k_1(p_{n1}\varepsilon + p_{n2}\varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn}\varepsilon^{(n-1)})]. \quad (5.70)$$

На рис. 5.3 представлена структурна схема АС, складена відповідно до отриманого алгоритму (5.70).

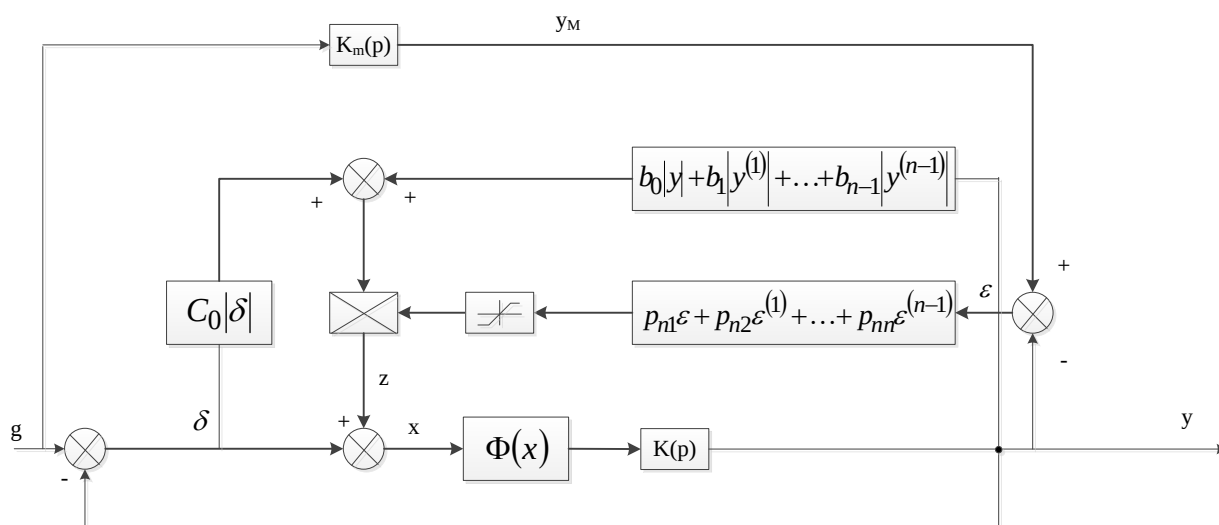


Рис. 5.3. – Структурна схема АС з сигнальним настроюванням

Слід зазначити, що технічна реалізація синтезованої АС відповідно до (5.70), через наявність у її складі модульних і множних елементів, є важко реалізованою задачею. Однак у ряді випадків, наприклад, при обмежених сигналах, вдається спростити алгоритм настроювання без порушення умов стійкості. Тоді співвідношення (5.70) прийме вигляд

$$z \geq k_y \text{sat} [k_1(p_{n1}\varepsilon + p_{n2}\varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn}\varepsilon^{(n-1)})], \quad (5.71)$$

де

$$k_y = \{B_0|y| + B_1|y^{(1)}| + \dots + B_{n-1}|y^{(n-1)}| + C_0|\delta|\}_{\max}.$$

Використання (5.71) приводить до значного спрощення структури АС (рис. 5.4) і її технічної реалізації.

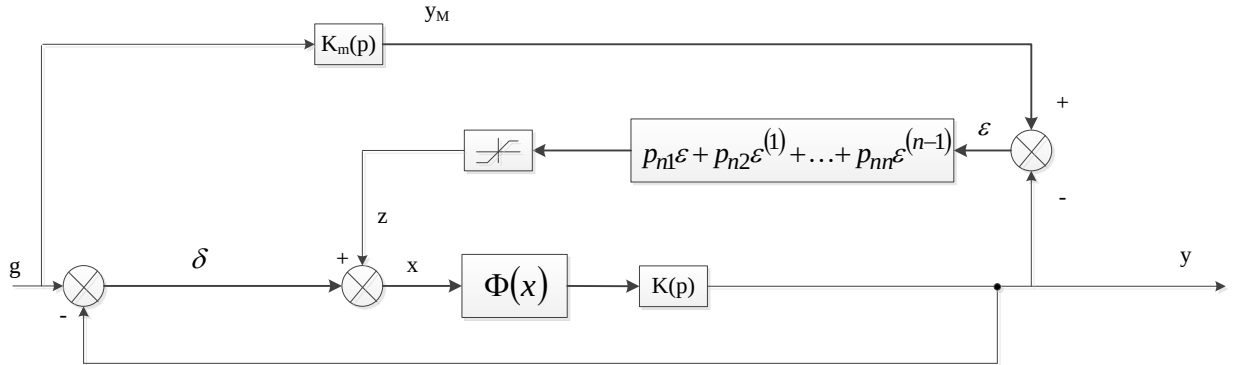


Рис. 5.4. – Структурна схема АС зі спрощеним контуром настроювання

Як вказувалося вище, в АС із сигнальним настроюванням при широкому діапазоні зміни параметрів об'єкта не вдається забезпечити необхідний ступінь інваріантності до параметричних порушень. Крім того, виникають ускладнення в забезпеченні умови стійкості руху (5.65) при інтенсивних вхідних сигналах. Для подолання зазначених труднощів доцільно в розглянуту систему ввести додаткові контури параметричного настроювання для стабілізації її деяких істотних параметрів, наприклад, коефіцієнта підсилення.

5.4 Метод комбінованого настроювання системи

Другий метод Ляпунова дозволяє розробити процедуру синтезу АС із комбінованим настроюванням. У зв'язку із цим рівняння, що описує динамічні властивості основної системи, представляється в наступному виді:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = k(t)k_c x, \quad (5.72)$$

де k_c — коефіцієнт посилення, що перебудовується.

Відповідно до (5.53) і (5.72) можна скласти рівняння помилки

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)} + b_{n-1}\varepsilon^{(n-1)} + \dots + b_0\varepsilon = [a_{n-1}(t) - b_{n-1}]y^{(n-1)} + \\ + [a_{n-2}(t) - b_{n-2}]y^{(n-2)} + \dots + [a_0(t) - b_0]y + k_M g - k(t)k_c x. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Отриманий вираз легко приводиться до вигляду:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} &= \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + \delta [k_M - \mu k(t) k_c] + \\ &+ \mu k(t) k_c \delta - k(t) k_c x + k_M y, \end{aligned} \quad (5.74)$$

де μ — деяка позитивна постійна; $\delta = g - y$ — сигнал помилки.

З урахуванням позначення

$$\varepsilon^{(i)} = x_{i+1}, \quad (5.75)$$

(5.74) перепишеться в матричній формі

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{U},$$

де

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_0 \end{pmatrix}; \quad (5.76)$$

тут

$$u_0 \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + k_M y + \delta [k_M - \mu k(t) k_c] + k(t) k_c [\mu \delta - x].$$

Вибирається функція Ляпунова у вигляді квадратичної форми фазових координат

$$V = \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X} + \lambda \gamma^2, \quad (5.77)$$

де

$$\gamma = k_M - \mu k(t) k_c; \quad (5.78)$$

λ — позитивна постійна; $\mathbf{P}$ — симетрична матриця (5.40).

Повна похідна за часом функції (5.77) має вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = -\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} + 2\lambda \dot{\gamma} \gamma, \quad (5.79)$$

де $-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$ — діагональна матриця (5.46).

Два останні доданки у правій частині рівності (5.79) з врахуванням (5.76) можна записати в такий спосіб

$$\begin{aligned} 2\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} + 2\lambda \dot{\gamma} = 2(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots \\ \dots + p_{nn}x_n) \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + k_M + k(t)k_c(\mu\delta - x) \right\} + \\ + 2(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) \delta \gamma + 2\lambda \dot{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Як впливає з останнього рівняння, похідна функції Ляпунова (5.79) буде неперервною, якщо виконуються дві умови

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + k_M y + k(t)k_c(\mu\delta - x) = \\ = -h \operatorname{sign}(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) \delta \gamma + 2\lambda \dot{\gamma}, 0 \leq h \leq \infty, \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$2(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) \delta \gamma + 2\lambda \dot{\gamma} \leq 0. \quad (5.82)$$

З рівняння (5.81), відповідно до процедури, викладеної в розділі 5.3, можна представити алгоритм сигнального настроювання

$$\begin{aligned} z \geq \{B_0|y| + B_1|y^{(1)}| + \dots + B_n|y^{(n-1)}| + C_0|\delta|\} \operatorname{sign}(p_{n1}x_1 + \\ + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n), \end{aligned} \quad (5.83)$$

де

$$\begin{aligned} B_0 = \left| \frac{a_0(t) - b_0 + k_M}{k(t)k_c} \right|_{\max}; \quad B_1 = \left| \frac{a_1(t) - b_1}{k(t)k_c} \right|_{\max}; \quad \dots; \\ B_{n-1} = \left| \frac{a_{n-1}(t) - b_{n-1}}{k(t)k_c} \right|_{\max}; \quad C_0 = |\mu + 1|_{\max}. \end{aligned}$$

Для забезпечення безперервного розв'язку у виразі (5.83) слід замінити функцію знака функцією насичення

$$\begin{aligned} z \geq \{B_0|y| + B_1|y^{(1)}| + \dots + B_n|y^{(n-1)}| + C_0|\delta|\} \operatorname{sat} [k_1(p_{n1}\varepsilon + \\ + p_{n2}\varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn}\varepsilon^{(n-1)})]. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Рівняння (5.82) визначає алгоритм настроювання коефіцієнта підсилення системи

$$\dot{\gamma} \leq -\frac{1}{\lambda} \delta (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n). \quad (5.85)$$

З іншого боку, в силу (5.78), при квазістаціонарній зміні коефіцієнта підсилення $k(t)$, впливає:

$$\dot{\gamma} = -\mu k \dot{k}_c. \quad (5.86)$$

Прирівнюючи (5.85) і (5.86), можна одержати:

$$k_c \geq k_H \delta [p_{n1}\varepsilon + p_{n2}\varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn}\varepsilon^{(n-1)}], \quad (5.87)$$

де $k_H = \frac{1}{\lambda \mu k}$ — коефіцієнт настроювання системи.

При синтезі АС із ЕМ і комбінованим настроюванням (рис. 5.5) можна врахувати обмеження керуючого впливу, якщо в праву частину рівняння (5.72) включити нелінійну функцію з насиченням

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)} = k(t)k_c \Phi(x). \quad (5.88)$$

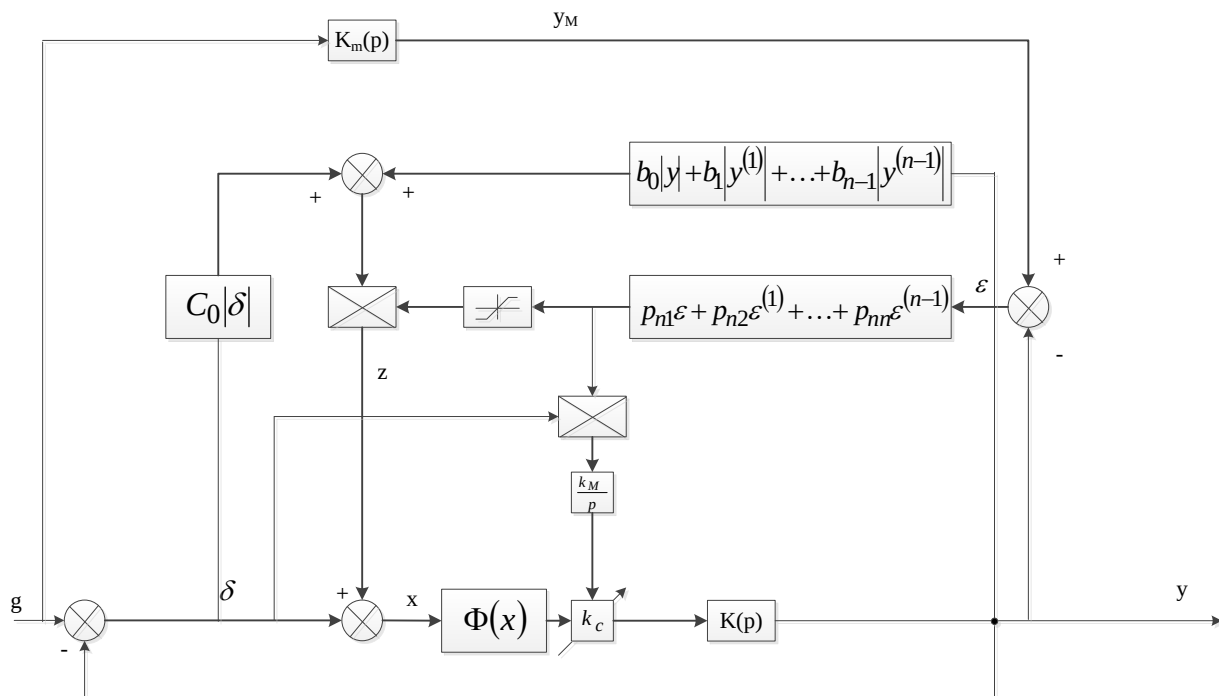


Рис. 5.5 – Структурна схема АС з комбінованим настроюванням

Далі, діючи відповідно до раніше викладеної методики, можна одержати алгоритм сигнального настроювання

$$z \geq \{B_0|y| + B_1|y^{(1)}| + \dots + B_n|y^{(n-1)}| + C_0|\delta|\} \text{sat} [k_1(p_{n1}\varepsilon + p_{n2}\varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn}\varepsilon^{(n-1)})], \quad (5.89)$$

де

$$B_0 = \left| \frac{a_0(t) - b_0 + k_M}{k(t)k_c\eta} \right|_{\max}; \quad B_1 = \left| \frac{a_1(t) - b_1}{k(t)k_c\eta} \right|_{\max}; \quad \dots; \\ B_{n-1} = \left| \frac{a_{n-1}(t) - b_n}{k(t)k_c\eta} \right|_{\max}; \quad C_0 = \left| \frac{\mu}{\eta} + 1 \right|_{\max}; \quad \eta = \frac{\Phi(\delta + z)}{\delta + z}.$$

Технічна реалізація АС спрощується, якщо (5.89) представити у вигляді:

$$z \geq k_y \text{sat} [k_1(p_{n1}\varepsilon + p_{n2}\varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn}\varepsilon^{(n-1)})], \quad (5.90)$$

де

$$k_y = \{B_0|y| + B_1|y^{(1)}| + \dots + B_n|y^{(n-1)}| + C_0|\delta|\}_{\max}.$$

Алгоритм параметричного настроювання має наступний вигляд:

$$k_c(e) \geq k_H \delta [p_{n1}\varepsilon + p_{n2}\varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn}\varepsilon^{(n-1)}]. \quad (5.91)$$

Вирази (5.90) і (5.91) дозволяють синтезувати АС (Рис. 5.5), яку можна спростити (рис. 5.6), відповідно до виразу (5.71).

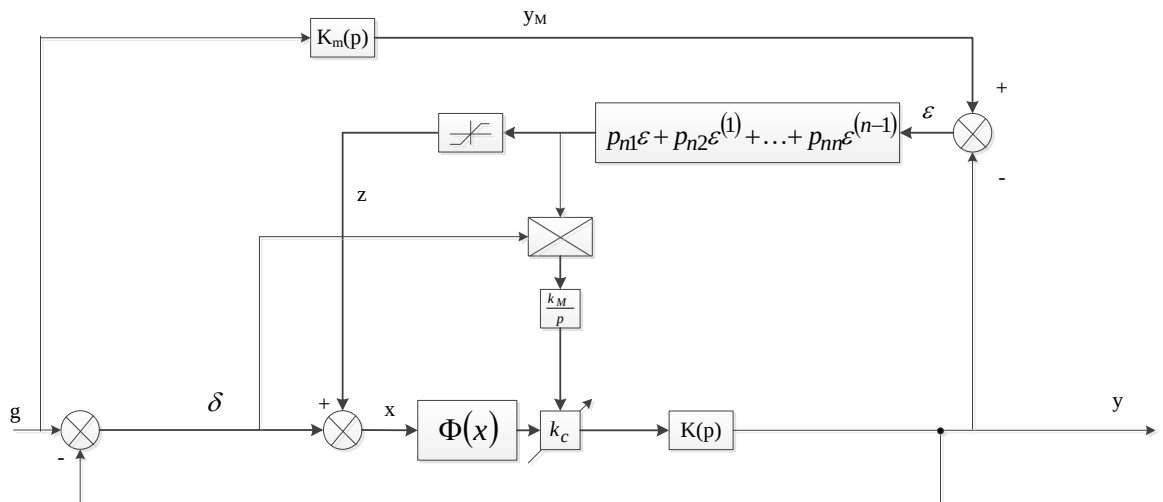


Рис. 5.6 – Структурна схема АС зі спрощеним контуром комбінованого настроювання

5.5 Висновки до п'ятого розділу

Вирішено важливу науково-технічну задачу, яка полягає у синтезі математичних моделей визначеного класу мобільних об'єктів та засобів керування цими об'єктами на основі застосування і удосконалення безпошукових самоналагоджуваних систем з еталонною моделлю, що забезпечує оптимізацію зазначених систем у розумінні найкращого наближення характеристик об'єкта керування та еталонної моделі для ефективного розв'язання прикладних задач. Проведено аналіз математичних моделей типових систем керування та виконано узагальнення їх математичного опису, внаслідок чого запропоновано узагальнену модель, яка, зокрема, визначає вид диференціальних рівнянь, їх коефіцієнти, їх розмірність тощо. Узагальнення математичного опису здійснено з метою уніфікації методів щодо синтезу стратегій адаптивного керування визначеним класом об'єктів. Виконано якісне дослідження узагальненої моделі, що показало можливість переходу до еквівалентних математичних формулювань у випадках апаратної або програмної реалізації законів керування. Сформульовано мету та задачу керування об'єктів та обґрунтовано необхідність адаптації при керуванні ними. Виконано аналіз та порівняльну характеристику існуючих принципів побудови автоматичних систем керування з урахуванням особливостей об'єктів керування. В результаті проведеного аналізу виділено клас адаптивних систем з еталонною моделлю як такий, що забезпечує високу адекватність синтезованого управління (з точністю до відтворення моделлю динаміки реального об'єкта), високу швидкодію (управління формується в реальному масштабі часу) та просту апаратну реалізацію. Досліджено також можливість застосування програмних засобів (програмної платформи Matlab) для розв'язання задачі синтезу адаптивного управління об'єкту, зокрема, при математичній формалізації системи керування у просторі станів. Набув подальшого розвитку метод синтезу законів адаптивного керування визначеним класом об'єктів, а також структур систем керування з еталонною моделлю, що реалізують ці закони. В основу синтезу законів керування та вказаних структур покладено властивість виконання сталості процесу самоналагоджування (яка визначається за другим методом Ляпунова). Це

дозволило врахувати обмеження на управляючий вплив. Задачу синтезу розв'язано для систем з параметричним настроюванням (тобто активним настроюванням, коли ефект самонастроювання досягається за рахунок зміни параметрів пристрою управління), з сигнальним настроюванням (тобто пасивним настроюванням, коли ефект самонастроювання забезпечується за рахунок компенсуючих сигналів), а також з комбінованим настроюванням, що забезпечує достатню динамічну точність при простій апаратній реалізації. Виконано оптимізацію синтезованих систем керування з еталонною моделлю у розумінні найкращого наближення характеристик об'єкта керування та еталонної моделі, що забезпечує мінімізацію часу узгодження вихідних координат об'єкту та еталонної моделі (системи, оптимальні за швидкодією).

Таким чином, одержав подальший розвиток метод синтезу стратегій і структур адаптивного керування ММ на основі вдосконалення безпошукових АС із еталонною моделлю. В основу синтезу законів керування і структур АС покладена властивість задоволення їх стійкості, обумовлене за другим методом Ляпунова.

Використання в ході синтезу стратегій і структур АС функцій Ляпунова дозволяє врахувати нестационарність основного контуру АС (тобто такого, що включає реальний модельований об'єкт), а також деякі нелінійності, наприклад, обмеження на керуючий вплив.

Задача синтезу вирішена для систем з параметричним настроюванням (тобто активним настроюванням, коли ефект адаптації досягається за рахунок зміни параметрів керуючого пристрою), із сигнальним настроюванням (тобто пасивним настроюванням, у яких ефект самонастроювання досягається за рахунок сигналів, що компенсують), а також з комбінованим настроюванням. Особливість останніх полягає в тому, що вони забезпечують достатню динамічну точність при простій апаратній реалізації.

РОЗДІЛ 6. МОДЕЛЬНО-ОРІЄНТОВАНІ МЕТОДИ І СИСТЕМИ ДІАГНОСТУВАННЯ

6.1 Задачі ідентифікації і діагностики комп'ютерно-інтегрованих систем (на прикладі силових енергетичних установок)

Силові енергетичні установки являють собою високонапружені інженерні ансамблі високої складності, в яких використовуються передові наукові досягнення і реалізуються нові можливості сучасної техніки. Повний математичний опис таких технічних об'єктів досягається складними системами диференціальних рівнянь із частинними похідними з досить непростими граничними умовами. Розв'язання подібних систем рівнянь досить трудомістке і вимагає таких витрат машинного часу, що практично використовується лише для початкового вивчення динамічних властивостей і для остаточної перевірки отриманих законів і алгоритмів моделювання і керування (і це в тому випадку, якщо взагалі вдається знайти стійкі методи чисельного розв'язання таких систем, що, як показує практика, не завжди досягається) [18, 42, 64, 196].

Переважаюча частина досліджень динаміки об'єктів і пошук законів управління, а також попередня діагностика проводяться за допомогою більш простих систем диференціальних рівнянь, як правило, звичайних, одержуваних більш-менш глибоким спрощенням вихідної повної системи [69, 87, 231]. Такі спрощені моделі, втрачаючи другорядні властивості вихідної повної системи (хоча, може бути, і важливі для розуміння тонкощів динаміки і глибоких рівнів діагностики), проте повинні зберегти її істотні властивості і властиві їй головні динамічні ефекти. Очевидно, що одержання таких спрощених математичних описів є складною проблемою, яка не має стандартної методики і потребує щораз індивідуального підходу, успіх якого багато в чому визначається інтуїцією дослідників [73, 192, 221]. Тим більшу цінність представляють наявні і розроблювані методи спрощення конкретних складних систем диференціальних рівнянь, Методиці спрощення математичного опису присвячується все більше публікацій [26, 45, 76, 88].]

Коло задач, покладене на системи автоматичного управління, надзвичайно

розширилося із появою спеціалізованих процесорів. Це дозволяє проводити не тільки реєстрацію порушень і запобігання аварійним ситуаціям, але також і досить глибокий діагноз стану енергетичних установок. Подібна можливість, природно, потребує розробки як алгоритмів діагностики технічного стану різних елементів, діагностики процесів і режимів систем, так і принципів побудови самої системи діагностики, яка повинна ввійти складовою частиною в загальну інформаційно-керуючу систему таких об'єктів [38, 47, 48, 80, 82, 93].

Модельний підхід до розв'язання задач ідентифікації і діагностики. Як відомо [108, 109, 110], в задачі ідентифікації і у задачі діагностики ми маємо справу з недовизначеними системами об'єкт-модель. Різниця полягає в тому, що в задачі ідентифікації недовизначеною є модель (у той час як об'єкт вважається в достатній мірі вивченим) і зусилля дослідників, спрямовані на довизначення моделі [185]. У задачі ж діагностики недовизначеність, яку слід пояснити, лежить в об'єкті. Але і в цьому випадку, як і при ідентифікації, зміни вносяться в модель із таким розрахунками, щоб властивості моделі виявилися ідентичними властивостям об'єкта. Ті зміни, які необхідно внести в модель для досягнення ідентичності з об'єктом при їх фізичній і інженерній інтерпретації, і дають підстави для постановки діагнозу [186]. Методично обидві задачі вирішуються практично однаково, і задачу діагностики можна розглядати як задачу ідентифікації якогось нового об'єкта, який відрізняється від відомого новими властивостями параметричного або інженерно-фізичного характеру, породженими або нерозрахованою зміною характеристик, або виникненням нерозрахованих конструктивних або фізичних ефектів.

Математична постановка задачі може бути сформульована в такий спосіб . Нехай є математична модель об'єкта енергетичної установки для розробки яких залучається вся апіорна інформація про об'єкт керування: конструкторська і технічна документація, дані по теплофізичним, міцносним і електричним властивостям конструкційних матеріалів, вагові зведення, дані по потокам речовини і енергії, гідродинамічні характеристики гідравлічних трактів, моменти інерції обертових частин тощо [50, 143, 203].

При цьому намагаються врахувати всі істотні фізичні процеси в об'єкті і всі його істотні конструктивні особливості, завдяки чому визначається вид і число рівнянь моделі, а також граничні і початкові умови. Однак коефіцієнти рівнянь, принаймні деякі, залишаються все-таки недовизначеними. Для їх довизначення виявляється необхідним залучати експериментальні дані. Іноді буває досить даних по стаціонарних режимах, але, як правило, доводиться використовувати дані по динамічних режимах: досліджувати відгуки об'єкта на ті або інші збурювання [56, 69, 71, 226].

Таким чином, задачу ідентифікації [160] можна сформулювати наступним чином. Нехай є модель установки, що задається оператором $B = \{B_1, B_2\}$:

$$B_1 = \begin{cases} F_i \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \frac{\partial u_i}{\partial y_i}, \frac{\partial u_i}{\partial z_i}, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{m_i} u_i}{\partial t^{m_i}} \right) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, \alpha, u_i = u_i(q_i); \\ q_i = \{x_i, y_i, z_i, t\} \in R_i^{K_i}, \\ \psi_j \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^{r_j} u_i}{\partial t^{r_j}} \right) \Big|_{q_i \in S_p} = \varphi_i(q_i) \Big|_{q_i \in S_p}, \\ p = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, \gamma, K_i \leq 4, \end{cases} \quad (6.1)$$

де S_p — граничні замкнені багатообразності в просторах, розмірність яких менше K_i ; $\varphi_i(q_i)$ — задані функції, певні на багатообразностях S_p ; m і r визначають порядок вищих похідних за часом.

Оператор B_1 , що є частиною математичної моделі установки, визначає загальний вид граничної задачі: систему рівнянь із частинними похідними і з відповідними граничними і початковими умовами.

Аналогічно задача Коші, обумовлена спрощеною моделлю, тобто системою звичайних диференціальних рівнянь, задається оператором B_2 :

$$B_2 = \begin{cases} \Phi_i(t, u_i, u'_i, u''_i, \dots, u_i^{(n_i)}) = 0, \\ i = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \beta, \\ u_i|_{t=0} = u_{i0}, u'_i|_{t=0} = u'_{i0}, u_i^{(n_i-1)}|_{t=0} = u_{i0}^{(n_i-1)}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Сукупність просторів утворює простір SN , $\{R_i^{K_i}\} = S^N$, тобто $\sum_{i=1}^{\beta} K_i = N$.

Розв'язком системи рівнянь $B(i) = 0$ є деякі вектор-функції u^* , що відповідають певним сукупностям початкових і граничних умов. Ці вектор-функції перетворюють систему рівнянь (6.1), (6.2) у тотожність: $B(u^*) \equiv 0$. Очевидно, що $u^* = \{u_i^*\}, i = 1, 2, \dots, \beta$.

Задача ідентифікації. Нехай є експериментальні динамічні процеси, отримані при випробуваннях установки $q_{\mathcal{E}i} \in Q_{\mathcal{E}}$ ($Q_{\mathcal{E}}$ — виділений клас динамічних процесів, $i = 1, 2, \dots, h$), які характеризуються вектор-функцією вимірюваних координат $q_{\mathcal{E}i} \rightarrow \mu_i(t), \mu_i(t) = \{\mu_{ij}(t)\}, \mu_i(t) \in M$ де $j = 1, 2, \dots, \rho; M$ — виділений клас вимірюваних функцій, що відповідають $Q_{\mathcal{E}}$. При цьому нехтуємо помилками вимірів і будемо вважати μ_i точними значеннями.

Щоб порівняти результати вимірів з результатами розрахунків, що виходять із розв'язку рівнянь моделі (6.1), (6.2), необхідно визначити сукупність граничних і початкових умов, щоб вони відповідали експериментальним умовам, що породжують процеси $q_{\mathcal{E}i}$. Поставлені в такий спосіб граничні задачі породять розв'язки системи $B(U) = 0 \rightarrow U_i^*$, які будуть відповідати $q_{\mathcal{E}i}$. Позначимо процеси, відповідні до розв'язків i^* , а їх множину — $Q = \{q_i\}$.

Далі виникає задача порівняння елементів множин Q і $Q_{\mathcal{E}}$. Процеси $q_{\mathcal{E}i}$ характеризуються вимірюваними координатами $\mu_i(t) \in M$, $\mu_i(t)$ визначені на просторі вимірюваних координат S_z . Цей простір, природно, уже входить у простір координат, що розраховуються, $S^N : S^z \in S^N$ системи. Введемо оператор P_y , що переводить розв'язки U_i^* у вектор-функції вимірюваних або обчислюваних координат y_i :

$$P_y(U_i^*) = Y_i(t), Y_i(t) \in M.$$

Природно, що вектор-функції Y_i мають ту ж розмірність, що і вектор-функції вимірюваних координат об'єкта μ_i : $Y_i(t) = \{y_{ij}(t)\}$, $j = 1, 2, \dots, \rho$. Утворюємо величину $\max_{t,j} |y_{ij}(t) - \mu_{ij}(t)| = \omega_i \in \Omega$, яка буде мірою неточності моделі B у процесі $q_{\mathcal{D}i}$.

Задача ідентифікації полягає в такій зміні моделі B , щоб міра неточності моделі по всіх експериментальних процесах $q_{\mathcal{D}i} \in Q_{\mathcal{D}}$ була б менше заданої величини: $\omega_i < \varepsilon$.

Нехай є деяка конкретна модель об'єкта, що задається оператором B , яка характеризується певними коефіцієнтами $a_{ki}, \bar{a}_{lj}, \bar{\bar{a}}_{ki}$:

$$B_1 = \begin{cases} F_i \left(a_{1i} u_i, a_{2i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, a_{3i} \frac{\partial u_i}{\partial y_i}, \dots, a_{ki} \frac{\partial^{m_i} u_i}{\partial t^{m_i}} \right) = 0, \\ \psi_j \left(\bar{a}_{1j} u_i, \bar{a}_{2j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \dots, \bar{a}_{lj} \frac{\partial^{r_j} u_i}{\partial t^{r_j}} \right) \Big|_{q_i \in S_p} = \varphi_i(q_i), \\ i = 1, 2, \dots, \alpha, j = 1, 2, \dots, \gamma. \end{cases}$$

$$B_2 = \begin{cases} \Phi_i(t, a_{1i} u_i, a_{2i} u'_i, \dots, a_{n_i+1,i} u_i^{(n_i)}) = 0, \\ i = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \beta, \\ u_i|_{t=0} = u_{i0}, u'_i|_{t=0} = u'_{i0}, u_i^{(n_i-1)}|_{t=0} = u_{i0}^{(n_i-1)}. \end{cases} \quad (6.3)$$

Множина $A = \{a\}$ представляє коефіцієнти при невідомих і їх похідних у рівняннях (6.3), обчислені з врахуванням всіх відомих конструктивних особливостей установки і всіх фізичних процесів, що діють у ній.

Першою задачею ідентифікації буде задача «підгонки» коефіцієнтів математичної моделі B . Це задача може бути сформульована в такий спосіб. Виділимо серед коефіцієнтів $A = \{a\}$ моделі B ту підмножину «сумнівних» коефіцієнтів $A_\lambda = \{a_\lambda\}$, $\lambda = \alpha, \beta, \dots, \rho$, значення яких не можуть бути обчислені без залучення експериментальних даних. Такими можуть бути, наприклад,

коефіцієнти, обумовлені гідравлічними опорами трактів теплоносія, температурні залежності реактивності реактора і т.п. Уточнення значень цих коефіцієнтів з врахуванням даних експериментів q_i і повинне звести до припустимої величини розбіжності ω_i теоретичних і експериментальних залежностей. Таким чином, ми будемо шукати нові значення «сумнівних» коефіцієнтів $A_\lambda' = \left\{ a_\lambda' \right\}, \lambda = \alpha, \beta, \dots, \rho$.

Природно., що зміни коефіцієнтів моделі B приведе до зміни величин ω_i , які приймуть значення ω_i' :

$$\omega_i' = \omega_i'(A_\lambda').$$

Нехай область можливої зміни значень коефіцієнтів $A_\lambda' \in \Omega$, тобто $A_\lambda' \in \Omega$. Тоді виникають наступні задачі ідентифікації.

1. Відшукування області $\bar{\Omega} \in \Omega$, у якій ω_i' лежить у заданих межах, тобто потрібно знайти область Ω , таку, що якщо $\bar{A}_\lambda' \in \bar{\Omega}$, то

$$\max_i [\omega_i'(A_\lambda')] < \varepsilon. \quad (6.4)$$

2. Відшукування $\omega_{\min}$, тобто таких $\tilde{A}_\lambda' \in \Omega$, на яких досягається

$$\omega_{\min} = \min_{\Omega} \left[\max_i (\omega_i(A_\lambda')) \right]$$

Будь-який набір коефіцієнтів A_λ' вирішує задачу ідентифікації. Набір коефіцієнтів A_λ' дає «найкращу» ідентифікацію, досягну в моделі B .

Якщо ж нерівність (6.95) не може бути досягнута, тобто якщо $\omega_{\min} = \min_{\Omega} \left[\max_i (\omega_i(A_\lambda')) \right] > \varepsilon$, то задача ідентифікації не вирішується підбором коефіцієнтів в операторі B . Це значить, що при розробці моделі не врахований який-небудь істотний фізичний процес, що протікає в установці, або ж яка-небудь її істотна конструктивна особливість. Їх врахування приведе до модифікації оператора B . В результаті одержимо новий оператор B' , який буде відрізнятися від оператора B або наявністю нових членів у рівняннях, або наявністю нових рівнянь:

$$B'_1 = \begin{cases} F_i \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \frac{\partial u_i}{\partial y_i}, \dots, \frac{\partial^{p_i} u_i}{\partial t^{p_i}}, \frac{\partial^{p_i+1} u_i}{\partial x_i^{p_i+1}}, \dots, \frac{\partial^{m_i+v_i} u_i}{\partial t^{m_i+v_i}} \right) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, \Theta, \Theta + 1, \dots, \alpha + \beta, \\ q_i = \{x_i, y_i, z_i, t\} \in R_i^{K_i}. \\ \left. \psi_j \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^{r_j+\eta_j} u_i}{\partial t^{r_j+\eta_j}} \right) \right|_{q_i \in S_p} = \varphi_i(q_i). \end{cases}$$

$$B'_2 = \begin{cases} \Phi_i(t, u_i, u'_i, \dots, u_i^{(\alpha_i)}, \dots, u_i^{(n_i+\pi_i)}) = 0, \\ i = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \beta, \\ u_i|_{t=0} = u_{i0}, u_i^{(n_i+\pi_i-1)}|_{t=0} = u_{i0}^{(n_i+\pi_i-1)}, \\ i = \alpha + \delta + 1, \alpha + \delta + 2, \dots, k + 1, \dots, \beta + \chi. \end{cases}$$

Для цього нового оператора B' при граничних і початкових умовах, відповідних до обраних процесів $q_i \in Q$, виходять нові розв'язки $U_i^{*'} :$

$$B' \left(U_i^{*'} \right) \equiv 0$$

які породять нові вектор-функції вимірюваних координат $Y_i'(t)$ і відповідно нові значення $\omega'' = \max_{t,j} |y_{ij}'(t) - \mu_{ij}(t)|$, після чого застосування методу підгонки коефіцієнтів, як правило, вирішує задачу ідентифікації. Шукаємо $\bar{\bar{A}}_\lambda' = \{\bar{\bar{a}}_\lambda'\}$ $\lambda = \alpha, \dots, \rho$, де $\bar{\bar{A}}_\lambda' \in \Omega$, такі, що $\max_i [\omega_i''(\bar{\bar{A}}_\lambda')] < \varepsilon$, або «найкращий» набір коефіцієнтів $\tilde{\tilde{A}}_\lambda' \in \Omega$, при якому

$$\omega_{\min}(\tilde{\tilde{A}}_\lambda') = \min_{\Omega} \left[\max_i (\omega_i''(\bar{\bar{A}}_\lambda')) \right].$$

Іноді задача ідентифікації виникає при спрощенні моделі об'єкта. У цьому випадку структура спрощеної моделі, тобто число і характер рівнянь, буває відома і потрібно визначити коефіцієнти рівнянь, порівнюючи відгуки спрощеної системи з відгуками повної системи рівнянь на однакові вхідні впливи. Задача ця вирішується в такий же спосіб, що як і попередня, тільки порівнюються динамічні

процеси в ідентифікованій (спрощеній) і вихідній (повній) системах рівнянь.

Задача діагностики. Задача діагностики [116] ставиться тоді, коли в об'єкті виникають відхилення від розрахункових режимів роботи і необхідно зрозуміти їх походження. Для цього вносяться певні зміни в модель об'єкта, мета яких — привести у відповідність поведінку моделі з поведінкою об'єкта. У більш простих випадках для цього досить змінити коефіцієнти рівнянь, не міняючи їх структури.

У більш складних випадках доводиться змінювати і структуру моделі. Методика досліджень, як і математична постановка задачі, у цих випадках не відрізняється від таких для задачі ідентифікації. Відмінність полягає лише в тому, що до появи нерозрахованих ситуацій модель об'єкта була ідентифікована і, отже, необхідність внесення в неї змін викликана якими-небудь змінами в об'єкті.

Трохи по-іншому може бути поставлена задача діагностики перехідних режимів досліджуваних об'єктів: процесів пуску, зупинки і зміни режимів роботи. Такі динамічні режими мають, як правило, характерні «динамічні ефекти», під якими ми розуміємо характерні риси перехідних процесів, до яких можна віднести, наприклад, загальний час пускового процесу, наявність або відсутність перерегулювання координат системи, просторові і тимчасові градієнти, послідовність протікання фізичних процесів і динамічних явищ і їх залежність від неточності задання початкового стану установки і т.п. Природно, що розрахункова система характерних динамічних ефектів e залежить від початкового стану $U_0 \in U$ в прийнятій математичній моделі $B = \{B_1, B_2\}$ і від обраного керування $w_i(t) \in W$:

$$e_i = e_i(B, U_0, W), i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким чином, виникає попередня задача визначення системи характерних динамічних ефектів: для оператора B , класу початкових умов U_0 і обраного класу керувань W визначити систему характерних динамічних ефектів $E = \{e_i(B, U_0, W)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, що різні класи початкових умов і різні класи керувань породять різні системи динамічних ефектів.

Після визначення системи характерних динамічних ефектів задача діагностики динамічних режимів може бути сформульована в такий спосіб.

Нехай маємо оператор $B = \{B_1, B_2\}$, і нехай U^* є розв'язок рівняння $B(U)$ для граничних і початкових умов і керувань, які належать до виділених класів $u_{0i} \in U_0, w_i \in W$.

Нехай функція U^* містить систему ефектів $E = \{e_i\}, i = 1, 2, \dots, n$. Нехай далі з експерименту впливає наявність у досліджуваних динамічних режимах динамічних ефектів $\{e_\alpha\} \in E, \alpha = 1, 2, \dots, m$. Потрібно змінити модель B до $B' = \{B'_1, B'_2\}$ таким чином, щоб розв'язок системи рівнянь $B'(U) = 0$ для класу початкових умов U_0 і класу керувань W містив ефекти $\{e_\alpha\}$, тобто система ефектів E , відповідна до оператора B' , містила ці ефекти:

$$E' = \{e_i\}, i = 1, 2, \dots, \alpha, \dots, n.$$

Відшукування такого оператора B , а разом з тим і технічна його інтерпретація і вирішують поставлену задачу діагностики перехідних режимів.

6.2 Аналіз і вибір методів ідентифікації

Створення формалізованих моделей складних динамічних об'єктів пов'язане зі стисканням описової і фактичної інформації. Першим етапом у розв'язанні проблеми є ідентифікація об'єкта досліджень – побудова його математичної моделі за результатами спостережень. Задача ідентифікації формулюється в такий спосіб: за результатами спостережень над вхідними і вихідними змінними об'єкта побудувати оптимальну в деякому змісті модель. Практичне розв'язання задачі ідентифікації являє собою обчислювальну процедуру оцінювання невідомих параметрів математичної моделі, в результаті якої встановлюються закономірності функціонування вихідного об'єкта. [35, 92].

До теперішнього часу в різноманітних областях досліджень накопичений достатній досвід розв'язання задач ідентифікації об'єктів різної природи. Підвищений інтерес дослідників і інженерів до методів ідентифікації обумовлений природнім бажанням ефективної організації функціонування об'єкта в сучасних умовах розвитку комп'ютерно-інтегрованих систем. З метою оцінки конкретних обчислювальних алгоритмів ідентифікації проаналізуємо найбільш часто

застосовувані методи розв'язання задач ідентифікації з порівнянням ряду критеріїв.

У якості об'єкта ідентифікації розглянемо лінійну дискретну систему з одним входом $i(t)$ і одним виходом $y(t)$:

$$\begin{aligned}x(t_{k+1}) &= Fx(t_k) + bu(t_k) + dw(t_k), \\z(t_k) &= h^T x(t_k) + v(t_k),\end{aligned}\tag{6.5}$$

де F — матриця системи розмірності $(n \times n)$; b, h, d — вектор-стовпці розмірності $(n \times 1)$; $x(t_k)$ — n -мірний вектор стану (фазовий вектор); $u(t_k), z(t_k)$ — вхідні, вихідні змінні об'єкта; $w(t_k), v(t_k)$ — випадкові перешкоди і погрішності.

Матриця $F(n \times n)$ визначається через вектор-стовпець $f = (f_1, \dots, f_n)$:

$$F = \begin{bmatrix} \Theta | E \\ f^T \end{bmatrix},$$

де Θ — нульовий вектор розмірності $(n-1)$; E — одинична матриця розмірності $(n_1 \times n_1)$; $n_1 = n - 1$.

Невідомими параметрами, моделі є вектора f і b , при цьому вимір $z(t_k)$ в системі формується за допомогою вектор-рядка h : $h^T = [1, 0, \dots, 0]$.

Якщо об'єкт ідентифікації є повністю керованим і спостережуваним, то його модель можна записати різницеvim рівнянням n -го порядку:

$$z(t_{k+n}) = \sum_{i=1}^n f_i z(t_{k+i-1}) + \sum_{i=1}^n b_i u(t_{k+i-1}) + \sum_{i=1}^{n+1} c_i \xi(t_{k+i-1}),$$

де $c_i \xi(t_{k+i-1}) = d_i w(t_{k+i-1}) - f_i v(t_{k+i-1})$; $c_{n+1} = 1$; $d_{n+1} = 0$; $f_{n+1} = -1$.

Розв'язком цього рівняння є наступний вираз:

$$z(t_k) = h^T F^k x(t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} h^T F^j b u(t_{k-j+1}) + \sum_{j=0}^{k-1} h^T F^j d w(t_{k-j+1}),$$

який для нульових початкових умов і для $b = d$ приймає вигляд

$$z(t_k) = \sum_{j=0}^{k-1} h^T F^j b [u(t_{k-j+1}) + w(t_{k-j+1})] = \sum_{j=0}^{k-1} g(j) [u(t_{k-j+1}) + w(t_{k-j+1})],$$

де $g(j) = h^T F^j b$ — імпульсна перехідна функція моделі.

Взаємо-кореляційний метод. Ідентифікована модель об'єкта — імпульсна

перехідна функція $g(j)$ для $j=0, 1, 2, \dots$ при $x(t_0) = 0$. У якості вхідного сигналу $y(t_j)$ використовується випадковий (бінарний) шум з дискретним інтервалом квантування $t_j = t_0 + j\Delta t_0$.

Відповідно до визначення кореляційної функції

$$\begin{aligned} R_{zu}(m) &= M\{z(t_N)u(t_{N-m})\} = M\left\{\sum_{j=0}^{N-1} g(j)[u(t_{N-j-1}) + w(t_{N-j-1})]u(t_{N-m})\right\} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} g(j)M\{u(t_{N-j-1})u(t_{N-m})\} = \sum_{j=0}^{N-1} g(j)R_{uu}(m-j-1), \end{aligned} \quad (6.6)$$

де $R_{zu}(m)$, $R_{uu}(m-j-1)$ – кореляційні функції; N – число інтервалів спостережень.

Очевидно, що для послідовності $m = 1, 2, \dots, N$ вираз (6.6) можна записати

$$Q_{zu}(N) = \begin{bmatrix} R_{zu}(1) \\ R_{zu}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{uu}(0), \dots, R_{uu}(-N+1) \\ R_{uu}(N-1), \dots, R_{uu}(0) \end{bmatrix},$$

або у векторному вигляді

$$Q_{zu}(N) = Q_{uu}(N)G(N-1). \quad (6.7)$$

Для випадкового бінарного шуму з N дискретними інтервалами і інтенсивністю q^2 маємо

$$Q_{uu}(N) = \begin{bmatrix} q^2, \frac{q^2}{N}, \dots, \frac{q^2}{N} \\ \dots \\ \frac{q^2}{N}, \frac{q^2}{N}, \dots, q^2 \end{bmatrix}; \quad Q_{uu}^{-1}(N) = \begin{bmatrix} 2, 1, \dots, 1 \\ \dots \\ 1, 1, \dots, 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи (6.7) відносно $G(N-1)$, одержуємо

$$G(N-1) = \frac{N}{q^2(N+1)} \begin{bmatrix} 2, 1, \dots, 1 \\ \dots \\ 1, 1, \dots, 2 \end{bmatrix}.$$

Однак взаємні кореляційні функції $R_{zu}(m)$ ($m = 1, 2, \dots, N$) не можуть бути обчислені точно, тому вони визначаються приблизно:

$$\hat{R}_{zu}^M(m) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M z(t_k) u(t_{k-m}).$$

де M — число вимірювань на вході і виході.

Наближена оцінка імпульсної перехідної функції $G(N-1)$ для N інтервалів і M вимірювань ($M > m$) може бути отримана на основі наступного виразу:

$$\begin{aligned} \hat{G}^M(N-1) = & \hat{G}^{M-1}(N-1) + \\ & + \frac{1}{M+1} \left\{ \frac{N}{q^2(N+1)} \begin{bmatrix} 2, 1, \dots, 1 \\ \dots\dots\dots \\ 1, 1, \dots, 2 \end{bmatrix} z(t_M) \begin{bmatrix} u(t_{M-1}) \\ \vdots \\ u(t_{M-N}) \end{bmatrix} - \hat{G}^{M-1}(N-1) \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки кінцевою метою ідентифікації є оцінка векторів f, b системи (6.5), то їх можна знайти для $N = 2n$ (де n — порядок системи) у такий спосіб:

$$\begin{aligned} \hat{b}(M) &= \begin{bmatrix} \hat{g}^M(0) \\ \vdots \\ \hat{g}^M(n-1) \end{bmatrix}, \\ \hat{f}(M) &= \begin{bmatrix} \hat{g}^M(0), \dots, \hat{g}^M(n-1) \\ \dots\dots\dots \\ \hat{g}^M(n-1), \dots, \hat{g}^M(2n-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{g}^M(n) \\ \vdots \\ \hat{g}^M(2n-1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Основним недоліком цього методу є необхідність введення в систему допоміжного випадкового шуму і заповнення інформацією $2n$ значень для однієї ітерації обчислень.

Метод стохастичної апроксимації. Алгоритм методу побудований на обчисленнях за наступним виразом:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{f}(t_{k+n}) \\ \hat{b}(t_{k+n}) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \hat{f}(t_{k-1}) \\ \hat{b}(t_{k-1}) \end{bmatrix} + \rho \left(\frac{k-1}{n+1} \right) S_{(k+n-1)} \{ z(t_{k+n}) - \\ & - S_{(k+n-1)}^T \begin{bmatrix} \hat{f}(t_{k-1}) \\ \hat{b}(t_{k-1}) \end{bmatrix} + \left[\frac{\sigma^E + q^2 D D^T}{\theta} \middle| \frac{\theta}{\theta} \right] \begin{bmatrix} \hat{f}(t_{k-1}) \\ \hat{b}(t_{k-1}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q^2 d^0 \\ \theta \end{bmatrix} \} \end{aligned} \quad (6.8)$$

при $k = 1, n+2, 2n+3$, де $\rho \left(\frac{k-1}{n+1} \right)$ — коефіцієнти стохастичної апроксимації;

$S_{(k+n-1)}^T = [z(t_k), \dots, z(t_{k+n-1}), u(t_k), \dots, u(t_{k+n-1})]$; q^2 , σ^2 – інтенсивності випадкових функцій $w(t)$, $v(t)$ (з невідомими функціями розподілу) відповідно; E – одинична матриця ($n \times n$); θ – нульова матриця.

Якщо d ($n \times 1$) – відомий вектор (див. (6.96)), то

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad d^0 = D \begin{bmatrix} d_n \\ d_{n-1} \\ \vdots \\ d_1 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

При виконанні умови $\|\hat{f}(t_0)\|^2 + \|\hat{b}(t_0)\|^2 < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} \rho(t_j) = \infty$ і $\sum_{j=1}^{\infty} \rho^2(t_j) < \infty$

обчислювальний алгоритм сходиться з імовірністю 1, але швидкість його збіжності невелика, тобто він вимагає багато машинного часу.

Алгоритм простий і зручний у реалізації, але необхідні апріорні значення дисперсій (q^2 , σ^2) і вектора d . Крім того, щоб уникнути зсуву оцінок $\hat{f}(t_i)$, $\hat{b}(t_i)$, на кожній ітерації потрібно $(2n + 1)$ вимірювань вихідного сигналу.

Метод максимальної правдоподібності. Алгоритм методу заснований на використанні перетвореної форми вихідного рівняння:

$$z(t_k) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i z(t_{k-n+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i z(t_{k-n+1}) + \zeta(t_k), \quad (6.10)$$

де $\zeta(t_k) = \sum_{i=0}^n [d_i w(t_{k-n+1}) - f_i v(t_{k-n+1})]$; $f_0 = -1$; $d_0 = 0$.

Якщо випадкові функції $w(t_k) \in N(0, q_w^2)$ й $v(t_k) \in N(0, q_v^2)$, то $\zeta(t_j)$ також є нормальним (гаусовим) шумом $\zeta(t_j) \in N(0, q_\zeta^2)$, величина q_ζ обчислюється в такий спосіб:

$$q_\zeta^2 = M \{ \zeta(t_i) \zeta(t_{i-j}) \} = \sum_{i=0}^n [(f_{i+j} f_i) q_w^2 + (d_i d_{i+j}) q_v^2]$$

Представимо невідомі параметри моделі, що підлягають ідентифікації, в вигляді вектора $\theta(3n \times 1)$:

$$\theta^T = [f_1, f_2, \dots, f_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n]$$

де $c_i \zeta(t_{k+i-1}) = d_i w(t_{k+i-1}) - f_i v(t_{k+i-1})$; $c_{n+1} = 1$; $d_{n+1} = 0$.

Найкращою оцінкою вектора $z(t_k)$ (для заданого вектора θ) будемо вважати оцінку

$$\hat{z}(t_i/\theta) = M\{z(t_i)/z(t_j), u(t_j), \theta\}; \sigma_e^2(t_i) = M\{[z(t_i) - \hat{z}(t_i/\theta)]^2\} \quad (6.11)$$

Тоді щільність розподілу оцінок сигналу $z(t_i)$ задовольняє співвідношенню

$$p(z(t_i)/z(t_j), u(t_j), \theta) \in N(\hat{z}(t_i/\theta), \sigma_e^2(t_i))$$

де $\lim_{t_i \rightarrow \infty} \sigma_e^2(t_i) = \sigma_e^2 < \infty$.

Визначимо похибку апроксимації через вираз $e(t_k/\theta) = z(t_k) - \hat{z}(t_k/\theta)$, при цьому $\sigma_e^2 = M[\sigma_e^2(t_k/\theta)]$, яка задовольняє виразу

$$e(t_k/\theta) = z(t_k) - \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j e(t_{k-n+j}/\theta) + \sum_{j=0}^{n-1} [f_j z(t_{k-n+j}) + b_j u(t_{k-n+j})] \right).$$

Тоді максимізація апостеріорної імовірності $p(z(t_k), \dots, z(t_1))/u(t_{k-1}), \dots, u(t_0), \theta) = \prod_{j=1}^k p(z(t_j)/z(t_{j-1}), \theta) p(z(t_0)/\theta)$ для перетвореного рівняння для $z(t_k)$ буде еквівалентна максимізації функції правдоподібності

$$L_k(\theta, \sigma_e) = \ln[p(z(t_k)/u(t_{k-1}), \theta)] = c - \frac{k}{2} \ln[\sigma_e^2] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{e^2(t_j/\theta)}{\sigma_e^2} \quad (c - \text{постійна величина}).$$

Максимізація функції $L_k(\theta, \sigma_e)$ означає, що повинні виконуватися умови

$$-\frac{\partial L_k(\theta, \sigma_e)}{\partial \sigma_e^2} = 0.$$

При деяких допущеннях на властивості вхідної послідовності $u(t_j)$, $j = 0, 1, \dots$, задача ідентифікації зводиться до двохточечної крайової задачі і може бути вирішена в реальному часі. Алгоритм розв'язання задачі ідентифікації в цьому випадку має вигляд:

1) задаємо початкові умови $e(t_i/\theta), \frac{\partial e(t_i/\theta)}{\partial \theta}$ для $i = 1, 2, \dots, n$, оцінку

$\theta(t_0) = \hat{\theta}_0$ і приймаємо $N = 0$;

2) по формулі для $e(t_k/\theta)$ обчислимо похибку для M послідовних вимірювань $\partial o = N + 1, N + 2, \dots, N + M$;

3) визначимо функції чутливості $e(t_i/\theta)$ за векторами f, b, c :

$$\begin{aligned}\frac{\partial e(t_k/\theta)}{\partial f_j} &= -z(t_{k-n+j}) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial e(t_{k-n+i}/\theta)}{\partial f_j}, \\ \frac{\partial e(t_k/\theta)}{\partial b_j} &= -u(t_{k-n+j}) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial e(t_{k-n+i}/\theta)}{\partial b_j}, \\ \frac{\partial e(t_k/\theta)}{\partial c_j} &= -e(t_{k-n+j}) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial e(t_{k-n+i}/\theta)}{\partial c_j}\end{aligned}\quad (6.12)$$

для $k = N + 1, N + 2, N + M$;

4) обчислимо градієнт функції $J[\theta] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^2(t_j/\theta)$, яка отримана з умови

$\max_{\theta} L_i(\theta, \hat{\sigma}_e)$:

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2 \sum_{j=N+1}^{N+M} e(t_j/\theta) \frac{\partial e(t_j/\theta)}{\partial \theta}; \quad (6.13)$$

5) обчислимо матрицю других похідних $\frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta^2}$:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \cong S = \sum_{j=N+1}^{N+M} \left[\frac{\partial e(t_j/\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial e^T(t_j/\theta)}{\partial \theta} \right]; \quad (6.14)$$

6) уточнимо оцінку $\theta(N + M)$ після M вимірів за рекуррентною формулою:

$$\theta(N + M) = \hat{\theta}(N) - \frac{1}{N/M + 1} S^{-1} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta}; \quad (6.15)$$

7) проведемо M вимірювань вхідних і вихідних змінних $i(t_i)$, $z(t_i)$ і покладемо нове значення $N = N + M$. Останні n значень функцій $e(t_i/\theta)$ і $\frac{\partial e(t_i/\theta)}{\partial \theta}$ приймемо за початкові оцінки для наступної ітерації і перейдемо до кроку 2).

Ітераційний процес закінчується тоді, коли поліпшення оцінки $\hat{\theta}(N + M)$ стає

незначним.

Недоліком обчислювального алгоритму є необхідність визначення початкової оцінки $\hat{\theta}_0$, яка повинна бути досить близькою до дійсного значення θ^{opt} . (умова збіжності процедури), крім того, всі випадкові функції $w(t_i)$, $v(t_i)$ повинні бути гауссовими.

Метод найменших квадратів. Цей метод ідентифікації суттєво відрізняється від викладених. Тут не потрібне знання імовірнісних характеристик випадкових величин $w(t_i)$, $v(t_i)$ і алгоритм у цьому сенсі є крайнім випадком у порівнянні з байєсовським (максимізації апостеріорної імовірності), при якому необхідно мати повний імовірнісний опис випадкових процесів. Алгоритм ідентифікації по методу максимальної правдоподібності можна розглядати як проміжний, оскільки для його застосування вже немає необхідності знати апіорну щільність імовірності оцінюваних параметрів. Алгоритм методу найменших квадратів дозволяє знайти оцінку шуканих параметрів при ще меншій апіорній інформації.

Вихідна система описується рівнянням

$$x(t_{k+1}) = Fx(t_k) + bu(t_k) + w(t_k), \quad (6.16)$$

де $F(n \times n)$, $b(n \times 1)$ — невідомі матричні параметри; $w(t_k)$ — вектор випадкових збурювань.

Необхідно припустити, що вектор стану $x(t)$ і керуючий вплив $u(t)$ вимірюються для будь-якого моменту часу t_k з інтервалу спостережень $[t_0, t_n]$. Розглянемо j -й рядок вихідного рівняння, який запишеться у вигляді

$$x_j(t_{k+1}) = f_j x(t_k) + b_j u(t_k) + w_j(t_k),$$

де $f_j (1 \times n)$ — вектор-рядок матриці $F (n \times n)$; b_j — величина j -ого рядка вектора $b(n \times 1)$.

Потрібно підібрати такий вектор параметрів $C_j^T = [f_j, b_j]$ розмірності $((n+1) \times 1)$, щоб мінімізувати критерій якості наближення по процесу $x_j(t_k)$:

$$J_{xj} = \sum_{k=0}^{N-1} [x_j(t_{k+1}) - (f_j x(t_k) + b_j u(t_k))]^2 q(t_k),$$

де $q(t_k)$ — матриця ваги, пов'язана з імовірнісними характеристиками випадкових

збурювань $w(t)$.

Оптимальна оцінка $(f_j, b_j)^{opt}$, яка мінімізує критерій J_{x_j} , називається оцінкою по методу найменших квадратів. Обчислювальний алгоритм ідентифікації пов'язаний з моделлю спостережень, записанною в матричному вигляді:

$$V_{xj}^{k+1} = \begin{bmatrix} V_x^k & \vdots & V_x^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_j^T \\ b_j^T \end{bmatrix} + V_{wj} = V^k c_j + V_w,$$

де $V_{xj}^{k+1} = [x_j(t_1), x_j(t_1), \dots, x_j(t_N)]^T$; $V_u^k = [u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{N-1})]^T$;

$V_x^k = [V_{x1}^k, V_{x2}^k, \dots, V_{x1}^k n]$ – масиви спостережень довжиною N .

Критерій якості наближення процесу $x_j(t)$ записується у вигляді матричної форми

$$J_{xj} = \frac{1}{2} (V_{xj}^{k+1} - V^k c_j)^T Q (V_{xj}^{k+1} - V^k c_j) = \frac{1}{2} \| (V_{xj}^{k+1} - V^k c_j) \|_Q^2$$

Оскільки мінімізація квадратичної форми J_{xj} являє собою звичайну задачу пошуку екстремуму, то оптимальна по методу найменших квадратів оцінка $(f_j, b_j)^{opt} = c_j^{opt T}$ є коренем рівняння

$$\left. \frac{\partial J_{xj}}{\partial c_j} \right|_{c_j = c_j^{opt}} = \Theta,$$

де Θ – нульовий вектор розмірності $[(n+1) \times 1]$.

Звідси шукана оцінка найменших квадратів дорівнює

$$c_j^{opt} = \begin{bmatrix} f_j^T \\ b_j^T \end{bmatrix}^{opt} = \left[(V^k)^T Q V^k \right]^{-1} (V^k)^T Q V_{xj}^{k+1}. \quad (6.17)$$

Останній вираз являє собою основу обчислювальної процедури розв'язання задачі ідентифікації по методу найменших квадратів.

Алгоритм має ряд недоліків, серед яких потрібно відзначити зміщення оцінки c_j^{opt} , якщо середнє значення $w(t)$ ненульове ($M[w(t)] \neq 0$), а також необхідність мати повну інформацію по $x(t)$, $u(t)$ на всьому інтервалі спостережень. Однак наочність і простота обчислень роблять цей метод найбільш привабливим і широко

застосовуваним.

Для порівняння всіх описаних алгоритмів ідентифікації була обрана лінійна система 3-го порядку, досить чутлива до шумів:

$$x(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} x(t_k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [u(t_k) + w(t_k)],$$

$$z(t_k) = (1, 0, 0)x(t_k) + v(t_k).$$

Коефіцієнти вихідної системи відповідно рівні (0,56; 0,68; -0,18), при цьому вхідна послідовність $u(t_k)$ для взаємо-кореляційного алгоритму була обрана у вигляді бінарного шуму з дискретним періодом квантування $\Delta t = 0,01$ с, а для інших алгоритмів – $u(t_k) = 0$. Усі випадкові процеси і шуми будемо вважати гауссовими:

$$w(t_k) \in N[0, 1, 0], \quad v(t_k) \in N[0, 0, 25], \quad v(t_k) \in N[2, 10, 0].$$

Початкову оцінку для алгоритму стохастичної апроксимації приймемо $p(t_0) = 20E$, де E — одинична матриця. Для алгоритму максимальної правдоподібності обчислювальний процес починається із точки, близької до точного значення вектора f . Число вимірів M було рівним 100 ... 150.

Сукупність результатів, що характеризують можливості обчислювальних алгоритмів ідентифікації, наведено в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1.

Порівняння методів ідентифікації

№ п/п	Метод	Характеристики алгоритму				
		Початкова оцінка	Час обчислень, с	Нормована помилка		Складність алгоритму ідентифікації
				2500 ітерацій	6000 ітерацій	
1	Взаємо- кореляційний	Довільна	2	0,050	0,015	Мала
2	Стохастичної апроксимації	Довільна	5	0,650	0,42	Мала
3	Максимальної правдоподібності	Близька	40	0,030	-	Значна
4	Найменших квадратів	Довільна	1	0,080	-	Мала

Результати вказують на перевагу методу найменших квадратів.

Алгоритми ідентифікації, за винятком методу найменших квадратів, мають важливий недолік, що обмежує їхнє застосування – наявність статистичних даних і маніпулювання випадковими процесами.

Структура системи діагностики. Як відомо, діагноз складних технічних комплексів можна проводити з різним ступенем деталізації. Представляється доцільним, що в умовах створення вбудованої інформаційно-керуючої системи може бути організована трьохрівнева діагностика стану і несправностей об'єкта: а) аварійна діагностика, або діагностика малої глибини; б) діагностика середньої глибини; в) діагностика великої глибини. Аварійна діагностика здійснюється по таблиці несправностей або ще простіше — при виході важливих параметрів об'єкту за межі, які заздалегідь визначаються як аварійні. Якщо ж порівняння стану об'єкту з таблицею несправностей не дозволяє поставити діагноз або діагноз оцінюється як недостатньо достовірний, система звертається до алгоритмів діагнозу середньої глибини. Діагностика середньої глибини проводиться за допомогою спрощеної моделі об'єкту. Така модель складається зі звичайних диференціальних і алгебраїчних рівнянь, вона описує елементи «укрупнено».

Щоб визначити несправність або причину виходу об'єкту за межі розрахункових станів, у модель повинні бути введені зміни, що відбивають передбачувану причину несправного або нерозрахованого стану, після чого проводиться розрахунки досліджуваного режиму відповідно до початкових і граничних умов, зафіксованих системою вимірювань. Перелік таких змін повинен зберігатися в таблиці можливих несправностей (таблиці альтернативних станів). Якщо розраховані процеси в достатній мірі добре збігаються із процесами, зафіксованими системою вимірювань, то внесені в модель зміни визначають характер несправності. Якщо ж збіг не досягається, проводиться нове звертання до таблиці можливих несправностей, здійснюється нова зміна моделі і потім нові розрахунки режимів. Процедура повторюється до одержання діагнозу або до вичерпання таблиці можливих несправностей. Останнє означає, що діагноз не може бути отриманий на даному рівні і необхідне звертання до алгоритмів діагностики великої глибини.

Порівняння розрахункових процесів з процесами, що протікають в установці, простіше і зручніше робити по системі характерних динамічних ефектів, властивих даному класу процесів, ніж порівнюючи в часі амплітуди вимірюваних координат, що розраховуються. Для цього в пам'яті системи діагностики повинні зберігатися системи характерних динамічних ефектів, властивих всім класам динамічних процесів: пусковим процесам, процесам зміни режимів і т.п.

Діагностика великої глибини проводиться по максимально докладній моделі. У цій моделі повинні бути враховані всі істотні особливості об'єкту, у тому числі розподіленість її параметрів і фізичних процесів, що протікають в ній. Процедура проведення діагностики така ж, як і у випадку діагностики середньої глибини. Також на підставі таблиці можливих несправностей проводиться зміна моделі і порівнюються характерні ефекти розрахункових і реальних процесів. Відмінність полягає у більшому переліку характерних ефектів і великій точності порівняння.

Слід зазначити, що діагностика середньої і великої глибини може проводитися і періодично у профілактичних цілях для постановки прогнозу подальшого функціонування об'єкту. Під час тривалої експлуатації, коли відбуваються ресурсні зміни параметрів установки, необхідно періодично при роботі на стаціонарних режимах подавати на установку малі збурювання по вхідних параметрах з метою виявлення ресурсних змін в об'єкті і коректування математичних моделей.

Результати діагностики у всіх випадках передаються на верхній рівень комп'ютерної частини системи, що відповідає за ухвалення рішення про необхідні заходи керування. Після проведення діагнозу на кожному рівні глибини і перед тем, як звертатися до більш глибокого рівня, у тому випадку, якщо на цьому рівні діагноз не був поставлений, система діагностики звертається до алгоритмів, які повинні відповісти на запитання про те, чи допускає ситуація, що склалася, затримку з ухваленням рішення про проведення більш докладного діагнозу або ситуація така, що розв'язок треба ухвалювати негайно, незважаючи на деяку неточність визначення стану. Повна структура системи діагностики з врахуванням зазначених алгоритмів наведена на рис. 6.1 (T – період дігностики, T_p – тривалість

сеансу роботи системи)

Подібним чином може бути організована система діагностики ГТД. Однак враховуючи порівняно короткі строки роботи авіаційних двигунів, а також можливість наземного обслуговування, варто, очевидно, обмежитися діагностикою середньої глибини або навіть тільки аварійним діагнозом, а більш глибокі рівні покласти на наземне профілактичне обслуговування

6.3 Процедура модельного діагностування динамічних систем

В цьому підрозділі розглядаються основні положення реалізації модельного підходу до діагностування систем при обмеженому доступі до їхніх внутрішніх точок. Можна виділити параметричні несправності, що змінюють тільки параметри об'єкта, і структурні, що змінюють деяку частину об'єкта (підсистему, підсхему) досить довільним чином. Далі основна увага приділяється локалізації структурних несправностей [91].

Постановка задачі. Нехай справна система описується залежністю

$$y^* = F^*(u), \quad u \in D_u, \quad (6.18)$$

де $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^T$ - вектор вихідних сигналів, $u = (u_1, \dots, u_m)^T$ - вектор вхідних сигналів системи, D_u - область значень u , F^* - вектор-функція.

Виділимо в системі підсистему S_i , опис якої у виправленому стані має вигляд $Z_i^* = f_i^*(V_i)$, де Z_i^* - вектор вихідних сигналів розмірності n_i , V_i - вектор вхідних сигналів розмірності m_i , f_i^* - вектор-функція (оператор).

Несправності можливі в одній підсистемі. Несправна підсистема S_i описується невідомою залежністю $Z_i = f_i(V_i)$, де Z_i, V_i - відповідно вектори вихідних і вхідних сигналів несправної підсистеми, що мають розмірність n_i, m_i .

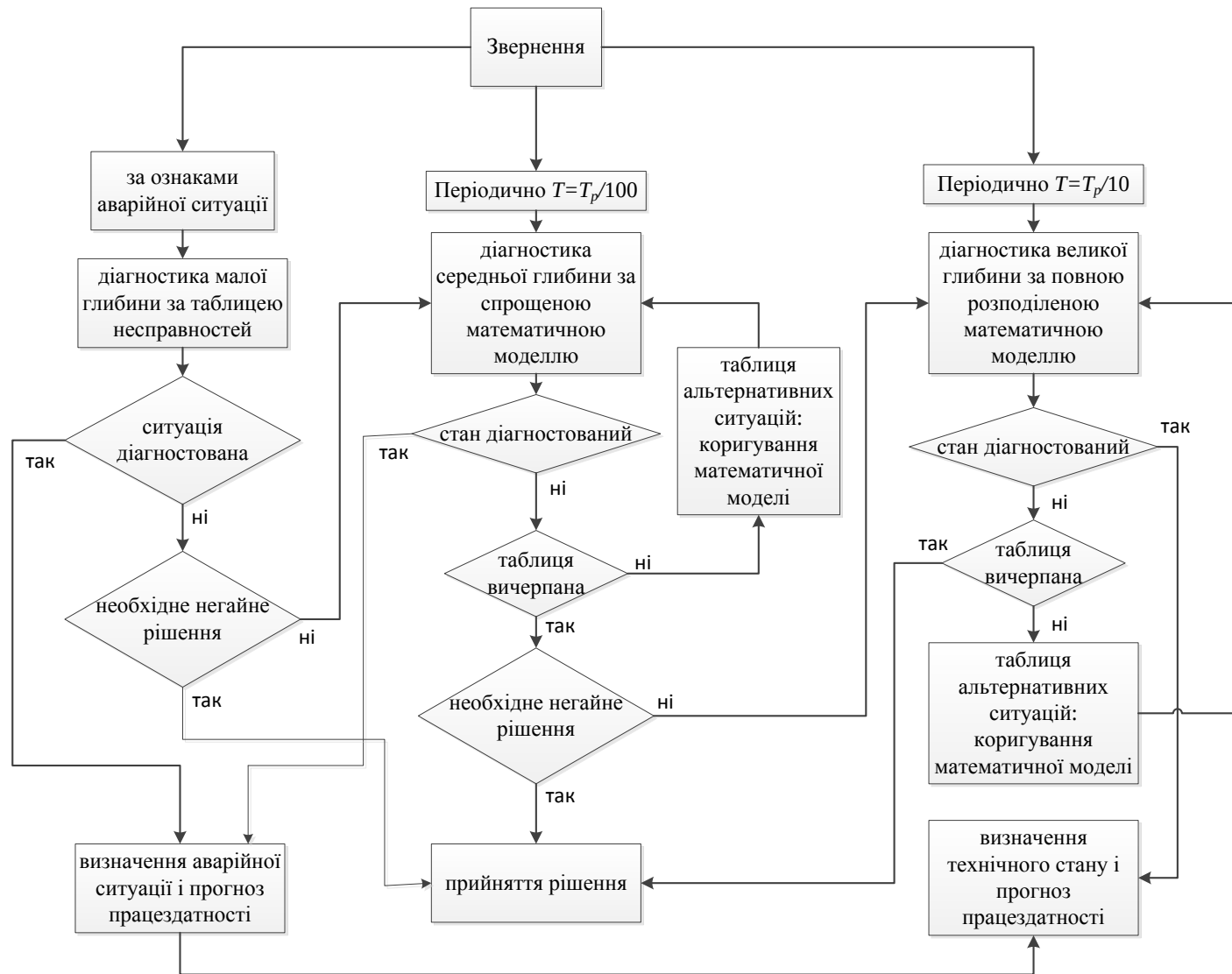


Рис. 6.1 – Структура системи діагностики силової установки

Нехай встановлено, що система несправна. Потрібно, маючи в наявності вхідні і вихідні сигнали несправної системи та описи справної системи, визначити несправну підсистему.

Підсистеми з незалежним спостереженням. Несправну систему представимо як таку, що складається із двох підсистем (рис. 6.2): з несправної підсистеми S_i і справної підсистеми, відповідної до справної частини системи. Опис справної підсистеми має вигляд $y = A_1(u, Z_i), V_i = B_1(u, Z_i)$, де A_1, B_1 – матриці.

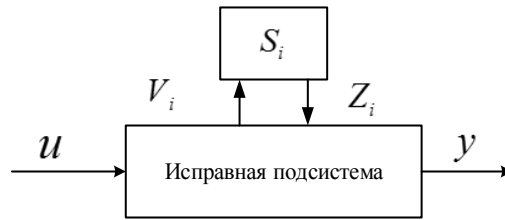


Рис.6.2

Визначення 1. Несправну підсистему S_i будемо називати спостережуваною, якщо по вхідних сигналах системи можна визначити її вихідні сигнали.

При чисельній реалізації алгоритмів діагностування істотна, як і при ідентифікації систем, лінійність залежності між оцінюванням і спостережуваними величинами. Обмежимося випадком лінійної залежності між вихідними сигналами підсистеми, що перевіряється, і $y = A_1(u) Z_i$ системи. При цьому залежність між входом і виходом системи може бути нелінійною.

Позначимо

$$\frac{\partial y}{\partial Z_i^T} = L_i(u), \Delta Z_i = Z_i - Z_i^*, \Delta y = y - y^*,$$

де Z_i^*, y^* – зареєстровані сигнали.

Опис системи з несправною підсистемою S_i представимо у вигляді

$$y = y^* + \Delta y = A_1(u) Z_i^* + L_i(u) \Delta Z_i,$$

звідси

$$\Delta y = L_i(u) \Delta Z_i. \quad (6.19)$$

Твердження 1. Несправна підсистема S_i спостережувана в тому і тільки тому випадку, якщо існує таке значення $u \in D_u$, що ранг $L_i(u) = n_i$.

Справедливість твердження впливає з умови можливості розв'язання рівняння (6.19).

Помітимо, що спостержуваність підсистеми є в загальному випадку необхідною й достатньою умовою для визначення її вхідних сигналів, які після відновлення Z_i визначаються по формулі $V_i = B_i(u, Z_i)$.

Пошук несправної підсистеми проводиться послідовною перевіркою гіпотез

$$H_i : \quad \Delta y = L_i(u) \Delta Z_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (6.20)$$

де N – число підсистем, що перевіряються.

Гіпотеза H_i являє собою припущення про те, що підсистема S_i несправна й оператор f_i , що її описує, належить класу операторів L_i . Клас операторів L_i задає клас несправностей у підсистемі S_i [...]. Вважаємо, що несправності не виводять підсистему S_i із класу безінерційних систем і A_i являє собою функцію досить довільного виду.

Рівняння, складене щодо оцінюваної величини, будемо називати діагностичним. При перевірці підсистеми S_i діагностичним є рівняння (6.20).

Перевірка гіпотези H_i полягає в перевірці сумісності рівняння (6.20). Якщо рівняння (6.20) сумісне, то гіпотеза H_i приймається і підсистема S_i вважається несправною. Якщо не сумісн, то не приймається і перевіряється наступна гіпотеза.

Будемо говорити, що підсистеми S_i, S_j нерозрізнені при гіпотезі H_i , якщо гіпотеза H_i приймається як при несправній підсистемі S_i , так і при несправній підсистемі S_j .

Підсистеми S_i, S_j нерозрізнені при гіпотезі H_i тільки в тому випадку, якщо при несправній підсистемі S_j існує таке значення ΔZ_i що

$$L_i(u) \Delta Z_i = L_j(u) \Delta Z_j, \quad u \in D_u. \quad (6.21)$$

Аналіз умов, при яких не виконується рівність (6.21), дозволяє встановити умови й критерії розрізнення підсистем.

Визначення 2. Підсистеми S_i, S_j будемо називати підсистемами з незалежним спостереженням при гіпотезі H_i , якщо підсистема S_i спостережувана й вектори $\Delta Z_i, \Delta Z_j$ лінійно незалежні.

З (6.21) очевидним образом випливає наступне твердження.

Твердження 2. Підсистеми S_i, S_j мають незалежні спостереження при гіпотезі H_i в тому тільки випадку, якщо існує таке значення $u \in D_u$, що

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} L_i(u) \\ L_j(u) \end{bmatrix} = n_j + \text{ранг } L_j(u). \quad (6.22)$$

Умова (5) може виконуватися і для випадку, коли підсистема S_j неспостережувана, тобто $\text{ранг } L_j(u) < n_j$.

Для забезпечення незалежної спостережливості підсистем S_i, S_j у загальному випадку потрібно $n_i + n_j$ контрольних точок. Однак вектори $\Delta Z_i, \Delta Z_j$ можуть бути лінійно незалежні (залежно від конкретного значення ΔZ_j) при $n_i + 1$ контрольній крапці, якщо виконується умова

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} L_i(u_k) \\ \ell_{j,k}(u_k) \end{bmatrix} = n_j + 1, \quad K = \overline{1, n_j}, \quad (6.23)$$

де $\ell_{j,k}$ - K -й стовпець матриці $L_j(u)$.

Якщо матриці $L_i(u), L_j(u)$ є функціями вхідних сигналів системи й можуть змінюватися в процесі діагностичного експерименту, то ймовірність появи для різних значень u таких значень ΔZ_j , що за умови (6.23) вектор $L_j(u)\Delta Z_j$ лінійно залежимо з матрицею $L_i(u)$, мала. Якщо цією ймовірністю можна знехтувати (що на практиці часто має місце), то умову (6.23) можна прийняти в якості критерію незалежності спостережень підсистем.

Незалежна спостережуваність підсистем визначається вхідними сигналами системи, її структурою й параметрами. У загальному випадку виділити всі фактори, що визначають незалежну спостережуваність підсистем, складно. Тому один зі

шляхів визначення вхідних сигналів системи u , при яких виконується рівність (6.22) або (6.23), полягає в безпосередній перевірці цих рівностей.

У безінерційних системах з одним виходом підсистеми не мають властивість незалежності спостережень. Для існування незалежної спостережуваності підсистем S_i, S_j при гіпотезі H_i необхідно мати у своєму розпорядженні $n_i + 1$ виходи системи. Однак наявність $n_i + 1$ спостережуваних виходів системи є лише необхідною умовою.

Нульові елементи в матриці $\begin{bmatrix} L_i(u) & | & L_j(u) \end{bmatrix}$ обумовлюють незалежність спостережень підсистем у силу структурних властивостей системи, які зберігаються при будь-яких параметрах.

Твердження 3. Якщо підсистеми S_i, S_j мають незалежні спостереження, то вони помітні.

Дійсно, в силу лінійної незалежності векторів $\Delta Z_i, \Delta Z_j$ для заданого довільного значення $\Delta Z_j \neq 0$ не існує ΔZ_i рівності, що задовольняє (6.21).

Підсистеми з незалежним керуванням. У справній підсистемі, отриманій при виділенні S_i при гіпотезі H_i (рис 6.1.), виділимо у свою чергу підсистему S_j , що має вхідний сигнал V_j , який визначається залежністю $V_j = B_j^i(u, Z_i)$. Для представленої в такий спосіб системи розглянемо властивість незалежності керувань підсистем S_i, S_j .

Визначення 3*. Підсистеми S_i, S_j будемо називати підсистемами з незалежним керуванням при гіпотезі H_i , якщо вектори V_i, V_j лінійно залежні.

Для підсистем S_i, S_j , що задовольняють визначенню 3*, існують вхідні сигнали системи, що забезпечують зміну (варіацію) вхідних сигналів підсистеми S_j при змінених вхідних сигналах підсистеми S_i .

Якщо вихідний сигнал справної підсистеми S_j залежить від зміни будь-якого компонента вектора вхідних сигналів V_j (що, як правило, має багато), то при діагностуванні достатньо при незмінному векторі V_i змінювати по черзі компоненти вектора V_j . Далі, замість визначення z^* будемо користуватися наступним визначенням.

Визначення 3. Підсистеми S_i, S_j будемо називати підсистемами з незалежним керуванням при гіпотезі H_i , якщо компоненти вектора V_j лінійно незалежні з вектором V_i .

Одержуємо критерій виділення підсистем з незалежним керуванням.

$$\text{Позначимо } \frac{\partial B_i(u, Z_i)}{\partial u^T} = \Omega_i(u, Z_i), \quad \frac{\partial B_j^i(u, Z_i)}{\partial u^T} = \Omega_j^i(u, Z_i).$$

Обмеживши розглянуті процедури діагностування лінійними, далі будемо вважати матриці Ω_i, Ω_j^i постійними.

Варіацію вхідних сигналів системи, що забезпечує незмінність вектора V_i і варіацію значення компоненти $V_{j,k}$ вектора V_j , можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i = 0 \\ \Delta V_{j,k} \neq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ \omega_j^i \end{bmatrix} \Delta u, \quad (6.24)$$

де $\omega_{j,k}^i$ - K -й рядок матриці Ω_j^i .

Твердження 4. Підсистеми S_i, S_j мають при гіпотезі H_i незалежні керування в тому й тільки тому випадку, якщо рівність (6.24) виконується для всіх значень $K, K = \overline{1, m_j}$.

Вважаємо, що функції чутливості вихідного сигналу системи u стосовно зміни значень компонент векторів Z_i, Z_j не дорівнюють нулю.

Для проведення діагностичного експерименту необхідно одержати вхідні сигнали системи u^{od}, u^{np} (навчальні, перевірочні), що забезпечують сталість V_i і

варіацію $V_{j,k}$. Ці сигнали можуть бути довільними, але повинні відрізнятися один від одного на величину Δu , отриману із системи рівнянь (6.24).

Задавши довільне значення u^{od} , одержимо $u^{np} = u^{od} + \Delta u$.

Процедура перевірки гіпотези H_i , що забезпечує сталість V_i і варіацію $V_{j,k}$, що впливає, наступна.

1. Подавши на діагностовану систему вхідний сигнал u^{od} , одержимо Δy^{od} .
2. При u^{np} одержати Δy^{np} .
3. Перевірити сумісність системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta y^{od} \\ \Delta y^{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i(u) \\ L_i(u) \end{bmatrix} \Delta Z_i. \quad (6.25)$$

Якщо матриця $L_i(u)$ постійна, тобто $L_i(u) = L_i$, то перевірка спільності системи рівнянь (8) зводиться до перевірки рівності $\Delta y^{od} = \Delta y^{np}$.

Якщо система рівнянь (8) несумісна, то гіпотеза H_i не приймається. Якщо сумісна, то це не суперечить гіпотезі H_i .

Остаточне рішення про вірогідність гіпотези H_i приймається після її перевірки при значеннях u^{np} вхідних сигналів, що забезпечують варіацію всіх, підсистем S_i , що мають із підсистемою незалежні керування. Максимальне число вхідних сигналів систем при перевірці гіпотез H_i дорівнює сумі розмірностей векторів вхідних сигналів підсистем, що мають із підсистемою S_i незалежні керування. На практиці число вхідних сигналів системи, що забезпечують розрізнення підсистем з незалежним керуванням, значно менше максимального, оскільки при зміні вхідних сигналів однієї з підсистем змінюються вхідні сигнали інших підсистем.

Підсистеми з незалежним спостереженням і керуванням. При гіпотезі H_i виділимо в справній частині системи (рис 6.2) підсистему S_j . Позначимо

$$\frac{\partial y}{\partial Z_j^T} = L_{j,i}(u). \text{ Нехай } L_i(u), L_{j,i}(u), V_i - \text{ скалярні величини, } u = (u_1, \dots, u_m)^T.$$

Підсистеми S_i, S_j будемо називати підсистемами з незалежними спостереженням і керуванням, якщо: 1) функції $L_i(u), L_{j,i}(u)$ лінійно незалежні, 2) функція $V_i(u)$ лінійно незалежна, хоча б з однією функцією $L_i(u), L_{j,i}(u)$. В цьому випадку, якщо несправна підсистема S_j , а перевіряється S_i , вибором u можна одержати зміну значень $L_i(u), L_{j,i}(u)$ при постійних значеннях ΔZ_i рівність, що порушує залежність (6.21), і забезпечити розрізнення підсистем.

$$\text{Позначимо } \frac{\partial V_i}{\partial u^T} = \Omega_i(u), \quad \frac{\partial L_i(u)}{\partial u^T} = d_i(u), \quad \frac{\partial L_{j,i}(u)}{\partial u^T} = d_{j,i}(u).$$

Нехай $\Omega_i(u) = \Omega_i$, $d_i(u) = d_i$, $d_{j,i}(u) = d_{j,i}$.

Функції $L_i(u), L_{j,i}(u)$ лінійно незалежні, якщо $\text{ранг} \begin{bmatrix} d_i \\ d_{j,i} \end{bmatrix} = 2$.

Варіацію Δu вхідних сигналів системи u , що забезпечує варіацію $\Delta L_i(u)$ функції $L_i(u)$ й сталість значення V_i , можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i = 0 \\ \Delta L_i(u) \neq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ d_i \end{bmatrix} \Delta u \quad (6.26)$$

за умови, що $\text{ранг} \begin{bmatrix} \Omega_i \\ d_i \end{bmatrix} = 2$.

Для перевірки гіпотези H_i , як і для підсистем з незалежним керуванням, формуються вхідні сигнали системи $u^{\text{од}}, u^{\text{нр}} = u^{\text{од}} + \Delta u$. Значення Δu , що забезпечує варіацію однієї з функцій $L_i(u), L_{j,i}(u)$ і незмінність V_i , визначається з (6.26).

Процедура перевірки гіпотези H_i наступна.

1. При $u^{\text{од}}$ визначається $\Delta y^{\text{од}}$.
2. При $u^{\text{нр}}$ визначається $\Delta y^{\text{нр}}$.
3. Перевіряється спільність системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta y^{\text{нр}} \\ \Delta y^{\text{нр}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i(u^{\text{од}}) \\ L_i(u^{\text{нр}}) \end{bmatrix} = \Delta Z_i. \quad (6.27)$$

Якщо система рівнянь (6.27) несумісна, то гіпотеза H_i не приймається. Якщо сумісна, то це не суперечить гіпотезі H_i .

Розглянемо випадок, коли $L_i(u)$, $L_{j,i}(u)$ – матриці й $L_i(u)$ має зворотну матрицю $L_i^{-1}(u)$. Тоді з (4) при $L_j(u) = L_{j,i}(u)$ одержимо

$$\Delta Z_i(V_i) = L_i^{-1}(u) L_{j,i}(u) \Delta Z_j(V_j) = \Phi(u) \Delta Z_j(V_j).$$

Підсистеми S_i, S_j є підсистемами з незалежними спостереженням і керуванням при гіпотезі H_i , якщо існують вхідні сигнали системи, що забезпечують незмінність V_i і варіацію хоча б одного елемента матриці $\Phi(u)$, що є співмножником змінної $Z_{j,k}$, $K = \overline{1, n_j}$.

Установимо умови, при яких підсистеми S_i, S_j мають незалежні спостереження й керуванням.

Через $\varphi_K^T = [\varphi_{K,1}(u), \dots, \varphi_{K,n_i}(u)]$ позначимо K – й стовпець матриці $\Phi(u)$, $K = \overline{1, n_j}$. Одержимо

$$D(u) = \frac{\partial \varphi_K(u)}{\partial u^T} = \begin{bmatrix} d_{K,1}(u) \\ \vdots \\ d_{K,n_i}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{K,1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \varphi_{K,1}}{\partial u_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{K,n_i}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \varphi_{K,n_i}}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Обмежимо аналіз системи випадками, коли матриця $D(u)$ – постійна, $D(u) = D$.

Варіацію Δu вхідних сигналів u , що забезпечують варіацію $\Delta \varphi_{K,s}$ елемента $\varphi_{K,s}$ матриці Φ й незмінність значення V_i , можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i = 0 \\ \Delta \varphi_{K,s} \neq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ d_{K,s} \end{bmatrix} \Delta u \quad (6.28)$$

за умови, що існує таке значення S , що залежить у загальному випадку від K , що

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} \Omega \\ d_{k,s} \end{bmatrix} \text{ранг } \Omega_i + 1 \quad (6.29)$$

Підсистеми S_i, S_j при гіпотезі H_i мають незалежні спостереження й керування, якщо умова (6.29) виконується для всіх значень $K = \overline{1, n_j}$

Якщо підсистеми S_i, S_j мають незалежні спостереження і керування, то вони розрізняються для широкого класу несправностей [...].

У процедурі перевірки гіпотези H_i значення Δ_i визначається по формулі (6.28).

Динамічні системи, що описуються моделями у вигляді передатних функцій.

Підсистеми з незалежним спостереженням. Нехай справна система задана у вигляді структурної схеми. Будемо розглядати підсистеми, що мають скалярні вхід і вихід, залежність між якими описується відомою передатною функцією $W(p) = \frac{Z_i(p)}{V_i(p)}$, де $Z_i(p), V_i(p)$ – зображення по Лапласу вихідного $Z_i(t)$ й вхідного $V_i(t)$ сигналів підсистеми.

Вважаємо, що несправності можливі тільки в одній підсистемі і несправність міняє передатну функцію підсистеми на невідому залежність між її входом і виходом. В окремому випадку несправна підсистема може описуватися невідомою передатною функцією. Тоді несправності не виводять діагностовану систему із класу лінійних систем.

Завдання полягає в тому, щоб маючи опис справної системи і маючи реалізації вхідних і вихідних сигналів діагностованої системи, визначити несправну підсистему.

Підсистеми в лінійній системі при структурних несправностях можуть мати тільки дві з трьох діагностичних властивостей: незалежними спостереженнями й незалежними керуваннями. Тому аналіз діагностованості підсистем зводиться до визначення цих властивостей у різних пар підсистем. Для підсистем, що володіють якоюсь конкретною властивістю, використовується відповідний метод діагностування.

Систему з несправною підсистемою S_i представимо у вигляді, зображеному на рис. 6.2. Передатну функцію від виходу несправної підсистеми Z_i до виходу системи y_k позначимо як $W_{i,k}$ (для простоти записів символ ρ у позначеннях передатної функції далі будемо опускати).

Залежність вихідного сигналу системи від вихідного сигналу підсистеми S_i має вигляд

$$y_k(p) = W_{i,k} Z_i(p), \quad K = \overline{1, n}.$$

Несправна підсистема S_i спостережувана в тому й тільки тому випадку, якщо існує вихід системи y_k , щодо якого передатна функція $W_{i,k}$ має зворотну $W_{i,k}^{-1}$.

Рівність (6.21) у цьому випадку записується в такий спосіб:

$$\begin{bmatrix} W_{i,1} \\ \vdots \\ W_{i,n} \end{bmatrix} Z_i(p) = \begin{bmatrix} W_{j,1} \\ \vdots \\ W_{j,n} \end{bmatrix} Z_j(p). \quad (6.30)$$

Твердження 5. Підсистема S_i, S_j мають незалежні спостереження щодо виходів системи y_a, y_δ при гіпотезі H_i , якщо підсистема S_i спостережувана й

$$W_{i,a} W_{j,\delta} \neq W_{j,a} W_{i,\delta}. \quad (6.31)$$

Доказ. Слід довести, що при заданому $Z_j(p)$ не існує $Z_i(p)$, що задовольняє рівності (6.30).

Тому що підсистема S_i спостережувана, де хоча б для однієї передатної функції $W_{i,a}, W_{i,\delta}$ існує зворотна функція. Нехай існує $W_{i,a}^{-1}$. Тоді з (6.30) одержимо

$$Z_i(p) = W_{i,a}^{-1} W_{j,a} Z_j(p). \quad (6.32)$$

Очевидно, що значення $Z_i(p)$, отримане щодо виходу в систему y_a , повинне задовольняти й рівнянню, відповідному до виходу системи y_δ (δ -й рядок системи рівнянь (6.30)). Поставимо (6.32) в δ -й рядок (6.30)

$$W_{i,\delta} W_{i,a}^{-1} W_{j,a} Z_j(p) = W_{j,\delta} Z_j(p). \quad (6.33)$$

Рівність (6.33) існує тільки в тому випадку, якщо $W_{i,\delta} W_{i,a}^{-1} W_{j,a} = W_{j,\delta}$ або $W_{i,\delta} W_{j,a} = W_{i,a} W_{j,\delta}$. Але дана рівність згідно з умовою (6.31) не існує, отже, не

виконується й рівність (6.32), тобто при заданому $Z_j(p)$ не існує значення $Z_i(p)$, що задовольняє (6.30).

Незалежність спостережень підсистем обумовлюється структурою й параметрами системи. Для систем, заданих передатними функціями, зручно спочатку провести аналіз системи в символьному виді. При цьому передатні функції виразу (6.31) визначаються в загальному виді згідно з алгеброю структурних схем по передатних функціях, заданих символами $W_1, \dots, W_n$. Аналіз у символьному вигляді дозволяє встановити необхідні умови лінійної незалежності спостережень підсистем і достатні умови їх залежності.

Якщо встановлено, що умова (6.31) при символьному аналізі виконується, то потрібно цю умову перевірити для конкретних моделей підсистем, що дозволяє остаточно встановити незалежність спостережень підсистем. Якщо при символьному аналізі умова (6.30) не виконується, то підсистеми S_i, S_j мають незалежні спостереження й подальший аналіз не проводиться. Підсистеми з незалежним спостереженням помітні для широкого класу несправностей.

Метод діагностування підсистем з незалежним спостереженням полягає в перевірці сумісності систем діагностичних рівнянь, складеної для кожної з гіпотез

$$\begin{bmatrix} y_1(p) \\ \vdots \\ y_n(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{i,1} \\ \vdots \\ W_{i,n} \end{bmatrix} Z_i(p), \quad i = \overline{1, N}.$$

Підсистема з незалежним керуванням. Нехай діагностована система має m входів і один вихід. Як і раніше, будемо розглядати підсистеми зі скалярним входом і виходом.

Передатну функцію від входу системи $u_k(p)$ до входу $V_i(p)$ несправної підсистеми S_i позначимо через $V_{i,k}(p)$ (далі $V_{i,k}$), $V_i = (V_{i,1}, \dots, V_{i,m})$. У справній частині системи (рис. 6.2) виділимо, у свою чергу, підсистему S_j . Передатну функцію від входу системи $u_k(p)$ до входу цієї підсистеми $V_j(p)$ позначимо через $V_{j,k}^i, V_j^i = (V_{j,1}^i, \dots, V_{j,m}^i)$.

Варіацію вхідних сигналів системи $\Delta u(p)$, що забезпечує варіацію вхідного сигналу підсистеми S_i при незмінному вхідному сигналі підсистеми S_j при гіпотезі H_i , одержимо із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i(p) = 0 \\ \Delta V_j(p) \neq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ V_j^i \end{bmatrix} \Delta u(p) \quad (6.34)$$

за умови, що

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j^i \end{bmatrix} = 2. \quad (6.35)$$

Перед перевіркою гіпотези H_i одержимо $u^{\text{np}}(p) = u^{\text{од}}(p) + \Delta u(p)$. Значення $\Delta u(p)$ визначається із системи рівнянь (41) для заданого значення $\Delta V_j(p)$

Процедура перевірки гіпотези H_i наступна.

1. При $u^{\text{од}}(p)$ визначається $\Delta y^{\text{од}}(p)$.
2. Система встановлюється у вихідний початковий стан і при $u^{\text{np}}(p)$ визначається $y^{\text{np}}(p)$.
3. Якщо $\Delta y^{\text{np}}(p) = \Delta y^{\text{од}}(p)$, то гіпотеза H_i приймається й підсистема S_i вважається несправною.

Приклад 1. Структурна схема справної системи представлена на рис. 6.3. Підсистеми $S_1, \dots, S_4$ описуються передатними функціями:

$$W_1 = \frac{1}{p}, W_2 = \frac{2}{p^2}, W_3 = 2, W_4 = 3.$$

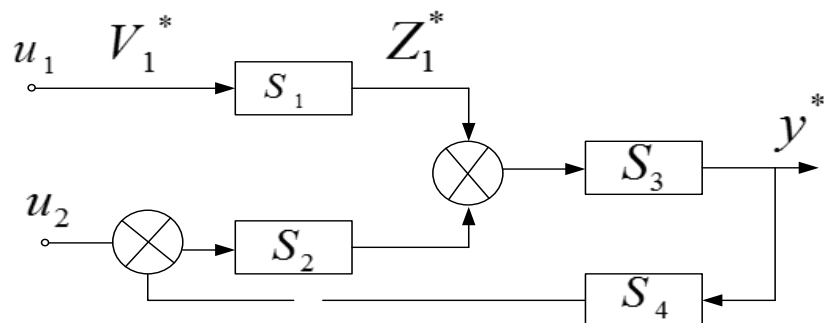


Рис. 6.3. Структурна схема справної системи

Несправною може бути одна з підсистем, опис якої змінюється непередбаченим чином. Вважаємо, що є можливість установки несправної системи в деякий початковий стан. У цьому випадку початковий стан справних підсистем – нульовий, несправної підсистеми – довільний, постійний. Потрібно, маючи вхідні і вихідні сигнали системи, визначити несправну підсистему в режимі тестового діагностування.

Досліджуємо незалежність керувань (розрізнення) підсистем $S_1, \dots, S_4$. Розрізнення підсистем при гіпотезі H_i встановлюється шляхом аналізу залежності вхідних сигналів підсистем при вилученій підсистемі S_i . Аналіз незалежності керувань підсистем проведемо в символьному виді. Таке дослідження дозволяє встановити достатні умови залежності керувань підсистем і необхідні умови їх незалежності. Остаточно незалежність керувань встановлюється заміною позначень передатних функцій конкретними залежностями. При гіпотезі H_1 (видаляється підсистема S_1)

$$V_{1,1} = 1, \quad V_{1,2} = 0, \quad V_{2,1}^1 = 0, \quad V_{2,2}^1 = \frac{1}{1 - W_2 W_3 W_4},$$

$$V_{3,1}^1 = 0, \quad V_{3,2}^1 = \frac{W_2}{1 - W_2 W_3 W_4}, \quad V_{4,1}^1 = 0, \quad V_{4,2}^1 = \frac{W_2 W_3}{1 - W_2 W_3 W_4}.$$

Маємо $V_{1,1} V_{K,2}^1 \neq V_{1,2} V_{K,1}^1$, $K = \overline{2,4}$, отже, виконується (6.35) і підсистеми в парах $S_1 - S_K$, $K = \overline{2,4}$ мають незалежні керування. Оскільки в матрицях $\begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ V_{K,1}^1 & V_{K,2}^1 \end{bmatrix}$, $K = \overline{2,4}$ є нульові елементи ($V_{1,2} = V_{2,1}^1 = V_{3,1}^1 = V_{4,1}^1 = 0$), то незалежність керувань обумовлюється структурою схеми й зберігається при будь-якому описі підсистем. Таким чином, якщо гіпотеза H_1 приймається, то несправна підсистема S_1 , якщо не приймається ($\overline{H_1}$), то слід перевірити підсистеми S_2, S_3, S_4 .

Аналогічним чином при гіпотезі H_2 одержимо

$$V_{1,1}^2 = 1, V_{1,2}^2 = 0:$$

$$V_{2,1} = W_1, W_2, W_3, V_{2,2} = 1, V_{3,1}^2 = W_1, V_{3,4}^2 = V_{4,2}^2 = 0, V_{4,1}^2 = W_1, W_3.$$

Маємо $V_{2,1}, V_{K,2}^2 \neq V_{2,2}, V_{K,1}^2, K=1,3,4$. Отже, при перевірці гіпотези H_2 безліч підсистем розбиваються на дві підмножини: $\{S_2\}$ – якщо гіпотеза H_2 приймається, $\{S_1, S_3, S_4\}$ – якщо не приймається.

При гіпотезі H_3 одержимо $V_{1,1}^3 = 1, V_{1,2}^3 = V_{2,1}^3 = V_{4,1}^3 = V_{4,2}^3 = 0$, $V_{2,2}^3 = 1, V_{3,1} = W_1, V_{3,2} = W_2$. Тому що $V_{4,1}^3 = V_{4,2}^3 = 0$, то для підсистеми S_4 при гіпотезі H_3 не має керувань і підсистеми S_3, S_4 нерозрізнені. Цей же висновок випливає з рівності $V_{3,1}V_{4,2}^3 = V_{3,2}V_{4,1}^3$. Підсистеми в парах $S_3 - S_1, S_3 - S_2$ мають незалежні керування й, отже, помітні, оскільки $V_{3,1}V_{1,2}^3 \neq V_{3,2}V_{4,1}^3, V_{3,1}V_{2,2}^3 \neq V_{3,2}V_{2,1}^3$. При перевірці гіпотези одержимо наступну розбивку безлічі підсистем: $\{S_3, S_4\}$ - якщо гіпотеза H_3 приймається, $\{S_1, S_2\}$ - якщо не приймається.

Діагностичне дерево, що визначає послідовність перевірки гіпотез, може мати вигляд, представлений на рис. 6.4. Проведемо діагностичний експеримент згідно з діагностичним деревом для системи з несправною підсистемою S_2 , передатна функція якої прийняла вигляд $\tilde{W}_2 = \frac{1}{p^3}$.

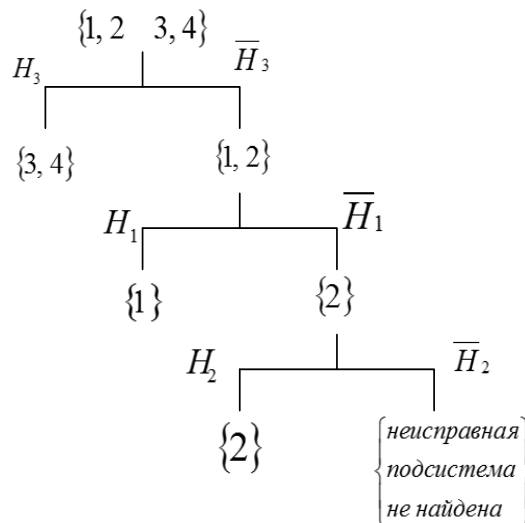


Рис. 6.4. Діагностичне дерево послідовності перевірки гіпотез

Модель справної системи

$$y^*(p) = \frac{W_1 W_3}{1 - W_2 W_3 W_4} u_1(p) + \frac{W_2 W_3}{1 - W_2 W_3 W_4} u_2(p) = \frac{2p}{p^2 - 12} u_1(p) + \frac{4}{p^2 - 12} u_2(p).$$

Несправна система описується залежністю (нам невідомої)

$$y(p) = \frac{W_1 W_3}{1 - \tilde{W}_2 W_3 W_4} u_1(p) + \frac{\tilde{W}_2 W_3}{1 - \tilde{W}_2 W_3 W_4} u_2(p) = \frac{2p^2}{p^2 - 6} u_1(p) + \frac{2}{p^3 - 6} u_2(p).$$

$$\Delta y(p) = y(p) - y^*(p) = \frac{2p}{p^5 - 12p^3 - 6p^2 + 72} \left[(-12p + 6)u_1(p) + (-2p^2 + p)u_2(p) \right].$$

Перевіримо гіпотезу H_3 . Всі розрахунки будемо проводити в просторі зображень перетворення по Лапласу.

Варіацію вхідних сигналів системи, що забезпечують незмінність вхідних сигналів підсистеми S_3 й варіацію вхідних сигналів підсистеми S_1 , одержимо із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta V_3(p) = 0 \\ \Delta V_1(p) = \frac{2}{p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{3,1} & V_{3,2} \\ V_{1,1} & V_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(p) \\ \Delta u_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{2}{p^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(p) \\ \Delta u_2(p) \end{bmatrix}.$$

Маємо $u^{\text{np}}(p)$. Задавши $u_1^{\text{од}}(p) = \frac{1}{p}$, $u_2^{\text{од}}(p) = \frac{2}{p}$, одержимо

$$u_1^{\text{np}}(p) = u_1^{\text{од}}(p) + \Delta u_1(p) = \frac{p+2}{p}, \quad u_2^{\text{np}} = \frac{1}{p}.$$

Процедура перевірки гіпотези H_3 наступна.

$$1. \text{ При } u^{\text{од}}(p) \text{ одержимо } \Delta y^{\text{од}}(p) = \frac{-8p^4 - 20p^3 + 12}{p^5 - 12p^3 - 6p^2 + 72}.$$

2. Установивши систему у вихідний початковий стан, при $u^{\text{np}}(p)$ одержимо

$$\Delta y^{\text{np}}(p) = \frac{-4p^3 - 22p^2 - 36p + 24}{p^6 - 12p^4 - 6p^3 + 72p}.$$

3. Тому що $\Delta y^{\text{np}}(p) \neq \Delta y^{\text{од}}(p)$, те гіпотеза H_3 не приймається, і на несправність підозрюються підсистеми S_1, S_2 .

Аналогічним чином перевіряються гіпотези H_1, H_2 . З них приймається тільки гіпотеза H_2 й підсистема S_2 вважається несправною.

Якщо в підсистемах допускаються тільки параметричні несправності, то процедура діагностування полягає в перевірці сумісності перевизначеної системи діагностичних рівнянь, складених щодо параметрів підсистеми, що перевіряється. Перевизначена система діагностичних рівнянь формується відповідним вибором контрольних точок або вхідних сигналів системи. Якщо підсистеми мають незалежні спостереження або керування, то можна спочатку визначити несправну підсистему, а потім оцінити значення її параметрів.

6.4 Висновки до шостого розділу

В задачі ідентифікації і у задачі діагностики ми маємо справу з недовизначеними системами об'єкт-модель. Різниця полягає в тому, що в задачі ідентифікації недовизначеною є модель (у той час як об'єкт вважається в достатній мірі вивченим) і зусилля дослідників, спрямовані на довизначення моделі. У задачі ж діагностики недовизначеність, яку слід усувати, лежить в об'єкті. Але і в цьому випадку, як і при ідентифікації, зміни вносяться в модель із таким розрахунками, щоб властивості моделі виявилися ідентичними властивостям об'єкта. Ті зміни, які необхідно внести в модель для досягнення ідентичності з об'єктом при їх фізичній і інженерній інтерпретації, і дають підстави для постановки діагнозу. Задача діагностики ставиться тоді, коли в об'єкті виникають відхилення від розрахункових режимів роботи і необхідно зрозуміти їх походження. Для цього вносяться певні зміни в модель об'єкта, мета яких — привести у відповідність поведінку моделі з поведінкою об'єкта. У більш простих випадках для цього досить змінити коефіцієнти рівнянь, не міняючи їх структури. У більш складних випадках доводиться змінювати і структуру моделі. Суттєву та визначальну роль у ефективному розв'язанні вказаних задач відіграє метод мінімізації функціоналу в оптимізаційному процесі досягнення результату діагностування чи ідентифікації. Ретельне дослідження методів мінімізації, що найбільш застосовуються в практиці, виконане шляхом обчислювальних експериментів. Результати вказують на явну

перевагу методу найменших квадратів. Алгоритми мінімізації, за винятком методу найменших квадратів, мають важливий недолік, що обмежує їхнє застосування – наявність статистичних даних і маніпулювання випадковими процесами. Процедури модельного діагностування динамічних систем розглядаються як основні положення реалізації модельного підходу до діагностування систем при обмеженому доступі до їхніх внутрішніх точок. Розглядаються параметричні і структурні несправності. Підсистеми в лінійній системі при структурних несправностях можуть мати тільки дві з трьох діагностичних властивостей: незалежне спостереження й незалежне керування. Для підсистем з конкретною властивістю використовується відповідний метод діагностування.

РОЗДІЛ 7. ВИБІР ТА АДАПТАЦІЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ПРИ СТВОРЕННІ АЛГОРИТМІВ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В КОМП'ЮТЕРНО ІНТЕГРОВАНІХ СИСТЕМАХ

7.1 Адаптація обчислювальних алгоритмів реалізації диференціальних динамічних моделей

Умови функціонування динамічних комп'ютерно-інтегрованих систем жорстко визначають вимоги до швидкодії обчислювально-керуючих систем [122], які мають завжди обмежені ресурси, що свідчить про актуальність питання цільового вибору або адаптації чисельних методів розв'язання рівнянь динаміки об'єктів, що моделюються при організації обчислювальних процесів [12, 89, 215].

Аналіз властивостей методів наближеного розв'язання рівнянь динаміки [10]. В даний час відома велика кількість методів чисельного розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь [23, 191, 224], основну частину яких можна розділити на три групи:

- однокрокові методи типу Рунге-Кутта і ступеневі методи;
- багатокрокові кінцево-різницеві методи (типу Мілна, Адамса);
- гібридні методи (типу Батчера).

Загальною властивістю цих методів є те, що всі вони будуються на основі *розкладання шуканої функції в степеневий ряд*, в якому зберігається (враховується) скінченна кількість членів. При цьому накладається умова – метод r -го порядку повинен давати точне рішення, коли шукана функція являє собою поліном r -го ступеня. Ця умова і той факт, що будь-яка функція, що має достатню кількість похідних, може бути наближено замінена відповідним поліномом, визначають можливість побудови зазначених методів [46, 153, 173].

Інший, досить загальний підхід до питання побудови чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь, полягає в *заміні вихідної системи* деякою іншою, розв'язання якої може бути здійснено досить просто з залученням аналітичних прийомів. Найбільш відомими з таких методів є так звані

експоненційні, сутність яких полягає в поданні правої частини вихідної системи у вигляді суми лінійного та нелінійного членів і використанні виразу загального інтеграла для лінійних систем. Різноманітність методів має місце через різні способи введення лінійних членів, а також завдяки різним прийомам обчислення загального інтеграла [22, 41, 131].

Незважаючи на велику кількість різноманітних обчислювальних схем (розрахункових правил) розв'язання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) з початковими умовами і велику історію розвитку цього питання процес вдосконалення чисельних методів не припиняється і зараз [193]. Пояснюється це значним розвитком обчислювальної техніки, який забезпечив можливість дослідження складних об'єктів і практичної реалізації складних обчислювальних схем [67]. Зростання складності досліджуваних динамічних об'єктів зумовила розвиток *неявних* методів чисельного аналізу динаміки, що відзначаються значно кращими характеристиками стійкості в порівнянні з класичними явними методами. Різноманітність неявних обчислювальних схем рішення ЗДР обумовлюється різноманітністю прийомів формування і розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь [140, 162].

Проаналізуємо принципи побудови методів чисельного розв'язання задачі Коші, а також розрахункові правила найбільш уживаних на практиці методів. При цьому, з метою спрощення запису та досягнення наочності розрахункових співвідношень, викладення матеріалу дано для випадку одного диференціального рівняння з одним невідомим

$$\dot{y} = f(y, t), \quad y(0) = y_0 \quad (7.1)$$

Таке спрощення не знижує загального характеру результатів у зв'язку з тим, що процедура розв'язання системи диференціальних рівнянь полягає в застосуванні розрахункових правил до кожного рівняння розв'язуваної системи.

Під однокроковими методами [101] розв'язування задачі Коші для рівняння (7.1) розуміють методи чисельного інтегрування, що дозволяють визначати наближений розв'язок в точці лише на основі отриманого раніше розв'язку для

попередньої точки. У загальному вигляді алгоритми однокрокових методів представляються в наступному вигляді

$$y_{i+1} = F(f, t_i, y_i) \quad (7.2)$$

для явних методів інтегрування, і

$$y_{i+1} = F(f, t_i, y_i, y_{i+1}) \quad (7.3)$$

для неявних методів інтегрування (F – сформована розрахункова залежність).

В останньому випадку мають місце не розрахункові співвідношення для визначення y_{i+1} , а рівняння відносно них. Отже, при використанні неявних методів виникає необхідність розв’язання рівняння (7.3), а в багатовимірному випадку – систем рівнянь відносно y_{i+1} на кожному кроці. Оскільки ці рівняння, як правило, є нелінійними, то обчислювальна складність неявних методів стає очевидною. Застосування неявних методів виправдано в тих випадках, коли можливе використання великого кроку інтегрування вихідної системи або коли рівняння (7.3) може бути розв’язане досить просто. Тут слід зазначити, що розв’язання рівняння (7.3) зазвичай ведеться ітераційним способом, тим більше що його вигляд є якраз зручним для застосування ітерацій. Таким чином, ефективність неявних методів буде в значній мірі залежати від збіжності ітераційного процесу, що в загальному випадку визначається властивостями вихідної системи (7.1). На практиці процес ітерацій переривають після двох-трьох циклів [187, 190].

Аналіз однокрокових методів чисельного інтегрування системи (7.1) [208], заснованих на багаточленних наближеннях, дозволяє виділити три принципи їх побудови:

- розкладання шуканого розв’язку в ряд Тейлора;
- компенсація перших членів ряду Тейлора для функції похибки (методи Рунге-Кутта);
- застосування квадратурних правил.

Розкладання шуканого розв’язку в ряд Тейлора відноситься до найбільш відомих способів наближеного розв’язання. Необхідність визначення похідних високого порядку від шуканого розв’язку обумовлює значну обчислювальну

складність методів. Наявні результати по формалізації степеневих методів і адаптація їх при комп'ютерному використанні поки ще недостатні для вирішення питання про їх застосування при дослідженні складних динамічних об'єктів.

У практиці чисельного розв'язання рівнянь типу (7.1) широкого поширення набули явні методи Рунге-Кутта, що задаються правилами

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^q p_j k_j(h) \quad (7.4)$$

де

$$k_j(h) = h f \left(y_i + \sum_{s=1}^{j-1} \beta_{js} k_j(h), t_i + \alpha_j h \right), \quad (7.5)$$

де h – крок дискретизації, параметри $p_j, \alpha_j, j = \overline{1, q}, (\alpha_1 = 0), \beta_{js}, 0 < s < j \leq q$ обираються, виходячи з умов рівності нулю перших членів ряду Тейлора функції похибки $\varphi(h)$, яка визначається рівністю

$$\varphi(h) = y(t+h) - y(t) - \sum_{j=1}^q p_j k_j(h). \quad (7.6)$$

Величина $\varphi(h)$ характеризує похибку методу на кроці інтегрування (локальна похибка методу) і, в припущенні гладкості $f(y, t)$ за обома аргументами, може бути представлена на основі формули Тейлора у вигляді

$$\varphi(h) = \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta h)}{(r+1)!} h^{r+1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (7.7)$$

де величина r називається порядком (ступенем) точності методу.

Методи першого порядку точності. Вони представляються таким розрахунковим правилом (метод Ейлера):

$$y_{i+1} = y_i + h f(y_i, t_i) \quad (7.8)$$

Методи другого порядку точності. Ці методи представляються розрахунковими правилами, параметри яких задовольняють наступній системі

$$1 - p_1 - p_2 = 0, \quad 1 - 2 p_1 \alpha_2 = 0, \quad 1 - 2 p_1 \beta_{21} = 0, \quad (7.9)$$

яка отримується прирівнюванням до нуля перших трьох членів розкладання функції $\varphi(h)$ в ряд Тейлора.

Система (7.9) є недовизначеною і сумісною, що призводить до існування безлічі рішень, представлених у вигляді однопараметричної множини. Приймаючи $\alpha_2 = b$, отримуємо для будь-яких $\beta \neq 0$

$$p_1 = 1 - \frac{1}{2b}, \quad p_2 = \frac{1}{2b}, \quad \beta_{21} = b. \quad (7.10)$$

При виборі конкретного значення b керуються різними міркуваннями. На практиці набули поширення значення параметрів, що приводять до зручних в обчислювальному відношенні розрахунковим правил. Так, при $b = 1$ маємо $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/2$, $\beta_{21} = \alpha_2 = 1$. Розрахункове правило, що відповідає цим значенням, має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(y_i, t_i) + f(y_i + h \dot{y}_i, t_i + h)), \quad (7.11)$$

а так як $y_i + h \dot{y}_i \approx y_{i+1}$, то лінійну комбінацію $0,5(k_1 + k_2)$ можна розглядати як аналог квадратурної формули трапецій при обчисленні інтеграла у виразі для точного значення шуканої функції

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{y}(r) dr. \quad (7.12)$$

Ще одне правило, що використовується, отримується при $b = 1/2$. В цьому випадку маємо $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $\beta_{21} = \alpha_2 = 1/2$ і

$$y_{i+1} = y_i + h f\left(y_i + \frac{1}{2} h \dot{y}_i, t_i + \frac{h}{2}\right), \quad (7.13)$$

що може розцінюватися як аналог квадратурної формули середніх прямокутників при обчисленні інтеграла в (7.12).

Можливе однозначне визначення значень параметрів p_1 , p_2 , α_2 , β_{21} шляхом доповнення системи (7.9) співвідношеннями, які отримуються з умови перетворення на нуль деяких членів у виразі для $\varphi'''(0)$. Так, з (7.9) випливає

$\alpha_2 = \beta_{21}$. При цьому $\varphi'''(0)$ містить три члена з однаковими коефіцієнтами, рівність нулю яких дає систему

$$1 - p_1 - p_2 = 0, \quad 1 - 2 p_2 \alpha_2 = 0, \quad 1 - 3 p_2 \alpha_2^2 = 0, \quad (7.14)$$

яка має єдиний розв'язок $p_1 = 1/4$, $p_2 = 3/4$, $\alpha_2 = 2/3$. Відповідне розрахункове правило має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left(f(y_i, t_i) + 3 f\left(y_i + \frac{2}{3} h \dot{y}_i, t_i + \frac{2}{3} h\right) \right). \quad (7.15)$$

З виразу для $\varphi'''(0)$ випливає неможливість побудови формул чисельного інтегрування третього порядку точності при $q = 2$, оскільки ніяким вибором параметрів не можна забезпечити рівність $\varphi'''(0) = 0$ для довільних $f(y, t)$.

Методи третього порядку точності. При $q = 3$ є вісім параметрів, що підлягають визначенню: $p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ (в загальному випадку число параметрів, як це випливає з (7.4) і (7.5), визначається виразом $(q^2 + 3q - 2)/2$). Система рівнянь для їх визначення має вигляд

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1, & p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 &= 1/2, \\ p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^2 &= 1/3, & p_2 \alpha_2 \beta_{32} &= 1/6, \\ \beta_{31} + \beta_{32} - \alpha_3 &= 0, & \beta_{21} + \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Система (7.16) є недовизначеною і несумісною. Множина її рішень може бути представлена в двохпараметричному вигляді з двома вільними параметрами, в якості яких доцільно прийняти α_2 і α_3 , оскільки вони в (3.16) входять в другому ступені. При цьому розв'язок (7.16) має вигляд

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - \frac{3(\alpha_3 - \alpha_2) - 2}{6\alpha_2\alpha_3}, & p_2 &= \frac{3\alpha_3 - 2}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)}, & p_3 &= \frac{2 - 3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}, \\ \beta_{21} &= \alpha_2, & \beta_{31} &= \frac{\alpha_3(3\alpha_2(1 - \alpha_2) - \alpha_3)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)}, & \beta_{32} &= \frac{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)} \end{aligned} \quad (7.17)$$

при будь-яких α_2, α_3 за винятком $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 2/3$, при яких система (7.16) стає несумісною.

Найбільш уживане правило третього порядку точності виходить при $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1$. Для цього випадку $p_1 = 1/6$, $p_2 = 2/3$, $p_3 = 1/6$, $\beta_{21} = 1/2$, $\beta_{31} = -1$, $\beta_{32} = 2$ і розрахункове правило набуває вигляду

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad k_1 = h f(y_i, t_i), \\ k_2 &= h f\left(y_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \quad k_3 = h f(y_i - k_1 + 2k_2, t_i + h). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Це правило можна розглядати як аналог квадратурної формули Сімпсона, так як в разі, коли $f(y, t)$ не залежить від y ($f_y \equiv 0$), (7.18) збігається з останньою.

І в даному випадку параметри розрахункових правил можуть вибиратися із залученням додаткових співвідношень, що забезпечують єдиний розв'язок системи (7.16) і, крім того, не існує наборів параметрів, що призводять до правил четвертого порядку точності.

Методи четвертого і більш високого порядку точності. Із зростанням q система рівнянь відносно параметрів розрахункових правил набуває все більш складного вигляду. При $q = 4$ маємо 13 параметрів, які повинні задовольняти системі 11 рівнянь

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1, \quad p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 + p_4 \alpha_4 = 1/2, \quad \alpha_2 = \beta_{21}, \\ p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^2 + p_4 \alpha_4^2 &= 1/3, \quad p_2 \alpha_2^3 + p_3 \alpha_3^3 + p_4 \alpha_4^3 = 1/4, \\ p_3 \beta_{32} \alpha_2 + p_4 (\beta_{42} \alpha_2 + \beta_{43} \alpha_3) &= 1/6, \quad \beta_{31} + \beta_{32} - \alpha_3 = 0, \\ p_3 \beta_{32} \alpha_2^2 + p_4 (\beta_{42} \alpha_2^2 + \beta_{43} \alpha_3^2) &= 1/12, \quad \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43} - \alpha_4 = 0, \\ p_3 \beta_{32} \alpha_2 \alpha_3 + p_4 \alpha_4 (\beta_{42} \alpha_2 + \beta_{43} \alpha_3) &= 1/8, \quad p_4 \beta_{43} \beta_{32} \alpha_2 = 1/24. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Система (7.19) має безліч розв'язків, які в загальному випадку залежать від двох параметрів. Аналіз умов спільності показує, що безліч розв'язків розпадається на три підмножини, вигляд яких залежить від співвідношень між окремими параметрами. Так, якщо $\alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_4$, то (7.19) сумісна лише при $\alpha_4 = 1$ і множина розв'язків є двохпараметричною. При вільних параметрах α_2 і α_3 всі розв'язки представляються таким чином

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{2\alpha_3 - 1}{12\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - 1)}, & p_3 &= \frac{2\alpha_2 - 1}{12\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)(1 - \alpha_3)}, \\
p_4 &= \frac{6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3}{12(\alpha_3 - 1)(\alpha_2 - 1)}, \\
\beta_{42} &= \frac{(\alpha_2 - 1)(4(\alpha_2 - \alpha_3^2) + 3(\alpha_3 - \alpha_2) + 2(\alpha_3 + 1))}{2\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_3)(6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3)}, \\
\beta_{43} &= \frac{(2\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)(\alpha_2 - 1)}{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)(6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3)}, & \beta_{32} &= \frac{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)}{2\alpha_2(2\alpha_2 - 1)}, \\
p_1 &= 1 - p_2 - p_3 - p_4, & \beta_{41} &= 1 - \beta_{42} - \beta_{43}, & \beta_{31} &= \alpha_2 - \beta_{32}, & \beta_{21} &= \alpha_2,
\end{aligned} \tag{7.20}$$

причому $\alpha_2 \neq \frac{1}{2}$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_2 \neq \frac{3-4\alpha_3}{4-6\alpha_3}$, $\alpha_3 \neq 0$.

Друга підмножина розв'язків визначається умовами сумісності системи (7.19) при $\alpha_2 = \alpha_4$ і являє собою однопараметричну множину, для опису якої зручно вважати вільним параметром p_2 . При цьому всі розв'язки подаються як

$$\begin{aligned}
\alpha_2 = \alpha_4 = \beta_{21} = 1, & \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, & p_1 = \frac{1}{6}, & \quad p_3 = \frac{2}{3}, & p_4 = \frac{1}{6} - p_2, & \quad \beta_{31} = \frac{3}{8}, \\
\beta_{32} = \frac{1}{8}, & \quad \beta_{41} = \frac{12p_2 + 1}{2(6p_2 - 1)}, & \quad \beta_{42} = \frac{1}{2(6p_2 - 1)}, & \quad \beta_{43} = \frac{2}{1 - 6p_2},
\end{aligned} \tag{7.21}$$

причому $p_2 \neq 1/6$.

Третя підмножина розв'язків визначається умовами сумісності при $\alpha_2 = \alpha_3$ і, так само як і друга підмножина, є однопараметричною, опис якої також зручно задається при вільному параметрі p_2 . Всі розв'язки мають вигляд

$$\begin{aligned}
\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_{21} = \frac{1}{2}, & \quad \alpha_4 = 1, & p_1 = \frac{1}{6}, & \quad p_3 = \frac{2}{3} - p_2, & p_4 = \frac{1}{6}, & \quad \beta_{31} = \frac{1 - 3p_2}{2(2 - 3p_2)}, \\
\beta_{32} = \frac{1}{2(2 - 3p_2)}, & \quad \beta_{41} = 0, & \quad \beta_{42} = 3p_2 - 1, & \quad \beta_{43} = 2 - 3p_2,
\end{aligned} \tag{7.22}$$

причому $p_2 \neq 2/3$.

Розрахункове правило, яке відповідає множині параметрів (7.22) при $p_2 = 1/3$ і яке отримало найбільше поширення, має вигляд

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
k_1 &= h f(y_i, t_i), \quad k_2 = h f\left(y_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \\
k_3 &= h f\left(y_i + \frac{k_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \quad k_4 = h f(y_i + k_3, t_i + h).
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Таким чином, це правило, як і правило (7.18), можна розглядати в якості аналогу квадратурної формули Сімпсона.

Інша поширена форма розрахункових співвідношень четвертого порядку відповідає першій підмножині розв'язків системи (7.19) при $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$. При цьому $\beta_{21} = 1/2$, $\beta_{31} = -1/3$, $\beta_{32} = \beta_{41} = \beta_{43} = \alpha_4 = 1$, $\beta_{42} = -1$, $p_1 = p_4 = 1/8$, $p_2 = p_3 = 3/8$, а розрахункове правило має вигляд

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4), \\
k_1 &= h f(y_i, t_i), \quad k_2 = h f\left(y_i + \frac{k_1}{3}, t_i + \frac{h}{3}\right), \\
k_3 &= h f\left(y_i + \frac{k_2}{3} + k_2, t_i + \frac{2}{3}h\right), \quad k_4 = h f(y_i + k_1 - k_2 + k_3, t_i + h).
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Це правило може трактуватися як аналог відомої квадратурної формули "трьох восьмих" (при $f_y \equiv 0$ (7.24) співпадає з останньою).

Викладені методи Рунге-Кутта до четвертого порядку включно мають властивість множинності розв'язків рівнянь щодо параметрів розрахункових правил (за винятком методу Ейлера). Починаючи ж з $q=5$ і далі параметрів α_j , p_j , β_{js} , $j = \overline{1, q}$, $0 < s < j \leq q$ не вистачає для виконання умов забезпечення q -го порядку точності. Відповідні системи стають перевизначеними і несумісними. Так, побудова методу 5-го порядку можлива лише при $q=6$. Ця властивість, що полягає в тому, що порядок точності методу менше q , зберігається для всіх методів вище четвертого порядку. Застосування методів Рунге-Кутта вимагає q -кратного обчислення правих частин вихідного рівняння на кожному кроці інтегрування. А так як саме обчислення правої частини є однією з найбільш трудомістких операцій,

то використання методів вище четвертого порядку повинно призводити до високих вимог по швидкодії до обчислювального пристрою, що працює в реальному часі. Крім того, застосування методів високого порядку точності виправдано у випадках, коли обчислювальний процес може бути реалізований з великим кроком інтегрування, при якому необхідна швидкодія обчислювача може виявитися прийнятною. Однак в разі побудови системи управління крок інтегрування, що співпадає з інтервалом дискретності визначення управлінь, має обмеження зверху, оскільки збільшення дискретності управлінь призводить до збільшення помилки моделювання. Дана обставина свідчить про недоцільність використання методів Рунге-Кутта високого порядку для цілей моделювання динаміки досліджуваних систем в реальному часі. Сказане рівною мірою слід віднести і до використання неявних методів Рунге-Кутта, ідея побудови яких аналогічна викладеній вище, не дивлячись на те, що неявні методи є більш точними, оскільки містять більше число параметрів (у виразах (7.5) для неявних методів слід покласти $0 < s \leq q$ або $0 < s \leq j$ - для напів'явних).

Квадратурні методи. Третя група однокрокових методів чисельного розв'язання задачі Коші включає в себе методи, побудова яких заснована на застосуванні квадратурних формул при обчисленні інтеграла в (7.12). Ці методи будемо називати *квадратурними*.

Для викладу основної ідеї побудови квадратурних методів представимо вираз (7.12) у вигляді

$$y_{i+1} = y_i + h \int_0^1 f(y(t_i + \alpha h), t_i + \alpha h) d\alpha = y_i + h \int_0^1 \phi(\alpha) d\alpha, \quad (7.25)$$

що досягається заміною змінних $\alpha = [(\tau - t_i)/h]$ в (7.12). Для обчислення інтеграла в (7.25) скористаємося формулою Гаусса. Тоді отримаємо наближене значення для y_{i+1} у вигляді

$$y_{i+1} \approx y_i + h \sum_{j=1}^q p_j \phi(\alpha_j) = y_i + h \sum_{j=1}^q p_j f(y(t_i + \alpha_j h), t_i + \alpha_j h). \quad (7.26)$$

Права частина (7.26) містить $2q$ параметрів, які вибираються з умови точності квадратурного правила для поліномів r -го ступеня. З теорії квадратур відомо, що такі правила можуть бути побудовані для будь-яких $r \leq (2q-1)$, Причому похибка обчислення інтеграла в (7.25) в припущенні безперервності $\varphi^{(r+2)}(\alpha)$ є величиною $O(h^{r+2})$. В результаті отримується метод чисельного розв'язання диференціальних рівнянь $(r+1)$ -го порядку. Якщо в (7.26) з $2q$ параметрів m параметрів вважати вільними, то можна будувати методи $(2q-m)$ -го порядку точності.

Умова точності квадратурного правила для поліномів r -го ступеня призводить до наступної системи рівнянь щодо параметрів:

$$\sum_{i=1}^q p_i \alpha_i^{(j-1)} = \frac{1}{j}, \quad j = \overline{1, (2q-m)}, \quad (7.27)$$

в якій m параметрів можуть бути обрані довільно. У теорії квадратур доводиться, що при $m=0$ система (7.27) має єдиний розв'язок для будь-якого $q \geq 1$. З цього випливає, що вона сумісна при будь-яких $m < 2q$.

Таким чином, задаючи q, m , а також вільні параметри і визначаючи з (7.27) інші параметри, замість (7.26) можна записати точну рівність

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^q p_j f(y_{i+\alpha_j}, t_i + \alpha_j h) + O(h^{2q-m+1}), \quad (7.28)$$

(тут $y_{i+\alpha_j} = y(t_i + \alpha_j h)$).

Однак для розрахунків вираз (7.28) не може бути застосований, так як значення $y_{i+\alpha_j}$ невідомі. Аналізуючи (7.28) неважко помітити, що порядок помилки рівності не зміниться, якщо в ньому замінити невідомі $y_{i+\alpha_j}$ на величини, які мають порядок похибки $O(h^{2q-m})$, для отримання яких досить застосувати квадратурну формулу меншого на одиницю порядку точності. Це досягається: або зменшенням q , або збільшенням кількості вільних параметрів на одиницю, а також вибором їх значень, зручних в обчислювальному відношенні. При цьому для обчислення $y_{i+\alpha_j}$ з помилкою $O(h^{2q-m})$ знадобиться знання інших значень $y_{i+\bar{\alpha}_j}$, вимога до точності

визначення яких ще більш слабка (порядок помилки $y_{i+\bar{\alpha}j}$ дорівнює $(2q-m-1)$). Застосовуючи описану процедуру до знаходження $y_{i+\bar{\alpha}j}$ і повторюючи цей процес, в результаті приходимо до необхідності знання $y_{i+\tilde{\alpha}j}$ з помилкою $O(h^2)$, що забезпечується застосуванням методу Ейлера. Таким чином, будується алгоритм послідовного визначення з наростаючою точністю значень $y_{i+\tilde{\alpha}j}, \dots, y_{i+\tilde{\alpha}j}, y_{i+\alpha j}$, що дозволяє знайти y_{i+1} за (7.28) з заданим порядком локальної помилки.

При побудові квадратурних методів розв'язання задачі Коші основною проблемою є узгодження квадратурних формул різного порядку точності між собою з метою отримання економічних розрахункових правил. У загальному вигляді задача формалізації побудови квадратурних методів не вирішена.

Квадратурні методи першого порядку точності. Параметри методів визначаються з (7.27) при $(2q-m-1)$, що призводить до єдиної умови $\sum_{j=1}^q p_j = 1$.

При $q=1$ маємо $p_1=1$ (α_1 обирається довільно) і

$$y_{i+1} = y_i + h f(y_{i+\alpha_1}, t_i + \alpha_1 h),$$

але $f(y_{i+\alpha_1}, t_i + \alpha_1 h) = f(y_i, t_i) + O(h)$, що приводить до явного методу Ейлера (при $\alpha_1=1$ має місце неявний метод Ейлера).

Квадратурні методи другого порядку. Для побудови методів використовуються два рівняння системи (7.27):

$$\sum_{j=1}^q p_j = 1 \quad \sum_{j=1}^q p_j \alpha_j = \frac{1}{2}. \quad (7.29)$$

При $q=1$ є єдиний розв'язок $p_1=1, \alpha_2=1/2$ і відповідне розрахункове правило збігається з методом Рунге-Кутта (7.13). При $q=2$ система (7.29) має два вільних параметра, в якості яких зручно вибирати α_1 і α_2 . При цьому

$$p_1 = \frac{2\alpha_2 - 1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad p_2 = \frac{1 - 2\alpha_1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

і, отже,

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{2\alpha_2 - 1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} f(y_{i+\alpha_1}, t_{i+\alpha_1}h) + \frac{1 - 2\alpha_1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} f(y_{i+\alpha_2}, t_{i+\alpha_2}h) \right) \quad (7.30)$$

Природно, що при використанні (7.30) для побудови розрахункових правил доцільно прийняти $\alpha_1 = 0$. Тоді множина розв'язків (7.29) є однопараметричною (параметр α_2) і збігається з множиною (7.10) розв'язків системи (7.9) для параметрів методів Рунге-Кутта другого порядку, а вираз (7.30) набуває вигляду

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i + h \left(1 - \frac{1}{2\alpha_2} f(y_i, t_i) + \frac{1}{2\alpha_2} f(y_{i+\alpha_2}, t_{i+\alpha_2}h) \right), \quad (7.31)$$

де верхній індекс при шуканій функції означає порядок локальної похибки. Вираз (7.31) являє собою неявне правило, для використання якого необхідно знати $y_{i+\alpha_2}$. Відповідно до викладеного раніше для побудови явного однокрокового правила необхідно мати $y_{i+\alpha_2}^{(2)}$, що забезпечується застосуванням правила

$$y_{i+\alpha_2}^{(2)} = y_{i+\alpha_2} h f(y_i, t_i). \quad (7.32)$$

Сукупність виразів (7.31) і (7.32) складає розрахункові правила методів другого порядку точності. У загальному випадку ці методи вимагають дворазового обчислення правих частин на кроці інтегрування, проте використання властивостей асимптотичних оцінок дозволяє в окремому випадку $\alpha_2 = 1$ побудувати метод другого порядку, що вимагає одноразового обчислення правих частин на кожному кроці. Дійсно, при $\alpha_2 = 1$ (7.31) можна представити як

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i^{(3)} + \frac{1}{2} h \left(f(y_i^{(2)}, t_i) + f(y_{i+1}^{(2)}, t_i + h) \right), \quad (7.33)$$

звідки видно, що розраховане на $(i+1)$ -му кроці значення $f(y_{i+1}^{(2)}, t_i + h)$ може використовуватися на $(i+2)$ -му кроці в якості першого доданка збільшення в (7.33). Таким чином, сукупність виразів (7.32) і (7.33) дає економічний метод другого порядку.

Квадратурні методи третього порядку. Система рівнянь відносно параметрів цих методів складається з перших трьох рівнянь системи (7.27):

$$\sum_{j=1}^q P_j = 1, \quad \sum_{j=1}^q P_j \alpha_j = \frac{1}{2}, \quad \sum_{j=1}^q P_j \alpha_j^2 = \frac{1}{3}. \quad (7.34)$$

При $q=1$ система (7.34) несумісна, а при $q>1$ – недовизначена з $2q-3$ вільними параметрами. Для $q=2$ є однопараметрична множина розв’язків, яка при вільному параметрі α_1 має вигляд

$$p_1 = \frac{1}{4(3\alpha_1^2 - 3\alpha_1 + 1)}, \quad p_2 = \frac{3(2\alpha_1 - 1)^2}{4(3\alpha_1^2 - 3\alpha_1 + 1)}, \quad \alpha_2 = \frac{3\alpha_1 - 1}{3(2\alpha_1 - 1)},$$

При $\alpha_1 = 0$ маємо $p_1 = 1/4$, $p_2 = 3/4$, $\alpha_2 = 2/3$, так що

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i^{(3)} + \frac{h}{4} \left(f(y_i^{(3,4)}, t_i) + 3 f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_i + \frac{2}{3}h\right) \right) \quad (7.35)$$

Для обчислення $y_{i+2/3}^{(3)}$ необхідно використовувати один з методів другого порядку, застосовуючи для цієї мети загальне вираз (7.30). Однак, з огляду на те, що в (7.35) входить $f(y_i, t_i)$, при обчисленні $y_{i+2/3}^{(3)}$ має сенс використовувати це значення правої частини, що призводить до $\alpha_1^{(3)} = 0$ і

$$y_{i+2/3}^{(3)} = y_{i+}^{(4)} + \frac{2}{3}h \left(\frac{2\alpha_2^{(3)} - 1}{2\alpha_2^{(3)}} f(y_i, t_i) + \frac{1}{2\alpha_2^{(3)}} f\left(y_{(i+2/3)\alpha_2^{(3)}}, t_i + \frac{2}{3}\alpha_2^{(3)}h\right) \right) \quad (7.36)$$

а

$$y_{(i+2/3)\alpha_2^{(3)}} = y_i^{(4)} + \frac{2}{3}\alpha_2^{(3)}h f(y_i, t_i).$$

Приймаючи $\alpha_2^{(3)} = 1/2$, приходимо до наступного правила

$$\begin{aligned} y_{i+1/3}^{(2)} &= y_i + \frac{h}{3} f(y_i, t_i), \\ y_{i+2/3}^{(3)} &= y_i + \frac{2}{3}h f\left(y_{i+1/3}^{(2)}, t_{i+1/3}h\right), \\ y_{i+1}^{(4)} &= y_i + \frac{h}{4} \left(f(y_i, t_i) + 3 f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_{i+2/3}h\right) \right). \end{aligned} \quad (7.37)$$

Правило (7.37) аналогічне до методу Рунге-Кутта третього порядку, отриманому при $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$ в (7.16).

При $\alpha_2^{(3)} = 1$ обчислювальне правило набуває вигляду

$$\begin{aligned} y_{i+2/3}^{(2)} &= y_i + \frac{2}{3}h f(y_i, t_i), \\ y_{i+2/3}^{(3)} &= y_i + \frac{1}{3}h \left(f(y_i, t_i) + f\left(y_{i+2/3}^{(2)}, t_{i+2/3}h\right) \right), \\ y_{i+1}^{(4)} &= y_i + \frac{h}{4} \left(f(y_i, t_i) + 3f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_{i+2/3}h\right) \right). \end{aligned} \quad (7.38)$$

При $q = 3$ система (7.34) має три вільних параметра, в якості яких зручно прийняти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Поклавши, як і раніше, $\alpha_1 = 0$, приходимо до наступного розв'язку

$$p_1 = \frac{1}{3\alpha_2\alpha_3} + \frac{\alpha_2 - 1}{2\alpha_2} + \frac{\alpha_3 - 1}{2\alpha_3}, \quad p_2 = \frac{3\alpha_3 - 2}{6(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_2}, \quad p_3 = \frac{2 - 3\alpha_2}{6(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_3}.$$

Питання вибору значень α_2, α_3 не вирішене в даний час. Як вказувалося, часто вибирають параметри з умови зручності обчислень. Так, приймаючи $\alpha_2 = 1/2, \alpha_3 = 1$, маємо $p_1 = 1/6, p_2 = 2/3, p_3 = 1/6$ і

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i^{(4)} + \frac{h}{6} \left(f(y_i, t_i) + 4f\left(y_{i+1/2}^{(3)}, t_{i+1/2}h\right) + f\left(y_{i+1}^{(3)}, t_{i+h}\right) \right). \quad (7.39)$$

Для значень $y_{i+1/2}^{(3)}$ і $y_{i+1}^{(3)}$ справедливі вирази (7.36) в яких параметри $\alpha_2^{(3)}$ в загальному випадку різні, а вибір їх значень призводить до різних обчислювальних правил. Так, якщо $\alpha_2^{(3)} = 2$, то, з огляду на необхідність обчислення $f\left(y_{i+1/2}^{(3)}, t_{i+h}\right)$ в (7.39) для $y_{i+1/2}^{(3)}$, маємо

$$y_{i+1/2}^{(3)} = y_i^{(4)} + \frac{h}{8} \left(3f(y_i, t_i) + f\left(y_{i+1}^{(3)}, t_{i+h}\right) \right). \quad (7.40)$$

Вважаючи $\alpha_2^{(3)} = 1$ для обчислення $y_{i+1}^{(3)}$, отримуємо

$$y_{i+1/2}^{(3)} = y_i^{(4)} + \frac{h}{2} \left(f(y_i, t_i) + f\left(y_{i+1}^{(3)}, t_{i+h}\right) \right). \quad (7.41)$$

і, як зазвичай,

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i + hf(y_i^{(4)}, t_i). \quad (7.42)$$

Сукупність виразів (7.39)-(7.42) і складає обчислювальне правило. Аналізуючи ці вирази, неважко помітити, що число обчислень правої частини залежить від порядку похибки $y_i^{(r)}$ при обчисленні $f(y_i, t_i)$. При $r = 4$ потрібно обчислювати чотири значення правої частини на кожному кроці інтегрування, а при $r = 3$ – три. Інша особливість цього розрахункового правила полягає в наявності трьох наближених значень y_{i+1} , що може бути використане для контролю обчислювального процесу. Ця властивість методів, заснованих на квадратурних формулах, слід вважати істотною перевагою і враховувати при виборі методу чисельного розв'язання.

7.2. Вибір оптимального (найкращого) алгоритму

Критерії оптимальності. Реальні припущення щодо властивостей керованих об'єктів рівняння динаміки представляються у вигляді задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (7.43)$$

де $\mathbf{y}$ - вектор змінних стану, компонентами якого є (в загальному випадку) вихідні координати динамічного об'єкта, значення відхилень керуючих органів, різні змінні параметри тощо; $\mathbf{u}$ - вектор керуючих сигналів, що діють на вході системи управління об'єкта; $\mathbf{p}$ - вектор параметрів, що характеризують властивості об'єкта і його системи управління, а також властивості зовнішнього середовища; $\mathbf{y}_0$ - вектор початкових значень змінних стану.

Зазвичай серед рівнянь системи (7.43) можна виділити групи рівнянь, інтегрування яких здійснюється досить просто або можливо в явному вигляді. До таких рівнянь, наприклад, можна віднести одновимірні рівняння, що зв'язують значення відхилень органів управління зі значеннями відповідних керуючих сигналів. Зазначені рівняння є порівняно простими, а питання чисельного розв'язання їх розроблені досить повно. У той же час частина рівнянь системи (7.43), яка представляє собою сукупність рівнянь динаміки, є найбільш складною і

специфічною для заданого типу об'єкта. Саме для вирішення цієї частини рівнянь, якими надалі будемо вважати систему (7.43) , особливе значення має вибір найкращого чисельного методу.

Вирішення задачі вибору чисельного методу передбачає проведення порівняльного аналізу різних методів за певними характеристиками. Відомий ряд підходів до порівняння чисельних методів розв'язання ЗДР, зокрема, такі як порівняння областей або характеру стійкості, локальних помилок, в тому числі за обчислювальними витратами на їх оцінювання. В даний час найбільш поширеним є порівняння методів за результатами розв'язання наборів тестових задач . Недоліки такого підходу полягають в труднощі отримання однозначних результатів порівняння (мабуть, цей підхід успішно може застосовуватися для виявлення явно "поганих" методів) і в неможливості, взагалі кажучи, оцінки властивостей методів при розв'язанні реальних задач, що характерно і для згаданих вище підходів. В цілому вирішення питання про вибір найкращого методу аналізу динаміки залежить від змісту, що вкладається в поняття «найкращий», яке повністю визначається критерієм оптимальності. Як правило, критерій оптимальності являє собою деяку функцію або функціонал від будь-яких характеристик (аргументів критерію) елементів множини, в якій шукається оптимальний елемент. В даному випадку такою множиною є множина чисельних методів розв'язання задачі (7.43). Під оптимальним елементом при цьому розуміється елемент множини, на характеристиках якого критерій оптимальності приймає глобальне екстремальне значення.

Формулювання або конструювання критерію оптимальності не завжди є завданням математичного характеру і повністю залежить від дослідника і переслідуваних ним цілей. Це також відноситься і до вибору аргументів критерію оптимальності. При цьому визначення критерію оптимальності часто представляється складним через суперечливість різноманітних характеристик , що добре видно, наприклад, у випадку порівняння методів на тестових задачах. Стосовно розглянутих задач з врахуванням вимоги функціонування об'єкта в реальному часі під оптимальним методом чисельного розв'язання задачі Коші слід

розуміти метод, що забезпечує найбільш швидке наближене розв'язання рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється, за умови, що похибка наближеного розв'язку не перевищує заданого значення.

Визначення оптимального в зазначеному сенсі методу розв'язання задачі Коші є в загальному випадку досить складною задачею, що не має в даний час практично прийнятних алгоритмів вирішення, в той час як потреба такого визначення при організації обчислювальних процесів в системах управління динамічними об'єктами є очевидною.

Складність задачі визначення найкращого методу чисельного розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь є наслідком того факту, що похибка наближеного розв'язку істотно залежить від виду розв'язуваної системи. Саме тому не можна очікувати, що можна отримати розумну відповідь на питання : який метод вважати кращим при вирішенні системи типу (7.43) в загальному випадку? Якщо ж система рівнянь (7.43) відноситься до досить вузького класу диференціальних рівнянь, що має певні, притаманні лише йому властивості, як у випадку, наприклад, рухомих об'єктів, то питання про вибір найкращого методу чисельного розв'язання рівнянь з цього класу набуває сенсу. Так, математичні моделі різних рухливих об'єктів, по суті, відрізняються лише значеннями параметрів p , що входять в опис (7.43), бо в основі отримання цих рівнянь у всіх випадках лежать закони збереження кількості руху і його моменту.

Однак навіть в разі належності системи (7.43) до певного, досить вузького класу, вибір найкращого методу є важким завданням, оскільки властивість нелінійності диференціальних рівнянь значно ускладнює отримання характеристик точності різних методів.

Стосовно розглянутих тут задач цілком очевидно, що при виборі найкращого методу до числа аргументів критерію оптимальності слід включити характеристики точності методів, характеристики обсягу обчислювальної роботи на кроці інтегрування, а також величину останнього. Зазначені характеристики досить повно відображають ті властивості чисельних методів, врахування яких необхідне для досягнення основної мети – організації ефективного *алгоритмічного*

забезпечення, що вимагає прийнятної швидкодії і дозволяє отримати необхідні характеристики процесу моделювання. Таким чином, задача оптимального вибору методу може бути сформульоване так: потрібно визначити чисельний метод інтегрування рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється, для якого необхідна швидкодія управляючої системи – мінімальна, а похибка розв'язання рівнянь динаміки не перевищує заданої величини δ_D . Критерієм оптимальності при цьому є функція

$$W = \frac{N_i}{\delta_i^{-1}(\delta_D)}, \quad (7.44)$$

де i – індекс методу, N_i – обсяг обчислень на кроці інтегрування i -м методом, $\delta_i^{-1}(h)$ – функціональна залежність похибки розв'язку від величини кроку інтегрування h (оптимальний метод мінімізує значення цієї функції).

Представляє практичний інтерес також наступна постановка задачі вибору оптимального методу: швидкодія обчислювача задана і потрібно знайти метод, що дає мінімальну похибку розв'язання рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється. У цьому випадку критерієм оптимальності є функція

$$E = \delta_i \left(\frac{N_i}{W_3} \right), \quad (7.45)$$

де W_3 – задана швидкодія, а оптимальний метод також мінімізує її значення.

В загальному випадку критерії (7.44) і (7.45) не є залежними, тобто оптимальний за критерієм (7.44) метод може не бути оптимальним за критерієм (7.45) і навпаки. Однак при певних умовах, що залежать від виду функцій похибок $\delta_i(h)$, оптимізація за розглянутими критеріями приводить до однакових результатів.

Вибір оптимального методу може проводитись при використанні як функцій похибок вихідних координат, так і їх похідних. Для цілей побудови керуючих систем динамічних об'єктів, коли потрібно забезпечення еквівалентності за похідними вихідних координат, природним є використання функцій похибок похідних. В окремих ситуаціях можливий оптимальний вибір методу інтегрування

з врахуванням похибок вихідних координат. Тому характеристики точності різних методів розв'язання рівнянь динаміки необхідно оцінювати як за вихідними координатами, так і за їх похідними.

З викладеного випливає, що для визначення найкращого методу чисельного розв'язку рівнянь динаміки об'єктів, що моделюються, необхідно мати такі характеристики методів як точність і об'єм обчислень на кроці інтегрування. Що стосується об'єму обчислень, то питання вирішується порівняно просто. Дійсно, складність математичних описів об'єктів, що моделюються, як правило, дуже значна в обчислювальному відношенні. У зв'язку з цим переважна частина обчислювальної роботи при аналізі динаміки припадає на обчислення значень системи (7.43). Отже, в якості міри об'єму обчислень на кроці інтегрування доцільно прийняти число звернень до процедури обчислення правих частин системи (7.43), що вимагається на кожному кроці інтегрування при реалізації того чи іншого методу. При цьому відношення N/h буде служити мірою необхідної швидкодії управляючої системи, що визначається досліджуванним методом аналізу динаміки об'єкта, що моделюється. У той же час, слід мати на увазі, що характеристика об'єму обчислень не завжди правильно відображає обчислювальні витрати при аналізі динаміки. Пояснюється це особливостями програмної реалізації алгоритмів чисельного аналізу, архітектури обчислювачів і операційних систем, в результаті чого виникають додаткові витрати часу - так звані "накладні витрати".

При виборі методів аналізу динаміки з врахуванням додаткових витрат часу критерій оптимальності (7.44) слід замінити на

$$W_1 = \frac{N_i T}{(T - \Delta T_i) \delta_d^1(\delta_d)}, \quad (7.46)$$

де T – інтервал моделювання, а ΔT_i – додаткові часові витрати при програмній реалізації i -го методу. Критерій (7.46) впливає з умови рівності часу аналізу динаміки з врахуванням додаткових витрат на інтервалі моделювання. При виборі методів розв'язання за критерієм (7.61) оцінка додаткових витрат здійснюється експериментально.

Як метод дослідження властивостей точності різних алгоритмів розв'язання ЗДР, що описують динаміку об'єкта, що моделюється, слід прийняти метод чисельного експерименту. Пояснюється це тим, що аналітичні оцінки точності розв'язків задачі Коші, отримані для різних методів, є, як правило, сильно завищеними, а часто і необчислюваними, оскільки містять невизначені константи. Використання ж асимптотичних оцінок локальної похибки для цілей порівняння методів за властивостями точності некоректно через саме асимптотичність, оскільки перенесення властивостей методів з області гранично малих кроків інтегрування на область кінцевих значень може привести до грубих помилок в оцінюванні властивостей точності різних методів.

Перевагою методу чисельного експерименту є можливість отримання реальних характеристик похибки на всьому інтервалі моделювання. Недолік методу полягає в локальному характері одержуваних результатів, справедливих, взагалі кажучи, лише для досліджуваного режиму. В зв'язку з цим дослідження властивостей точності різних чисельних методів розв'язання рівнянь динаміки об'єктів, що моделюються, слід проводити для найбільш важких (екстремальних) в динамічному сенсі режимах. При цьому можна очікувати, принаймні, непогіршення властивостей точності чисельних методів в разі аналізу більш "легких" режимів.

Екстремальні режими при дослідженні і оптимізації чисельних методів. Вирішення сформульованої вище задачі вибору найкращого методу чисельного аналізу динаміки об'єктів, що моделюються, можливо лише методом чисельного експерименту, що передбачає створення відповідної комп'ютерної методики оцінки характеристик різних алгоритмів розв'язання ЗДР і їх порівняння за заданим критерієм. При цьому основним завданням, розв'язуваного за допомогою чисельного експерименту, є отримання характеристик точності порівнюваних методів. Крім того, важливе значення для ефективного використання методики має питання формування множини порівнюваних методів.

Викладені вище чисельні методи становлять досить велику групу і можуть служити базою для формування вихідної множини порівнюваних методів аналізу динаміки об'єктів, що моделюються.

Розглянемо питання про можливість застосування багатокрокових методів. Особливістю їх є необхідність знання значень інтегрованих змінних в декількох вузлових точках, що передують вузловій точці, в якій обчислюється чергове значення шуканих функцій (несамостартуючі методи). Для обчислювальних систем, що працюють в реальному часі, ця властивість може мати вирішальне значення. Дійсно, вимога побудови початкової ділянки призводить до необхідності використання однокрокових методів, порядок точності яких повинен бути, щонайменше, не менше порядку точності відповідного багатокрокового методу. Отже, необхідна швидкодія обчислювача буде цілком визначатися саме однокроковим методом, що використовується для визначення початкових значень.

Слід, однак, враховувати, що для широкого класу динамічних об'єктів характерно існування стаціонарних режимів функціонування, при яких вихідні змінні залишаються незмінними в часі або являють собою відомі періодичні функції. Тому з'являється можливість уникнути необхідності побудови початкової ділянки при використанні явних різницевих схем чисельного інтегрування рівнянь динаміки в реальному часі завдяки організації переходу в режим моделювання зі стаціонарного режиму. При цьому в якості "розгінних" значень вихідних координат слід приймати їх стаціонарні значення. Чисельні експерименти з перевірки такого способу завдання початкової ділянки показують допустимість зазначеної заміни. Це обумовлено тим, що відмінність результатів розрахунків похибок багатокрокових методів з "розгінними" ділянками, отриманими за методом Рунге-Кутта четвертого порядку, а також з початковими ділянками, отриманими за стаціонарними режимами, складають одиниці відсотків. Даний результат свідчить про прийнятність зазначеного підходу до використання багатокрокових методів аналізу динаміки об'єктів, що моделюються.

Оскільки неявні різницеві схеми, що приводять до розрахункових правил типу "прогноз – корекція", також вимагають побудови початкової ділянки, то все

сказане вище щодо застосування явних схем можна перенести на випадок використання методів прогнозу і корекції. Що стосується неявних методів загального вигляду, то їх значно більша обчислювальна складність в порівнянні з явними методами дозволяє апріорі виключити ці методи з вихідної множини.

Застосування експонентціальних методів аналізу динаміки в випадках складних нелінійних математичних описів, що представляють практичний інтерес, пов'язано з рядом труднощів. Досвід чисельної реалізації експонентціальних методів при аналізі динаміки ряду об'єктів підтверджує зазначене положення. У зв'язку з цим слід визнати доцільність виключення експонентціальних методів з вихідної множини методів чисельного аналізу динаміки об'єктів, що моделюються при постановці задачі вибору найкращого методу.

З огляду на викладені міркування про властивості різних груп чисельних методів аналізу динаміки можна зробити висновок про те, що при виборі найкращого методу вихідну множину досліджуваних методів слід формувати на основі однокрокових методів типу Рунге-Кутта і квадратурних методів не вище четвертого порядку. За наявності можливості використання стаціонарних режимів модельованих об'єктів в вихідну групу методів слід включати також багатокрокові методи – явні і типу «прогноз – корекція».

Оцінка глобальної похибки. Отримання інформації про властивості точності тих чи інших методів розв'язання рівнянь динаміки при використанні методики чисельного експерименту вимагає оцінки глобальної похибки інтегрування досліджуваними методами. В даний час існує досить багато способів оцінювання глобальної похибки розв'язку ЗДР, що відрізняються різним ступенем достовірності і трудомісткості.

Найбільш поширеними способами оцінки глобальної похибки розв'язку диференціального рівняння є способи, засновані на аналізі нев'язок (дефектів) і екстраполяції Річардсона. Ідея першого способу полягає у використанні того факту, що отриманий розв'язок (точніше, безперервна його апроксимація) не задовольняє вихідній системі. Отримана при цьому нев'язка характеризує

глобальну похибку і може використовуватися для управління процесом чисельного розв'язання.

Таким чином, в якості еталонного розв'язку для оцінки глобальної похибки може бути прийнятий розв'язок, що отримується будь-яким з досліджуваних методів найбільшого порядку точності при мінімальному значенні кроку інтегрування. Вибір кроку в даному випадку здійснюється шляхом порівняння одержуваного розв'язку з екстрапольованим. Допуск на різницю цих рішень призначається з урахуванням основної мети – забезпечення якості моделювання досліджуваних об'єктів. При цьому в якості еталонного розв'язку рівнянь динаміки приймається розв'язок, точність якого на два порядки вище необхідної точності моделювання.

Побудова функцій похибок методом чисельного експерименту пов'язана зі значними витратами машинного часу. Тому практичне значення має вибір «розумних» меж зміни аргументу функцій похибок, тобто кордонів зміни величини кроку інтегрування досліджуваних методів. Обмеження знизу величини кроку визначається можливостями засобів обчислювальної техніки і складністю математичних описів об'єктів, що моделюються. Так, вважаючи швидкодію обчислювальної системи рівною W операцій в секунду і оцінюючи мінімальне число операцій при визначенні управлінь величиною $N_{\text{оп}}$, отримуємо мінімально допустимий крок інтегрування $h_{\text{мін}} = (N_{\text{оп}}/W)$ секунд. Зауважимо, що це значення кроку інтегрування слід вибирати в якості початкового значення при визначенні методу, розв'язок якого приймається за еталонний.

У загальному випадку порівняння алгоритмів аналізу динаміки за методикою чисельного експерименту має здійснюватися для різних рівнів допустимої похибки δ_{dj} , $j = \overline{1, l}$. При цьому ранжування досліджуваних алгоритмів за величиною критерію оптимальності може призводити до різних результатів для різних рівнів δ_{dj} . У зв'язку з цим, при наявності множини допустимих рівнів похибки, в якості критерію оптимальності слід використовувати інтегральну характеристику критеріальної функції (7.44).

Побудова спеціалізованих алгоритмів аналізу динаміки. Розглянуті вище методи чисельного розв'язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, як правило, мають властивість універсальності в тому сенсі, що їх розрахункові правила будуються без врахування властивостей розв'язуваної системи. Певною мірою враховують специфіку розв'язуваної системи такі методи, як експонентціальні і неявні, в яких наближені значення шуканих величин знаходяться шляхом розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь з використанням матриці Якобі. Як випливає з попереднього викладу, використання цих методів проблематичне через високі обчислювальні витрати на кроці інтегрування, обмеженість зверху останнього і умови функціонування в реальному часі.

Прагнення до поліпшення властивостей точності і швидкості чисельних методів аналізу динаміки об'єктів, приводить до ідеї побудови спеціалізованих методів, призначених для розв'язання заданої конкретної системи рівнянь. Хорошим прикладом реалізації цієї ідеї є розрахункове правило для розв'язання лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами, в якому чисельні значення параметрів залежать від матриці розв'язуваної системи. Іншим прикладом служить варіант введення в формули чисельного інтегрування додаткових членів, що компенсують фазові спотворення при інтегруванні синусоїдальних сигналів. Можлива також побудова спеціалізованих методів для розв'язання рівнянь обертання на основі розкладання в ряд Тейлора і застосування методу Пікара з одночасним урахуванням виду правих частин. Необхідність розробки спеціалізованих методів виникає у випадках, коли потрібно багаторазове проведення чисельного аналізу однієї і тієї ж системи, а використання універсальних методів з яких-небудь причин (як правило, пов'язаних з кінцевою метою чисельного аналізу) недоцільне або взагалі неможливе. Саме така ситуація реально може виникнути при побудові управляючих систем динамічних об'єктів.

Досвід проведення відповідних досліджень свідчить, що при розробці завдання синтезу спеціалізованих методів розв'язання заданої системи (7.43) формулюється як задача *ідентифікації* в широкому сенсі. При цьому основна ідея побудови методів полягає в знаходженні відповідних представлень залишків

$$r_j(h) = y_j(t+h) - z_j(t+h), \quad j = \overline{1, n} \quad (7.47)$$

$(z_j(t+h))$ – наближене значення невідомої вектор-функції $y_j(t+h)$, що отримується деяким чисельним (базовим) методом) у вигляді

$$r_j(h) \approx \sum_{k=1}^{N_j} p_{kj} \cdot q_{kj}(\dot{z}(t), z(t), u(t)) = \varphi_j(p_j, \dot{z}, z, u), \quad (7.48)$$

де $q_{kj}(\cdot)$ – деякі функції, p_{kj} – параметри, $j = \overline{1, n}$.

Розрахункове правило спеціалізованого методу має вигляд

$$z_{i+1} = \Phi(z_i, f) + \psi(p, z_i, f, u), \quad (7.49)$$

де $\Phi(z_i, f)$ – вектор-функція, яка визначається розрахунковим правилом базового методу; $\psi(p, z_i, f, u)$ – вектор-функція, компонентами якої є функції з (7.48).

Основними питаннями, що виникають при вирішенні таким чином поставленої задачі синтезу спеціалізованих методів аналізу динаміки, є: теоретичне обґрунтування існування розв'язку; вибір базового методу; визначення або організація пошуку вигляду функцій $q_{kj}(\cdot)$, їх кількості і аргументів; оцінка значень параметрів p_{kj} .

Перше питання вирішується порівняно просто, принаймні в разі обґрунтування існування функції ψ з (7.49), яка забезпечує певний порядок точності методу. Основною умовою, яка повинна виконуватися, є диференційованість необхідне число раз залишків (7.47). При цьому вид правої частини (7.48) теоретично визначається розкладанням $r_j(h)$ в ступеневий ряд за h в точці $h = 0$.

Питання вибору базового методу має вирішуватися з врахуванням кінцевої мети використання чисельного аналізу динаміки, тобто повинна вирішуватися задача вибору оптимального методу аналізу динаміки. При цьому в якості базового методу природно вибрати оптимальний або близький до нього.

Останні два зі сформульованих основних питань відносяться до власне ідентифікації – структурної та параметричної. Вирішення їх може здійснюватися за допомогою прийомів теорії ідентифікації.

7.3 Моделювання задач аналізу динамічних об'єктів на основі рівнянь типу Вольтерри II роду (прямі задачі)

При чисельній реалізації інтегрального рівняння Вольтерри II роду [54, 55, 90, 151, 152]

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x, s) \cdot \varphi(s) ds = f(x) \quad (7.50)$$

перехід до дискретних обчислювальних схем здійснюються за допомогою виразу [24, 28]

$$\varphi(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, s) \cdot \varphi(s) ds = f(x_i). \quad (7.51)$$

Беручи значення x_i в якості вузлів квадратурної формули і замінюючи інтеграл скінченною сумою, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(x_i, x_j) \cdot \tilde{\varphi}(x_j) \cong f(x_i), \quad (7.52)$$

де $x_j = j \cdot h$, h - крок квадратури, $\tilde{\varphi}(x_i)$ - наближені значення функції $\varphi(x_i)$ в вузлах x_i . Для побудови ефективного алгоритму доцільно отримати рекурентний вираз, користуючись тим, що це можна зробити саме для рівнянь Вольтерри, на відміну від рівнянь Фредгольма [150, 194, 220]. Застосовуючи, наприклад, формулу трапецій можна записати наступні розрахункові вирази для змінного кроку (*загальний випадок*) [149, 163, 175, 189]:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x_1) &= f(x_1), \quad \tilde{\varphi}(x_2) = \frac{\left(f(x_2) + \frac{h_2}{2} K(x_2, x_1) \cdot \varphi(x_1) \right)}{1 - \frac{h_2}{2} K(x_2, x_2)}, \\ \tilde{\varphi}(x_i) &= \frac{\left(f(x_i) + \frac{h_i}{2} K(x_i, x_1) \cdot \varphi(x_1) + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{h_j + h_{j+1}}{2} K(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_j) \right)}{1 - \frac{h_i}{2} K(x_i, x_i)}, \end{aligned} \quad (7.53)$$

де $i = 3, 4, \dots, n$; $h_j = x_j - x_{j-1}$; для постійного кроку ($h = \text{const}$):

$$\tilde{\varphi}(x_1) = f(x_1), \quad \tilde{\varphi}(x_i) = \frac{\left(f(x_i) + \frac{h}{2} K(x_i, x_1) \cdot \varphi(x_1) + h \sum_{j=2}^{i-1} K(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_j) \right)}{1 - \frac{h}{2} K(x_i, x_i)}. \quad (7.54)$$

Слід відзначити, що при використанні традиційного розрахункового виразу (7.54) час обчислення шуканої функції залежить від кількості кроків дискретизації, збільшення яких призводить до збільшення кількості обчислювальних операцій. Розрахунковий вираз, отриманий у випадку ядра, що розділяється

$$K(x, s) = \sum_{l=1}^m \alpha_l(x) \beta_l(s), \quad (7.55)$$

із застосуванням формули трапецій, має вигляд: при змінному кроці дискретизації (загальний випадок):

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x_1) = f(x_1), \quad \tilde{\varphi}(x_2) &= \frac{f(x_2) + \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_2) \cdot \beta_l(x_1) \cdot \varphi(x_1)}{1 - \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_1) \cdot \beta_l(x_1)}, \\ \tilde{\varphi}(x_i) &= \frac{f(x_i) + \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \beta_l(x_1) \varphi(x_1) + \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \sum_{j=2}^{i-1} \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \beta_l(x_j) \varphi(x_j)}{1 - \frac{h_i}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \beta_l(x_i)}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

де $i = 3, 4, \dots, n$; $h_j = x_j - x_{j-1}$; при постійному кроці дискретизації ($h = \text{Const}$):

$$\tilde{\varphi}(0) = f(0), \quad \tilde{\varphi}(x_i) = \frac{f(x_i) + h \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(x_j) \cdot \varphi(x_j)}{1 - \frac{h}{2} K(0)}, \quad (7.57)$$

де $i = 2, 3, \dots, n$; $A_j = \begin{cases} 0,5, & \text{при } j = 1, \\ 1, & \text{при } j > 1. \end{cases}$

Аналогічно можуть бути отримані розрахункові вирази для розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерри II роду [102, 211].

Приклад 7.1. Розв'язується інтегральне рівняння Вольтерри II роду

$$\varphi(x) = x \cdot 3^x - \int_0^{x_i} 3^{x-s} \cdot \varphi(s) \cdot ds \quad (7.58)$$

в інтервалі від 0 до 0,4 з кроком дискретизації $h=0,02$. Використовуючи традиційний алгоритм (7.5), отримуємо співвідношення відносно $\varphi_T(x_i)$

$$\varphi_T(0) = (0), \quad \varphi_T(x_i) = \frac{x_i \cdot 3^{x_i} - h \sum_{j=1}^{i-1} A_j 3^{x_i - x_j} \cdot \varphi_n(x_j)}{1 - \frac{h}{2}}, \quad (7.59)$$

а при використанні властивостей розділяємості ядра маємо модифіковане розрахункове співвідношення відносно $\varphi_M(x_i)$:

$$\varphi_M(0) = (0), \quad \varphi_M(x_i) = \frac{\left[3^{x_i} \cdot \left(x_i - h \sum_{j=1}^{i-1} A_j 3^{-x_j} \cdot \varphi_m(x_j) \right) \right]}{\left(1 - \frac{h}{2} \right)}. \quad (7.60)$$

У таблиці 7.1. представлені результати обчислень за розрахунковими співвідношеннями (7.59) і (7.60), а також точний розв'язок $\varphi_0(x_i)$. Як видно з таблиці 7.1. по точності обидва алгоритми збігаються; на рис. 7.1 наведено графік кривої похибки отриманого розв'язку. Час розв'язання за алгоритмом (7.59) при кроці $h = 0,02$ становить 0,08 с, а за алгоритмом (7.60) – становить 0,06 с, тобто алгоритми, отримані на основі використання роздільності ядра є більш швидкодіючими, ніж традиційні алгоритми.

Таблиця 7.1

Результати дослідження для прикладу 7.1.

x_i	$\varphi_T(x_i)$	$\varphi_0(x_i)$	$\varepsilon(x) =$ $ \varphi_T(x_i) - \varphi_0(x_i) $	$\varphi_M(x_i)$	$\varepsilon(x) =$ $ \varphi_T(x_i) - \tilde{\varphi}_0(x_i) $
1	2	3	4	5	6
0	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,02	0,0202	0,02024	0,00004	0,02024	0,00004
0,04	0,0409	0,04097	0,00007	0,04097	0,00007

Таблиця 7.1, продовження

0,06	0,0622	0,06221	0,00001	0,06221	0,00001
0,08	0,0839	0,08395	0,00005	0,08395	0,00005
0,1	0,1062	0,10622	0,00002	0,10622	0,00002
0,12	0,1290	0,12902	0,00002	0,12902	0,00002
0,14	0,1523	0,15237	0,00007	0,15237	0,00007
0,16	0,1762	0,17628	0,00008	0,17628	0,00008
0,18	0,2007	0,20076	0,00006	0,20076	0,00006

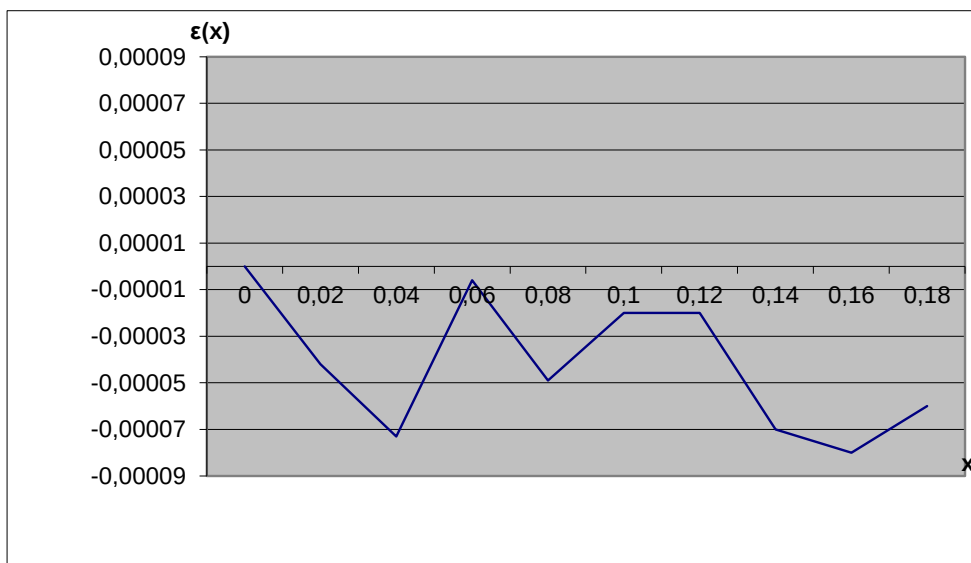


Рис. 7.1. Графік похибки розв'язання

Резольвентний метод [95]. Загальною аналітичною формою розв'язання рівняння Вольтерри II роду є вираз

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,s) f(s) ds, \quad (7.61)$$

де функція $R(x,s)$ є резольвентою (резольвентним або розв'язуючим ядром).

Ітеровані ядра. Резольвента рівняння (7.61) визначається виразом

$$R(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,s), \quad (7.62)$$

де $K_n(x,s)$ – ітеровані (повторні) ядра, які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$K_1(x, s) = K(x, s),$$

$$K_{n+1}(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_n(t, s) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.63)$$

Визначення резольвенти і чисельна або аналітична реалізація виразу (7.62) означає, по суті, операцію обернення оператора об'єкта, що моделюється, представленого лівою частиною рівняння (7.71). Крім того, такий підхід до пошуку розв'язку відкриває можливості отримання ряду нових чисельних алгоритмів моделювання, що реалізують явне подання оберненого оператора задачі.

Приклад 7.2. Техніку дій з ітерованими ядрами можна проілюструвати на прикладі визначення резольвенти ядра $K(x, s) = K_1(x, s) = e^{x-s}$.

Згідно (7.63)

$$K_2(x, s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} dz = e^{x-s} \int_s^x dz = e^{x-s} (x - s),$$

$$K_3(x, s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} (z - s) dz = e^{x-s} \frac{(x - s)^2}{2},$$

$$K_4(x, s) = \frac{1}{2} \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} (z - s)^2 dz = e^{x-s} \frac{(x - s)^3}{3!},$$

або в загальному вигляді

$$K_{n+1}(x, s) = e^{x-s} \frac{(x - s)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тепер за виразом (7.62) можна знайти

$$R(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, s) = e^{x-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - s)^n}{n!} = e^{x-s} e^{x-s} = e^{2(x-s)}.$$

Рівняння відносно резольвенти. Для резольвенти може бути отримано інтегральне рівняння, яке її визначає:

$$R(x, s) = K(x, s) + \int_s^x K(x, t) R(t, s) dt. \quad (7.64)$$

Структура отриманого рівняння (7.64) збігається зі структурою рівняння (7.62), яке розв'язується, причому вихідною інформацією, що породжує

резольвенту, є задане ядро $K(x,s)$. Використання резольвенти виявляється виключно корисним при якісному аналізі задач і виконанні різного роду еквівалентних і спрощуючих перетворень. Можливі також випадки, коли головною задачею дослідження є саме знаходження резольвенти, тобто аналітичного або чисельного розв'язку рівняння (7.64), що має значний практичний сенс. Велике значення має знаходження резольвенти в задачах, які доводиться розв'язувати багато разів при різних варіантах правої частини $f(x)$ і при одному і тому ж ядрі. Наявність виразу для резольвенти у багатьох випадках дозволяє отримати розв'язок вихідного рівняння в аналітичному вигляді.

Метод виродженої резольвенти [98]. Розглянемо інтегральне рівняння [148]

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x,s)f(s)ds \quad (7.65)$$

Введемо поняття виродженої резольвенти

$$R(x,s) = \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x)\beta_{Ri}(s), \quad (7.66)$$

тоді рівняння (7.65) матиме вигляд

$$y(x) = f(x) + \int_0^x \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x)\beta_{Ri}(s)f(s)ds \quad (7.67)$$

або

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \int_0^x \beta_{Ri}(s)f(s)ds. \quad (7.68)$$

Таким чином, при розв'язанні інтегрального рівняння немає необхідності знаходити інтеграл від функції двох змінних, а лише інтеграл від функцій однієї змінної. При чисельній реалізації методу виродженої резольвенти маємо співвідношення $m \ll n$ (n - кількість дискретизуючих алгебраїчних рівнянь для методу квадратур [91]), тобто маємо відповідне скорочення кількості операцій при задіянні методу виродженої резольвенти.

Є два наступні способи отримання виродженої резольвенти за допомогою методу ітерованих ядер.

Перший спосіб. Апроксимуємо вхідне ядро інтегрального рівняння (7.65)

$K(x,s) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i(x) \beta_i(s)$, а потім застосується метод ітерованих ядер до виродженого

ядра. У такому випадку маємо:

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x,s) &= \int_s^x \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i(x) \beta_i(z) \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{K_n j}(z) \beta_{K_n j}(z) dz = \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_i(x) \beta_{K_n j}(z) \int_s^x \beta_i(z) \alpha_{K_n j}(z) dz. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Враховуючи співвідношення

$$\int_s^x \beta_i(z) \alpha_{K_n j}(z) dz = \int_s^x \gamma_{iK_n j}(z) dz = \gamma_{iK_n j}(x) - \gamma_{iK_n j}(s), \quad (7.70)$$

рівняння (7.69) запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x,s) &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_i(x) \beta_{K_n j}(s) (\gamma_{iK_n j}(x) - \gamma_{iK_n j}(s)) = \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \left[\alpha_i(x) \gamma_{iK_n j}(x) \right] \beta_{K_n j}(s) - \alpha_i(x) \left[\beta_{K_n j}(s) \right] \gamma_{iK_n j}(s). \end{aligned} \quad (7.71)$$

Отже, після проведених перетворень ітероване ядро приймає вигляд виродженого:

$$K_{n+1}(x,s) = \sum_{i=1}^{m_3} \alpha_{K_{n+1} i}(x) \beta_{K_{n+1} i}(s), \quad (7.72)$$

де $m_3 = 2m_1m_2$. Це свідчить про істотні витрати ресурсів пам'яті і процесорного часу на кожному кроці обчислення ітерованого ядра.

Другий спосіб. Будуємо резольвенту $R(x,s)$ за допомогою методу ітерованих ядер згідно з (7.63). Далі використовуємо метод апроксимації резольвенти у вигляді білінійного ряду (наприклад, ітераційно-варіаційним або градієнтним методом) і

отримаємо резольвенту у вигляді $R(x,s) = \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \beta_{Ri}(s)$. Оскільки при цьому

безпосередньо отримуємо співвідношення $m \ll n$, то даний варіант методу

виродженої резольвенти буде ефективним щодо використання пам'яті та комп'ютерного часу.

Отримані висновки підтверджуються багатьма обчислювальними експериментами, в тому числі при розв'язуванні наступного прикладу.

Приклад 7.3. Інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду

$$y(x) - \int_0^x e^{-(x-s)} y(s) ds = e^x,$$

з точним розв'язком $y = 1$ у квадраті $[0, 0.1] \times [0, 0.1]$ (квадратури за формулами трапецій при постійному кроці $h = 0,005$) розв'язувалось із застосуванням наступних методів.

При розв'язанні рівняння: методом квадратур знадобилося $0,2369 \cdot 10^{-2}$ с; резольвентним методом (резольвента визначається методом ітеративних ядер) потрібно було 5 ітеративних ядер і $0,2567 \cdot 10^{-2}$ с; методом вироджених ядер: знадобилося $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с; методом виродженої резольвенти (резольвента отримана методом ітеративних ядер (2-й спосіб)) знадобилося 5 ітеративних ядер і $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с. Графіки похибок використаних методів наведені на рис. 7.2. Результати розв'язування прикладу достатньо об'єктивно характеризують властивості методів, що застосовувались, в тому числі перевагу методів вироджених ядер і методу виродженої резольвенти [123].

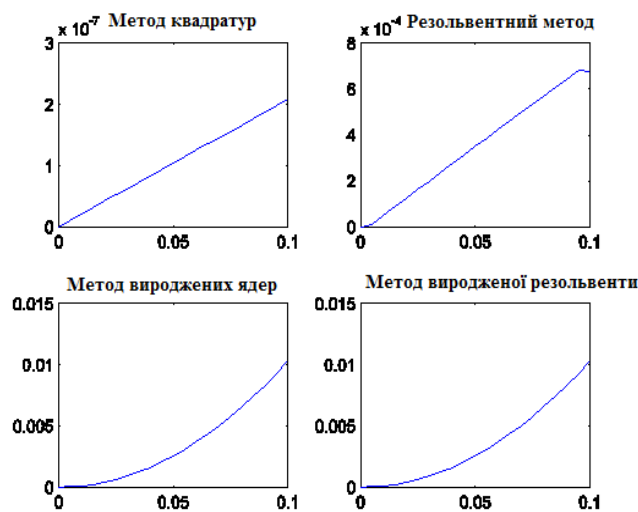


Рис. 7.2. Графіки похибок до прикладу 7.3.

Суттєве практичне значення мають задачі моделювання з табличним поданням вихідних даних. Цей випадок розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 7.4. Ядро $K(x, s)$ і права частина $f_T(x)$ рівняння

$$y(x) + \int_0^x K_T(x, s)y(s) = f_T(x)$$

подаються таблично відповідно до таблиць 7.1 і 7.2.

Розв'язки отримані: методом квадратур за $0,9353 \cdot 10^{-2}$ с, резольвентним методом (19 ітерованих ядер) за $0,7945 \cdot 10^{-2}$ с, методом вироджених ядер за $0,9924 \cdot 10^{-2}$ с, методом виродженої резольвенти $0,6399 \cdot 10^{-2}$.

Результати розв'язків рівняння наведені в таблиці 7.3, а похибки розв'язків представлені в таблиці 7.4.

Графіки апроксимуючих функцій для ядра наведені на рис. 7.3. Можна бачити, що у функціях $\alpha_3(x)$ і $\beta_3(s)$ проявляється кусково-лінійний вигляд. Графіки похибок, отриманих вказаними методами, наведені на рис. 7.4. Приклад ілюструє працездатність алгоритмів при табличному поданні вихідних даних.

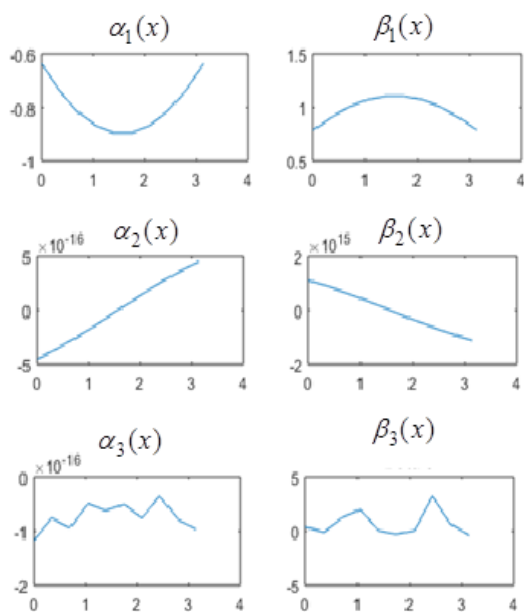


Рис. 7.3. Графіки апроксимуючих функцій

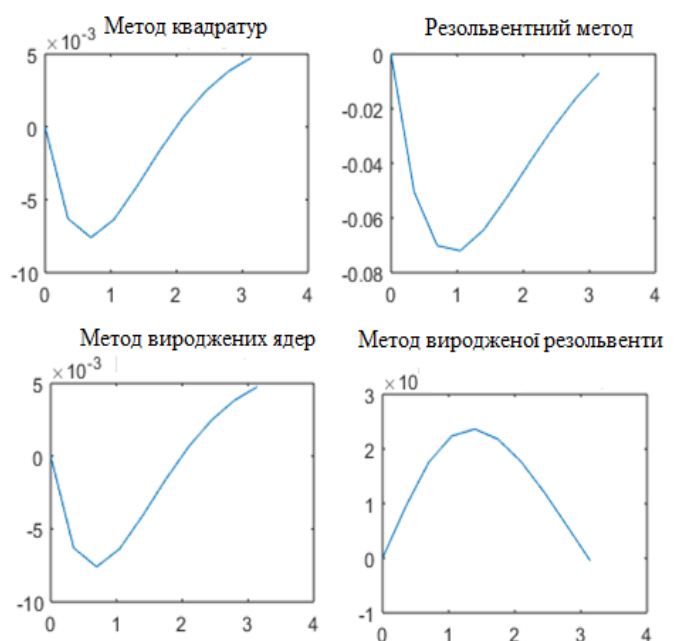


Рис. 7.4. Графіки отриманих похибок.

Таблиця 7.3.

Табличне подання ядра $K(x,s)$

$K(x,s)$	0,0000	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
0,0000	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420	-0,1736	0,0000
0,3491	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420	-0,1736
0,6981	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420
1,0472	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000
1,3963	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428
1,7453	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660
2,0944	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660
2,4435	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397
2,7925	-0,1736	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848
3,1416	0,0000	-0,1736	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000

Таблиця 7.4.

Табличне подання правої частини $f_T(x)$

x	0,0000	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
f(x)	1,0000	0,7053	0,4975	0,3509	0,2475	0,1746	0,1231	0,0869	0,0613	0,0432

Таблиця 7.5.

Отримані результати

х	0	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
у точно	1	0,4605	0,15861	0,0054	-0,0578	-0,0691	-0,053	-0,0244	0,00746	0,03762
метод квадратур	1	0,45419	0,15101	-0,001	-0,0619	-0,0708	-0,0524	-0,022	0,01129	0,04239
резольвентний метод	1	0,41001	0,08849	-0,0666	-0,1223	-0,1218	-0,0927	-0,0517	-0,0088	0,03061
метод вироджених ядер	1	0,45419	0,15101	-0,001	-0,0619	-0,0708	-0,0524	-0,022	0,01129	0,04239
метод виродженої резольвенти	1	0,46144	0,16036	0,00764	-0,0554	-0,067	-0,0512	-0,0232	0,00804	0,03758

Таблиця 7.6.

Похибки розв'язків

метод квадратур	0	-0,0063	-0,0076	-0,0064	-0,0041	-0,0016	0,00063	0,00247	0,00383	0,00476
резольвентний метод	0	-0,0505	-0,0701	-0,072	-0,0645	-0,0527	-0,0397	-0,0273	-0,0162	-0,007
метод вироджених ядер	0	-0,0063	-0,0076	-0,0064	-0,0041	-0,0016	0,00063	0,00247	0,00383	0,00476
метод виродженої резольвенти	0	0,00094	0,00175	0,00224	0,00236	0,00218	0,00177	0,00121	0,00058	-5E-05

7.4 Висновки до сьомого розділу

У розділі розглядається задача і методи адаптації обчислювальних алгоритмів при реалізації диференціальних і інтегральних динамічних моделей. Обмежені ресурси комп'ютерно інтегрованих систем визначають вимоги до швидкодії алгоритмів режимів функціонування обчислювально-керуючих систем, що свідчить про актуальність питання цільового вибору або адаптації чисельних методів розв'язання рівнянь динаміки об'єктів і велику історію розвитку цього питання процес вдосконалення чисельних методів не припиняється і зараз. Зростання складності досліджуваних динамічних об'єктів зумовила розвиток *неявних* методів чисельного аналізу динаміки, але проведені дослідження свідчать, що застосування неявних методів виправдано, коли можливий великий крок інтегрування вихідної системи або коли рівняння на кроці може бути розв'язане досить просто. Крім того, з'ясовано, що наявні результати по формалізації степеневих методів і адаптація їх при комп'ютерному використанні поки ще недостатні для вирішення питання про їх застосування при дослідженні складних динамічних об'єктів. Обмеження кроку інтегрування зверху свідчить про недоцільність використання методів Рунге-Кутта високого порядку для цілей моделювання динаміки досліджуваних систем в реальному часі. Відповідно до квадратурних методів у загальному вигляді задача формалізації побудови не вирішена. Таким чином, задача оптимального вибору методу може бути сформульоване так: потрібно визначити чисельний метод інтегрування рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється, для якого необхідна швидкодія управляючої системи мінімальна, а похибка розв'язання рівнянь динаміки не перевищує заданого значення. Проведений аналіз властивостей різних груп чисельних методів дає змогу зробити висновок про те, що при виборі найкращого методу вихідну множину необхідних методів слід формувати на основі однокрокових методів типу Рунге-Кутта і квадратурних методів не вище четвертого порядку. При використанні стаціонарних режимів модельованих об'єктів в вихідну групу методів слід включати також багатокрокові методи – явні і типу «прогноз – корекція». При розв'язанні інтегральних рівнянь запропонований як найбільш

ефективний метод виродженої резольвенти. Порівняння з іншими методами показало, що при розв'язанні тестової задачі на отримання результату методом квадратур знадобилося $0,2369 \cdot 10^{-2}$ с; резольвентним методом потрібно було 5 ітеративних ядер і $0,2567 \cdot 10^{-2}$ с; методом вироджених ядер - $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с; методом виродженої резольвенти - 5 ітеративних ядер і $0,1659 \cdot 10^{-2}$ с.

РОЗДІЛ 8. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ

8.1 Обґрунтування вибору середовища моделювання

При виборі програмних засобів моделювання слід враховувати не лише набір функціональних модулів, а також і підхід до організації процесів моделювання. Програмні засоби, до яких можна віднести пакет Matlab, його аналоги SciLab, VisSim, LabVIEW та ін., використовують поєднання різних способів реалізації математичних моделей, включаючи використання власної мови програмування високого рівня [206, 207]. Для вибору середовища моделювання визначимо основні параметри програмного засобу: достатньо повні функціональні можливості, які забезпечують розв'язання широкого класу розрахункових задач, включаючи задачі динаміки для об'єктів, що представляються різними формами математичного опису; наявність засобів для реалізації структурного підходу при побудові моделей складних динамічних об'єктів; відкритість та гнучкість системи з можливістю доповнення новими спеціалізованими модулями; наявність власної мови програмування з можливістю створення нових програмних модулів; потужні графічні можливості відображення результатів [78, 79, 99].

Вказаним параметрам відповідають такі середовища моделювання як Matlab та SciLab. Приведемо короткі характеристики цих систем [133].

Система Matlab призначена для виконання інженерних та наукових розрахунків із високоякісною візуалізацією отриманих результатів. Ця система застосовується в математиці, обчислювальному експерименті, імітаційному моделюванні, для аналізу даних, наукової та інженерної графіки тощо [6, 174]. Особливістю Matlab, у порівнянні зі звичайними мовами програмування, є матричне представлення даних і набір високоефективних матричних операцій. Також є можливість застосування технології візуального моделювання [113].

Ядро пакета включає програмні модулі, що написані мовою високого рівня та здатні реалізувати великий клас обчислювальних алгоритмів. Крім того у склад цього продукту входять проблемно-орієнтовані програмні комплекси (Toolbox),

призначені для розв'язування різних задач в конкретних прикладних областях. Наприклад, Symbolic Math Toolbox — пакет програм для розв'язування задач у символічному (аналітичному) вигляді, Partial Differential Equation Toolbox — пакет програм для розв'язування систем диференціальних рівнянь із частинними похідними методом скінченних елементів [138].

Для візуального моделювання віртуальних прототипів широко використовується вбудований додаток Simulink, який дозволяє моделювати динамічні системи, оцінювати їх роботу, модифікувати обчислювальні системи відповідно до принципів візуального програмування за допомогою стандартних блоків. Завдяки тісній інтеграції з Matlab, Simulink має безпосередній доступ до широкого набору засобів проектування та аналізу. При моделюванні користувач може вибирати метод розв'язування диференціальних рівнянь, а також спосіб зміни модельного часу (з фіксованим чи змінним кроком) [198]. Результати моделювання можуть бути представлені у вигляді графіків або таблиць.

Scilab — пакет наукових програм для числових обчислень, який є відкритим середовищем для інженерних і наукових розрахунків. Він містить сотні математичних функцій з можливістю додавання нових, написаних на різних мовах (C, C++, FORTRAN). Scilab має схожу з Matlab мову програмування, причому Scilab має утиліту, яка дозволяє конвертувати документи Matlab. До складу пакету також входить Scicos — інструмент для редагування і моделювання блокових діаграм (аналог Simulink в Matlab). Цей пакет має можливості перетворення форм моделей динамічних об'єктів, які задані або передатними функціями або рівняннями в просторі станів. На відміну від Matlab пакет Scilab розповсюджується безкоштовно.

За результатами аналізу і порівняння параметрів Matlab і Scilab було отримано такі результати: відповідно 69,58% і 42,54% від максимальної функціональності. Із результатів тестування можна зробити висновок, що на сьогоднішній день Matlab є найбільш потужними та універсальним пакетом, має кращу функціональність серед продуктів, які тестувалися. Він є безперечним лідером візуалізації даних, знаходиться в числі лідерів тестування швидкості обчислень і математичної

функціональності, що грає вирішальну роль при створенні високопродуктивних додатків. При цьому забезпечується комп'ютерна реалізація моделей динамічних об'єктів у вигляді звичайних диференціальних рівнянь, передатних функцій, диференціальних рівнянь із частинними похідними, що дозволяє ефективно виконувати необхідні дослідницькі розрахунки згідно з отриманими в роботі результатами, а також розв'язувати практичні інженерні задачі. Але для реалізації інтегральних динамічних моделей потрібен певний розвиток даного програмного забезпечення шляхом розширення спектру математичних моделей динамічних ланок складних об'єктів, в тому числі з розподіленими параметрами.

Відмітимо також наступні властивості засобів моделювання Matlab – Simulink, які значною мірою враховують особливості задач даного дослідження. Система Matlab орієнтована на роботу з реальними даними, виконує всі обчислення в арифметиці з плаваючою точкою на відміну від інших систем (Reduce, Macsyma, Derive, Maple, Mathematica, Theorist), де домінує цілочисельне представлення та символічна обробка даних. Кожен з цих напрямків характеризується властивими тільки йому методами і алгоритмами розв'язання задач, а їх перенесення з одного середовища в інше може бути принаймні незручним, а в більшості випадків просто неможливим. Тому для розв'язання проблем на перехресті символічних обчислень та обчислень з плаваючою точкою до складу інтегрованого середовища Matlab включений пакет прикладних програм Extended Symbolic Mathematics Toolbox, що реалізує інтерфейс з системою символічних обчислень Maple.

Розвиток цих засобів у вигляді (Matlab 7 і Simulink 6) — нової версії включає всі продукти з сімейств Matlab® і Simulink®, включаючи також 28 істотно оновлених продуктів і 12 нових продуктів.

SIMULINK — це платформа для емуляції і модельного проектування динамічних систем. Вона забезпечує інтерактивне графічне середовище і набір бібліотек блоків, які дозволяють з високою точністю проектувати, моделювати, реалізовувати і тестувати системи управління, обробки сигналів, зв'язку і т.п.

SIMULINK має наступні можливості:

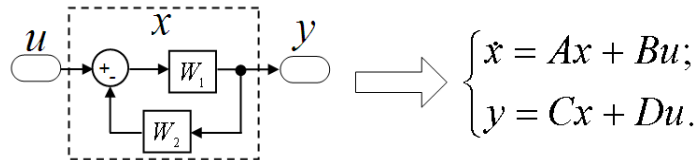
- Компонентне моделювання великих систем.

- Можливість сегментації моделі на декілька файлів, кожен з яких є окремою моделлю.
- Можливість моделювати, тестувати і реалізовувати кожен компонент окремо, ще до його вставки в загальну модель системи.
- Покращена інтеграція моделей з існуючими системами управління файлами і контролю версій.
- Інкрементальне завантаження моделей і генерація коду.
- Робочі простори моделей (Model Workspaces) забезпечують окремі області пам'яті для зберігання параметрів і змінних кожної моделі.
- Підтримка шин для завдання інтерфейсів, підтримка операцій над сигналами шини і опису шин як структур при генерації коду.
- Інтеграція Simulink і Stateflow.
- Уніфікований браузер моделей (Model Explorer) дозволяє переглядати, створювати, конфігурувати всі сигнали, параметри і властивості моделей.
- Підтримка створення і збереження конфігурацій параметрів моделювання і генерації коду.
- Можливість управління даними і їх візуалізацією.
- Можливості протоколювання даних і додавання контрольних точок без додавання блоків до моделі.
- Засіб Signal & Scope Manager дозволяє підключати до моделі джерела і приймачі сигналів без додавання блоків.
- Підтримка мови Matlab.
- Генерація С-коду і реалізація додатків на основі впроваджуваних Matlab-алгоритмів
- Функції для створення S-функцій у вигляді М-файлів.

В Matlab є можливість отримати еквівалентну динамічну модель в просторі станів, якщо вхідна модель задана в структурному вигляді в середовищі SIMULINK. Для цього використовується функція `linmod`. Синтаксис цієї функції має наступний вигляд:

$$[A, B, C, D] = \text{linmod}('name\_sys'),$$

де `name_sys` — ім'я файлу, в якому зберігається структурна модель, що змодельована в SIMULINK. Прикладом може бути перетворення структурної моделі типової системи управління зі зворотнім зв'язком, що побудована в середовищі SIMULINK. Тобто виконується перетворення виду:



де u — вхідний сигнал; W_1 — об'єкт управління; W_2 — елемент зворотного зв'язку; x — стан системи; y — сигнал системи на виході.

8.2 Блок програм для перетворення динамічних моделей

Структура системи інструментальних засобів для виконання еквівалентного та апроксимаційного перетворення моделей динамічних об'єктів зображена на рис. 8.1.

Пакет складається з дванадцяти основних функцій (табл. 8.1), призначених безпосередньо для виконання еквівалентного та апроксимаційного перетворення моделей динамічних об'єктів, а також з семи допоміжних функцій (табл. 8.2).

У всіх розроблених функціях здійснюється перевірка правильності задання вхідних даних, їх відповідність задачі, що розв'язується, а також забезпечення коректного завершення роботи програми у разі виникнення помилки під час розв'язання задачі. При цьому, з метою інформування користувача про причини виникнення помилки, а так само для забезпечення взаємодії з іншими програмами, у всі функції вводиться індикатор помилок — змінна *inperr* (перелік значень змінної наведено в табл. 8.3).

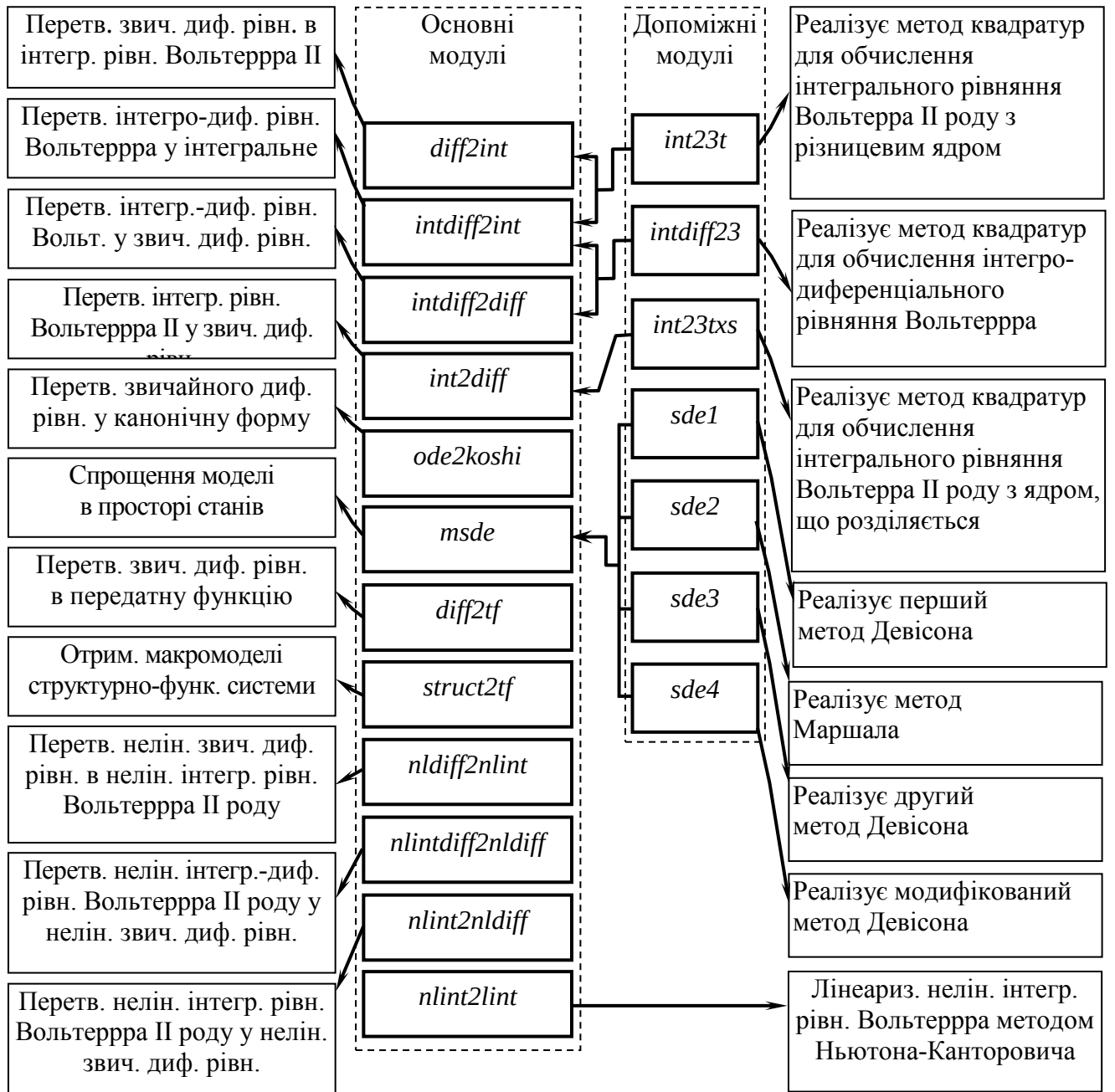


Рис. 8.1 – Структура блоку програмних інструментальних засобів перетворення моделей (Model Transformation Toolbox)

Основні програмні модулі системи

Назва	Формат виклику	Опис параметрів	Призначення
Лінійні моделі			
1. <i>diff2int</i>	$[Kout, Fout, Ksol, Fsol] = \text{diff2int}(a, C, f)$	a — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних, крім старшої; C — масив з початковими умовами; f — права частина диференціального рівняння; $Kout, Fout$ — ядро та права частина, відповідно, інтегрального рівняння відносно старшої похідної; $Ksol, Fsol$ — ядро та права частина, відповідно, інтегрального рівняння відносно невідомої функції вхідного рівняння	Отримання еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерра II роду, відносно як старшої похідної так і самої функції, зі звичайного диференціального рівняння
2. <i>diff2tf</i>	$[tf] = \text{diff2tf}(a, C, f)$	a — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних, крім старшої; C — масив з початковими умовами; f — права частина диференціального рівняння; tf — передатна функція	Отримання передатної функції зі звичайного диференціального рівняння
3. <i>ode2koshi</i>	$[\text{sysdiff1}] = \text{ode2koshi}(a, f)$	a — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних, f — права частина звичайного диференціального рівняння n -го порядку	Отримання системи диференціальних рівнянь першого порядку у формі Коші зі звичайного диференціального рівняння n -го порядку
4. <i>int2diff</i>	$[\text{diffeq}] = \text{int2diff}(\alpha, \beta, f)$	α — функція зі змінною x , β — функція зі змінною s , які є складовими ядра $K(x,s)$ що розділяється; f — права частина інтегрального рівняння; <i>diffeq</i> — нормальна система диференціальних рівнянь	Отримання нормальної системи диференціальних рівнянь з інтегрального рівняння з ядром, що розділяється

Таблиця 8.1, продовження

5.	<i>intdiff2int</i>	$[Kout, Fout]$ $= \text{intdiff2int}(a, C, R, m, f)$	a — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних, крім старшої та при інтегральній частині рівняння; C — масив з початковими умовами; R — вільний доданок ядра; m — степінь ядра; f — права частина; $Kout, Fout$ — ядро та права частина, відповідно, інтегрального рівняння	Отримання еквівалентного інтегрального рівняння Вольтеррра II роду з інтегро-диференціального рівняння
6.	<i>intdiff2diff</i>	$[Dout]$ $= \text{indyff2dyff}(a, K, f)$	a — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних; K — ядро лінійного інтегро-диференціального рівняння; f — права частина; $Dout$ — звичайне диференціальне рівняння	Отримання звичайного диференціального рівняння з інтегро-диференціального рівняння
7.	<i>msde</i>	$[\text{sysm}]$ $= \text{msde}(A, B, C, D, m, \text{method})$	A, B, C, D — матриці, що задають систему в просторі станів; m — степінь спрощеної системи; method — метод спрощення, цей параметр може набувати значень: 'sde1', 'sde3', 'sde4', 'sde2', що відповідають 1-му, 2-му та модиф. методам Девісона та методу Маршала відповідно; sysm — спрощена модель в просторі станів m -го порядку.	Отримання апроксимованої системи в просторі станів заданого порядку з можливим використанням шести методів
8.	<i>struct2tf</i>	$[Bm, Am]$ $= \text{struct2tf}(\text{name\_sys})$	name_sys — ім'я simulink-файлу в якому зберігається структурно-функціональна модель системи; Bm — чисельник, Am — знаменник передатної функції, що являється макромоделлю вхідної структурної моделі системи.	Отримання спрощеної макромоделі у вигляді однієї передатної функції з моделі системи, що задана складною структурно-функціональною формою

Таблиця 8.1, продовження

Нелінійні моделі				
9.	<i>nldiff2</i> <i>nlint</i>	$[Kout, Fout, Ksol, Fsol]$ $= \text{diff2int}(a, C, m, k, f)$	a — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних, крім старшої; C — масив з початковими умовами; m — степінь нелінійності невідомої функції або її похідної; k — номер похідної функції, яка є нелінійною; f — права частина диференціального рівняння; $Kout, Fout$ — ядро та права частина, відповідно, нелінійного інтегрального рівняння відносно старшої похідної	Отримання еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння Вольтеррра II роду відносно старшої похідної зі звичайного диференціального рівняння
10	<i>nlintdif</i> <i>f2nldiff</i>	$[yout] = \text{indyff2dyff}(a, K, f)$	a — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних; K — ядро нелінійного інтегродиференціального рівняння; f — права частина; $Dout$ — звичайне нелінійне диференціальне рівняння	Отримання нелінійного звичайного диференціального рівняння з нелінійного інтегродиференціального рівняння
11	<i>nlint2nldiff</i>	$[diffeq] = \text{int2diff}(\alpha, \beta, f, m, 'type')$	α — функція зі змінною x , β — функція зі змінною s , які є складовими ядра, що розділяється інтегрального рівняння Вольтеррра II роду; m — степінь функції, що входить під знак інтегралу; f — права частина; $'type'$ — тип інтегрального рівняння, який дорівнює $'g'$ або $'u'$, що відповідає типу рівняння Гаммерштейна та Урисона відповідно; $diffeq$ — однорідне звичайне диференціальне рівняння	Отримання однорідного нелінійного диференціального рівняння з нелінійного інтегрального рівняння Вольтеррра II роду з оператором Гаммерштейна та Урисона.
12	<i>nlint2lint</i>	$[Kout, Fout] = \text{nlint2lint}(K, f, m, y0)$	K — ядро нелінійного інтегрального рівняння; m — степінь підінтегральної функції; f — його права частина; $y0$ — початкове наближення	Лінеаризація інтегрального рівняння Вольтеррра II роду

Допоміжні програмні модулі системи

№	Назва	Застосування
1.	<i>sde1</i>	Реалізує метод виділення домінантних власних значень, який призначений для спрощення моделей систем. Даний метод є швидким та досить точним, однак не завжди забезпечує збереження режимів в апроксимованій системі
2.	<i>sde2</i>	Реалізує метод виділення домінантних власних значень, який призначений для спрощення моделей систем. На відміну від функції <i>sde1</i> , з використанням функції <i>sde2</i> забезпечується збереження режимів в апроксимованій системі
3.	<i>sde3</i>	Реалізує метод виділення домінантних власних значень, який призначений для спрощення моделей систем, що мають скалярне або векторне керування з покращенням стаціонарних характеристик апроксимованої моделі
4.	<i>sde4</i>	Реалізує метод виділення домінантних власних значень, який призначений для спрощення моделей систем. Даний метод ефективно використовувати при ступінчатих збуреннях на систему, оскільки стаціонарні значення реакцій співпадають як для складної так і апроксимованої моделей
5.	<i>int23t</i>	Реалізує метод квадратур для обчислення інтегрального рівняння Вольтерра II роду з різницеvim ядром
6.	<i>int23txs</i>	Реалізує метод квадратур для обчислення інтегрального рівняння Вольтерра II роду з ядром, що розділяється
7.	<i>intdiff23</i>	Реалізує метод квадратур для обчислення інтегро-диференціального рівняння

Список індикаторів помилок пакету Model Transformation Toolbox

Значення індикатора помилки	Причина виникнення помилки
0	немає помилок
1	невірне число вхідних аргументів
2	занадто багато вихідних аргументів
3	невірне число аргументів в параметрі, що задає праву частину рівняння

Таблиці 8.3, продовження

4	невірне число аргументів в параметрі, що задає ядро рівняння
5	розмірність масиву початкових умов не відповідає порядку задачі, що розв'язується
6	аргументи, що задають імена функцій не рядкові константи

8.3 Засоби формування і реалізації моделей об'єктів із розподіленими параметрами

Комплекс програм для реалізації методів, які досліджувались у роботі, складається із підпрограм і функцій, які можуть у подальшому удосконалюватися і розвиватися. Він включає три основні модулі (рис. 8.2), які виконують структурне спрощення базових моделей об'єктів із

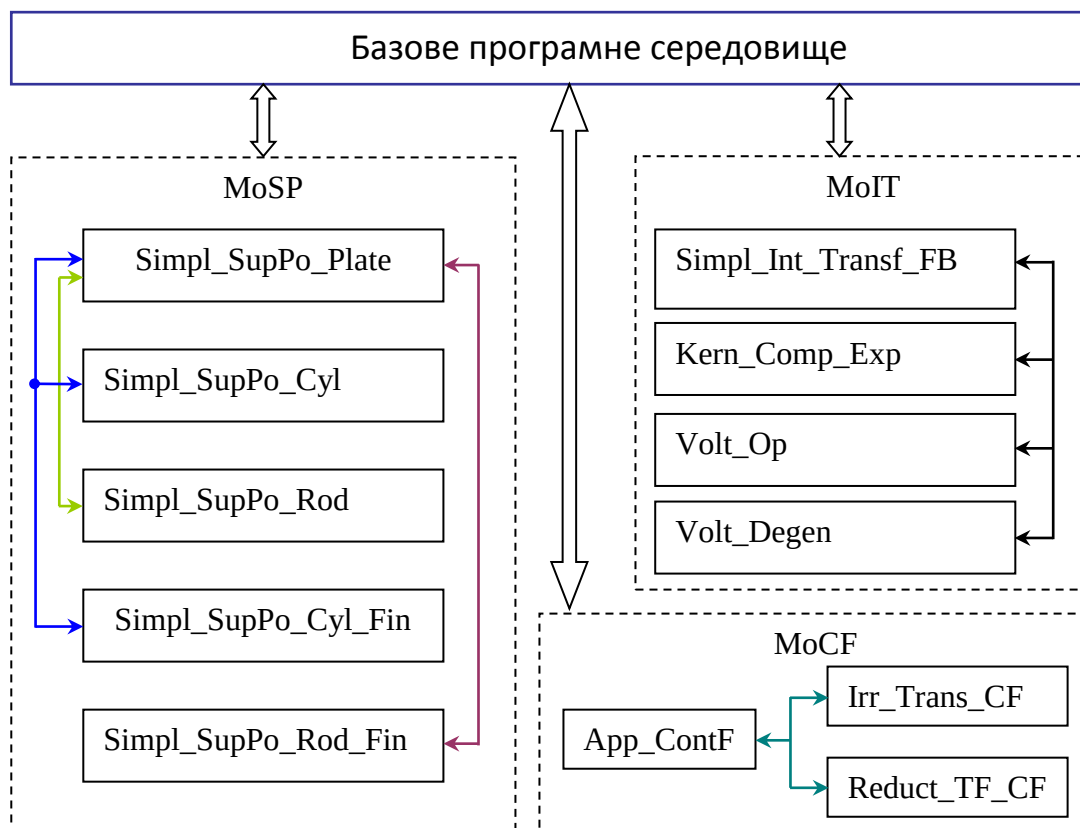


Рис. 8.2 – Структура комплексу програм.

розподіленими параметрами, представлених у різних формах, та чисельно реалізують їх: MoSP — спрощення математичної моделі об'єкта, представленого

у формі диференціального рівняння із частинними похідними до задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (Simpl_SupPo_Plate — одновимірної теплової задачі для необмеженої пластинки, Simpl_SupPo_Cyl — одновимірної теплової задачі для необмеженого порожнистого циліндра, Simpl_SupPo_Rod — двовимірної теплової задачі для необмеженого прямокутного стержня, Simpl_SupPo_Cyl_Fin — двовимірної теплової задачі для обмеженого порожнистого циліндра, Simpl_SupPo_Rod_Fin — тривимірної теплової задачі для обмеженого прямокутного бруса); MoIT — модуль інтегральних перетворень та реалізації інтегральних операторів (Simpl_Int_Transform_FB — застосування інтегрального перетворення зі скінченними межами, Kern_Comp_Exp — побудова ядра інтегрального оператора Вольтерри на основі експериментальних даних, Volt_Op — подання моделі у вигляді інтегрального оператора Вольтерри, Volt_Degen — чисельна реалізація інтегрального оператора Вольтерри із використанням особливості ядер, що розділяються); модуль MoCF — спрощення математичної моделі об'єкта із розподіленими параметрами, заданої у формі передатної функції високого порядку, трансцендентного або ірраціонального вигляду до дробово-раціональної передатної функції (App_ContFr — ланцюгово-дробова апроксимація, Irr_Trans_CF — ірраціональні або трансцендентні передатні функції, Reduct_TF_CF — пониження степеня передатної функції). Основні характеристики підпрограм комплексу наведені у таблиці 8.4.

Таблиця 8.4

Основні характеристики функцій комплексу програм

Найменування	Формат виклику функції	Призначення	Метод, який реалізується
Simpl_SupPo_Plate	[x,t,T,ier]= Simpl_SupPo_Plate (x,t,alpha,beta, Fgr_l, Fgr_r, Pu0,Pu05)	Розв'язування одновимірних параболічних рівнянь із симетричними та несиметричними граничними умовами I-III роду, заданого у декартовій системі координат	Метод опорних перерізів

Таблиці 8.4, продовження

Найменування	Формат виклику функції	Призначення	Метод, який реалізується
Simpl_SupPo_Cyl	[r,t,T,ier]= Simpl_SupPo_Cyl (r, t, alpha, beta, Fgr_l, Fgr_r, Pu0, Pu05)	Розв'язування одновимірного параболічного рівняння із симетричними та несиметричними граничними умовами I-III роду, заданого у циліндричній системі координат	Метод опорних перерізів
Simpl_SupPo_Rod	[x,y,t,T,ier]= Simpl_SupPo_Rod (x, y, t, alpha, beta, Fgr, Pu)	Розв'язування двовимірної задачі теплопровідності у декартовій системі координат	Метод опорних перерізів, поширений на обмежені та напівобмежені просторові об'єкти
Simpl_SupPo_Cyl_Fin	[x,r,t,T,ier]= Simpl_SupPo_Cyl_Fin (x, r, t, alpha, beta, Fgr, Pu)	Розв'язування двовимірної задачі теплопровідності у циліндричній системі координат	
Simpl_SupPo_Rod_Fin	[x,y,z,t,T,ier]= Simpl_SupPo_Rod_Fin (x, y,z, t, alpha, beta, Fgr, Pu)	Розв'язування тривимірної задачі теплопровідності у декартовій системі координат	
Simpl_Int_Transf_FB	[x,t,T,ier]= Simpl_Int_Transf_FB (x,t,alpha,beta, Fgr, Pu)	Розв'язування одновимірного параболічного рівняння, заданого у декартовій системі координат	Метод інтегральних перетворень зі скінченими межами
Volt	[x,y,ier]= volt(x, K, f, method)	Реалізація інтегрального оператора Вольтерри із можливістю вибору квадратурних формул різного ступеня точності	Метод квадратур
Volt_degen	[x,y,ier]= volt_degen (x, alfa, beta,f,method)	Реалізація лінійного інтегрального оператора Вольтерри з виродженим ядром	Метод квадратур на основі ядер, що розділяються
Irr_Trans_CF	[num,den,ier]= Irr_Trans_CF (‘func’,st,m)	Побудова апроксимаційної моделі передатної функції	Ланцюгово-дробова апроксимація
Reduct_TF_CF	[num_a,den_a,ier]= Reduct_TF_CF (num,den,st)	Пониження степені передатної функції	

Слід зазначити, що моделюючий програмний комплекс представляє для багатьох задач альтернативу існуючому розширенню Partial Differential Equation Toolbox, спрощуючи математичну модель та здійснюючи завдяки цьому ефективнішу числову реалізацію.

Побудова модулів програмного комплексу. Для забезпечення сумісності інтерфейсів підпрограм визначимо перелік вхідних аргументів та їх характеристики (таблиця 8.5). У модулях реалізовано метод опису початкових і граничних умов у вигляді анонімних функцій аргументів x (або r для циліндричної системи координат) та t відповідно. Анонімна функція аргументу x записується в такому вигляді: $@(x) F(x)$, де $F(x)$ — аналітична функція однієї змінної.

Таблиця 8.5

Опис і характеристики основних вхідних аргументів підпрограм

Позначення	Тип	Опис	Значення за замовчуванням
x	Вектор-рядок	Сітка вузлів першої просторової координати, на якій шукається розв'язок рівняння	[0:0.1:1]
y		Сітка вузлів другої просторової координати, на якій шукається розв'язок рівняння	
z		Сітка вузлів третьої просторової координати, на якій шукається розв'язок рівняння	
r		Сітка вузлів просторової координати об'єкта циліндричної форми, на якій шукається розв'язок рівняння	
t		Сітка вузлів часового проміжку	—
α	Число	Перший коефіцієнт задання граничних умов	—
β		Другий коефіцієнт задання граничних умов	—
F_{gr}	Функція аргументу t	Значення граничної умови	—
F_{gr_l}		Значення граничної умови ліворуч одновимірного об'єкта	—
F_{gr_r}		Значення граничної умови праворуч одновимірного об'єкта	—

Таблиця 8.5, продовження

Pu	Число	Початкова умова обмежених та напівобмежених просторових об'єктів	0
Pu0	Функція аргументу	Початкова умова одновимірного об'єкта, обчислена у точці 0	—
Pu05	x	Початкова умова одновимірного об'єкта, обчислена у точці 0,5	—

Наприклад, початкову умову

$$F_{\text{ПВ}}(r) = a_0 + a_1 r - a_2 r^2$$

для необмеженого порожнистого циліндра можна описати у такий спосіб:

$$F_{\text{ПВ}} = @ (r) \ A0 + A1 * r - A2 * r.^2;$$

а граничні умови першого роду

$$F_{\text{ЗП1}}^{-}(t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 + a_1 R_1 - a_2 R_1^2) e^{-b_2 t},$$

$$F_{\text{ЗП1}}^{+}(t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 + a_1 R_2 - a_2 R_2^2) e^{-b_2 t}$$

на внутрішній та зовнішній стінках порожнистого циліндра відповідно —

$$F_{\text{ЗП1\_м}} = @ (t) \ 1 - \exp(-B1 * t) + (A0 + A1 * R1 - A2 * R1^2) \dots$$

$$\dots * \exp(-B2 * t);$$

$$F_{\text{ЗП1\_п}} = @ (t) \ 1 - \exp(-B1 * t) + (A0 + A1 * R2 - A2 * R2^2) \dots$$

$$\dots * \exp(-B2 * t);$$

Для розрахунку температурного поля порожнистого циліндра методика використання розробленого комплексу програм має вигляд:

1) формується масив вузлів безрозмірної просторової координати. Для цього задається крок і присвоюється значення відповідній змінній-вектору:

$$h = 0.01; \ r = -1:h:1;$$

2) формується анонімна функція, яка виражає значення $r1$ просторової координати через значення безрозмірної просторової координати — аргумент цієї функції rr :

$$r1 = @ (rr) \ 0.5 * (rr * (R2 - R1) + R1 + R2);$$

3) формується анонімна функція, за допомогою якої обчислюються значення початкової умови

```
F_p=@(rr1) A0+A1.*r1(rr1)-A2.*r1(rr1).^2;
```

4) формуються дві анонімні функції, які описують граничні умови першого роду на внутрішній та зовнішній стінках порожнистого циліндра відповідно

```
Fgr1_m=@(tt) 1-exp(-B1.*tt)+(A0+A1*R1-A2*R1^2)...  
.*exp(-B2.*tt);
```

```
Fgr1_p=@(tt) 1-exp(-B1.*tt)+(A0+A1*R2-A2*R2^2)...  
.*exp(-B2.*tt);
```

5) створюється зовнішня функція Temper для обчислення правої частини системи звичайних диференціальних рівнянь

```
function f=Temper(ft,fy)  
global ar0 ar05 br05 z0 z12 B2;  
f=[-10.*ar0.*fy(1)+32./3.*ar0.*fy(2)+z0.*exp(-B2.*ft);  
(2.*ar05-3.*br05).*fy(1)+(8.*br05-16.*ar05).*fy(2)...  
./3+z12.*exp(-B2.*ft)];
```

6) задається масив початкових умов системи диференціальних рівнянь

```
Y0=[T00;T012];
```

7) розв'язується система диференціальних рівнянь за допомогою стандартних засобів

```
[T,Y]=ode23t(@Temper,t,Y0);
```

8) задається двовимірна сітка

```
[R,T1]=meshgrid(r,t);
```

9) поширюється розв'язок системи рівнянь на двовимірну сітку

```
Ym1=repmat(Y(:,1),1,length(r));
```

```
Ym2=repmat(Y(:,2),1,length(r));
```

10) формується наближений розв'язок за інтерполяційним методом опорних точок

```
T3d_per=(4.*R.^4-5.*R.^2+1).*Ym1+16./3.*R.^2.*(1-...
```

$$R.^2).*Ym2+U(R,T1).$$

Серед особливостей реалізації модуля MoSP є застосування методу алгоритмізації процесу спрощення моделей з використанням символьних обчислень. Суть методу полягає в тому, що всі апроксимаційні та еквівалентні перетворення, передбачені методом опорних перерізів, виконується програмним модулем, а саме здійснюються :

1) оголошення символьних змінних:

```
syms x t Ti T ax bx qx ft Fgr1 Fgr2 real;
```

2) задання опорних точок (як приклад, рівновіддалених вузлів інтерполювання за просторовою координатою):

```
x0=sym(-1);x2=sym(1); xn=sym(x0:0.5:x2);
```

3) формування масиву невідомих значень розв'язку в опорних точках:

```
Ti=cellstr(strcat(sym('T'),int2str((0:length(xn)-2))))
```

4) задання базисної функції

```
bazfun=x;
```

5) формування масиву елементів інтерполяційного многочлена Лагранжа за опорними точками:

```
T=prod([T (bazfun-subs(bazfun,'x',xn))])./(bazfun-...
```

```
subs(bazfun,'x',xn));
```

```
T=collect(T./diag(subs(T,'x',xn))','x');
```

6) апроксимація частинних похідних за просторовою змінною вихідного рівняння шляхом аналітичного диференціювання:

```
dT= diff(T,'x',1); d2T=diff(T,'x',2);
```

7) формування системи звичайних диференціальних рівнянь:

```
P=[collect(d2T.*ax+dT.*bx) qx.*ft];
```

```
Systema=simplify(subs(P,'x',xn)*[Fgr1;Ti(2:end);...
```

```
Fgr2;1]);
```

8) аналітичне розв'язування сформованої системи

```
Ts=dsolve(char(s),char(PU_s));
```

де s , PU_s — символні рядки із аналітичним записом системи та початкових умов відповідно;

9) формування аналітичного виразу для наближеного розв'язку вихідної задачі

$T_{\text{txt}} = \text{simplify}(T * [F_{\text{gr1}}; T_s.T1; T_s.T2; T_s.T3; F_{\text{gr2}}]);$

10) створення функції для чисельної реалізації отриманого аналітичного розв'язку:

$T_{\text{txt\_mot\_F}} = \text{matlabFunction}(T_{\text{txt}}),$

що дає змогу в результаті отримати аналітичний вираз наближеного розв'язку задачі теплопровідності.

Результати обчислювальних експериментів, у яких порівнювався затрачений на розв'язання задачі час методом опорних перерізів у порівнянні з традиційним широковживаним методом скінченних різниць та функцією *pdere* ядра пакету моделювання Matlab, наведені на (рис. 4.2).

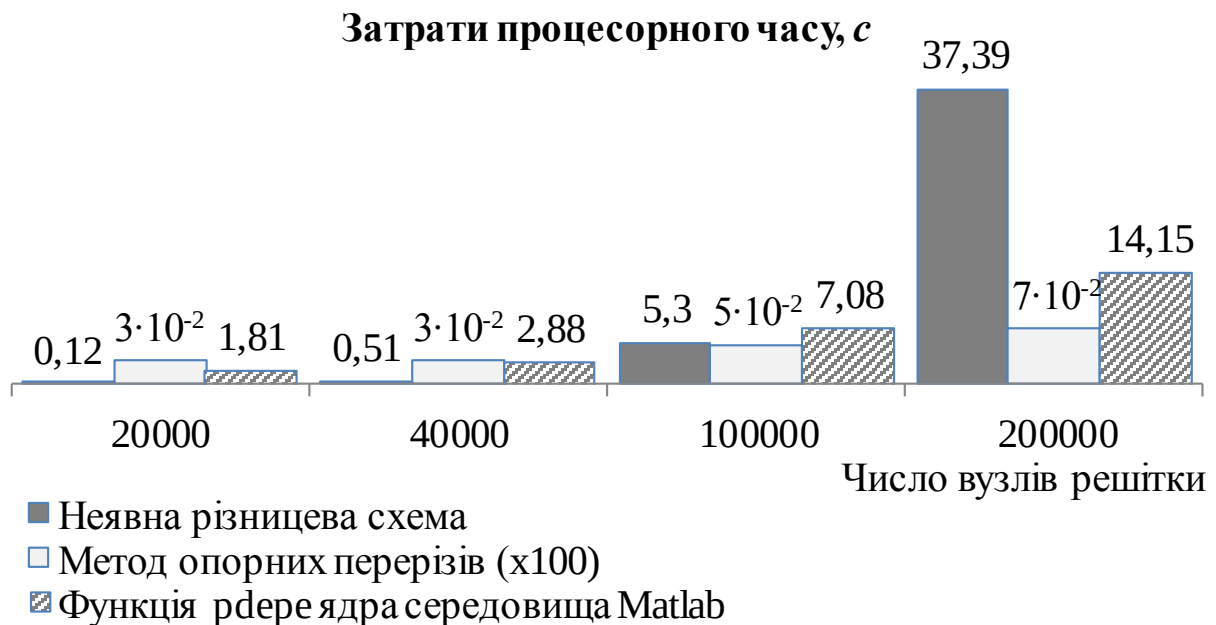


Рис. 8.3. Дослідження ефективності методу опорних перерізів.

Для модуля $Volt\_Op$ особливістю реалізації оператора Вольтерри

$$y(t) = \int_0^t K(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

є спосіб обчислення квадратурних сум без застосування циклічних операцій підсумовування для квадратурної формули на кожному кроці. Обчислення проводяться лише за допомогою матричних операцій одразу над цілими векторами сформованих коефіцієнтів квадратурної формули. Наприклад, в ході обчислювальних експериментів значення інтеграла в (8.1) в точці t_i замінюється квадратурною сумою лівих прямокутників (для випадку рівномірної та однакової сітки вузлів для змінних t і τ із кроком $h = \Delta\tau = \Delta t = t_{j+1} - t_j, t_j = \tau_j$)

$$y(t_i) = \int_0^{t_i} K(t_i - \tau) x(\tau) d\tau \approx h \sum_{j=0}^{i-1} K(t_i - t_j) x(t_j) = h \sum_{j=0}^{i-1} K(t_{i-j}) x(t_j),$$

або

$$y_i = y(t_i) = h \langle \overline{K_{i-j}}, \overline{x_j} \rangle, j = \overline{0, i-1},$$

де $\langle \cdot \rangle$ — скалярний добуток векторів, $\overline{K_{i-j}}, \overline{x_j}$ — вектори-рядки.

У випадку вхідного впливу $x(t) \equiv x = \text{const}$ i -тий елемент вектора-розв'язку визначається виразом

$$y_i = y(t_i) = x \int_0^{t_i} K(t_i - \tau) d\tau \approx hx \sum_{j=0}^{i-1} K(t_i - t_j) = hx \sum_{j=0}^{i-1} K(t_{i-j}) = hx \sum_{j=1}^i K(t_j).$$

Тоді вектор шуканого розв'язку $\overline{y_n}$ має вигляд

$$\begin{aligned} \overline{y_n} &= (y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n) \approx \\ &\approx hx \left(\sum_{j=1}^0 K(t_j) \ \sum_{j=1}^1 K(t_j) \ \sum_{j=1}^2 K(t_j) \ \dots \ \sum_{j=1}^n K(t_j) \right). \end{aligned}$$

В середовищі Matlab шуканий вектор формується за допомогою оператора суми з накопиченням

$$y = [0 \ h * x * \text{cumsum}(K(2:\text{end}))];$$

де y — вектор шуканого розв'язку; h — крок Δt ; x — вхідний вплив; K — вектор значень ядра інтегрального оператора $K(t_i)$, $\text{cumsum}()$ — функція знаходження суми з накопиченням елементів вектора-аргументу.

Для дослідження ефективності запропонованого векторно-матричного способу числової реалізації інтегрального оператора Вольтерри проведено ряд

обчислювальних експериментів, в яких визначалась реакція лінійного динамічного об'єкта на вхідний вплив у вигляді одиничного стрибка. Розв'язок знаходився як результат матричних операцій одразу над цілими векторами вхідного впливу та ядра. При цьому фіксувався час, затрачений на знаходження розв'язку запропонованим способом і традиційним із використанням оператора циклу. Результати показали, що при кількості вузлів $\approx 2 \cdot 10^4$ час обрахунку запропонованим методом та традиційним склав 0.000534 с та 0.011408 с відповідно; при кількості вузлів $\approx 2 \cdot 10^6$ час обрахунку склав 0.055267 с та 1.025395 с, а при кількості вузлів $\approx 2 \cdot 10^7$ — 0.500963 с та 10.153589 с відповідно, що становить майже 20-ти разове зменшення витрат процесорного часу. Отже, запропонований прийом числової реалізації інтегрального оператора Вольтерри із виродженим ядром виявився ефективніший у порівнянні із традиційним обчисленням квадратур із застосуванням оператору циклу.

З метою визначення якісної характеристики засобів числової реалізації різних форм математичного опису моделі ОРП було проведено низку обчислювальних експериментів. Моделювався процес розповсюдження крутильних коливань довгого пружного валу, базовий математичний опис якого поданий у формі рівняння з частинними похідними гіперболічного типу з вільним кінцем і нульовими початковими умовами та граничними умовами другого роду при подачі на вхід одиничного східчастого впливу. Розв'язок (кут повороту вільного кінця валу) знаходився на сітці із кроком $2 \cdot 10^{-4}$ часової змінної $t \in [0, 1]$ (та 0.0251 для просторової змінної у випадку використання скінченно-різницевого обчислювача). При цьому фіксувався затрачений на знаходження розв'язку відповідним способом час (табл. 8.6).

За результатами проведених експериментів можна зробити висновок, що найменше часу для розв'язання потребує векторно-матричний спосіб реалізації квадратур для математичного опису у вигляді інтегрального оператора Вольтерри. Але його можна застосувати лише у випадку виродженого ядра.

Якісні характеристики числової реалізації різних форм моделі довгого
пружного валу

Математичний опис	Рівняння з частинними похідними	Оператор Вольтерри з ядром типу згортки	Дробово-раціональна передатна функція	Оператор Вольтерри із ядром типу згортки	Оператор Вольтерри з виродженим ядром
Засіб числової реалізації	Скінченно-різницький обчислювач	Структурна simulink-модель	Simulink-блок Transfer Function	M-file (реалізація квадратур з використанням оператора циклу <i>for</i>)	M-file (векторно-матричний алгоритм обчислення квадратур)
Час розрахунку, с	9,0196	46,241	0,943	0,0264	0,00148

В усіх розроблених функціях здійснюється перевірка правильності задання вхідних даних, їх відповідність до задачі, що розв'язується, а також, в разі помилки, забезпечується інформування користувача про причини виникнення помилки та коректне завершення роботи програми. Для цього у всі функції вводиться індикатор помилок — змінна *ier*, яка може приймати значення представлені в таблиці 8.7.

Опис основних модулів комплексу. Модуль MoSP реалізовує спрощення математичної моделі об'єкта, представленого у формі диференціального рівняння із частинними похідними до задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. Коефіцієнти диференціального рівняння з частинними похідними задаються у символьному вигляді. Результуюча система звичайних диференціальних рівнянь представляється також у символьному вигляді і доступна для подальшої чисельної реалізації вбудованими або спеціальними засобами. Модуль містить наступні функції: *Simpl_SupPo_Plate* — спрощення одновимірної теплової задачі для необмеженої пластинки із симетричними і несиметричними граничними умовами I-III роду, заданої у декартовій системі координат, до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь; *Simpl_SupPo_Cyl* —

спрощення одновимірної теплової задачі для необмеженого порожнистого циліндра до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь; `Simpl_SupPo_Rod` — спрощення двовимірної теплової задачі для необмеженого прямокутного стержня до добутку розв’язків двох одновимірних задач для необмежених пластинок, які своїм взаємним перерізом утворюють стержень; `Simpl_SupPo_Cyl_Fin` — спрощення двовимірної теплової задачі для обмеженого порожнистого циліндра до добутку розв’язків двох одновимірних задач для необмеженої пластинки та необмеженого порожнистого циліндра, які своїм взаємним перерізом утворюють об’єкт; `Simpl_SupPo_Rod_Fin` — спрощення двовимірної теплової задачі для обмеженого прямокутного бруса до добутку розв’язків трьох одновимірних задач для необмежених пластинок, які своїм взаємним перерізом утворюють брус.

Таблиця 8.7

Значення індикатора помилок

Значення індикатора помилки	Причина виникнення помилки
0	Немає помилок
1	Невірне число вхідних аргументів
2	Дуже багато вихідних аргументів
3	Невірно заданий відрізок, на якому шукається розв’язок
4	Недостатньо пам’яті

Модуль `MoIT` здійснює реалізацію інтегральних перетворень вихідної моделі, представленої диференціальним рівнянням із частинними похідними, до простішої задачі у зображеннях, побудову ядра інтегрального оператора Вольтерри за допомогою обчислювального експерименту та реалізацію інтегральних операторів. Він включає наступні функції: `Simpl_Int_Transform_FB` — спрощення до задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь моделі динамічного об’єкта із розподіленими

параметрами шляхом застосування інтегрального перетворення зі скінченними межами за просторовими змінними та зворотного перетворення в простір оригіналів; `Kern_Comp_Exp` — побудова ядра інтегрального оператора Вольтерри на основі експериментальних даних із використанням зв'язку між перехідною характеристикою та імпульсною перехідною функцією об'єкта (реалізація за допомогою підпрограми `Volt_Op`); `Volt_Op` — подання моделі динамічного об'єкта із розподіленими параметрами у вигляді інтегрального оператора Вольтерри у випадку, коли відома імпульсна перехідна функція та її чисельна реалізація за допомогою квадратурних формул різного ступеня точності; `Volt_Degen` — чисельна реалізація інтегрального оператора Вольтерри за допомогою квадратурних формул із використанням особливості ядер, що розділяються.

Модуль `MoCF` представляє інструменти для спрощення математичної моделі об'єкта із розподіленими параметрами, заданої у формі передатної функції високого порядку, трансцендентного або ірраціонального виду до дробово-раціональної передатної функції. Вказані можливості реалізують такі функції: `App_ContFr` — призначена для побудови ланцюгово-дробової апроксимаційної моделі у вигляді дробово-раціональної передатної функції різними методами (1 — аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів; 2 — алгоритм побудови правильних C -дробів; 3 — QD-алгоритм побудови правильних C -дробів; 4 — алгоритм побудови g -дробів; 5 — алгоритм побудови приєднаних ланцюгових дробів); `Irr_Trans_CF` — спрощення опису динамічного об'єкта із розподіленими параметрами, заданого у вигляді ірраціональних або трансцендентних передатних функцій до дробово-раціональної передатної функції шляхом ланцюгово-дробової апроксимації; `Reduct_TF_CF` — пониження степені передатної функції.

З метою дослідження ефективності програмного комплексу було проведено ряд обчислювальних експериментів з числової реалізації математичних моделей методом опорних перерізів у порівнянні з традиційним широковживаним методом скінченних різниць. Для цього розв'язувалась задача моделювання

нестационарного теплового процесу у необмеженій пластинці, для якої відомий аналітичний розв'язок.

Результати тестування дозволяють зробити висновок про те, що розроблене програмне забезпечення повністю відповідає вимогам, що пред'являються до сучасних комплексів прикладних програм для комп'ютерного моделювання та може слугувати альтернативою або доповнювати існуючі засоби комп'ютерного моделювання, володіючи при цьому ефективнішою числовою реалізацією.

8.4 Програми для реалізації динамічних макромоделей

Відповідно до досвіду, що склався, систему комп'ютерного моделювання для розв'язання задач, що розглядаються в роботі, доцільно організувати у вигляді комплексу прикладних програм, використовуючи модульний принцип організації, у відповідності з яким програми розбиваються на декілька підпрограм і функцій, що допускають їх подальший розвиток та корекцію. Розроблений комплекс складається із 10 основних модулів, призначених безпосередньо для числової реалізації розглянутих видів макромоделей. Структура комплексу програм на рис. 8.4, а в табл. 4.1 представлені дані про його основні модулі.

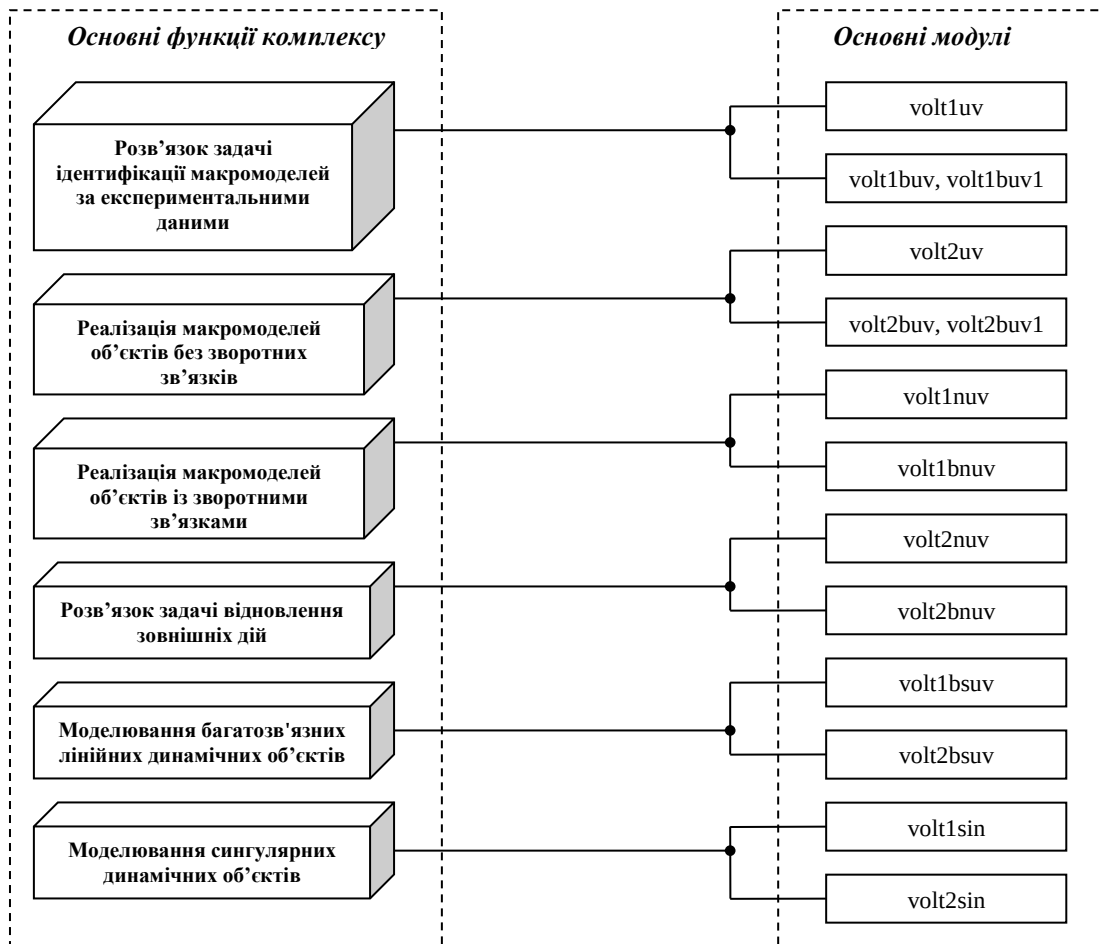


Рис. 8.4. Структура комплексу програм

Таблиця 8.8

Основні модулі комплексу програм

Найменування	Формат виклику функції	М-файли з вихідними даними	Призначення	Реалізуємий метод
1	2	3	4	5
<i>volt1uv</i>	[x,y,ier]= volt1uv(x)	fprav, kern11	Розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольтерра I роду з ядром довільного виду	Метод квадратур на основі традиційного підходу
<i>volt2uv</i>	[x,y,ier]= volt2uv(x)	fprav2, kern22	Розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольтерра II роду з ядром довільного виду	

Таблиця 8.8, продовження

1	2	3	4	5
<i>lt1nuv</i>	$[x,y,ier]=$ $volt1nuv(x)$	fprav5, kern10, koefa1, koefc12	Ідентифікація макромоделі за експериментальни- ми даними	Інтерполяцій- ний метод ідентифікації
<i>volt2nuv</i>	$[x,y,ier]=$ $volt2nuv(x)$	fprav4, kern8, koefa2, koefb, koefc2	Числова реалізація лінійного інтеграль- ного оператора з до- вільним ядром	Квадратурний метод
<i>volt1buv</i>	$[x,y,ier]=$ $volt1buv(x)$	fprav1, kern6,kern7 kern5	Числова реалізація лінійного інтеграль- ного оператора з ро- здільним ядром	Квадратурний метод на основі роздільності ядер
<i>volt1buv1</i>	$[x,y,ier]=$ $volt1buv1(x)$	fprav, kern1,kern2 kern12	Розв'язок лінійного інтегрального рівня- ння Вольєрра II ро- ду з ядром довільно- го виду	Рекурентні алгоритми метода квадратур
<i>volt2buv</i>	$[x,y,ier]=$ $volt2buv(x)$	fprav2, kern13, kern14, kern15	Розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольєрра II роду з виро- дженим ядром	
<i>volt2buv1</i>	$[x,y,ier]=$ $volt2buv1(x)$	fprav6, kern111, kern101, kern21	Розв'язок нелінійно- го інтегрального рівняння Вольєрра II роду	
<i>volt1bnuv</i>	$[x,y,ier]=$ $volt1bnuv(x)$	fprav5, kern61, kern71, kern9, koefa3, koefc11	Розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольєрра I роду з ядром довільного виду	
<i>volt2bnuv</i>	$[x,y,ier]=$ $volt2bnuv(x)$	fprav4, kern62, kern72, kern91, koefa, koefb koefc	Розв'язок нелінійного інтегрального рівняння Вольєрра II роду з виро- дженим ядром	Рекурентні алгоритми метода квадратур з «природною» регуляризацією

Таблиця 8.8, продовження

<i>volt1bsuv</i>	$[x,y,ier]=$ $volt1bsuv(x,$ $N)$	fprav3, kern16, kern17, kernm	Розв'язок нелінійно- го інтегрального рівняння Вольтерра I роду	Метод квадратур з «внутрішньою» регуляризацією
<i>volt2bsuv</i>	$[x,y,ier]=$ $volt2bsuv(x,$ $N)$	fprav10, kern3, kern4, kernm1	Розв'язок сингулярного інтегрального рівняння Вольтерра I роду	

Основним вхідним параметром, що передається при виклику функцій x - масив виду $x=[x_0:h:x_n]$, який задає відрізок, на якому шукається розв'язок, де h - крок інтегрування.

При формуванні ядер і правих частин рівнянь можливе використання двох підходів:

- 1) Задавання ядер і правих частин у вигляді масивів, в даному випадку затрати машинного часу не великі.
- 2) Оформлення ядер і правих частин у вигляді функцій в окремих m-файлах, що збільшує затрати машинного часу, але економить пам'ять.

Для підвищення ефективності комплексу в ньому використовують обидва підходи.

З врахуванням вищевикладеного, методика розроблених програм полягає в наступному.

1. Формується функція, що задає ядро, яка повинна мати наступний заголовок при розв'язанні традиційним методом:

function k=kern11(x,i,j),

де k – повертає значення ядра $K(x_i, x_j)$;

x – вузли інтегрування;

i, j - незалежні змінні.

У випадку розділяючого ядра формуються 3 функції:

- *function k=kern1(x,i,j),*

де k – повертає значення $\alpha_l(x)$;

x – вузли інтегрування;

i - незалежна змінна;

- *function* $k=kern2(x,i,j)$,

де k – повертає значення $\beta_l(s_j)$;

x – вузли інтегрування;

j - незалежна змінна;

- *function* $k=kern12(x,i,j)$,

де k – повертає значення суми $\sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \beta_l(x_i)$;

x – вузли інтегрування;

i - незалежна змінна.

Окрім вищевказаних функцій при розв'язку системи лінійних рівнянь задається функція, яка вміщує матрицю необхідних коефіцієнтів.

При розв'язанні нелінійного рівняння можна модифікувати допоміжні функції для обчислення параметрів нелінійності.

2. Формується функція, що задає праву частину, яка повинна мати наступний заголовок:

function $f=fprav(x)$,

де f – вихідний масив, який вміщує значення правої частини для відповідного рівняння $f(x_i)$;

x – вузли інтегрування.

3. Викликається основний модуль комплексу програм з потрібними вхідними параметрами.

Всі основні модулі в якості результату повертають масив розв'язків y , масив x , які містять сітку вузлів, на яких знайдено розв'язок, і значення індикатора помилок ier .

Відповідно до вимог, що пред'являються до пакетів прикладних програм комп'ютерного моделювання, у всіх розроблених функціях здійснюється

перевірка правильності задавання вхідних даних, їх відповідність до задачі, що розв'язується, а також забезпечується коректне завершення роботи програми в разі виникнення помилки в ході розв'язку. При цьому, з метою інформування користувача про причини виникнення помилки, а також для забезпечення взаємодії з іншими програмами, у всі функції вводиться індикатор помилок - змінна *ier*, яка може приймати значення представлені в табл. 8.9.

Таблиця 8.9.

Значення індикатора помилок

Значення індикатора помилки	Причина виникнення помилки
0	немає помилок
1	невірне число вхідних аргументів
2	дуже багато вихідних аргументів
3	невірно заданий відрізок, на якому шукається розв'язок
4	дискримінант рівняння менше або дорівнює нулю

Характеристики комплексу. Для оцінки якості розробленого комплексу програм скористаємося номенклатурою показників якості, яка містить шість чинників, що характеризують споживчі властивості програмного забезпечення: надійність, ефективність, зручність застосування, коректність, супроводжувальність, гнучкість.

Здійсимо оцінку двох основних показників якості - надійності і ефективності на ряді модельних прикладів, що охоплюють всі можливі типи задач, для розв'язання яких призначена розроблена система моделювання.

Під надійністю розуміється здатність програмного забезпечення успішно розв'язувати задачі, на які воно розраховане. Даний чинник характеризується такими критеріями як стійкість функціонування, достовірність, працездатність. У табл. 8.10 приведені результати тестування надійності розробленої системи.

Результати оцінки надійності системи моделювання

Стійкість функціонування	
можливість обробки помилкових ситуацій на вході	+
наявність засобів підтримки при виникненні перешкод	+
Достовірність	
відсоток правильно виданих повідомлень про отримані результати	92.75%
відсоток тестових задач, розв'язок яких закінчився аварійним зупином	0%
Працездатність	
відсоток вирішених тестових завдань	100%

Ефективність системи моделювання оцінюється по таких критеріях як точність розв'язку і час виконання. У табл. 4.4 приведені результати оцінки ефективності розробленого програмного забезпечення по вказаних критеріях, отримані при рішенні групи тестових прикладів.

Всі програми розроблені з використанням мови програмного комплексу MATLAB і об'єднані в єдиний комплекс прикладних програм для реалізації дослідження динамічних макромоделей відповідно концепції пакетів прикладних програм (Matlab Application Toolboxes), прийнятою в системі Matlab.

8.5 Висновки до восьмого розділу

При виборі середовища моделювання визначаються основні параметри програмного засобу: достатньо повні функціональні можливості, наявність засобів для реалізації структурного підходу при побудові моделей; відкритість та гнучкість системи з можливістю доповнення новими спеціалізованими модулями; наявність власної мови програмування з можливістю створення нових програмних модулів; Вказаним параметрам відповідають такі середовища моделювання як Matlab та SciLab. Системи інструментальних засобів для виконання перетворення моделей динамічних об'єктів на основі запропонованих алгоритмів складається з дванадцяти основних функцій, призначених безпосередньо для виконання еквівалентного та апроксимаційного перетворення моделей динамічних об'єктів, а також з семи допоміжних функцій. Засоби формування і реалізації моделей об'єктів із розподіленими параметрами складаються із підпрограм і функцій, які можуть у подальшому удосконалюватися і розвиватися. Вони включають три основні модулі, які виконують структурне спрощення базових моделей та чисельно реалізують спрощені моделі. Програми для реалізації динамічних макромodelей організовані у вигляді комплексу, використовуючи модульний принцип організації, у відповідності з яким програми розбиваються на декілька підпрограм і функцій, що допускають їх подальший розвиток та корекцію. Розроблений комплекс складається із 10 основних модулів, призначених безпосередньо для числової реалізації видів макромodelей, що розглядаються. Комплекс програм для розв'язання інтегральних динамічних моделей виконано за принципом побудови типового ToolBox з урахуванням вимог згідно з інформацією, що розміщена компанією. Комплекс складається з 23 програм, які охоплюють всі основні види інтегральних рівнянь та методи розв'язання їх на основі розщеплених ядер, що є, по суті, завершеним інструментарієм для апробації і порівняння у повному обсязі алгоритмів, запропонованих у роботі, для розв'язування тестових прикладів і складних прикладних задач.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вирішена науково-технічна проблема створення методів і засобів модельної підтримки процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем технічно-енергетичного призначення (в першу чергу стосовно до силових енергетичних установок) з урахуванням притаманним їм властивостей та ресурсних обмежень. В тому числі отримані наступні результати.

1. На основі аналізу найбільш суттєвих властивостей комп'ютерно-інтегрованих систем з ретельним розглядом найбільш розповсюджених прикладів силових енергетичних установок з характерним для цього класу систем призначенням і організацією обрані наступні підходи для розвитку і застосування досягнутих результатів в галузі математичного та комп'ютерного моделювання задач динаміки: використання принципу альтернативності різних форм динамічних моделей з ефективним застосуванням інтегральних динамічних моделей у вигляді операторів і рівнянь типу Вольтерра; застосування принципу та методів математичної редукції для отримання спрощених робочих динамічних моделей; адаптаційний вибір методів чисельної реалізації динамічних моделей та побудови відповідних алгоритмів зі зниженою обчислювальною складністю; структурна організація програмних засобів для проведення обчислювальних експериментів і розв'язання прикладних задач, що забезпечує їх використання відповідно до існуючої інженерної практики.

Аналіз також свідчить, що, не дивлячись на те, що базовими моделями великої частки фізичних об'єктів комп'ютерно-інтегрованих систем є рівняння з частинними похідними, вони практично не використовуються. Робочі моделі представлені різними формами традиційних одновимірних (скалярних) моделей, які отримуються, як правило, шляхом ідентифікації моделей всіх функціональних елементів у складі фізичних об'єктів системи. Запропоновано підхід до побудови робочої динамічної моделі фізичної частини системи полягає у виборі однієї їх форм одновимірної моделі з урахуванням особливостей задачі, що моделюється, та допустимим спрощенням.

2. При вирішенні задачі формування робочої динамічної моделі принцип альтернативності моделей надає можливості широкого вибору однієї із форм можливих математичних залежностей, яку, не дивлячись на аналітичну еквівалентність, можуть суттєво розрізнятися за критерієм обчислювальності складності, оскільки реалізуються за допомогою різних за своєю якістю обчислювальних схем. При цьому вибір моделі здійснюється шляхом обчислювальних експериментів. Для застосування інтегральних динамічних моделей, які володіють згладжуючими властивостями при побудові моделей за експериментальними даними, запропоновані відповідні форми у вигляді явних моделей, тобто інтегральних операторів, які мають однакову структуру для об'єктів із зосередженими і розподіленими параметрами. Моделі цього виду відносяться також до класу економічних макромоделей. Крім того, запропонована загальна форма інтегральних моделей у вигляді системи інтегральних рівнянь Вольтерра II роду для опису багатозв'язних динамічних систем, що забезпечує безпосередню структурну реалізацію програмними засобами.

Для отримання широкого кола моделюючих виразів запропонований узагальнений метод еквівалентного перетворення диференціальних рівнянь – у інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння, що включає відомі методи послідовного інтегрування. Для побудови спрощених динамічних моделей сформульовано відповідний принцип спрощення і корегування моделюючих залежностей, що базується на введенні функції неузгодженості (критерію якості) математичної моделі та оптимізаційному пошуку необхідного результату. Наведені шляхи реалізації процесів спрощення моделей. У випадку об'єктів з розподіленими параметрами запропоновано метод структурного спрощення, який здійснює перехід від базових рівнянь з частинними похідними до спрощеної моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь на основі інтерполяційного підходу; метод забезпечує значну перевагу спрощеної моделі при обмежених часових ресурсах інформаційної частини комп'ютерно-інтегрованої системи.

3. Необхідність забезпечення процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем у реальному часі, а також відповідні вимоги до апаратної

частини підсистем керування і контролю, обсягу пам'яті, надійності та безпеки суттєво впливають на рівень складності математичних описів динамічних процесів у системах. Це потребує застосування замість складних математичних описів більш простих моделей, призначених для задач побудови систем і моделювання. Виходячи з практичних міркувань задачу корегування динамічної моделі пропонується ставити як задачу уточнення або визначення параметрів моделі. Спираючись на ідею узгодження виду моделі з точністю вихідних даних, формулюється задача «точностної» редукції як задача мінімізації функціоналу складності на класі моделей, які можна співставити за точністю зі спостереженнями. Конструктивність процедури спрощення моделі за принципом «точностної» редукції забезпечується запропонованим визначенням коефіцієнта узгодженості α , як точностної характеристики редукційованої моделі. Застосування міри складності моделі при цьому дозволяє отримати практичний вираз для визначення оптимально спрощеної моделі. У випадку ускладнень, пов'язаних з оцінкою сигнальних показників точності моделей, доцільне використання параметричного підходу до побудови спрощених моделей, сутність якого полягає у заміні значень певних параметрів вихідної моделі на такі значення, які зменшують значення міри обчислювальної складності спрощених моделей. Введені поняття дозволяють отримати суттєвий теоретичний результат для методів редукції моделей, а саме: для будь-якої моделі з неточно заданими параметрами, за умови, що похибка змінних на виході є зростаючою та обмеженою функцією від похибки параметрів, існує спрощена α -узгоджена модель, яка відрізняється від початкової значеннями деяких параметрів, що зменшують міру обчислювальної складності. Отримані результати забезпечують можливість алгоритмічної ті програмної організації процесів математичної редукції.

4. Технічна частина силових енергетичних установок, як правило, представляє собою складний фізичний об'єкт з розподіленими параметрами, базовим математичним описом яких є диференціальні рівняння з частинними похідними. У зв'язку з принциповою складністю чисельних методів і програмної реалізації цих моделей суттєво актуальною стає задача розвитку методів математичного і

комп'ютерного моделювання об'єктів з розподіленими параметрами шляхом розробки, дослідження і застосування методів побудови і числової реалізації структурно-спрощених динамічних моделей вказаного класу об'єктів, які мають необхідний рівень адекватності, найменшу складність серед альтернативних варіантів та орієнтованих на ефективну числову і комп'ютерну реалізацію. Ефективна числова реалізація числової реалізації структурно-спрощених математичних моделей динамічних об'єктів вказаного класу забезпечує створення вбудованих програмних засобів для розв'язання задач функціонування технічних систем при наявності часових і ресурсних обмежень. Аналіз результатів досліджень за тематикою, що досліджувалась, визначає основні підходи і особливості задач побудови спрощених моделей об'єктів з розподіленими параметрами, основними серед яких є принцип розділення змінних, операційні методи і метод інтегральних перетворень; перспективним є інтерполяційний підхід, для прикладної реалізації якого необхідне здійснення відповідних досліджень і розробок; реалізація інтерполяційного підходу до спрощення математичних моделей передбачає формування відповідних математичних моделей і оціночних виразів, що дозволяють обґрунтувати можливість і доцільність спрощення математичних описів, а також оцінки якості математичних моделей і можливі процедури виконання операцій спрощення. В роботі запропонований та досліджений інтерполяційний метод (метод опорних перерізів) отримання спрощених моделей об'єктів з розподіленими параметрами у вигляді скалярних диференціальних рівнянь на основі вихідних (базових) описів у формі диференціальних рівнянь з частинними похідними; отримані звичайні диференціальні рівняння визначаються залежностями для невеликої кількості перерізів об'єкта, що моделюється, а їх розв'язок дозволяє представити розв'язок вихідної задачі у вигляді простого полінома; метод практично інваріантний відносно форми базової моделі та ефективно алгоритмізується і забезпечує побудову економічних швидкодіючих програмних засобів, що підтверджуються обчислювальними експериментами. За допомогою методу опорних перерізів отримані спрощені моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь для

об'єктів з розподіленими параметрами параболічного типу з симетричними і несиметричними граничними умовами, а також для аналогічних задач в циліндричній системі координат; апробація спрощених моделей шляхом тестових обчислювальних експериментів при розв'язуванні модельних задач підтверджує працездатність методу і ефективність програм, що його реалізують; порівняння отриманих результатів спрощеного моделювання з результатами реалізації базових (повних) моделей за допомогою типових різницевих алгоритмів свідчить про значну перевагу запропонованого методу як по простоті обчислювальних процедур, так і по часу, витраченому на розв'язування.

5. Вирішено важливу науково-технічну задачу, яка полягає у синтезі математичних моделей визначеного класу мобільних об'єктів та засобів керування цими об'єктами на основі застосування і удосконалення безпошукових самоналагоджуваних систем з еталонною моделлю, що забезпечує оптимізацію зазначених систем у розумінні найкращого наближення характеристик об'єкта керування та еталонної моделі для ефективного розв'язання прикладних задач. Проведено аналіз математичних моделей типових систем керування та виконано узагальнення їх математичного опису, внаслідок чого запропоновано узагальнену модель, яка, зокрема, визначає вид диференціальних рівнянь, їх коефіцієнти, їх розмірність тощо. Узагальнення математичного опису здійснено з метою уніфікації методів щодо синтезу стратегій адаптивного керування визначеним класом об'єктів. Виконано якісне дослідження узагальненої моделі, що показало можливість переходу до еквівалентних математичних формулювань у випадках апаратної або програмної реалізації законів керування. Сформульовано мету та задачі керування об'єктів та обґрунтовано необхідність адаптації при керуванні ними. Виконано аналіз та порівняльну характеристику існуючих принципів побудови автоматичних систем керування з урахуванням особливостей об'єктів керування. В результаті проведеного аналізу виділено клас адаптивних систем з еталонною моделлю як такий, що забезпечує високу адекватність синтезованого управління (з точністю до відтворення моделлю динаміки реального об'єкта), високу швидкодію (управління формується в реальному масштабі часу) та просту

апаратну реалізацію. Досліджено також можливість застосування програмних засобів (програмної платформи Matlab) для розв'язання задачі синтезу адаптивного управління об'єкту, зокрема, при математичній формалізації системи керування у просторі станів. Набув подальшого розвитку метод синтезу законів адаптивного керування визначеним класом об'єктів, а також структур систем керування з еталонною моделлю, що реалізують ці закони. В основу синтезу законів керування та вказаних структур покладено властивість виконання сталості процесу самоналагоджування (яка визначається за другим методом Ляпунова). Це дозволило врахувати обмеження на управляючий вплив. Задачу синтезу розв'язано для систем з параметричним настроюванням (тобто активним настроюванням, коли ефект самонастроювання досягається за рахунок зміни параметрів пристрою управління), з сигнальним настроюванням (тобто пасивним настроюванням, коли ефект самонастроювання забезпечується за рахунок компенсуючих сигналів), а також з комбінованим настроюванням, що забезпечує достатню динамічну точність при простій апаратній реалізації. Виконано оптимізацію синтезованих систем керування з еталонною моделлю у розумінні найкращого наближення характеристик об'єкта керування та еталонної моделі, що забезпечує мінімізацію часу узгодження вихідних координат об'єкту та еталонної моделі (системи, оптимальні за швидкодією).

6. В задачі ідентифікації і у задачі діагностики ми маємо справу з недовизначеними системами об'єкт-модель. Різниця полягає в тому, що в задачі ідентифікації недовизнаєною є модель (у той час як об'єкт вважається в достатній мірі вивченим) і зусилля дослідників, спрямовані на довизначення моделі. У задачі ж діагностики недовизначеність, яку слід усувати, лежить в об'єкті. Але і в цьому випадку, як і при ідентифікації, зміни вносяться в модель із таким розрахунками, щоб властивості моделі виявилися ідентичними властивостям об'єкта. Ті зміни, які необхідно внести в модель для досягнення ідентичності з об'єктом при їх фізичній і інженерній інтерпретації, і дають підстави для постановки діагнозу. Задача діагностики ставиться тоді, коли в об'єкті виникають відхилення від розрахункових режимів роботи і необхідно зрозуміти їх походження. Для цього вносяться певні

зміни в модель об'єкта, мета яких — привести у відповідність поведінку моделі з поведінкою об'єкта. У більш простих випадках для цього досить змінити коефіцієнти рівнянь, не міняючи їх структури. У більш складних випадках доводиться змінювати і структуру моделі. Суттєву та визначальну роль у ефективному розв'язанні вказаних задач відіграє метод мінімізації функціоналу в оптимізаційному процесі досягнення результату діагностування чи ідентифікації. Ретельне дослідження методів мінімізації, що найбільш застосовуються в практиці, виконане шляхом обчислювальних експериментів. Результати вказують на явну перевагу методу найменших квадратів. Алгоритми мінімізації, за винятком методу найменших квадратів, мають важливий недолік, що обмежує їхнє застосування — наявність статистичних даних і маніпулювання випадковими процесами. Процедури модельного діагностування динамічних систем розглядаються як основні положення реалізації модельного підходу до діагностування систем при обмеженому доступі до їхніх внутрішніх точок. Розглядаються параметричні і структурні несправності, Підсистеми в лінійній системі при структурних несправностях можуть мати тільки дві з трьох діагностичних властивостей: незалежне спостереження й незалежне керування. Для підсистем з конкретною властивістю використовується відповідний метод діагностування.

7. У розділі розглядається задача і методи адаптації обчислювальних алгоритмів при реалізації диференціальних і інтегральних динамічних моделей. Обмежені ресурси комп'ютерно інтегрованих систем визначають вимоги до швидкодії алгоритмів режимів функціонування обчислювально-керуючих систем, що свідчить про актуальність питання цільового вибору або адаптації чисельних методів розв'язання рівнянь динаміки об'єктів і велику історію розвитку цього питання процес вдосконалення чисельних методів не припиняється і зараз. Зростання складності досліджуваних динамічних об'єктів зумовила розвиток *неявних* методів чисельного аналізу динаміки, але проведені дослідження свідчать, що застосування неявних методів виправдано, коли можливий великий крок інтегрування вихідної системи або коли рівняння на кроці може бути розв'язане досить просто. Крім того, з'ясовано, що наявні результати по формалізації

степеневих методів і адаптація їх при комп'ютерному використанні поки ще недостатні для вирішення питання про їх застосування при дослідженні складних динамічних об'єктів. Обмеження кроку інтегрування зверху свідчить про недоцільність використання методів Рунге-Кутта високого порядку для цілей моделювання динаміки досліджуваних систем в реальному часі. Відповідно до квадратурних методів у загальному вигляді задача формалізації побудови не вирішена. Таким чином, задача оптимального вибору методу може бути сформульована так: потрібно визначити чисельний метод інтегрування рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється, для якого необхідна швидкодія управляючої системи мінімальна, а похибка розв'язання рівнянь динаміки не перевищує заданого значення. Проведений аналіз властивостей різних груп чисельних методів дає змогу зробити висновок про те, що при виборі найкращого методу вихідну множину необхідних методів слід формувати на основі однокрокових методів типу Рунге-Кутта і квадратурних методів не вище четвертого порядку. При використанні стаціонарних режимів модельованих об'єктів в вихідну групу методів слід включати також багатокрокові методи – явні і типу «прогноз – корекція». При розв'язанні інтегральних рівнянь запропонований як найбільш ефективний метод виродженої резольвенти. Порівняння з іншими методами показало, що при розв'язанні тестової задачі на отримання результату методом квадратур знадобилося $0,2369 \cdot 10^{-2}$ с; резольвентним методом потрібно було 5 ітеративних ядер і $0,2567 \cdot 10^{-2}$ с; методом вироджених ядер - $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с; методом виродженої резольвенти - 5 ітеративних ядер і $0,1659 \cdot 10^{-2}$ с.

8. При виборі середовища моделювання визначаються основні параметри програмного засобу: достатньо повні функціональні можливості, наявність засобів для реалізації структурного підходу при побудові моделей; відкритість та гнучкість системи з можливістю доповнення новими спеціалізованими модулями; наявність власної мови програмування з можливістю створення нових програмних модулів; Вказаним параметрам відповідають такі середовища моделювання як Matlab та SciLab. Системи інструментальних засобів для виконання перетворення моделей

динамічних об'єктів на основі запропонованих алгоритмів складається з дванадцяти основних функцій, призначених безпосередньо для виконання еквівалентного та апроксимаційного перетворення моделей динамічних об'єктів, а також з семи допоміжних функцій. Засоби формування і реалізації моделей об'єктів із розподіленими параметрами складаються із підпрограм і функцій, які можуть у подальшому удосконалюватися і розвиватися. Вони включають три основні модулі, які виконують структурне спрощення базових моделей та чисельно реалізують спрощені моделі. Програми для реалізації динамічних макромodelей організовані у вигляді комплексу, використовуючи модульний принцип організації, у відповідності з яким програми розбиваються на декілька підпрограм і функцій, що допускають їх подальший розвиток та корекцію. Розроблений комплекс складається із 10 основних модулів, призначених безпосередньо для числової реалізації видів макромodelей, що розглядаються. Комплекс програм для розв'язання інтегральних динамічних моделей виконано за принципом побудови типового ToolBox з урахуванням вимог згідно з інформацією, що розміщена компанією. Комплекс складається з 23 програм, які охоплюють всі основні види інтегральних рівнянь та методи розв'язання їх на основі розщеплених ядер, що є, по суті, завершеним інструментарієм для апробації і порівняння у повному обсязі алгоритмів, запропонованих у роботі, для розв'язування тестових прикладів і складних прикладних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аверіна Т.В. Динаміка елементів систем: Навч. посібник / Т.В. Аверіна, Н.А. Кубрак. – К.: ІЗМН, 1998. – 224с.
2. Алексеев Е. Р., Чеснокова О.В., Рудченко Е. А. Scilab: Решение инженерных и математических задач. Москва, 2008. 260 с.
3. Андрианов С.Н. Некоторые проблемы теоретического и компьютерного моделирования. *Труды I Междунар. науч.-практ. конф. “Современные информационные технологии и ИТ-образование”*. Москва, 2005. С. 92–99.
4. Андриевский Б. Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке Matlab. Санкт-Петербург, 2000. 475 с.
5. Антонов О.В. Оптимальное управление технологическими процессами с использованием комбинированных математических моделей / О.В. Антонов, О.М. Проталинский. Промышленные АСУ и контроллеры. 2004. № 2. С. 145–162.
6. Ануфриев И.Е. MATLAB 7 / И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 1104 с.
7. Апаратно-програмні засоби комп'ютерно-інтегрованих систем управління: навч.-метод. Посіб. / В.І. Тошинський, І.І. Литвиненко, О.Г. Шутинський та ін. – Х.: НТУ «ХПІ». 2009.- 102с.
8. Архангельский А.Я. PSpice и Design Center. В 2-х ч. Часть 1. Схемотехническое моделирование. Модели элементов. Макромоделирование. Учебное пособие. М.: МИФИ, 1996 – 236с.
9. Баскаков А.Е. Алгоритм построения макромодели, основанный на идее метода определяющих величин /А.Е. Баскаков, Н.И. Борисов. Сб. трудов научно-практического семинара «Новые информационные технологии в автоматизированных системах», М., 2008.
10. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы : учеб. пособие для студ. физ.-мат. спец. вузов. 5-е изд. Москва, 2007. 637 с.
11. Башняков О.М. Задача синтезу в теорії керування: навч. посібник / Башняков О.М., Пічкур В.В. К.:Вид-во «Сталь», 2012. 116 с.

12. Бейко І.В. Задачі, методи і алгоритми оптимізації: навч. посібник / Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. Рівне: НУВГП, 2011. 624 с.
13. Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н., Ляшко И.И., Макаров В.Л., Цитрицкий О.Е. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 2. *Математические модели при измерениях*. Киев, 1983. 264 с.
14. Бенькович Е.С., Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Практическое моделирование сложных динамических систем. Санкт-Петербург, 2001 401 с.
15. Бесекерский В. А. Теория систем автоматического регулирования / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. — М. : Наука, 1972. — 768 с.
16. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. М.: Наука, 2003.
17. Бобух А.А. Компьютерно-интегрированная система автоматизации технологических объектов управления централизованным теплоснабжением: монография / А.А. Бобух, Д.А. Ковалев; под общ. Ред. А.А. Бобуха. — Х.: ХНУГХ. 2013.- 226 с.
18. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза, 2016. 396 с.
19. Бублик Б.Н. Основы теории управления / Б.Н. Бублик, Н.Ф. Кириченко.- К.: Вища шк., 1975.- 327 с.
20. Булавацький В. М., Кривонос Ю. Г., Скопецький В. В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ, 2005. 284 с.
21. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1975. — 568 с.
22. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. 2-е изд. Москва, 2004. 160 с.
23. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, 2001. 383 с.
24. Верлань А. А. Алгоритм реализации интегральных макромоделей явного вида / А.А. Верлань, Ю. Стертен, С. А. Положаенко // Електротехнічні та комп'ютерні системи. Одеса: Астропринт: 2017.— № 24 (100).— С.143-150.

25. Верлань А. А. Спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами на основі методу розщеплення / А.А. Верлань, В.А. Іванюк // Інформатика та математичні методи в моделюванні.— Одеський національний політехнічний університет.— 2017.— Т. 7, № 4.— С. 285–291.

26. Верлань А. А. Алгоритм идентификации непрерывных объектов на основе интегральных динамических моделей / А. А. Верлань, А. Гази // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 25.— 2003.— С. 05-112.

27. Верлань А. А. Алгоритмизация методов точностной параметрической редукции математических моделей / А.Ф. Верлань, А.А. Верлань, С.А. Положаенко // Інформатика та математичні методи в моделюванні.— Одеський національний політехнічний університет.— 2017.— Т. 7, № 1-2.— С. 7–18.

28. Верлань А. А. Интегральные динамические модели электромеханических объектов: Монография / А. А. Верлань, М. В. Сагатов, В. А. Федорчук.— Т.: IQTISOD-MOLYA ISBN 978-9943-13-581, 2015.— 328 с.

29. Верлань А. А. Моделювання електромагнітних і теплофізичних процесів в надпровідникових системах енергозабезпечення із структурою, що змінюється / А.Ф. Верлань, В.М. Владимиров, А.А. Верлань, И.О. Горошко та ін. // Структурно-алгоритмические методы и средства компьютерного моделирования сложных энергетических объектов с распределенными и переменными параметрами. Заключит. отчет. № г/р 0101U000024.— Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова НАН Украины.— К., 2004.— Разд. 8.— С. 285–306.

30. Верлань А. А. Підходи до побудови скалярних динамічних моделей розподілених ланок керованих електромеханічних систем / А. А. Верлань, В. А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.— Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.— Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.—Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.— 2016.— Вип. 13.— С. 49-61.

31. Верлань А. А. Построение математических моделей технологических процессов для решения задач оптимизации управления / А. А. Сытник., А. А. Верлань, Амид Гази // Вісник Черкаського державного технологічного

університету №3.— Комп'ютеризовані інформаційні технології та системи.— 2003.— С. 31-37.

32. Верлань А. А. Сравнение методов упрощения динамических моделей посредством модельных экспериментов / Т.П. Гушель, А.А. Верлань, В.Ф. Юзвенко // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 20.— Київ: 2003.— С. 108–112.

33. Верлань А. Ф. Электронное моделирование передаточных функций / А. Ф. Верлань, В. Ф. Евдокимов. — К. : Техніка, 1970. — 232 с.

34. Верлань А. А Алгоритм моделирования периодических режимов схем преобразовательной техники / А.А. Верлань // Зб. Наук. Праць, ІПМЕ НАНУ. Вип. 18.— 2002.— С. 77-87.

35. Верлань А.А Алгоритмические основы реализации интегрального метода идентификации динамических объектов. Интегральные методы и компьютерные средства решения задач моделирования сложных динамических систем / А.Ф. Верлань, А.А., Верлань, И.О., Горошко, В.М. Бондаренко та ін. // Математические методы и компьютерные средства повышения разрешающей способности систем технологического контроля и управления энергогенерирующего оборудования: Заключит. отчет. № г/р 0103U000218.— Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова НАН Украины.— К., 2006.— Разд. 3, 5.— С. 120-146, 200-231.

36. Верлань А.А Интегро-дифференциальные модели многосвязных динамических объектов / А.А. Верлань, В.А. Тихоход // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації. Зб. наук праць.— Київ-Кам'янець-Подільський, 2006.— С. 120–125.

37. Верлань А.А Математические модели моментов трения в уравнениях динамики управляемого движения / А.А. Верлань А.А. Сытник // Зб. Наук. Праць. ІПМЕ НАНУ Вип.. 15.—2002.— С. 71-75.

38. Верлань А.А Модель системы защиты от емкостных токов утечки в шахтных электрических сетях / А.Ф. Верлань, А.А. Верлань, Т.П. Гушель // Электронное моделирование. ISSN 0204-3572. ИПМЭ НАНУ. Том 24. №6: ноябрь-декабрь 2002.— С. 11-16.

39. Верлань А.А, Махович А.И. Интегральные модели переходных процессов в электрических цепях, содержащих звенья с распределенными параметрами / А.А. Верлань, В.А., Федорчук А.И. Махович // Проблемы энерго и ресурсосбережения. Доклады республиканской научно-технической конференции АНРУз.– Ташкент, 22-23 декабря.– 2014.

40. Верлань А.А. Approach to mathematical simulation of electrical systems for supplying superconducting magnetic energy storage / А.А. Верлань // Современное состояние и перспективы развития информационных технологий: Доклады республиканской научно-технической конференции. Институт математики и информационных технологий АН РУз.– Ташкент, 2011.– Т.2.– С.8-18.

41. Верлань А.А. Алгоритм моделирования нелинейных периодических процессов на основе решения уравнения Урысона / А.А. Верлань, Л.А. Митько, А.Б. Руденко // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 3. Київ, 1999.– С. 3-7.\

42. Верлань А.А. Анализ диагностируемости объектов с перестраиваемой структурой / А.А. Верлань // Моделювання та інформаційні технології: збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України.– К., 2008.– Вип. 45.– С. 3 –9.

43. Верлань А.А. Анализ методов и алгоритмов моделирования сверхпроводниковых систем энергообеспечения с изменяющейся структурой // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 28.– Київ: 2004.– С. 89–94.

44. Верлань А.А. Аппроксимационные модели нестационарных тепловых процессов в неограниченной пластине с несимметричными граничными условиями / А.А. Верлань, А.И. Махович // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.– Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2014.– Вип. 10.– С. 42-55.

45. Верлань А.А. Вероятностно-физическое моделирование отказов радиоэлектронных устройств при воздействии мощных радиационных и электромагнитных излучений / А.А. Верлань, Т.П. Гушель, В.И. Борковец //

Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 11.– Київ: 2001.– С. 99–105.

46. Верлань А.А. Вибір та адаптація чисельних методів при створенні алгоритмічних основ реалізації задіяних математичних моделей / А.Ф. Верлань В.А. Федорчук, Ю. Стертен // Створення методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання динамічних процесів в автономних енергетичних силових установках при побудові сучасних систем керування, діагностики і випробування. ЗВІТ ПРО НАУКОВУ РОБОТУ.– Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України.– № Держреєстрації 0111U007792.– К., 2017.– С. 114-155.

47. Верлань А.А. Декомпозиционный метод локализации неисправных электронных подсхем / А.А. Верлань, С.А. Положаєнко, И.Х. Осман // Електромашинобудування та електрообладнання. Вип. 69.– К.: Техніка, 2007.– С. 72-76.

48. Верлань А.А. Диагностирование сложных электронных схем на основе метода обучающих и проверочных характеристик / А.А.Верлань, Ю Стертен // ISSN 2221-3805 International Scientific and Technical Conference Electrotechnic and Computer Systems: Theory and Practice, Odesa National Polytechnic university, July 20-24, 2015.– Scientific and Technical Journal Electrotechnic and Computer Systems.– No. 19 (95).– P.272-276.

49. Верлань А.А. Достаточные условия сходимости рядов Вольтерра для определенных классов нелинейных цепей / А.А. Верлань, К.Н. Ключка // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України.– К., 2008.– Вип. 45.– С. 8 –16.

50. Верлань А.А. Идентификация динамического объекта с переменными параметрами на основе метода «формирующего фильтра» / А.А. Верлань, В.В. Палагин, Т.А. Носик. // IV міжнародна наукова конференція “Моделювання-2012 / Simulation-2012” : Зб. наук. праць.– Київ: ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України.– 2012.– С.318-321.

51. Верлань А.А. Интегральные модели многопараметрических первичных преобразователей / М.В. Сагатов, А.А. Верлань // Моделювання та інформаційні

технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 9, 2001.– С. 30-34.

52. Верлань А.А. Интегральные модели однопараметрических первичных преобразователей / М.В. Сагатов, А.А. Верлань // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 8, 2001.– С. 38-43.

53. Верлань А.А. Интегральный метод моделирования и анализа автономных систем энергообеспечения на основе полупроводниковых и сверхпроводниковых преобразователей / А.А. Верлань // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей V міжнар. наук. конф. / [редкол.: І. В. Бейко та ін.].– Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012.– С. 20-21.

54. Верлань А.А. Квадратурные алгоритмы моделирования измерительных преобразователей с распределенными параметрами / А.А. Верлань, М.В. Сагатов, А.А. Сітник // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 6. Київ, 2000.– С. 131-136.

55. Верлань А.А. Коллокационный алгоритм решения уравнения Вольтерры I рода / А.А. Верлань, А.Б. Волощенко, М.В. Сагатов // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 13.– Київ: 2001.– С. 97–100.

56. Верлань А.А. Локализация неисправных электронных подсхем методом обучающих и проверочных характеристик / А.А. Верлань, С.А. Положаенко, И.Х. Осман // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки: зб. наук. праць.– Кам'янець-Подільський, 2008.– Вип. 1.– С. 140-144.

57. Верлань А.А. Математические и компьютерные методы исследования нелинейных и многосвязных динамических систем, описываемых интегральными и интегро–дифференциальными моделями / А.А.Верлань, И.М. Гвоздева, Л.А. Митько, А.А. Дячук, В.А. Тихоход, В.Ф. Миргород // Математическое и компьютерное моделирование неоднородных динамических систем с сингулярными свойствами применительно к задачам управления и экологической безопасности в энергетике: Отчет о НИР (заключительный).– ИПМЭ им. Г.Е. Пухова НАН Украины.– № ГР 0106U000622.– К., 2009.– С. 64–91.

58. Верлань А.А. Метод формування інтегральних рівнянь нелінійних

електричних кіл / О.О. Ситник, А.А. Верлань, К.Н. Ключка // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 47.– 2008.– С. 59-70.

59. Верлань А.А. Методы редукции математических моделей динамических систем / А.А. Верлань, В.В. Палагін // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : тези доповідей 8-ї Міжнародної наукової конференції.– Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка.– 18-20 квітня 2018 р.–С. 18-19.

60. Верлань А.А. Модели нестационарных процессов в силовых криотронах систем энергообеспечения сверхпроводниковых магнитных комплексов // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 27.– 2004.– С. 101–107.

61. Верлань А.А. Моделирование динамики электропривода (линейные модели1) / А.А. Сытник, А.А. Верлань, С.М. Первунинский // Вісник Черкаського державного технологічного університету. №1.– Прилади і радіотехніка: 2002.– С. 36-40.

62. Верлань А.А. Моделирование динамики электропривода (линейные модели 2) / А.А. Сытник, А.А. Верлань, С.М. Первунинский // Вісник Черкаського державного технологічного університету. №2.– Прилади і радіотехніка: 2002.– С. 74-79.

63. Верлань А.А. Моделирование процессов в сложных полупроводниковых и сверхпроводниковых преобразователях / Uzbek Journal of the problems of Informatics and Energetics. «Издательство «Фан», Институт математики и информационных технологий АН РУз.– Ташкент, 2011.– Т.5.– С.15-23.

64. Верлань А.А. Моделирование техногенного риска для опасных производственных объектов газотранспортных предприятий с использованием ГИС технологий / Верченков А.Д., Верлань А.А., Михайленко А.Г., Янчук А.В., Волкодав С.В., Марков А.С. // Вчені записки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського. Серія: Географія.– 2012.– Т. 61, № 1.– С. 38-47.

65. Верлань А.А. Моделирование электромагнитных процессов в сверхпроводниковых системах энергообеспечения // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ.

Вип. 26.– Київ: 2004.– С. 111–119.

66. Верлань А.А. Некоторые варианты математических описаний электропривода (нелинейные модели 3) / А.А. Сытник, А.А. Верлань, С.М. Первунинский // Вісник Черкаського державного технологічного університету. №3.– Прилади і радіотехніка: 2002.– С. 39-42.

67. Верлань А.А. О выборе численных методов решения дифференциальных уравнений для систем моделирования и управления / [А.А. Верлань, Л.А. Митько, А.А. Дячук, В.А. Федорчук]. Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України “Моделювання та інформаційні технології”. К., 2007. В.44. С. 90–95.

68. Верлань А.А. Об одном подходе к расчету переходных процессов в сложных полупроводниковых и сверхпроводниковых преобразователях / А.А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки. Зб. наук. праць. Вип. 3.– Кам'янець-Подільський.– 2010.– С. 26 – 37.

69. Верлань А.А. Об одном способе построения системы контроля вторичных источников электропитания / А.А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2013.– Вип. 8.– С. 22-31.

70. Верлань А.А. Об одном способе синтеза нелинейных регуляторов управляемых динамических систем / А.А. Верлань, В.А. Федорчук, Ю.Д. Бойко // Електромашинобудування та електрообладнання.– К.: Техніка, 2008.– Вип. 70 – С. 132–137.

71. Верлань А.А. Об организации структуры источников электропитания с защитой и автоматизированной системой контроля / А.А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2013.– Вип. 9.– С. 14-23.

72. Верлань А.А. Об энергоэффективности сверхпроводящих устройств для запитки магнитных систем // Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 3.– Львів, Світ, 1998.–

С. 173-184.

73. Верлань А.А. Определение информативных признаков по сигналам акустической эмиссии при диагностике конструкций / В.И. Борковец, А.А. Верлань, Т.П. Гушель, В.Ф. Юзвенко. // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 13.– Київ: 2001.– С. 58–70.

74. Верлань А.А. Параметрическая редукция математических моделей динамических систем / А.А. Верлань, А.А. Дячук, Е.А. Палагина, В.В. Палагин // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2018.– Вип. 18.– С.39-55.

75. Верлань А.А. Подход к моделированию систем энергообеспечения сверхпроводниковых магнитных комплексов // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 19.– Київ: 2003.– С. 149–160.

76. Верлань А.А. Регуляризация линеаризованных систем уравнений при идентификации нелинейных объектов / А.А. Сытник., А.А. Верлань, А.Гази // Вісник Черкаського державного технологічного університету, Математичне моделювання та обчислювальні методи, №1, 2004.– С. 25-27.

77. Верлань А.А. Розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь у системі Матлаб / А.Б. Волощенко, А.А. Верлань, Д.Е. Контрерас // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 11.– Київ: 2001.– С. 78–82.

78. Верлань А.А. Семантична інформація та лінгвістичні змінні в інформаційних технологіях / О.В. Нечипоренко, А.А. Верлань, Ю.О. Фуртат // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць.– Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009.– Вип. 2.– С. 128-136.

79. Верлань А.А. Специализированные алгоритмы и устройства для интегрированных систем защиты информации /А.А. Верлань, Ю. Бойко // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України.– К., 2005.– В.31.– С.51-57.

80. Верлань А.А. Способ параметрического контроля численного моделирования динамических объектов // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки. Зб. наук. праць. Вип. 5.— Кам'янець-Подільський.— 2011.— С. 21-26.

81. Верлань А.А. Способ упрощения динамической модели / А.А. Верлань, М.В. Сагатов, В.Ф. Юзвенко // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 10.— 2001.— С. 98-101.

82. Верлань А.А. Способы локализации и идентификации элементов электрических устройств в задачах диагностики // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки. Зб. наук. праць. Вип. 7.— Кам'янець-Подільський.— 2012.— С. 20–27.

83. Верлань А.А. Способы получения интегральных динамических моделей измерительных преобразователей с распределенными параметрами / М.В. Сагатов, А.А. Верлань // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Вип. 12.— 2001.— С. 138-145.

84. Верлань А.А. Численное решение двумерного уравнения теплопроводности с использованием технологии OPENMP / А.А. Верлань, Д.С. Смаковский., И.Ю. Михайлова // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки. Зб. наук. праць. Вип. 4.— Кам'янець-Подільський.— 2010.— С. 56-64.

85. Верлань А.А., Бойко Ю.Д. Метод декомпозиции структуры корпоративной сети // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України — К., 2006.— В.32. — С.34-41.

86. Верлань А.А., Гази А. Интегральные динамические модели нестационарных непрерывных объектов // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 22.— Київ: 2003.— С. 82–91.

87. Верлань А.А., Ключка К.М., Осман И.Х. Локализация неисправных подсхем в электронных устройствах в условиях разброса значений параметров шумов измерений // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України. Вип. 38.— К.: 2007.— С. 94–101.

88. Верлань А.А., Контрерас Д.Э., Гази А. Интегральный алгоритм идентификации динамических объектов // Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 27.— Київ: 2004.— с. 114–120.

89. Верлань А.А., Митько Л.А., Дячук А.А., Федорчук В.А. О выборе численных методов решения дифференциальных уравнений для систем моделирования и управления // Моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України. Вип. 44.— К., 2007.— С. 90–95.

90. Верлань А.А., Одокиенко С.Н. Быстродействующие алгоритмы численной реализации неявных интегральных динамических моделей // Тр. междунар. конф. "Информационные технологии в управлении энергетическими системами" ИТУЭС-2005, 18–19 окт. 2005г.— Киев, Украина.— С. 82.

91. Верлань А.А., Одокиенко С.Н., Тихоход В.А. Квадратурные алгоритмы численного моделирования нелинейных динамических объектов с обратными связями // Моделювання та інформаційні технології. Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України. Вип. 38.— К., 2006.— С. 89–95.

92. Верлань А.А., Осман И.Х. Метод идентификационных экспериментов для диагностирования электронных устройств // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України. Вип. 42.— К., 2007.— С. 98–105.

93. Верлань А.А., Стертен Ю., Положаенко С.А.. Формализация представления последовательности тестовых гипотез при диагностировании электронных схем // Інформатика та математичні методи в моделюванні. Одеський національний політехнічний університет, 2016. Т. 6. № 4. С. 315–321.

94. Верлань А.А. Способ упрощения динамической модели / А.А. Верлань, М.В. Сагатов, В.Ф. Юзвенко. Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України. В.10. К., 2001. С. 98–101.

95. Верлань А.Ф. Интегральное уравнение: Методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К.: Наукова думка, 1986. — 542 с.

96. Верлань А.Ф. Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А. Ф. Верлань, С. С. Москалюк. — К.: Наукова думка, 1988. — 287 с.

97. Верлань А.Ф. Математичне та комп'ютерне забезпечення розробок випробувальних стендів силових установок енергетичного і транспортного призначення / [Верлань А. Ф., Митько Л. О., Дячук О. А., Федорчук В. А.] .Збірник наукових статей за результатами, отриманими в 2010-2012 рр. К.: Інститут електрозварювання ім. Є.О.Патона НАН України, 2012. С. 310–315.

98. Верлань Д.А. Метод вырожденных ядер при численной реализации интегральных динамических моделей / Д.А. Верлань. Электронное моделирование. К., 2014. Том 36. № 3. С. 41–57.

99. Власов Д. А. Возможности профессиональных математических пакетов в системе прикладной математической подготовки будущих специалистов. *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования*. 2009. № 4. С. 52-59.

100. Гаращенко Ф. Г. Розвиток методів математичного моделювання, аналізу та оптимізації динамічних систем / [Гаращенко Ф.Г., Крак Ю.В., Стоян В.А., Хусаїнов Д.Я.]. Наукові записки (КНУ ім. Т.Шевченка). 2004. Вип. 7. С. 154–197.

101. Горбань А.В. Устойчивость и оценка погрешности параллельных одношаговых численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Горбань [Електронний ресурс] – 2005. – Режим доступу до ресурсу : <http://www.masters.donntu.edu.ua/2005/fvti/gorban/diss/index.htm>.

102. Гульяев А. Визуальное моделирование в среде MATLAB : учеб. курс. — СПб : Питер, 2000. — 432 с.

103. Гуревич О.С. Системи автоматичного керування авіаційними силовими установками / Гуревич О.С., Близнюков Л.Г., Трофімов А.С. Конверсія в машинобудуванні. 2000. №5. С. 50-61.

104. Гуревич О.С. Стан і перспективи розвитку систем автоматичного керування авіаційними газотурбінними двигунами / О.С. Гуревич. ЦИАМ 2001-2005. Основні результати науково-технічної діяльності. М.:ЦИАМ, 2005. С. 267-270.

105. Демиденко Н.Д. Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами / Демиденко Н.Д., Потапов В.И., Шокин Ю.И. Новосибирск : Наука, 2006. 551 с.
106. Денисенко В.В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием.- М.: Горячая линия – Телеком, 2009. – 608 с.
107. Дмитриенко В. Д. Аналитическое конструирование регуляторов для дизель-поезда с асинхронным тяговым приводом / В. Д. Дмитриенко, Н. И. Заполовский, Н. В. Мезенцев // Проблемы информатики и моделирования : тез. докл. междунар. научн.-техн. конф., 27—29 сент. 2010 г., Харьков. — Х. : НТУ "ХПИ", 2010. — С. 13.
108. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп ; пер. с англ. Б.И. Копылова. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.
109. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів і систем керування. Вінниця, 2012. 308 с.
110. Дубовой В. М. Моделювання систем контролю та керування. Вінниця, 2005. 174 с.
111. Дячук О.А. Метод отримання спрощеної макромоделі динамічної системи засобами середовища SIMULINK-MATLAB / О.А. Дячук. Математичні машини і системи. 2008. № 2. С. 81–89.
112. Дячук О.А. Про порівняння деяких методів спрощення динамічних моделей шляхом чисельного експерименту / О.А. Дячук. Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України “Моделювання та інформаційні технології”. К., 2007. В.40. С. 48–54.
113. Дьяконов В. П. Matlab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. Серия «Библиотека профессионала». Москва, 2005. 576 с.
114. Електромеханічні системи автоматичного керування та електроприводи: Навчальний посібник / [М. Г. Попович, О. Ю. Лозинський, В. Б. Клепиков, Б. М. Мацко та ін.] ; під ред. М. Г. Поповича та О. Ю. Лозинського. — К. : "Либідь", 2005. — 680с.

115. Електромеханічні системи автоматичного керування та електроприводи: Навчальний посібник / [М. Г. Попович, О. Ю. Лозинський, В. Б. Клепиков, Б. М. Мацко та ін.] ; під ред. М. Г. Поповича та О. Ю. Лозинського. — К. : "Либідь", 2005. — 680с.

116. Епифанов С. В. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей / С. В. Епифанов, Б. И. Кузнецов, И. И. Богаенко и др. — К.: Техника, 1998. — 312 с.

117. Єпифанов С.В. Регуляризовані алгоритми параметричної ідентифікації математичних моделей ГТД, засновані на використанні апріорної інформації / Єпифанов С.В. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2001. Вип. 26. С. 205-209.

118. Жуков К.Г. Модельное проектирование встраиваемых систем в LabVIEW. Москва, 2011. 688 с.

119. Жученко А.И. Динамика объектов с распределенными параметрами: Учебное пособие / А.И. Жученко, Н.А. Кубрак, И.М. Голинько. — К.: Екмо, 2005. — 121с.

120. Жученко А.І. Ідентифікація динамічних характеристик. Комп'ютерні методи / Жученко А.І., Кваско М.З., Кубрак Н.А. К.: Вир. відділ КЛТКМ та М, 2000. 182 с.

121. Жученко О.А. Метод спрощення математичних моделей об'єктів керування із розподіленими параметрами / О.А. Жученко, В.С. Цапар. Автоматизація технологічних і бізнес-процесів. Херсон: Грінь Д.С., 2015. Вип. 7. 2015. С. 15–25.

122. Задирака В.К. Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с заданными значениями характеристик качества / [И.В. Сергиенко, В.К. Задирака, М.Д. Бабич и др.]. Кибернетика и систем. анализ. 2006. 42, № 5. С. 33–41.

123. Задирака В.К. Тестирование качества программ решения одной задачи численного интегрирования / В.К. Задирака, С.С. Мельникова. Проблемы управления и информатики. 2000. №2. С. 91-101.

124. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие /

В. В. Иванов. — К.: Наук. думка, 1986. — 584 с.

125. Ивахненко А.Г., Юрачковский Ю.П. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. Москва, 1987. 117 с.

126. Калиткин Н.Н. Численные методы: учебное пособие. БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

127. Карпенко В. М. Побудова структурних апроксимаційних моделей розподілених ланок електромеханічних систем на прикладі бурильної колони бурової установки / В. М. Карпенко, В. А. Федорчук / Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, КПНУ. — Кам'янець-Подільський : КПНУ, 2010. — Вип. 3. — С. 78—95.

128. Кваско М.З. Числові методи комп'ютерного моделювання автоматичних систем. Алгоритми і програми: Навч. посібник. / М.З. Кваско, Кубрак А.І., Жученко А.І. — К.: «Політехніка», 2003. — 360с.

129. Киселев Н. В. Электроприводы с распределенными параметрами / Н. В. Киселев, В. Н. Мядзель, Л. Н. Рассудов. — Л. : Судостроение, 1985. — 220 с.

130. Клепиков В.Б. Срывные функциональные автоколебания в электромеханических системах и их устранение / В.Б. Клепиков, Л.В. Асмолова, О.В. Обруч // Технічна електродинаміка. — 2007.- №2.- С. 35-41.

131. Клименко В. П. Прикладная математическая задача как объект компьютерной алгебры / В. П. Клименко, А. Л. Ляхов // Мат. машини і системи. — 2003. — № 3-4. — С. 103–123.

132. Ковалюк Д.О. Моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами: монографія / Д.О. Ковалюк, С.М. Москвіна.- Вінниця: ВНТУ, 2010. 182с.

133. Колодницкий Н.М. Програмные средства моделирования систем автоматического управления: проблема выбора / Н.М. Колодницкий, В.Г. Левицкий. Системний аналіз, управління і інформаційні технології. Вісник Хакрів. держ. політ. унів.-ту. Харків: ХДПУ, 2000. №97. С. 54-59.

134. Костенко Ю. Т. Системы управления с динамическими моделями /

Ю. Т. Костенко, Л. М. Любчик. — Х. : Основа, 1996. — 212 с.

135. Костинюк Л. Д., Мороз В. І., Паранчук Я. С. Моделювання електроприводів: Навч. посібник. Львів, 2004. 404 с

136. Кувшинов Г. Е., Наумов Л. А., Чупина К. В. Системы управления глубиной погружения буксируемых объектов. Владивосток, 2005. 85 с.

137. Ладиев Р.Я. Математическое описание объектов с распределенными параметрами: Учеб. пособие / Р.Я. Ладиев, Ю.А. Остапенко, А.И. Кубрак, М.З. Кваско. — К.: КПИ, 1973. — 108 с.

138. Лазарев Ю.Ф. Моделювання динамічних систем у Matlab. Київ, 2011. 421 с.

139. Лозинський О. Ю. Синтез і моделювання цифрових електромеханічних систем на основі апроксимацій інтегралу згортки / О. Ю. Лозинський, В. І. Мороз // Моделирование-2006 (Simulation-2006) : сб. тр. конф. / ПІМЕ ім. Г. Є. Пухова — К. : ПІМЕ НАНУ. — 2006. — С. 309—313.

140. Ляшко С.І. Алгоритми векторної оптимізації лінійних систем з узагальненим керуванням / С.І. Ляшко, В.В. Семенов. Доп. НАН України. 2010. № 4. С. 35-41.

141. Макаров В.Л. Интерполирование операторов / В.Л. Макаров, Хлобистов В.В., Янович Л.А. К.: Наукова думка, 2000. 407 с.

142. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. Москва, 2000. 685 с.

143. Марчуков Е.Ю., Онищик И.И., Рутовский В.Б., Таран Е.М., Черкез А.Я. Испытания и обеспечение надежности авиационных двигателей и энергетических установок / Под ред. И.И.Онищика: Учебник для вузов. — Издание второе, исправленное и дополненное. — М.: Изд-во МАИ, 2004. — 336 с.

144. Матвійчук Я.М. Математичне макромодельювання динамічних систем: теорія і практика./ Я.М. Матвійчук //— Львів: Видавничий центр ЛНУ ім.Ів.Франка, 2000. — 215 с.

145. Матвійчук Я.М. Математичне макромодельювання динамічних систем: теорія та практика. Наукове видання. Львів, 2000. 236 с.

146. Меньшиков Ю.Л. Метод обеспечения адекватности динамических моделей / Ю.Л. Меньшиков. Электронное моделирование. 2014. Т. 36, № 3. С. 31–40.
147. Миргород В.Ф. Імітаційне моделювання і керування температурним режимом ГТД АИ-25 ТЛШ / Миргород В.Ф., Грудинкин В.М. Авіаційно-космічна техніка і технологія. 2006. №8 (34). С. 42–45.
148. Мороз В.І. Інтегральні рівняння в моделюванні керованих електромеханічних систем / В.І. Мороз. Електротехніка і електромеханіка. 2007. № 3. С. 39-43.
149. Никольский С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. — М.: Наука, 1979. — 255 с.
150. Положаєнко С.А. Реалізація моделей динамічних об'єктів, представлених у вигляді нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з крайовими умовами / С.А. Положаєнко, Д.Е. Контрерас. Інформатика та математичні методи в моделюванні. №3. Том 4, 2014. С. 250–255.
151. Полянин А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. — М.: Физматлит, 2005. — 256 с.
152. Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям / А.Д. Полянин, А.В. Манжирова. М.: Физматлит, 2003. 608 с.
153. Приказчиков В. Г., Химич А. Н. Асимптотическая оценка точности собственных чисел эллиптического оператора четвертого порядка со смешанными краевыми условиями // Кибернетика и системный анализ. - 2017. - Т. 53, № 3. - С. 32-40.
154. Протасов С.Ю. Інтегральні макромоделі об'єктів із розподіленими параметрами / С.Ю. Протасов. III Міжнародна наук.-практ. конф. присвячена пам'яті професора Ю.П. Кунченка, 24–27 травня 2011р.: тези допов. Черкаси: ЧДТУ, 2011. С. 60–61.
155. Пупков К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления : Учеб. в 5 т. ; [2-е изд.]. — Т. 1 : Математические

модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. — 656 с.

156. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г. Е. Пухов. — К. : Наукова думка, 1986. — 160 с.

157. Рапопорт Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. Москва, 2003. 299 с.

158. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский , П.Н. Вабищевич. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

159. Самойленко В.Г., Конет І.М. Рівняння математичної фізики: навч. посіб. Київ, 2014, 283 с

160. Семенов А. Д., Артамонов Д.В., Брюхачев А.В. Идентификация объектов управления: Учебн. пособие. Пенза, 2003. 211 с.

161. Сергиенко И.В. Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с заданными значениями характеристик качества / И.В. Сергиенко, В.К. Задирака, М.Д. Бабич, А.И. Березовский, П.Н. Бессараб, В.А. Людвиченко // Кибернетика и сист. Анализ. — 2006. — 42, №5. — С.33-41.

162. Сергиенко И. В. Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с заданными значениями характеристик качества / [И. В. Сергиенко, В. К. Задирака, М. Д. Бабич и др.] // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 33—42.

163. Сидоров Д. Н. Методы анализа интегральных динамических моделей. Теория и приложения. Иркутск, 2013. 293 с.

164. Скопецкий В.В. К построению интегральных моделей распределенных пространственно временных процессов / Скопецкий В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б. Проблемы управления и информатики. 2006. №1–2. С. 171–183.

165. Стахів П. Г., Козак Ю.Я. Побудова макромоделей електромеханічних компонент із використанням оптимізації // Технічна електродинаміка. — 2001. — № 4. — С. 33—36.

166. Стоян В.А. Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами: [навч. посібник] / В.А. Стоян. К.: ВПЦ «Київський університет», 2004. 184 с.

167. Суздаль В.С. Редукция модели при синтезе регуляторов для управления кристаллизацией / В.С. Суздаль, Ю.М. Епифанов. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Харьков: ЧП Технологический Центр, 2011. Выпуск №3 (50). Том 2. 2011. С. 31–34.

168. Трегуб В.П. Проектування систем автоматизації: навч. Посіб. / В.П. Трегуб.- К.: Вид-во Ліра-К.2014.- 344 с.

169. Федорчук В.А. Дослідження динаміки нестационарних теплових процесів із симетричними граничними умовами методом перерізів / В.А. Федорчук, О.І. Махович. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : технічні науки : зб. наук. праць // Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка; Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 182-191.

170. Федорчук В.А. Организация средств идентификации динамических объектов в среде MATLAB / В.А. Федорчук, Д.Э. Контрерас, А.А. Дячук. Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України “Моделювання та інформаційні технології”. К., 2007. В.41. С. 75–83.

171. Федоткин И. М., Бурляй И.Ю., Рюмшин Н.А., Бурляй Ю.И. Математическое моделирование технологических процессов: *Тепловые процессы, плавление, замораживание, теплопроводность, регулярный режим*. Київ, 2004. 388 с.

172. Федоткін І.М. Математичне моделювання технологічних процесів: Методи математичного моделювання і розв'язання процесних задач / Федоткін І.М., Бурляй І.Ю., Рюмшин М.О. К.: Техніка, 2002. 407 с.

173. Химич А.Н., В.А. Декрет, А.В. Попов, А.В. Чистяков. Численное исследование устойчивости композитных материалов на компьютерах гибридной архитектуры. // Проблемы управления и информатики - 2018, №"4. - С. 73-88

174. Черных И. В. Simulink: среда создания инженерных приложений. Москва, 2003. 496 с.

175. A.A.Verlan', Jo Sterten. Algorithm for Modelling a Dynamic Object by Means of the Convolution Operation // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей 7-ї Міжнародної наукової конференції OPTIMA. Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 21-22 квітня 2016.— С. 32-33.

176. Andriy Verlan, Jo Sterten, Yurii Furtat. Method of Regularizing the problem of recovery of input signals of dynamic objects // Computational Problems of Electrical Engineering. Lviv Polytechnic National University, 2016.— Vol.6. N 2.— P.113-116.

177. Andriy Verlan, Jo Sterten. Advanced Structural Organization of the Signal Recovery Processes in Measuring Systems // 7TH International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE 2017). University of National and World Economy (UNWE). Sofia, Bulgaria. November 3-4.— 2017.

178. Baker C.T. Volterra Equations and their Numerical Treatment. *MCCM Technical Report*. 2000. № 3. 66 p.

179. Bird J. Engineering Mathematics / John Bird. Oxford: Newnes, 2003. 531 p.

180. Brunner H. The Numerical Solution of Volterra Equation / H. Brunner, P.J. van der Houwen. — Amsterdam: North-Holland, 1986. — 588 pp.

181. Brunner H. Volterra integral equations: an introduction to theory and applications. Cambridge, 2017. 387 p.

182. Carslaw, H. S., Jaeger J. C. Conduction of Heat in Solids (Oxford Science Publications). [2 edition (April 10, 1986)]. Oxford University Press, 1986. 520 p.

183. Cinlar E. Mathematical methods of engineering analysis / Erhan Cinlar, Robert J. Vanderbei. 2000. 115 p..

184. Close Charles M., Frederick Dean K. Newell Jonathan C. Modeling and Analysis of Dynamic Systems. 3th ed. Wiley, 2001. 592 p.

185. Doyle F.J., Pearson R.K., Ogunnaike B.A. Identification and control using Volterra models. Germany, 2002. P. 314.

186. Fedorchuk V., Ivanyuk V. Application of the correlation method for the identification of linear dynamic systems models. 7th International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE – 2017), November 3-4th, 2017, UNWE, Sofia, Bulgaria.
187. Feldmann, L., Resch, M., Svjatnyj, V., Zeitz, M.: Softwarearchitektur für parallele Simulationsumgebungen (Forschungsgebiet: parallele Simulationstechnik). Plenarvortrag, Berlin, Tagungsband 1, Argesim, 43, Wien 2014, S. 3-7.
188. Harvill Lawrence R. Applied Mathematics for Engineers and Physicists / Lawrence R. Harvill, Louis A. Pipes. Courier Corporation, 2014. 1040 p.
189. Helie, T., Laroche B. Computation of convergence bounds for Volterra series of linear analytic single-input systems. *IEEE Trans. Autom. Control*. 2011. 56. P. 2062-2072.
190. Higuera I., Roldan T., Torrens J.J. Numerical Simulation in Physics and Engineering. 1 th ed. 2016, IX, 251 p.
191. Hoffman J.D. Numerical Methods for Engineers and Scientists / Joe D. Hoffman. New York: Marcel Dekker, 2001. 823 p.
192. Isermann, R., Munchhof M. Identification of Dynamic Systems. *An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, 2011. 711 p.
193. Khimich A.N., A. V. Popov and O. V. Chistyakov. Hybrid algorithms for solving the algebraic eigenvalue problem with sparse matrix // *Cybernetics and Systems Analysis*. Vol. 53, 2017, pp. 132–146.
194. Kress R. Linear Integral Equations. 3 rd ed. 2014, XVI, 412 p.
195. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. 10th edition. John Wiley & Sons, Inc., 2010. 1280 p.
196. Kvyetnyy R.N., Sofina O.Y., Bunyak Y.A. The conjugated null space method of blind deconvolution // *Information Technology in Medical Diagnostics : Monograph* / R.N. Kvyetnyy, O.Yu. Sofina & Y.A. Bunyak, W. Wojcik & P.Komada, A.Kalizhanova, N.A. Orshubekov – CRC Press/Balkema, London, UK, 2017. – Chapter 8 – P. 147–167. – ISBN: 978-1-138-29929-0 (Hbk). – ISBN: 978-1-315-09805-0 (eBook).

197. Liu Y. On Model Reduction of Distributed Parameter Models / Yi Liu. Stockholm: Department of Signals, Sensors and Systems. Royal Institute of Technology, 2002. 148 p.
198. Lyshevski S. E. Engineering and Scientific Computations Using MATLAB / S. E. Lyshevski. — Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2003. — 240 p.
199. Mahadevan N., Hoo K.A. Wavelet-based model reduction of distributed parameter systems. *Chemical Engineering Science*. V. 55. Issue 19, October 2000. P. 4271-4290.
200. Moon F. C. Applied dynamics: with applications to multi body and mechatronic systems / F. C. Moon. — New York : John Wiley & Sons, Inc., 1998. — 501 p.
201. Orava P.J. On the concepts o.f input-output model, causality, and state in the theory of dynamical systems and control. *Acta polytechn. scand. Math. and Comput. Sci.* 1979. N 31. P. 120–127.
202. Prenter P.M. Lagrange and Hermite interpolation in Banach space. *J. Approxim. Theory*, 1971. 4, N 4. P. 419-432.
203. R.N. Kvyetnyy, O.Yu. Sofina, R. Maslii, A. Olesenko, O.A. Poplavskyy, A. Smolarz & A. Sagymbekova Development of segment classification criteria based on the features of compression algorithms// Chapter in monograph «Information Technology in Mecial Diagnostics II»,pp.219-231.-London,CRC Press, 2018.-324 p..
<https://www.routledge.com/Information-Technology-in-Mecial-Diagnostics-II-Proceedings-of-the-International/Wojcik-Pavlov-Kalimoldayev/p/book/9780367177690>
204. Roman Kvyetnyy, Olga Sofina, Alla Olesenko, Paweł Komada, Jan Sikora, Aliya Kalizhanova, Saule Smailova, "Method of image texture segmentation using Laws' energy measures", *Proc. SPIE 10445, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments 2017*, 1044561 (7 August 2017); doi:10.1117/12.2280891; <http://dx.doi.org/10.1117/12.2280891>.
205. Schmitz T. L. Machining Dynamics : Frequency Response to Improved Productivity / T. L. Schmitz, K. S. Smith. — New York : Springer Science-Business Media, 2009. — 309 p.

206. Stefan Steinhaus. Comparison of mathematical programs for data analysis. Edition 4.42. München / Germany, 2008. 59 p.
207. Steinhaus S. Comparison of mathematical programs for data analysis / Stefan Steinhaus. Munich, Germany, 2008. 64 p. — Режим доступа к изданию: <http://www.scientificweb.com/ncrunch/>.
208. Svyatnyy V.A., Kushnarenko V.G., Resch M., Miroshkin O.M., Wesner S.: Problematik der parallelen Simulationstechnik. Наукові праці ДонНТУ №2 (23), 2016 Серія “Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка”, ISSN 1996-1588, Покровськ, 2016, С. 5-20.
209. Svyatnyy V.A., Kushnarenko V.G., Miroshkin O.M., Resch M., Wesner S.: Virtuelle parallele Simulationsmodelle und ein Devirtualisierungsvorgang der Entwicklung von MIMD-Simulatoren für dynamische Netzobjekte mit verteilten Parametern. Tagungsband der Konferenz SIMULATION-2018, Kyiw, ISBN 978-966-02-8587-3, S. 55-66 (Plenarvortrag).
210. Ustun O. Computer-assisted electrodynamic modelling system for oil and gas industry electric drives study / O. Ustun, P. Ali-Zade, G. Mamedov, K. Radjabli, V. Fedorchuk // Электронное моделирование, 2008. — № 3. — Т. 30. — С. 73-86.
211. Verlan A.A. Algorithms for Dynamic Correction of the Thermal Flows' Measuring Systems / A.A. Verlan, Jo Sterten, Yu.O. Furtat Yu.O. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.— Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України.— Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка.—Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2016.— Вип. 14.— С. 36-48.
212. Verlan A.A. An approach to the precision parametric reduction of mathematical models / A.A. Verlan // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.—Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, .— Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.—Кам'янець-Подільський : К-ПНУ, 2016.— Вип. 14.— С. 26-36
213. Verlan A.A. Analysis of power circuits' dynamics using generalized state-

space model / A.A. Verlan, B.B. Abdusatarov, Miraziz Sagatov, A.A. Sytnik // Fourth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation WCIS-2006, Tashkent, Uzbekistan. November 21-22, 2006.– P. 168–176.

214. Verlan A.A. Application of singular systems theory in power systems dynamics simulation / A.A. Verlan, B.B. Abdusatarov, D.E Kontreras // Fourth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation WCIS-2006, Tashkent, Uzbekistan. November 21-22, 2006.– P. 163–167.

215. Verlan A.A. Method of construction of specialized algorithms for solving differential equations / A. A. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.– Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2017.– Вип. 16.– С.30-35.

216. Verlan A.A. Models of Dynamic Objects with Distributed Parameters / A.A. Verlan, Jo. Sterten // Proceeding of the XXII International Scientific and Practical Conference "Innovation-2017". Tashkent State Technical University. Center for Strategic Innovation and Informatization. Uzbekistan: Navruz, Oct.26-27.– 2017, P. 252-254.

217. Verlan A.A. On the choice of numerical methods for solving dynamic equations for control systems with embedded calculating tools / A. A. Верлань, В. А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2017.– Вип. 15.– С. 37-43.

218. Verlan A.A. On the choice of numerical methods for solving dynamic equations for control systems with embedded calculating tools / A. A. Верлань, В. А. Федорчук // Міжнародна наукова конференція. Питання оптимізації обчислень ISCOPT-2017. Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ. Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.– 26-28 вересня 2017 р. Київ: 2017.– С. 8.

219. Verlan A.A. Singular systems theory application in power systems dynamics simulation / A.F. Verlan ,A.A. Verlan, T.P. Gushel // 6^t International Conference Control

of Power System.— Slovakia, 2004.— P.1-4.

220. Verlan Andrey, Sterten Jo. Implementation of Integral Explicit Macromodels by Means of Quick-Acting Algorithms / Andriy Verlan, Jo Sterten // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.— Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.— Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.—Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.— 2018.— Вип. 18, С.26-33.

221. Verlan Andrey. Model support of technical diagnostics systems design / Alexey Oletsky, Ivan Goroshko, Andrey Verlan // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Вип. 20.— Київ: 2003.— С. 108–112.

222. Verlan Andrey. Power Circuits Dynamic Analysis using Generalized State-Space Model / Anatoliy Verlan, Andrey Verlan, Ivan Goroshko, Tatyana Gushel // NEU-CEE-2004, Second International Symposium on Electrical, Electronic & Computer Engineering. IEEE. TRNC. Lefkosa: 2004.— P. 323-327 (*IEEE*).

223. Verlan Andriy. Inverse method of restoring distributed signals in surveillance systems / Jo Sterten, Andriy Verlan , Dmitriy Verlan. // XX International Scientific Practical Conference “Innovation-2015”, October 23-24, 2015.— Tashkent. Uzbekistan. — P.32-39.

224. Verlan Andriy. Method of Regularizing the problem of recovery of input signals of dynamic objects / AndriyVerlan, Jo Sterten, Yurii Furtat // Computational Problems of Electrical Engineering.— .Lviv Polytechnic National University.— 2016.— Vol.6, N 2.— P.113-116 (*фахове видання включене до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Ulrich's Web та Index Copernicus*).

225. Verlan Andriy. Simulation of electrical systems for supplying superconducting magnetic energy storageю / Andriy Verlan, Anatoliy Verlan, Aleksand Sytnik // ISEECE 2006, 3rd International Symposium on Electrical, Electronic and Engineering. IEEE.— November 23-25, 2006.— Nicosia, North Cyprus.— P.214-220 (*IEEE*).

226. Verlan A.A. Mathematical modeling of mixing micro jets of gas applied to the flaw detection problems / A. A. Verlan, Jo Sterten // Математичне та комп'ютерне

модельовання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2015.– Вип. 12.– С. 5-14.

227. Verlan A.A. On the Representation of Non-Linear Functions by Fractional-Power Series / A. A. Verlan, Jo Sterten // Математичне та комп'ютерне модельовання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.– Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2014.– Вип. 11.– С. 194-199.

228. Verlan A.A. Power energy units dynamic models development and program implementation / A. A. Verlan, Jo Sterten. // 5th International Scientific Conference «Signal and non-Gaussian noise processing».– Cherkasy State Technological University, May 20 – 22, 2015.– P. 140 – 142.

229. Verlan A.A. Principles of Precision Parametric Reduction for Mathematical Models / A. A. Verlan, Jo Sterten, O. Ogorodnyk // Математичне та комп'ютерне модельовання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць.– Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАНУ.– Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка.–Кам'янець-Подільський: К-ПНУ.– 2015.– Вип. 12.– С. 15-23.

230. Verlan A.A., Sterten J., Ogorodnyk O. Mathematical Modelling of Complex Singular Power Systems' Dynamics // The 11th International Conference on Multimedia Information Technology and Applications, June 30-July 2 2015. Tashkent. Uzbekistan. Organized by the Korea Multimedia Society (KMMS), the Republic of Korea. IEEE.– P. 43-46 (*IEEE*).

231. Verlan A. F. The method of identification of controlled dynamic objects on the basis of integral models / [A.F. Verlan, M.V. Sagatov, A.A. Sytnik, A.A. Djachuk]. Intelligent systems for industrial automation: fourth world conference, 21-22 novemb. 2006 y. Tashkent, Uzbekistan, 2006. P. 28–40.

232. Verlan, Andriy; Fedorchuk, V.A. Computer modelling of drill string of an oilwell drilling rig. IEEE Proceedings of 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). February 20 - 24, 2018, Lviv, Ukraine. IEEE 2018 ISBN 978-1-5386-2556-9.– P. 346-

350 (IEEE, видання включене до міжнародної наукометричної бази SCOPUS).

233. Verlan' A.A. Adaptation and Implementation of Modern Learning Techniques in Master of Sustainable Manufacturing: Cultural Challenges, Effects and Potential for Improvement / Jo Sterten, Kari Nordskogenb, A.A.Verlan' // The 6th Conference on Learning Factories. Norwegian University of Science and Technology.— published by Elsevier, — 2016.— Procedia CIRP.— Volume 54.— P. 170-174. (*Published by Elsevier, ScienceDirect ® and Scopus® are registered trademarks of Elsevier, Web of Science*).

234. Verlan' A.A. Moving Objects' Full-Scale Simulators' Composition / A.A.Verlan', A.F.Verlan' // Ninth World Conference “Intelligent systems for industrial automation”.— WCIS-2016.—Abu Rayhan Beruni Tashkent State Technical University.— Oct. 25-27, 2016.— Tashkent.— P. 144-146.

235. Yaparova N. M. Numerical methods for solving a boundary value inverse heat conduction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2014. Vol. 22. № 5. P. 832-847.

ДОДАТОК А. Побудова спрощених математичних моделей при дослідженні силової установки з газовим приводом і системою керування

А.1. *Характеристика об'єкта досліджень.* Структурна схема силової установки з газовим приводом, що досліджується, наведена на рис. А.1.

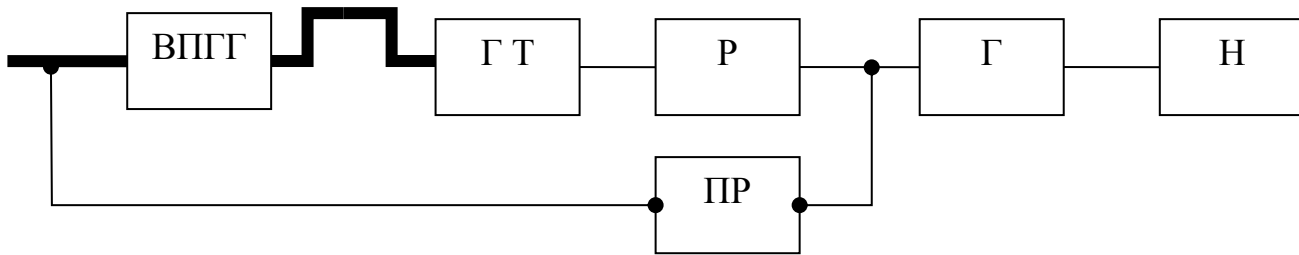


Рис. А.1. — Структурна схема силової установки з газовим приводом.

На цій схемі прийнято наступні позначення: ВПГГ - вільно-поршневий генератор газу, ГП- газопровід, ГТ - газова турбіна, Р - редуктор; Г - генератор; Н - навантаження, ПР - пропорційний регулятор. Величиною, що регулюється, є частота обертання ω ротора генератора, а величиною, що регулює - циклова подача палива G в ВПГГ. Режими роботи силової установки мають характер стрибкоподібної зміни електричного навантаження - режими скидання навантаження від 100% (130%) до 0, а режими накидання навантаження від 0 до 100% (130%). При цьому основною метою аналізу є оцінка характеристик точності регулювання частоти обертання ротора генератора і часових характеристик перехідних процесів.

Аналіз наведеної структурної схеми силової установки дозволяє виділити чотири основні підсистеми, що визначають точнісні і швидкісні характеристики об'єкта керування - механічна частина, що включає газову турбіну, редуктор і генератор, генератор газу ВПГГ, газопровід ГП, регулятор ПР.

Для якісної оцінки керованості даного об'єкта можуть бути прийняті базові математичні описи зазначених підсистем, що враховують тільки істотні фактори. Для ВПГГ такими факторами є газопродуктивність і залежність параметрів газової суміші на вході газопроводу від кількості циклової подачі палива. Оцінка

чисельних значень відповідних залежностей здійснюється на основі аналізу фізичних властивостей конструктивних параметрів ВПГГ і режимів його роботи.

Для ГП істотним фактором є зв'язок параметрів газової суміші на виході (вході в турбіну) і вході, що враховує конфігурацію газопроводу і втрати енергії в ньому, а основним фактором є залежність моменту, що розвивається, від параметрів газу на вході в турбіну.

Для генератора Г основним фактором слід вважати залежність моменту опору від величини навантаження.

Для регулятора ПР основними параметрами є загальний коефіцієнт підсилення сигналу помилки, динамічні параметри виконавчих органів і параметри обмежень керуючої величини.

Для оцінки динамічних властивостей силової установки з газовим приводом, що розглядається, істотне значення мають динамічні параметри, що зв'язують зміну параметрів газової суміші на вході в турбіну зі зміною циклової подачі палива. Отримання чисельних значень цих параметрів пов'язане з великими труднощами, зумовленими складним характером газодинамічних процесів в ВПГГ і ГП. Для цілей експрес-аналізу, проте, реальним шляхом подолання зазначеної складності є фізична оцінка запізнювання проходження керуючого впливу в тракті ВПГГ-ГП з подальшим урахуванням цього запізнювання за допомогою еквівалентної зміни динамічних параметрів (зокрема, сталої часу) в тракті регулятора.

Попередній аналіз силової установки з газовим приводом, що розглядається, дозволяє зробити певні висновки щодо її властивостей як об'єкта регулювання. В першу чергу слід відзначити, що тип регулятора (пропорційний), що використовується, означає неминучу наявність статичної помилки регулювання, а необхідність забезпечення її малості означає необхідність встановлення досить великих значень коефіцієнта підсилення регулятора, що може призвести до коливального характеру перехідних процесів і навіть до втрати стійкості.

По-друге, на режимах скидання навантаження відбір кінетичної енергії, що накопичується в елементах, що обертаються, через запізнення керування, здійснюється за рахунок моменту тертя і авторегулюючих властивостей газової

турбіни (падіння моменту, що розвивається, зі збільшенням кутової швидкості обертання). У зв'язку з цим перехідні процеси при скиданні навантаження можуть виявитися досить тривалими.

А.2. Математичні моделі підсистем.

А.2.1. Механічна частина. Відповідно до закону збереження моменту імпульсу маємо

$$I_{np} \frac{d\omega}{dt} = M_T + M_G + M_{Tp} \quad (A.1)$$

де ω - кутова швидкість обертання валу генератора, I_{np} - приведений до осі обертання валу генератора момент інерції всіх елементів, що обертаються, M_T - момент, що розвивається турбіною, M_G - момент опору генератора, M_{Tp} - момент тертя всіх елементів, що обертаються, приведений до валу генератора. Рівняння (A.1) при наявності значень параметрів, що входять у нього, і функціональних (або операторних) залежностей в сукупності з рівнянням регулятора складають математичну модель силової установки у необхідному припущенні про жорсткість елементів, що обертаються.

Складність отримання адекватного математичного опису зумовлена складністю визначення функціональних або операційних залежностей в першу чергу таких змінних як M_T і M_G . Величини I_{np} і M_{Tp} можуть бути досить точно оцінені як розрахунковим I_{np} , так й експериментальним шляхом (I_{np} , M_{Tp}). Для оцінки I_{np} необхідно знати геометричні масові характеристики елементів, що обертаються, а також кінематичні зв'язки між ними. Для даного випадку дійсний наступний вираз для I_{np} :

$$I_{np} = I_G + I_{ш2} + 3k_2^2 I_{ш1} + k_1^2 I_T, \quad (A.2)$$

де I_G - момент інерції ротора генератора, $I_{ш2}$ - момент інерції шестерні другого ступеня редуктора, $I_{ш1}$ - момент інерції шестерні першого ступеня редуктора відносно власної осі обертання, k_2 - передатний коефіцієнт між шестернями першого й другого ступеня редуктора, I_T - момент інерції ротора турбіни відносно власної осі обертання, k_1 - передатний коефіцієнт редуктора.

Виходячи з геометрично-масових характеристик елементів, що обертаються, і кінематичних співвідношень для величин, що входять у (А.2), маємо:

$$I_{\Gamma} = 20,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; I_{ш2} = 0,02 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; I_{ш1} = 0,018 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; I_T = 0,05 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; k_2^2 = 18; k_1^2 = 324.$$

Таким чином, $I_{np} = 37,7 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

Досить точна оцінка тертя M_{Tp} розрахунковим шляхом ускладнена. Тому доцільно оцінювати його величину на основі експериментальних даних в припущенні незалежності його від кутової швидкості. При цьому досить виміряти час від моменту зупинки СПГГ до моменту зупинки генератора і значення кутової швидкості обертання генератора в момент зупинки ВПГГ. Тоді

$$M_{Tp} = \frac{\omega_n I_{np}}{T_0}. \quad (\text{А.3})$$

Відповідні експерименти дають значення M_{Tp} в межах $25 \div 35 \text{ Нм}$.

А.2.2. Генератор газу. Оцінка параметрів газу в порожнинах ВПГГ може бути отримана на основі використання законів збереження маси, енергії і рівняння стану газу, записаних для циклу процесів стиснення, розширення в компресорних, буферних порожнинах і порожнинах згоряння (в порожнині двигуна) генератора газу. На цьому етапі моделювання приймемо, що витрата енергії на стиснення газу супроводжується теплообміном з зовнішнім (відносно відповідної порожнини) середовищем. Цей складний процес теплообміну зазвичай [А1,А2] враховується деяким середнім показником політропи стиснення, який залежить від інтенсивності охолодження стінок відповідної порожнини, руху заряду, щільності заряду, витoku газу через нещільності поршневих кілець і клапанів й інших чинників [А1]. Аналогічно будемо приймати сталими деякі середні показники політропи розширення робочих порожнин.

Для оцінки параметрів газу в порожнині двигуна обмежимося розрахунком параметрів робочого тіла до й після згоряння, а під час згоряння за методикою В. І. Гриневецького будемо розглядати лише найпростіші закономірності підведення теплоти до робочого тіла [А1]. Будемо задавати параметри газу в продувочному ресівері в якості вихідних даних, нехтуючи падінням тиску на впускних вікнах

області двигуна. Нижче перераховані дані, які використовуються для моделювання стану газу в області двигуна ВПГГ.

А.2.2.1. Вихідні дані: D_d - діаметр поршня двигуна ($D_d=0,120$ м), h_{kc} - висота камери згоряння половини порожнини двигуна ВПГГ, що розглядається ($h_{kc}=0,0122$ м), H - хід поршня двигуна ($H=0,155$ м), ψ - коефіцієнт втраченого ходу поршня ($\psi=0,32$), m_g - кількість повітря в дизельній порожнині ($m_g=0,009$ кг) до початку стиснення, P_a - тиск на початок стиснення в дизельній порожнині ($P_a = 5 \text{ ат} = 506625 \text{ Па}$), T_a - температура повітря на початку стиснення ($T_a=500 \text{ К}$), M_T - молекулярна маса палива ($M_T=180 \text{ кг/кмоль}$), g_C , g_H , g_O - масові частки вуглецю, водню, й кисню в паливі ($g_C=0,87$, $g_H=0,126$, $g_O=0,004$), ξ - коефіцієнт використання тепла ($\xi=0,7...0,85$), γ_r - коефіцієнт залишкових газів ($\gamma_r=0,02...0,06$), Π_C - коефіцієнт політропи стиснення повітря в порожнині двигуна ($\Pi_C=1,34...1,40$), Π_P - коефіцієнт політропи розширення продуктів згоряння ($\Pi_P=1,25...1,30$), $v_{zc} = \frac{V_z}{V_c}$ - ступінь попереднього розширення ($v_{zc}=1,05$), φ_p - коефіцієнт зменшення тиску ($\varphi_p=0,8...0,9$), $V_{кв}$ - об'єм камери вихлопу ($V_{кв}=0,005 \text{ м}^3$), Π_{pv} - коефіцієнт політропи розширення камери вихлопу ($\Pi_{pv}=1,3$), C_V^{CO} , C_V^{C1} - коефіцієнти лінійної залежності середньої мольної теплоємності свіжого заряду (повітря) при $T \in [273,1773]$, ($C_V^{CO}=20,16 \text{ кДж/кмоль} \cdot \text{К}$, ($C_V^{C1}=1,74 \cdot 10^{-3} \text{ кДж/кмоль} \cdot \text{К}^2$), C_V^Z - масив коефіцієнтів середньої мольної теплоємності продуктів згоряння при коефіцієнті надлишку повітря $\alpha \in [1,0;1,8]$

$$C_V^Z = 20,1 + \frac{0,92}{\alpha} + \left(\frac{1,4}{\alpha} + 1,6 \right) \cdot 10^{-3} \cdot T_z [\text{кДж/кмоль} \cdot \text{К}] \quad (\text{A4})$$

2) Параметри повітря на ділянці АС визначаємо за політропою стиснення з

показником Π_c [1]; $P_c = P_a \left(\frac{V_a}{V_c} \right)^{\Pi_c}$, $T_c = T_a \left(\frac{V_a}{V_c} \right)^{\Pi_c - 1}$.

3) Кількість повітря, теоретично необхідного для повного згоряння 1 кг палива [1]:

$$L_o = \frac{1}{0,21} \left(\frac{g_c}{12} + \frac{g_H}{4} + \frac{g_o}{32} \right) \text{ (кмоль/кг палива)}. \quad (\text{A.5})$$

Кількість повітря, що необхідне для повного згоряння палива в циклі:

$$L_T = L_o q_T \text{ (кмоль)}$$

4) Коефіцієнт надлишку повітря $\alpha = \frac{m_g}{M_g L_T}$.

5) Найнижча теплота згоряння палива [2]: $H_u = 33900g_c + 102900g_H$ (кДж/кг палива).

6) Виходячи з першого принципу термодинаміки на ділянці видимого згоряння cz [A1] справедливе співвідношення:

$$\xi H_u q_T = U_z - U_c + A_{cz} \quad (\text{A.6})$$

Де U_c - внутрішня енергія заряду за температури в точці c , U_z - внутрішня енергія продуктів згоряння за температури в точці z , A_{cz} - робота газів на ділянці cz .

Використаємо залежності:

$$U_c = C_v^c \frac{m_g}{M_g} T_c,$$

$$C_v^c = C_v^{CO} + C_v^{C1} T_c = 20,16 + 1,74 \cdot 10^{-3} T_c \quad (\text{A.7})$$

та для середньої мольної теплоємності свіжого заряду [2]:

$$U_z = C_v^z \frac{m_g + q_T}{M_{nc}} T_z = C_v^z M_z q_T T_z, \quad (\text{A.8})$$

де M_{nc} - молекулярна маса продуктів згоряння, M_z - число молів продуктів згоряння 1 кг палива, $C_v^z = 20,1 + \frac{0,92}{\alpha} + \left(\frac{1,4}{\alpha} + 1,6 \right) \cdot 10^{-3} \cdot T_z$ [кДж/кмоль·К] - середня мольна теплоємність продуктів згоряння (для дизелів при $\alpha \in [1,0; 1,8]$ [A2]);

$$M_z = \alpha L_o + \frac{g_H}{4} + \frac{g_o}{32}; A_{CZ} = P_z V_z - P_z V_C = P_z V_z \left(1 - \frac{V_C}{V_z}\right) = P_z V_z \left(1 - \frac{1}{v_{zC}}\right) \quad (A.9)$$

Завжди справедливе співвідношення:

$$P_z = P_C \frac{\mu}{v_{zC}} \cdot \frac{T_z}{T_C},$$

Де $\mu = \frac{M_2 + M_r}{M_1 + M_r}$ - коефіцієнт молекулярної зміни робочої суміші, $\gamma_r = \frac{M_r}{M_1}$ -

відношення кількості залишкових газів до кількості свіжого заряду (в молях),

$$M_1 = \alpha L_o.$$

Нехтуючи залишковими газами в циліндрі, будемо вважати, що $\mu = \mu_0 = \frac{M_2}{M_1}$.

Тоді, враховуючи, що $v_{zC} = \frac{V_z}{V_C}$, отримаємо:

$$A_{CZ} = \frac{P_C V_C}{T_C} \mu_0 \left(1 - \frac{1}{v_{zC}}\right) T_z. \quad (A.10)$$

При певних припущеннях, отримуємо квадратне рівняння відносно T_z :

$$AT_z^2 + BT_z + C = 0,$$

коефіцієнти якого

$$A = \left(\frac{1,4}{\alpha} + 1,6\right) \cdot 10^{-3} \quad (A.11)$$

$$B = 20,1 + \frac{0,92}{\alpha} + R \left(1 - \frac{1}{v_{zC}}\right) \quad (A.12)$$

$$C = - \frac{(20,16 + 1,74 \cdot 10^{-3} T_C) T_C + \frac{\xi H_u q_T \mu_6}{m_6}}{\mu_0} \quad (A.13)$$

7) Максимальний тиск знаходимо зі співвідношення [A1]

$$P_z = P_C \frac{\mu_0}{v_{zC}} \cdot \frac{T_z}{T_C} \varphi_P, \quad (A.14)$$

а температуру T_z отримаємо за рівнянням стану:

$$T_z = \frac{P_z V_z}{M_2 q_T R} \quad (A.15)$$

8) Параметри продуктів згоряння визначаємо ділянкою ZB політропи розширення з показником n_p [A1]:

$$P_6 = P_Z \left(\frac{V_Z}{V_6} \right)^{n_p} \quad (A.16)$$

$$T_B = T_Z \left(\frac{V_Z}{V_6} \right)^{n_p-1} \quad (A.17)$$

Густина продуктів згоряння в точці B : $\rho_B = \frac{m_B + q_T}{V_6}$.

9) Параметри продуктів згоряння в камері випуску знайдемо за політропою розширення з показником Π_{p6} ($\Pi_{p6} = 1,3$): $P_{BK} = P_B \left(\frac{V_B}{V_{BK}} \right)^{\Pi_{p6}}$, $T_{BK} = T_B \left(\frac{V_B}{V_{BK}} \right)^{\Pi_{p6}-1}$.

10) Параметри газу на вході у газовий ресивер отримаємо усередненням температури продуктів згоряння і маси q_n повітря для продувки, що потрапляє у ресивер. Вважаючи для них молекулярні маси й теплоємності рівними μ_B і C_V^C , з теплового балансу отримаємо співвідношення для визначення температури потоку на вході в ресивер:

$$(m_B + q_T)(R1 + C10 \cdot T_{BK})T_{BK} + q_n(R1 + C10 \cdot T_a)T_a = (m_B + q_T + q_n)(R1 + C10 \cdot T_r)T_r,$$

$$R1 = 1 + \frac{R}{C_V^{CO}}, \quad C10 = \frac{C_V^{C1}}{C_V^{CO}};$$

з рівняння стану тиск на вході у ресивер $P_r = \frac{\rho_r R T_r}{\mu_{ПС}}$, де густина $\rho_r = \frac{m_B + q_T + q_n}{V_{BK}}$.

А.2.3. Газопровід. Для наближених розрахунків газових потоків у трубах у багатьох випадках можна користуватися спрощеною одновимірною стаціонарною схемою. Прийmemo вектор швидкості в даному перерізі труби спрямованим вздовж осі, а величини швидкості V , тиску p , густини ρ й температури T сталими у перерізі. Будемо вважати процес адіабатним, тобто досить швидким, без притоку тепла ззовні, щоб не враховувати теплообмін із зовнішнім середовищем, у даному випадку зі стінками труби. Усталений потік газу вздовж осі труби (координата X

направлена вздовж осі), без урахування в'язкості, описується рівнянням Ейлера [A4]

$$V \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (\text{A.18})$$

і рівнянням нерозривності

$$\frac{d\rho V}{dx} = 0. \quad (\text{A.19})$$

Ці рівняння легко інтегруються. Таким чином, вздовж лінії потоку, маємо

$$\frac{V^2}{2} + P = \text{const}, \quad (\text{A.20})$$

$$\rho V = \text{const}, \quad (\text{A.21})$$

тут P - функція тиску

$$P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}. \quad (\text{A.22})$$

Вигляд цієї функції визначається типом процесу, наприклад, вона легко обчислюється для ізотермічного, адіабатичного процесів, де існують явні залежності

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const};$$

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}; \quad (\text{A.23})$$

Рівність (A.20) називається інтегралом Бернуллі (за відсутності масових сил). В окремому випадку адіабатичного процесу інтеграл Бернуллі має вигляд

$$\frac{V^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (\text{A.24})$$

де K - показник адіабати.

Співвідношення (A.24) означає, що зміна кінетичної енергії, у відношенні до одиниці маси газу, рівна роботі, що продукуються силами тиску. Рівняння нерозривності (A.21) дає нам сталість витрати через розподіл труби S :

$$\rho V S = \text{const}. \quad (\text{A.25})$$

Очевидно, що рівняння (А.24) описує ідеалізований процес, проте воно може використовуватися у практичних розрахунках, якщо ввести додатковий член, що характеризує втрати енергії на в'язкість, зміну напрямку і т.д. Тоді між двома перерізами труби мають місце співвідношення

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p_2}{\rho_2} + H, \quad (\text{A.26})$$

де H - втрати енергії на одиницю маси. У нашому випадку H складається з двох членів - втрати на тертя H_{mp} і втрати, що викликані різкою зміною конфігурації границь потоку (подолання опору форми) H_m

Втрати на тертя визначаються формулою Дарсі-Вейсбаха

$$H_{mp} = \frac{\Delta p_{mp}}{\rho} = \frac{\lambda l V^2}{2d} \quad (\text{A.27})$$

(вплив тертя враховується додатковим перепадом тиску), тут λ - коефіцієнт гідравлічного тертя, що залежить від фізичних властивостей середовища: густини, в'язкості, а також від швидкості потоку й діаметра труби d . Для визначення втрат на місцевий опір [А3] маємо формулу

$$H_m = \frac{\Delta p_m}{\rho} = \zeta \frac{V^2}{2}, \quad (\text{A.28})$$

де ζ - безрозмірний коефіцієнт.

Існує ряд емпіричних формул, що дозволяють обчислити коефіцієнти λ й ζ , що враховують ступінь турбулентності та інші фактори.

Число Рейнольдса, функцією якого є коефіцієнт гідравлічного тертя λ , можна подати у вигляді

$$\text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{4G}{\pi d \mu}, \quad (\text{A.29})$$

де G - масовий розхід через переріз труби. У свою чергу за ламінарного режиму, в круглій трубі

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (\text{A.30})$$

або з врахуванням (А.29)

$$\lambda = \frac{16\pi d \mu}{G} \quad (\text{A.31})$$

Описані дані свідчать, що, за турбулентного режиму λ відхиляються від обчислених за формулою (A.31) значень в бік збільшення, особливо це помітно в трубах з великою шорсткістю. Тому були запропоновані різні емпіричні формули для визначення λ . Наприклад, формула Блазіуса: $\lambda = 0,3164/\text{Re}^{0,25}$ для гідравлічно гладких труб; формула Шифринсона: $\lambda = 0,11 \left(\frac{K}{d} \right)^{0,25}$ для досить шорстких труб (K - середня висота виступів шорсткості); формула Альтшулля: $\lambda = 0,11 \left(\frac{K_e}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}$, котра при $\text{Re} < 10$ співпадає з формулою Блазіуса, а при $\text{Re} > 500$ - з формулою Шифринсона (K_e - еквівалентна шорсткість, враховує крім висоти виступів, їх форму; значення K_e визначаються з відповідних таблиць). Таким чином, на підставі наведених вище основних співвідношень можна побудувати математичну модель процесу проходження газу по трубі, умовна схема якої приведена на Рис. А.2

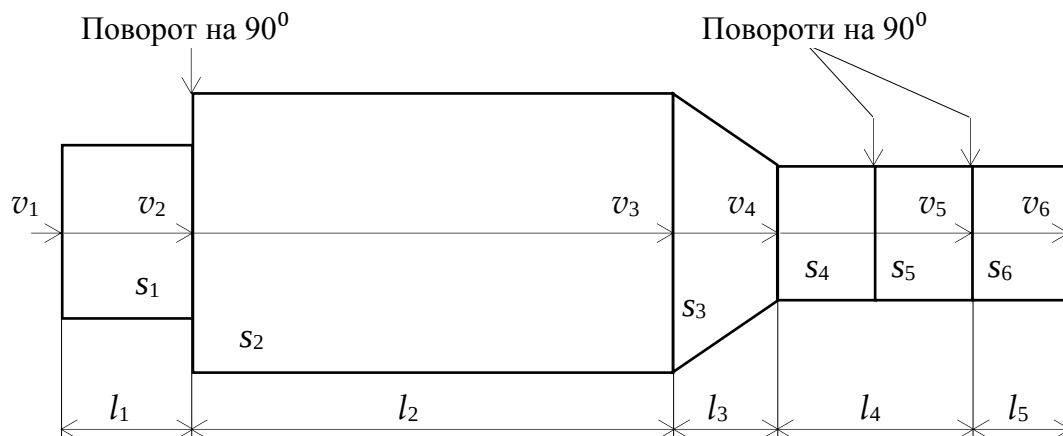


Рис. А.2.

Труба розділена на 5 геометрично виділених ділянок, на кожній з яких процес проходження газу описується рівнянням Бернуллі з урахуванням втрат енергії, що визначаються геометрією труби і впливом тертя.

Будемо вважати, що у вхідному перерізі труби S_1 задано значення p_1, ρ_1, V_1 . Вважається заданою масова витрата газу, однакова у всіх перетинах і рівна

$$G = \rho_i V_i S_i, (i = \overline{1,6}). \quad (\text{A.32})$$

Звідки

$$\rho_i = \frac{G}{V_i S_i}.$$

В силу адіабатичності процесу

$$\frac{p_i}{\rho_i} = \frac{p_1}{\rho_1^k} \rho_i^{k-1} = \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{\rho_i}{\rho_1} \right)^{k-1} = \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_i S_i \rho_1} \right)^{k-1}. \quad (\text{A.33})$$

1. Втрати енергії на 1-ій ділянці визначаються тільки впливом в'язкості, особливо помітною біля стінок труби, тобто втратами на тертя.

Згідно (A.27) й (A.31)

$$H_1 = \frac{\lambda l_1 V_{12}^2}{2d_1} = \frac{8\pi\mu l_1}{G} V_{12}^2,$$

де V_{12} є середньою швидкістю на ділянці 1

$$V_{12} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Тоді маємо (A.26):

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{2\pi\mu l_1}{G} (V_1 + V_2)^2. \quad (\text{A.34})$$

2. В області перерізу S_2 відбувається різка зміна швидкості, і в зв'язку з цим втрата енергії, внаслідок різкої зміни перерізу труби і повороту її на 90° . Ці втрати визначаються виразом

$$H = \zeta \frac{V_2^2}{2} + \left(\frac{S_3}{S_2} - 1 \right)^2 \frac{V_3^2}{2}$$

Втрати на тертя на цій ділянці складають

$$H_{mp} = \frac{\lambda_2 l_2 V_{23}^2}{2d_2} = \frac{8\pi\mu l_2}{G} V_{23}^2 = \frac{2\pi\mu l_2}{G} (V_2 + V_3)^2$$

і відповідно

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{V_3^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p_3}{\rho_3} + \zeta \frac{V_2^2}{2} + \left(\frac{S_3}{S_2} - 1 \right)^2 \frac{V_3^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_2}{G} V_{23}^2. \quad (\text{A.35})$$

3. Третя ділянка труби являє собою конфузор, втрати в якому складаються з втрат на поступове звуження і втрат на тертя. Втрати на звуження можна знайти за формулою $H = \zeta_{n.c.} \frac{V_4^2}{2}$, де $\zeta_{n.c.} = 0.1$, кут конусності в конфузорі - $\alpha < 20^\circ$. Втрати на тертя дорівнюють

$$H_{mp} = \frac{\lambda}{8 \sin(\alpha/2)} \left(1 - \frac{S_4^2}{S_3^2} \right) \frac{V_4^2}{2} = \frac{\pi(d_3 + d_4)\mu}{G \sin(\alpha/2)} \left(1 - \frac{S_4^2}{S_3^2} \right) \frac{V_4^2}{2}, \quad (A.36)$$

де d_3, d_4 - діаметри труби в перерізах S_3 і S_4 відповідно.

Рівняння Бернуллі на ділянці 3, з урахуванням втрат в конфузорі, має вигляд

$$\frac{K}{K+1} \frac{p_3}{\rho_3} + \frac{V_3^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_4}{\rho_4} + \frac{V_4^2}{2} + \zeta_{n.c.} \frac{V_4^2}{2} + \frac{\pi(d_3 + d_4)\mu}{G \sin(\alpha/2)} \left(1 - \frac{S_4^2}{S_3^2} \right) \frac{V_4^2}{2}. \quad (A.37)$$

4. Остання ділянка труби містить 2 різких повороти, де відбувається зміна швидкості і тому розбита на частини 4 і 5. Аналогічно описаному вище маємо: на ділянці 4 (Рис. А.2)

$$\frac{K}{K+1} \frac{p_4}{\rho_4} + \frac{V_4^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_5}{\rho_5} + \frac{V_5^2}{2} + \zeta \frac{V_4^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_4}{G} (V_4 + V_5)^2. \quad (A.38)$$

і на ділянці 5:

$$\frac{K}{K+1} \frac{p_5}{\rho_5} + \frac{V_5^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_6}{\rho_6} + \frac{V_6^2}{2} + \zeta \frac{V_5^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_5}{G} (V_5 + V_6)^2. \quad (A.39)$$

У виразах (A.38), (A.39) $\zeta = 1$, а останні члени цих виразів відображають втрати енергії на подолання тертя.

Таким чином, процес проходження газу по трубі описується п'ятьма рівняннями (A.33), (A.34), (A.36), (A.38), (A.39), а з урахуванням співвідношень (A.32) їх можна записати в замкнутому вигляді:

$$\frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_2 S_2 \rho_1} \right)^{K-1} + \frac{V_2^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_1}{G} (V_1 + V_2)^2,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_2 S_2 \rho_1} \right)^{K-1} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_3 S_3 \rho_1} \right)^{K-1} + \\
& + \frac{V_3^2}{2} + \zeta \frac{V_2^2}{2} + \left(\frac{S_3}{S_2} - 1 \right)^2 \frac{V_3^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_2}{G} (V_2 + V_3)^2, \\
& \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_3 S_3 \rho_1} \right)^{K-1} + \frac{V_3^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_4 S_4 \rho_1} \right)^{K-1} + \\
& + \frac{V_4^2}{2} + \zeta_{n.c.} \frac{V_4^2}{2} + \frac{\pi(d_3 + d_4)\mu}{G \sin(\alpha/2)} \left(1 - \frac{S_4^2}{S_3^2} \right) \frac{V_4^2}{2}, \\
& \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_4 S_4 \rho_1} \right)^{K-1} + \frac{V_4^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_5 S_5 \rho_1} \right)^{K-1} + \\
& + \frac{V_5^2}{2} + \zeta \frac{V_4^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_4}{G} (V_4 + V_5)^2, \\
& \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_5 S_5 \rho_1} \right)^{K-1} + \frac{V_5^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_6 S_6 \rho_1} \right)^{K-1} + \\
& + \frac{V_6^2}{2} + \zeta \frac{V_5^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_5}{G} (V_5 + V_6)^2,
\end{aligned}$$

де $S_4 = S_5 = S_6$, $\zeta = 1$.

Результатом розв'язання даної системи є величина швидкості у вихідному перерізі, а вихідними величинами $V_1 p_1 \rho_1$ у перерізі S_1

А.2.4. Газова турбіна. Спрощена математична модель газової турбіни може бути представлена у вигляді залежності моменту, що розвивається нею, від параметрів газової суміші. При цьому [А5]

$$M_T = \frac{GH\eta}{\omega_T}, \quad (\text{А.40})$$

де G - розхід газу, H - питома теоретична робота, η - ефективний коефіцієнт корисної дії, ω_T - кутова частота обертання ротора турбіни.

Величина витрати газу G визначається продуктивністю ВПГГ і в даному випадку оцінюється величиною 0.2/ 0.5 кг/с.

Питома теоретична робота H визначається, зазвичай, за умови, що процес проходження газової суміші через турбіну може стати й політропним з показником $K_T = (1.25/1.4)$. При цьому

$$H = \frac{K_T}{K_T - 1} R T_T \left[1 - \frac{P_T}{P_0} \frac{1 - K_T}{K_T} \right], \quad (\text{A.40})$$

де R - газова стала газової суміші $R \approx \frac{290 \text{ Дж}}{\text{кгК}}$, P_T, P_0 - тиск газу на вході в турбіну й виході з неї, T_T - температура газу перед турбіною.

Ефективний ККД η оцінюють величиною (0.6/ 0.8) [A1].

Вираз (A.40) дає момент діючих в турбіні сил на її валу. На валу генератора цей момент збільшується у W раз, де W – передатний коефіцієнт редуктора - Р. Враховуючи що $\omega_T = W\omega$, отримуємо з (A.40) для моменту, що розвивається турбіною на валу генератора

$$M_T = \frac{GH\eta}{\omega}. \quad (\text{A.41})$$

A.2.5. Генератор. Момент опору генератора M_G є складною функцією досить великого числа аргументів, що характеризують роботу генератора як електричної машини. Ступінь складності розрахунку величини M залежить від прийнятих припущень відносно характеру електромагнітних процесів, що там протікають. Для мети фізико-математичної оцінки керованості даної силової установки з газовим приводом основним фактором, що визначає момент опору генератора, слід вважати електричну потужність N , що ним розвивається.

У припущенні про активно-індуктивний характер навантаження маємо для струму навантаження I_H

$$I_H = \frac{E_G}{\sqrt{(R_G + R_H)^2 + \omega_3^2 (L_G + L_H)^2}}, \quad (\text{A.42})$$

де E_G - напруга генератора, ω_3^2 - частота напруги, R_G, R_H - активні опори генератора й навантаження, L_G, L_H - індуктивності генератора й навантаження.

Далі маємо

$$E_{\Gamma} = \omega_3 \psi \quad (\text{A.43})$$

$$\omega_3 = p\omega \quad (\text{A.44})$$

де ψ - потокозчеплення, p - число пар полюсів.

Потужність навантаження, що споживається,

$$N = I_H^2 (R_{\Gamma} + R_H) = \frac{\omega_3^2 \psi^2}{(R_{\Gamma} + R_H) \left(1 + \omega_3^2 \left(\frac{L_{\Gamma} + L_H}{R_{\Gamma} + R_H} \right)^2 \right)}. \quad (\text{A.45})$$

Момент опору генератора визначається (у припущенні $\psi = \text{const}$) із умови рівності механічної та електричної потужності з урахуванням коефіцієнта втрат k ($k > 1$), а саме

$$M_{\Gamma} \omega = kN, \quad (\text{A.46})$$

звідки з урахуванням (A.45), (A.46) і вважаючи

$$\psi = \psi_H = \frac{E_{\Gamma H}}{\omega_{3H}^2} = \frac{E_{\Gamma H}}{p^2 \omega_H^2},$$

де індекс "н" означає, що відповідні величини беруться на номінальному режимі, маємо

$$M_{\Gamma} = \frac{k\omega\psi_H^2}{(R_{\Gamma} + R_H) \left(1 + \omega_3^2 \left(\frac{L_{\Gamma} + L_H}{R_{\Gamma} + R_H} \right)^2 \right)}. \quad (\text{A.47})$$

А.2.6. Пропорційний регулятор. Величина керуючого впливу пропорційного регуляторної струму (ПР) лінійно залежить від похибки регульованої величини

$$V = KE = K(\omega_H - \omega), \quad (\text{A.48})$$

де K - коефіцієнт підсилення регулятора.

Динамічні властивості замкнутої системи регулювання у значній мірі залежать від властивостей регулятора і, зокрема, від його динамічних характеристик. Наявність інерційних елементів у складі регулятора (наприклад, виконавчих органів у регуляторах непрямої дії) призводить до необхідності використання математичних моделей регулятора у вигляді диференціальних

рівнянь. У найпростішому випадку рівняння регулятора подається у вигляді рівняння першого порядку

$$\tau_p V + V = K(\omega_H - \omega),$$

де τ_p - стала часу регулятора. Саме величина τ_p є суттєвою для оцінки динамічних властивостей замкнутої системи регулювання. Досить точно оцінити величину τ_p можна на основі аналізу експериментальних даних. Для оцінки ж принципових якостей даної системи регулювання за необхідними умовами можна використовувати у якості τ_p деяку оцінку її знизу. Для отримання оцінки знизу τ_p необхідно враховувати як інерційність виконавчих органів регулятора (стала часу $\tau_{up}, \tau_{up} = 0.04c$) так й інерційність газодинамічних процесів у ВПГГ (стала часу $\tau_{гг}$), а також інерційність процесів у газопроводі (стала часу $\tau_{гп}$). В цьому випадку для мети фізико-математичної оцінки керованості даної силової установки оцінкою знизу для τ_p може слугувати наступна

$$\tau_p > \tau_{p0} = \tau_{up} + \tau_{гг} + \tau_{гп},$$

де величина $\tau_{гг}$ оцінюється на підставі аналізу процесів у ВПГГ. Якщо вважати, що параметри газової суміші при зміні циклічної подачі палива встановлюються за m циклів, то $\tau_{гг} \approx \frac{m}{3} \tau_{ц}$,

де $\tau_{ц}$ - період циклу роботи ВПГГ. Можна вважати $m=(8 \div 10)$, що при $\tau_{ц} = 0.04c$ дає $\tau_{гг} = 0.12c$.

Стала часу газопроводу оцінюється за умовами проходження у ньому газової суміші, базуючись на аналізі часу запізнення. При швидкостях течії газу $(20 \div 50) \text{ м/с}$ і довжині газопроводу приблизно 1 м маємо $\tau_{гп} = (0.02 \div 0.05)c$. На основі наведених даних оцінка τ_{p0} величини τ_p складає 0.2с. Що стосується величини коефіцієнта підсилення K регулятора, то її значення, що також визначає динамічні властивості процесів регулювання, має варіюватися при виконанні обчислювальних експериментів.

А.3. Програмна система моделювання. Програмна реалізація математичних моделей підсистем силової установки з газовим приводом у поєднанні з програмною організацією взаємодії всіх зв'язків математичних моделей, а також реалізація функцій обробки і сервісу, утворюють програмну систему моделювання функціонування об'єкта.

Наведемо короткий опис функціонального призначення основних блоків параметрично керованого комплексу програмних модулів. Отриманий математичний опис об'єкта моделювання у вигляді диференціальних рівнянь та алгебраїчних залежностей дозволяє використовувати стандартні пакети комп'ютерних засобів для моделювання з реалізацією підпрограм, що використовують наступні дії:

- організація процесу моделювання при вирішенні дослідницьких завдань;
- виклик підпрограми, що виконують допоміжні обчислювальні операції;
- реалізація основного обчислювального процесу;
- знаходження правих частин диференціальних рівнянь, що описують динаміку об'єкта;
- обчислення моменту тертя елементів, що обертаються;
- визначення залежності моменту опору генератора від навантаження, де вхідним параметром є величина електричного навантаження;
- обчислення параметрів газової суміші на вході в газопровід; знаходження дійсного нуля функції методом половинного ділення в поєднанні з методом січних у випадку гладких функцій (при визначенні параметрів газової суміші в газопроводі);
- визначення залежності параметрів газової суміші на вході в турбіну від параметрів газової суміші на вході в газопровід, з урахуванням конфігурації і втрати енергії у газопроводі;
- аналіз результатів моделювання перехідних процесів.

Виконані в даній роботі обчислювальні експерименти дозволяють зробити аналіз (попередній або остаточний) динамічних властивостей силової установки з газовим приводом і пропорційним регулюванням за відхиленням.

При аналізі результатів моделювання основними факторами, що аналізувалися, були наступні характеристики перехідних процесів: характер перехідного процесу - стійкий, нестійкий, аперіодичний (А), коливальний (К); значення числових параметрів перехідних процесів (за умови стійкості) - тривалість (Т), статична похибка регулювання (δ_{CT}), максимальна похибка перерегулювання (δ_p).

Основними режимами роботи силової установки, на яких оцінювалися властивості перехідних процесів, були режим скидання навантаження від номінальної до нульової (перехід з номінального режиму в режим холостого ходу) і режим накидання навантаження від нульової до номінальної (перехід з режиму холостого ходу в номінальний) при різних значеннях коефіцієнта підсилення пропорційного регулятора.

Аналіз результатів частини виконаних обчислювальних експериментів (зведених за перерахованими вище характеристиками в таблицю 1), що отримані при моделюванні зазначених режимів, дозволяє оцінити потенційні можливості прийнятої структури системи керування даної силової установки.

Перш за все слід зазначити, що малі значення статичної похибки і тривалості перехідних процесів має місце у випадках, коли перехідний процес має коливальний характер. У разі ж аперіодичного характеру перехідних процесів статична помилка досягає значень десятків відсотків при тривалості 6-9 с

Таблиця А.1

Режим	Скидання навантаження			Накидання навантаження		
Коефіцієнт підсилення	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$
Характер процесу	А	К	К	А	К	К
Т, с	9	2	3,5	6	2	2,6
$\delta_{cm}, \%$	22	2,5	0,5	15	2,2	0,5
$\delta_p, \%$	-	3	1,2	-	2,8	1,2

У зв'язку з тим, що коливальний процес в системі регулювання даної силової установки є небажаним внаслідок малого запасу стійкості (так система стає нестійкою при $K \approx 1.1^{-2}$), при оцінці керованості слід орієнтуватися саме на процеси аперіодичного характеру. Далі слід мати на увазі, що отримані результати відносяться до випадку досить великого динамічного діапазону керуючої змінної (мінімальне значення циклової подачі палива - 0.02 г, максимальне – 1 г), з достатнім запасом, що перекриває діапазон значень між режимами холостого ходу і максимального навантаження (циклова подача палива %7 0.07 г й 0.8 г відповідно). За відсутності достатнього перекриття (що цілком можливо в нижній частині діапазону значень циклової подачі палива, оскільки зменшення останньої в режимі холостого ходу може призвести до зупинки ВПГТ) характер перехідних процесів якісно змінюється через спрацювання обмежень керування. При цьому тривалість перехідних процесів істотно збільшується (десятки секунд) разом з ростом статичної похибки (до 50%).

Таким чином, наведені вище результати (табл. А.1) є суттєво позитивними, відображають властивості об'єкта і є оцінками знизу для відповідних величин реального об'єкта. Крім того, отримані в процесі виконання даної роботи результати визначають напрямки робіт з поліпшення керованості даної силової установки як розширення динамічного діапазону можливих значень керуючих змінних.

Висновок. Виконана робота з дослідження керованості силової установки з газовим приводом розв'язує важливу задачу аналізу, має достатній оціночний характер при використанні спрощених математичних моделей основних підсистем. Отримані результати дозволяють оцінити гранично досяжні характеристики замкнутої системи керування обраного типу, оцінити важливість прийнятих припущень відносно істотних факторів, що визначають характер перехідних процесів, намітити шляхи вдосконалення системи керування даного об'єкта.

Література

А1. Двигатели внутреннего сгорания. Под ред. проф. А.С.Орлина Н «Машиностроени», 1971, 400с.

А.2. Железко Б.Е. Основы теории и динамика автомобильных и тракторных двигателей. - Минск, Высшая школа, 1980-304с.

А.3. Альтшуль А.Д., Животовский Л.С., Иванов Л.П. Гидравлика и аэродинамика - М.: Стройиздат, 1987, - 416с.

А.4. Механика жидкости и газа - Лойцянский Л.Г. М.Наука, 1978,-736 с.

А.5. И.И.Кириллов, Автоматическое регулирование паровых турбин и газотурбинных установок. Л. "Машиностроение", 1988, 208с.

ДОДАТОК Б. Комп'ютерне моделювання бурильної колони бурової установки

Вступ. При спорудженні глибоких та надглибоких свердловин важливою проблемою є забезпечення високих техніко-економічних показників процесу буріння. Із збільшенням глибини буріння значно зростає твердість породи, енергозатрати на її руйнування, температура в зоні забою, утруднюється підвід промивної рідини тощо. Все це погіршує процес руйнування породи, знижує довговічність породоруйнівного інструменту та інших вузлів бурової установки [136].

Підвищення техніко-економічних показників бурових установок може бути досягнуто шляхом покращення динаміки процесу руйнування породи при передачі механічних зусиль через колону бурильних труб з поверхні до забою і в зворотному напрямку. Для розрахунку параметрів буріння доцільно використовувати комп'ютерну модель, що відображає процес буріння з достатньою для інженерних розрахунків адекватністю. При цьому потрібно враховувати такі властивості елементів бурової установки як нелінійність та розподіленість параметрів. В буровій установці елементом з найбільш вираженими властивостями розподіленості параметрів є колона бурильних труб.

Застосування комп'ютерної моделі колони бурильних труб при керуванні процесом буріння дозволить вирішити ряд важливих задач: підвищити техніко-економічні показники буріння за рахунок врахування динамічної складової при визначенні і підтримці оптимального навантаження на долото; здійснювати контроль за процесом підйому колони бурильних труб, з урахуванням її взаємодії із промивальною рідиною та стінками свердловини з метою зменшення часу спуско-підйомних робіт; здійснювати контроль за подачею промивальної рідини під час буріння та спускопідйомних робіт; здійснювати контроль за режимами роботи наземної системи з метою зменшення витрат енергії [127].

Сучасна бурова установка є складним комплексом різноманітного обладнання, який складається з двигунів обладнаних системами керування, механізмів для спуску, підйому та обертання інструменту, насосів для

прокачування промивальної рідини, обладнання для механізації та автоматизації спускопідйомних робіт, бурова вишка для утримання блоків талевого механізму та розміщення бурильних труб. Робота агрегатів бурового комплексу супроводжується інтенсивними механічними коливаннями, які викликані частими пусками і зупинками приводних систем, зміною сил опору руху бурильної колони, коливаннями тиску в насосних станціях та зміною сил опору при русі промивальної рідини в свердловині.

Варто відмітити, що аналіз процесів, які відбуваються при бурінні свердловини, можливий лише за умови комплексного підходу, коли система розглядається з урахуванням взаємодії двигунів, передаточних механізмів, виконавчих елементів та несучих конструкцій. Отже, всебічне вивчення динаміки бурових установок є необхідною умовою для їх раціонального проектування і ефективного використання.

При розв'язуванні задач аналізу динаміки бурової установки, в задачах керування, виникає необхідність створення адекватних математичних та комп'ютерних моделей як окремих елементів так і всієї системи в цілому. При цьому приходится мати справу з моделями елементів різної фізичної природи (із розподіленими та зосередженими параметрами, нелінійними та лінійними, просторово одномірними та багатомірними), які мають суттєві відмінності при їх математичному описі. Аналіз таких систем за допомогою традиційних методів, коли розв'язується система рівнянь, в яку входять звичайні диференціальні рівняння, рівняння в частинних похідних, нелінійні диференціальні рівняння, інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння, утруднюється насамперед відсутністю загальних методів їх розв'язування.

Пропонується підхід, коли над складною неоднорідною системою проводиться декомпозиція на простіші структурні елементи, що дає змогу звести розв'язування складної задачі до розв'язування певної кількості простих задач. Такий підхід дозволяє представити складну модель у вигляді певної структури з простіших елементів [232].

При числовій реалізації для кожного структурного елементу макромоделі обирається певний, найбільш ефективний метод, який визначає алгоритм, що використовується у відповідному програмному модулі. Такий підхід можна назвати структурно-алгоритмічним, оскільки певному структурному елементу ставиться у відповідність алгоритм. В кінцевому результаті застосування структурного підходу дає можливість будувати моделі складних систем із певного базового набору комп'ютерних модулів.

На сьогоднішній день для розв'язування окресленого кола задач можна використати велику кількість програмних засобів. Серед них слід відмітити такі, як ANSYS, COMSOL Multiphysics, MathCAD, Mathematica, Maple, MatLAB, WorkBench, Scilab, MAPC, ADAMS та ін. Однак, для реалізації структурно-алгоритмічного підходу при синтезі комп'ютерних моделей найбільш ефективним середовищем моделювання є MatLAB із вмонтованим засобом імітаційного моделювання Simulink.

Постановка задачі. Необхідно розробити ефективні моделі основних елементів бурової установки з метою їх використання на етапі проектування обладнання, а також для автоматизації процесів керування.

На стадії апробації моделей в якості середовища моделювання доцільно використати інтерактивний інструментарій для моделювання, імітації та аналізу динамічних систем — MatLAB/Simulink. Оскільки в серійних дослідницьких програмах комп'ютерної математики, і зокрема в MatLAB/Simulink відсутні засоби для моделювання ланок елементів з розподіленими параметрами та ланок з динамічними нелінійностями необхідно розробити на базі існуючих бібліотек макромоделі типових розподілених та нелінійних динамічних ланок бурової установки.

Основна частина. При моделюванні блоків бурової установки найбільші труднощі при числовій реалізації викликають елементи з розподіленими параметрами. В першу чергу це стосується колони бурильних труб, яка є неоднорідною, оскільки вона складається з різноманітного устаткування (сталейних та поважчених бурильних труб, центраторів, перевідників, калібраторів,

розширювачів, шламоуловлювачів та ін.). Також елементом з розподіленими параметрами є стовп промивальної рідини, яка подається через бурову колону до забою. Необхідність врахування динаміки руху промивальної рідини в буровій колоні викликана ще і тим, що промивальна рідина при бурінні забійним двигуном використовується для передачі енергії до нього і керування обертальним моментом на долоті здійснюється через гідравлічний зв'язок.

Колону бурильних труб, із врахуванням ряду припущень, можна вважати пружним стержнем з розподіленою масою, пружністю та в'язким тертям. До нижнього кінця колони прикладена осьова реакція забою і реакція долота, а по довжині колони розподілені сили ваги, в'язкого тертя та інерції. В буровій колоні присутні три види деформації — кручення, згину та розтягу-стиску. Деформація кручення впливає на динаміку обертового руху долота. При цьому на долото діє поздовжня сила зі сторони бурової колони, яка, в свою чергу, залежить від динаміки поздовжнього руху колони. Отже, для підтримки оптимального навантаження на долото необхідно враховувати також деформації розтягу-стиску в елементах колони.

Певні спотворення в розрахунки поздовжнього та обертового руху вносить деформація згину. Так, при дії обертового моменту та сили стиснення ділянка колони деформується у вигляді просторової спіралі обмеженої стінками свердловини. Але для багатьох задач, особливо при використанні забійного двигуна, достатнім є врахування в моделі двох взаємозв'язаних характеристик — динаміки обертового та поступального руху.

Зв'язок параметрів, що характеризують поступальний та обертовий рухи здійснюється через модель взаємодії долото-порода. Якщо використовується долото із шарошками, то при його обертанні, в результаті перекошування шарошок по забою, виникають поздовжні коливання корпусу долота, які передаються бурильній колоні, а зубці шарошки, внаслідок ударної взаємодії з породою, спричиняють її руйнування.

Таким чином, для отримання повноцінних результатів моделювання необхідно враховувати взаємодію породи, долота, забійного двигуна та колони бурильних труб.

Розглянемо способи математичного опису динаміки поздовжнього та обертального руху колони бурильних труб.

Швидкість зміщення перерізів колони $V(x,t)$, яка викликана дією погонної зовнішньої сили $F(x,t)$ описується диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$m(x)\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + h(x)\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} - k\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (\text{Б.1})$$

з граничними та початковими умовами відповідно (Б.2) та (Б.3)

$$\frac{\partial V(l,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V(0,t)}{\partial x} = 0, \quad (\text{Б.2})$$

$$\frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = 0; \quad V(x,0) = 0, \quad (\text{Б.3})$$

де $m(x)$ — погонна маса колони; $h(x)$ — погонний коефіцієнт опору колони; k — коефіцієнт пружності; $F(x,t)$ — погонна зовнішня сила; $T(x,t)$ — погонна сила тяжіння; $V(x,t)$ — швидкість руху перерізу колони.

Для опису динаміки обертального руху стержня використовується рівняння

$$J\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} + \tau\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} - GJ_p\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial t} \quad (\text{Б.4})$$

з граничними та початковими умовами відповідно (Б.5) та (Б.6)

$$\frac{\partial \omega(l,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \omega(0,t)}{\partial x} = 0, \quad (\text{Б.5})$$

$$\frac{\partial \omega(x,0)}{\partial t} = 0; \quad \omega(x,0) = 0, \quad (\text{Б.6})$$

де ω — частота обертання колони; J — момент інерції; G — модуль зсуву; M — момент кручення; τ — коефіцієнт опору обертального руху; J_p — полярний момент інерції.

Однак, якщо колона бурильних труб є неоднорідною, а також при нелінійній постановці задачі, використання підходу, коли розв'язується вихідна система

диференціальних рівнянь в частинних похідних, є неефективним (Navarro-López, 2010).

Пропонується використання структурних моделей у вигляді багатомасових систем із зосередженими масами (Fedorchuk, 2010). Застосувавши метод прямих до рівнянь (Б.1) та (Б.4) отримаємо дві системи з n диференціальних рівнянь кожна

$$m_i \frac{\partial^2 V_i}{\partial t^2} + h_i \frac{\partial V_i}{\partial t} - k_i (V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}) = \frac{\partial F_i}{\partial t} - \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (\text{Б.7})$$

$$J_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} + \tau_i \frac{\partial \omega_i}{\partial t} - GJ_{pi} (\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}) = M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{Б.8})$$

де V_i — швидкість руху i -го елемента; F_i — зовнішня сила, що діє на i -й елемент; T_i — сила тяжіння, що діє на i -й елемент; h_i — коефіцієнт опору, що діє на i -й елемент; k_i — коефіцієнт пружності для i -го елемента; ω_i — частота обертання i -го елемента колони; M_i — момент кручення, що діє на i -й елемент τ_i — коефіцієнт опору обертальному руху i -го елемента колони; J_{pi} — полярний момент інерції i -го елемента колони.

Після інтегрування систем рівнянь (Б.7) та (Б.8) отримаємо

$$m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + h_i \frac{\partial x_i}{\partial t} - k(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) = F_i - T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (\text{Б.9})$$

$$J_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \tau_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - GJ_{pi} (\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}) = M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{Б.10})$$

де x_i та φ_i — координата i -го елемента; φ_i — кут зсуву i -го елемента.

Отримана модель у вигляді системи диференціальних рівнянь дозволяє провести декомпозицію вихідної моделі за змінними x та φ на n ланок. Якщо проводити декомпозицію далі на рівні отриманих ланок, то доцільно виділити в її структурі величини, які мають фізичний зміст, що дасть можливість реалізувати динамічні нелінійні залежності через статичні (наприклад, використання гістерезисної нелінійної залежності дозволяє відтворити в структурній моделі ефект втрати частини енергії деформації внаслідок внутрішнього тертя).

Після еквівалентних перетворень для реалізації i -х диференціальних рівнянь систем (Б.9) та (Б.10) отримаємо структурну ланку у вигляді підсистеми simulink-моделі, приведеної на рис. Б.1.

Отримана підсистема складає основу для побудови структурної комп'ютерної моделі, що реалізує системи рівнянь (Б.9)—(Б.10). З'єднання підсистем здійснюється у відповідності до зв'язків через параметри в системах диференціальних рівнянь (рис.Б.2).

Побудована таким чином структурна модель бурильної колони має ряд важливих властивостей. По-перше, дискретизація колони на ланки із зосередженими масами дає можливість для кожної ланки проводити уточнення моделі шляхом врахування певних особливостей на ділянках колони, в тому числі й нелінійних залежностей (наприклад, зміну температури з ростом глибини, а отже й інших параметрів моделі, які залежать від температури). По-друге, за рахунок організації прямих та зворотних зв'язків між ланками, модель є оборотною, що дає змогу здійснювати вхідні впливи та отримувати результати на рівні будь-якого структурного блоку моделі.

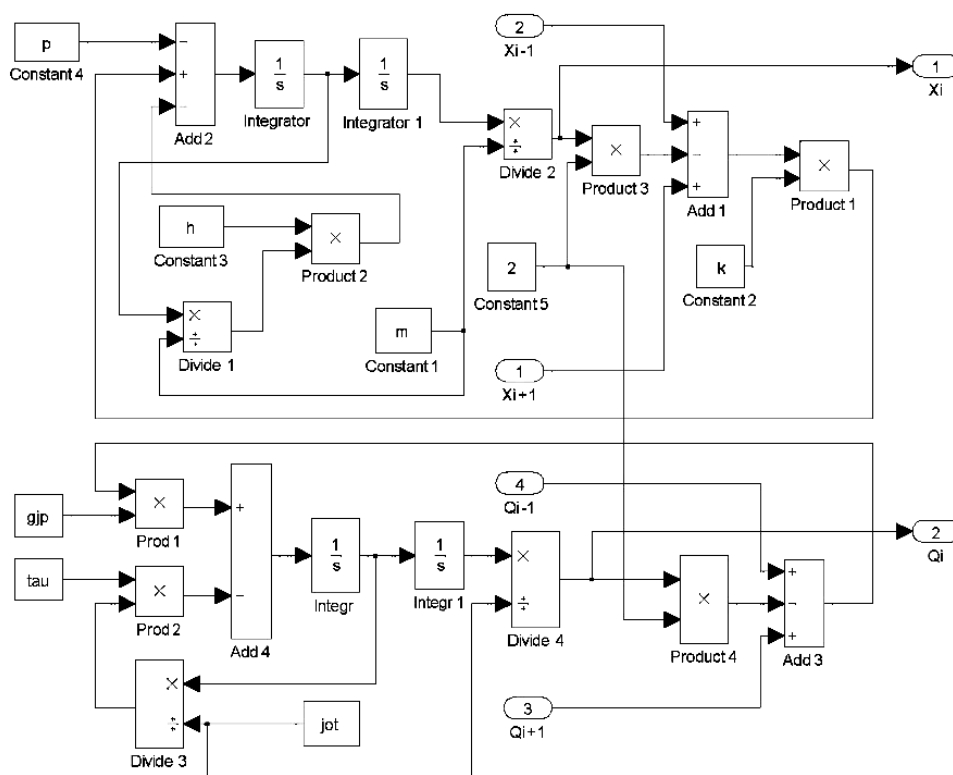


Рис. Б.1. Структурна реалізація підсистеми для моделювання ділянки колони при поступальному та обертовому русі

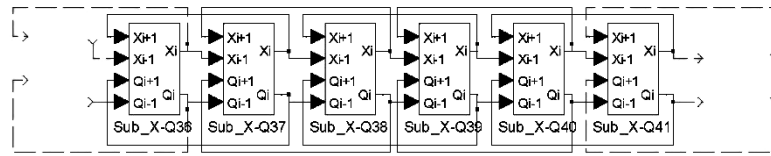


Рис. Б.2. Структурна реалізація ділянки колони

Слід зауважити, що рівняння системи (Б.9)—(Б.10) описують поведінку дискретних елементів, на які розбивається неперервний протяжний об'єкт з розподіленими параметрами. Наприклад, для протяжного однорідного стержня, який зазнає деформації розтягу-стиску і описується моделлю (Б.1)—(Б.3) апроксимаційна модель (Б.9), фактично, відображає систему n зосереджених мас, зв'язаних між собою пружними зв'язками. При цьому складові моделі (Б.9) мають конкретний фізичний зміст: перший доданок відображає силу інерції, другий — силу опору руху, третій — силу пружності і т. д. Тому для неоднорідних об'єктів можна змінювати параметри окремих рівнянь моделі, а також у кожне із рівнянь вносити додатково нелінійні залежності, які можна легко реалізувати у відповідній підсистемі *simulink*-моделі. Наприклад, якщо сила опору руху для k -того елементу залежить від квадрату його швидкості, то в *simulink*-моделі це відображається співвідношенням, де $f_k(t) = \mu(\dot{U}_k(t))^2$, μ — деяка постійна величина.

При побудові моделі бурильної колони зробимо припущення, що вона є однорідною на скінченній кількості ділянок ненульової довжини. Тоді в межах однієї такої ділянки будемо мати незмінні параметри. Розглянемо деякі з них.

Момент інерції ділянки колони масою m та довжиною l знаходимо з виразу

$$J = \frac{m(R^2 - r^2)l}{2},$$

де R та r , відповідно, зовнішній та внутрішній радіус колони.

Полярний момент інерції ділянки колони обчислюється за формулою

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right),$$

де d — зовнішній діаметр колони.

Момент опору, викликаний силами в'язкості при обертальному русі колони в промивальній рідині, обчислюється за формулою Маргулеса

$$\tau = \frac{4\pi\eta h\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - 1)r_T} \omega; \quad \varepsilon = \frac{R_C}{r_T},$$

де η — коефіцієнт в'язкості для промивальної рідини; h — довжина ділянки колони; R_C — радіус свердловини; r_T — зовнішній радіус перерізу бурильної труби.

Важливим моментом в процесі побудови комп'ютерної моделі бурильної колони є відтворення взаємодії долота із забоем свердловини. При обертанні шарошечного долота відбувається складний процес перекочування зубців вінця шарошки по забою та їх вдавлювання в породу, що викликає її руйнування. На рис. Б.3 схематично показано одноразовий акт перекочування зубця конічної шарошки навколо миттєвого центру обертання B_1 (B_2). Внаслідок цього вісь шарошки переміщується з точки O_1 в точку O_2 , а корпус долота зміщується у вертикальному напрямі на величину

$$h = r_\varepsilon \left(\cos\left(\frac{\pi}{z} - \omega_u t\right) - \cos\frac{\pi}{z} \right) \sin \beta,$$

де ω_{rc} — кутова швидкість обертання шарошки; r_ε — радіус периферійного вінця шарошки; z — число зубців шарошки; β — кут між віссю долота і віссю шарошки.

При повороті шарошки на кут $\varphi = \omega_{rc} t$ виникає момент сили, прикладений до осі шарошки

$$M_u = r_\varepsilon P \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{z}\right),$$

де P — сила, що діє на долото з боку бурильної колони. В положенні $\varphi = 0$ момент сили M_{rc} змінює знак, тобто на проміжку $[-\varphi_{\max}, 0]$ момент сили протидіє обертальному руху долота, а на проміжку $[0, \varphi_{\max}]$ прискорює його.

Особливістю процесу перекочування шарошки є те, що час t і кут $\varphi = \omega_{rc} t$ знаходяться в проміжках відповідно $0 \leq t \leq T_1$ і $0 \leq \omega_{rc} t \leq \frac{2\pi}{z}$, де T_1 — час перекочування шарошки із зубця на зубець. Параметри h , T_1 визначаються виходячи із допущень, що всі шарошки долота синхронно перекочуються по забою, тобто одночасно контактують з ним то одним, то двома зубцями. В момент перескоку з одного опорного зубця шарошки на другий швидкість майже миттєво

змінюється від максимального від'ємного значення до максимального додатного значення. В цей момент осьове прискорення теоретично прямує до нескінченості, а практично, враховуючи деформації елементів, набуває дуже великого значення.

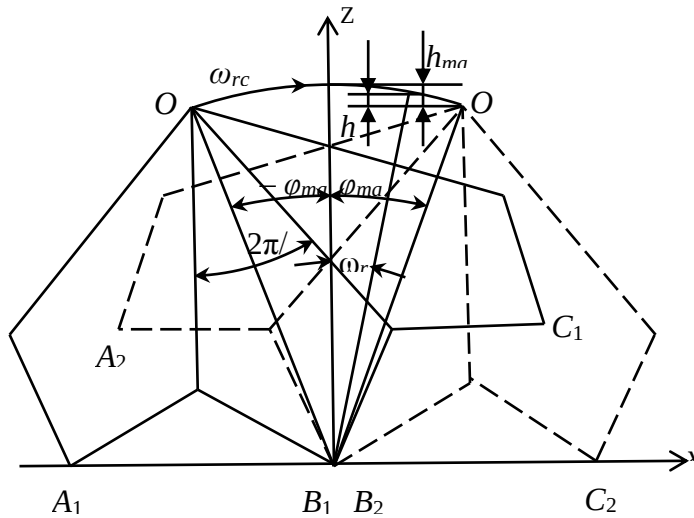


Рис. Б.3. Поворот периферійного вінця шарошки навколо миттєвого центру обертання

Для відтворення залежностей, що пов'язані з передачею обертального руху долота шарошкам, а також взаємодії зубців з породою використовується підсистема, приведена на рис. Б.4. Вважається, що при повному оберті долота відбувається рівномірне руйнування породи без утворення забійної рейки.

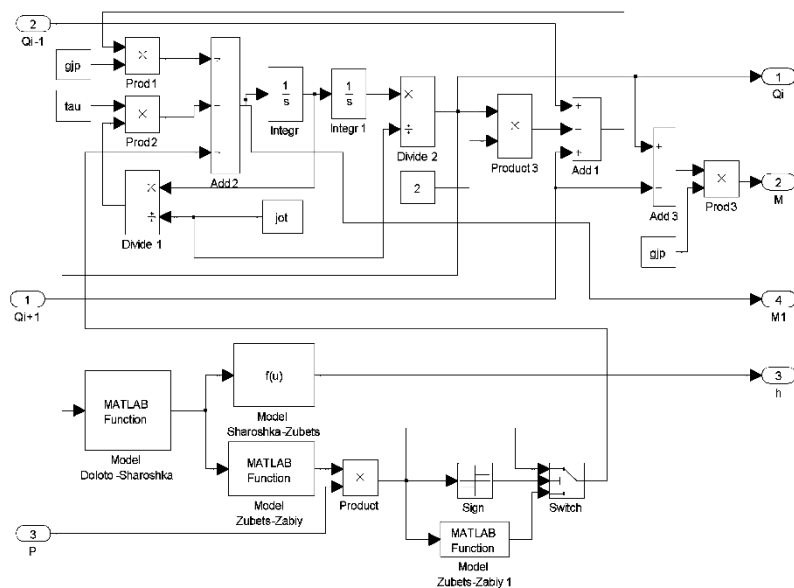


Рис. Б.4. Підсистема відтворення взаємодії долота з породою

Використаємо розроблені структурні елементи у вигляді підсистем для побудови моделі бурильної колони із урахуванням її поздовжнього та обертального руху та взаємодії долота із забоєм. Керуючими діями будемо вважати силу, прикладену зі сторони лебідки через талеву систему та момент сили зі сторони роторного столу або забійного двигуна. При цьому будемо враховувати: неоднорідність бурової колони внаслідок використання різнотипних бурильних труб; деформацію бурової вишки при навантаженні та її інертність; сили опору, викликані взаємодією промивальної рідини зі стінками колони; виштовхувальну силу та інерцію стовпа промивальної рідини; сили опору при взаємодії долота з породою та при перекочуванні шарошок. Вихідні параметри моделі представлені в таблиці Б.1 (Abubakirov, 2000), (Abubakirov, 2003).

Таблиця Б.1

Основні параметри механічної частини бурової установки

Параметр	Значення
Зовнішній діаметр Стальної Бурильної Труби (СБТ)	127 мм.
Довжина свічки (3 бурильні труби СБТ)	36.6 м
Внутрішній діаметр труби СБТ	113 мм.
Довжина Поважченої Бурильної Труби (ПБТ)	12.0 м
Зовнішній діаметр ПБТ	178 мм.
Внутрішній діаметр ПБТ	88 мм.
Коефіцієнт опору відносно швидкості свічки	920 Н·с/м
Густина речовини труби	7990 кг/м ³
Маса свічки зі СБТ	771.7151 кг
Маса ПБТ	1802.8 кг
Модуль Юнга для матеріалу труби	2.06 E+11 Н/м ²
Густина промивальної рідини	1150 кг/м ³
Коефіцієнт жорсткості для свічки із СБТ	1.5141 E+7 Н/м
Коефіцієнт жорсткості для свічки із ПБТ	3.2904 E+8 Н/м
Маса вишки	1.5 E+4 кг

Таблиця Б.1, продовження

Коефіцієнт жорсткості вишки	1.02 E+8 Н/м
Швидкість пружної деформації матеріалу труби	5.1267 E+3 м/с
Модуль пружності при зсуві	8.0 E+10 Н/м ²
Погонний момент інерції СБТ	11.8628 кг·м
Полярний момент інерції СБТ	9.5325 E-6 м ⁴
Погонний момент інерції ПБТ	64.7377 кг·м
Полярний момент інерції ПБТ	9.2668 E-5 м ⁴
Коефіцієнт в'язкості промивальної рідини	0.014 Па·с
Діаметр долота	190 мм
Діаметр шарошок	120 мм
Число зубців шарошки	24
Кут між віссю долота і шарошки	52°

Комп'ютерну модель колони бурильних труб подаємо у вигляді simulink-моделі зі з'єднанням підсистем, як приведено на рис. Б.2. Кожна підсистема моделює динаміку однієї бурильної труби в колоні. По мірі нарощення колони буде збільшуватись кількість підсистем моделі. В модель також входять ланки для відтворення динаміки бурової вишки, забійного двигуна, інерції промивальної рідини в свердловині, взаємодії долота з породою. Також в simulink-моделі присутні модулі для генерації вхідних впливів та реєстрації і відображення результатів. За допомогою отриманої моделі було проведено ряд обчислювальних експериментів. На рис. Б.5 відображено результати моделювання взаємодії шарошечного долота із дном свердловини.

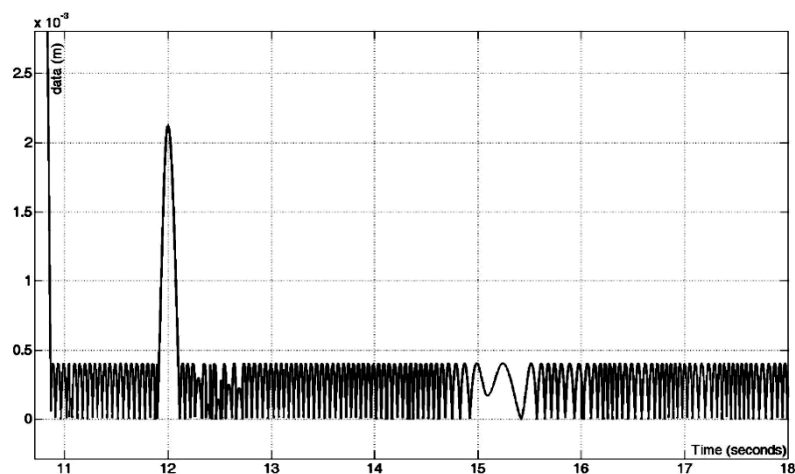


Рис. Б 5. Графік коливань корпусу долота

Колона в початковий момент часу знаходилась у підвішеному стані в промивальній рідині на висоті 0,42 м від дна свердловини. Для спуску колони було зменшено зусилля на крюку талевої системи на 7060 Н. В момент часу 10,78 с відбувся контакт шарошок долота з дном свердловини. На графіку спостерігається складний характер коливань долота, який викликаний в першу чергу змінами динамічного зусилля з боку колони на долото, а також силами, що виникають під час перекочування шарошок по забою. Також було отримано графік зміни навантаження на долото (рис. Б.6) при його контакті з дном свердловини.

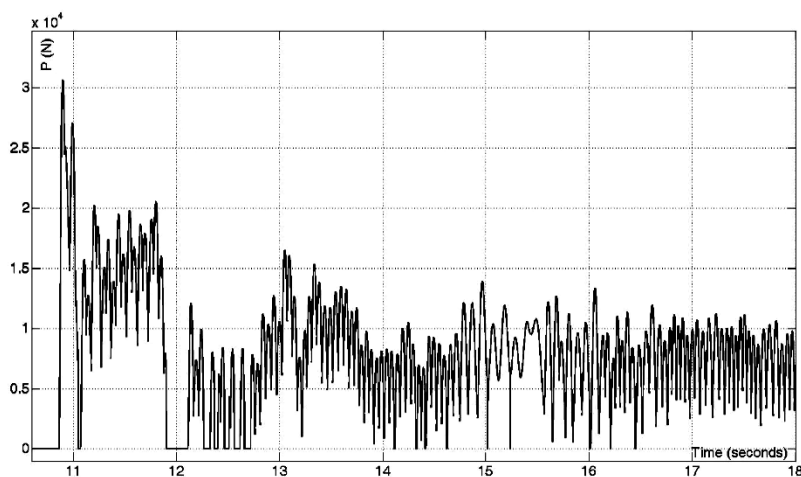


Рис. Б 6. Графік зміни навантаження на долото

Висновки.

1. Вирішується задача побудови і комп'ютерної реалізації математичної моделі бурильної колони бурової установки.

2. Запропонована апроксимаційна модель у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь. Побудована на їх основі комп'ютерна модель бурильної колони має ряд важливих властивостей: дозволяє відтворювати зміну фізичних параметрів на ділянках колони; відображати нелінійні залежності; модель є оборотною, що дає можливість здійснювати вхідні впливи і отримувати відгуки на рівні будь-якого структурного елементу моделі.

3. Запропонована модель дає змогу враховувати: неоднорідність бурильної колони при використанні різнотипних бурильних труб; деформацію бурової вишки при навантаженні та її інертність; сили опору, що викликані взаємодією промивальної рідини зі стінками колони; дію виштовхувальної сили, а також інерцію стовпа промивної рідини; силу опору при взаємодії долота з породою; перетік енергії при обертальному і поступальному русі колони внаслідок перекошування шарошок.

4. Наведені результати моделювання свідчать, що отримана модель може з успіхом використовуватися як на стадіях проектування обладнання бурової установки та розрахунку компонування бурильної колони, так і в системі управління для підтримки оптимальних режимів буріння при проходці свердловини, а також для оптимізації спуско-підйомних робіт. Крім того, модель може використовуватись в системі керування при проходці свердловини для підтримки оптимальних режимів буріння та для оптимізації спуско-підйомних робіт.

Список використаних джерел:

Б1. Navarro-López, E., (2010). Bit-sticking phenomena in a multi-degree-of-freedom controlled drill string. *Exploration and Production: Oil and Gas Review*, 8(2), pp. 70-75.

Б2. Fedorchuk V. A., (2010). Modelling of typical distributed elements of the mechanical system of the drilling rig. *Electronic modelling*, vol. 32. № 3. pp. 95-110.

Б3. Abubakirov, V. and Other, (2000). *Drilling equipment Reference book*. vol. 1, Moscow: Mineral resources.

Б4. Abubakirov, V. and Other, (2003). Drilling equipment: Reference book. vol. 2, Moscow: Mineral resources.

ДОДАТОК В. Моделювання електромагнітних процесів та енергетично ефективних режимів роботи надпровідникових електротехнічних систем енергозабезпечення

Одним з основних завдань, що стоять перед економікою України, є завдання створення нових енергозберігаючих технологій та обладнання. Широкі перспективи в цьому напрямку відкриваються при розробці та впровадженні електротехнічних систем (ЕТС) і комплексів, функціонування яких засноване на використанні явища надпровідності. Застосування нових високотемпературних надпровідникових матеріалів, розробка пристроїв, що використовують явище надпровідності, створюють реальні передумови для широкого практичного освоєння надпровідникових енергетичних пристроїв і систем.

Серед великомасштабних застосувань надпровідникових пристроїв слід відзначити такі області, як термоядерний синтез, індуктивні накопичувачі, генератори та двигуни постійного і змінного струмів, трансформатори, кабелі постійного і змінного струмів, високошвидкісний транспорт, пристрої для магнітної сепарації руд, опріснення морської води, фільтрації стічних вод та ін. В області енергетики – це пристрої на базі надпровідникових накопичувачів, основна економічна перевага застосування яких – відсутність активних втрат в матеріалі обмотки і різке зниження енерговитрат на їх живлення. В даний час найбільше поширення серед розглянутого класу систем енергозабезпечення з надпровідниковими пристроями отримали надпровідникові магнітні комплекси на основі надпровідникових енергонакопичувачів і, зокрема, магнітів постійного струму.

Однією з актуальних задач, пов'язаних із створенням надпровідникового магнітного комплексу є розробка систем їх енергозабезпечення. Найбільш перспективним є застосування класу систем енергозабезпечення з надпровідниковою перетворювальною підсистемою для вводу-виводу і стабілізації енергії в надпровідниковому магнітному комплексі, що відрізняється малими габаритами, високим ККД криогенної зони (більше 96 %), високою точністю регулювання і стабілізації рівня магнітного поля, наявністю засобів для введення

струму малого перетину, відсутністю механічно рухомих частин, реалізацією режиму неперервної стабілізації струму надпровідникового накопичувача, швидкодіючою системою аварійного виведення енергії.

Актуальність застосування надпровідникових систем в енергетиці обумовлена низкою їхніх специфічних переваг, таких як відсутність електричного опору, високі рівні критичних струмів і магнітних полів, ідеальні екрануючі властивості, фазовий перехід, квантові ефекти та ін.

Найбільшу складність у побудові системи енергозбереження на основі надпровідникового перетворювача представляє поєднання ряду суперечливих вимог, обумовлених специфікою функціонування елементів і пристроїв, що входять у систему. Все більшого значення набувають питання моделювання та розрахунку найбільш ефективних параметрів системи, визначення енергетично економічних режимів експлуатації.

Застосування надпровідникових (НП) ЕТС дозволяє забезпечити ефективне і якісне перетворення параметрів електричної енергії, а також накопичення і збереження її з малими втратами протягом тривалого інтервалу часу. Особливої актуальності питань розвитку НП систем і комплексів додають відкриття явища високотемпературної надпровідності і інтенсивні дослідження, що ведуться в цьому напрямку.

В даний час найбільше поширення серед ЕТС з НП пристроями отримали НП магнітні системи (НПМС). Зазначені системи знаходять широке застосування в різних областях промисловості і науково-дослідних розробках. Зокрема, вони використовуються при виготовленні НП пристроїв транспортного та енергетичного призначення (генератори, двигуни, накопичувачі енергії тощо), медичного обладнання (ЯМР томографи), обладнання для магнітної сепарації руд і в багатьох інших областях.

Перспективним є застосування НП статичних перетворювальних ЕТС введення-виведення енергії в надпровідниковий соленоїд (НПС), що характеризуються малими габаритами, високим ККД криогенної зони (більше 96%), високою точністю регулювання і стабілізації рівня магнітного поля. Специфіка

таких систем полягає в тому, що частина їх силових елементів виконана з НП матеріалів і знаходиться в зоні кріогенних температур, а узгодження параметрів первинного джерела живлення і НПС здійснюється за допомогою "теплого" напівпровідникового (НПр) автономного інвертора. При цьому значно (на кілька порядків) знижуються втрати енергії в "холодній" зоні системи. Іншим перспективним напрямком є розробка комбінованих джерел живлення НПМС, коли швидке введення енергії водиться за допомогою пристроїв прямого введення, а регулювання і стабілізація рівня енергії здійснюється за допомогою надпровідникової електротехнічної системи (НП ЕТС).

Сучасний етап у розвитку НП ЕТС характеризується підвищенням і жорсткістю функціональних та енергетичних вимог, що пред'являються до них, постійним розширенням сфери їх застосування, зростанням одиничних потужностей пристроїв. Зважаючи на це все більшого значення набувають питання вибору оптимальних параметрів системи, визначення енергетично економічних режимів експлуатації, розрахунку оптимальних алгоритмів керування, запобігання аварійних ситуацій. Розв'язок перерахованих питань стримується їх недостатнім теоретичним опрацюванням, що пояснюється складністю такого роду систем, що володіють ієрархічною структурою силових кіл і містять нелінійні елементи зі стрибкоподібними змінними параметрами. Ці характерні фактори обумовлюють приналежність НП ЕТС введення-виведення енергії до класу пристроїв, що моделюються електричними колами із змінною структурою (ЕТС із змінною структурою) [63, 65, 68].

В даний час розроблені різні методи і алгоритми моделювання ЕТС змінної структури, проте всі вони засновані на використанні пошукових процедур. Водночас специфіка НП ЕТС висуває підвищені вимоги до точності при розв'язуванні оптимізаційних задач (до $10^{-5} - 10^{-7}$), які можуть бути забезпечені тільки градієнтними методами оптимізації. При цьому застосування зазначених методів для НП ЕТС ускладнене відсутністю ефективних алгоритмів обчислення градієнтів функціоналів. Таким чином, розв'язок задачі моделювання ЕТС

введення-виведення енергії в НПС є досить важливою і актуальною проблемою, що представляє теоретичний і практичний інтерес [225].

В.1. Моделювання ЕТС введення-виведення енергії в надпровідниковий соленоїд

Сучасні ЕТС введення-виведення енергії в НП соленоїд забезпечують введення, виведення та стабілізацію струму НП обмотки соленоїда, а також зміну полярності створюваного ним магнітного поля. При вимкнутій лінії електротехнічної системи НПС автоматично переводиться в режим "замороженого потоку". Функціонально НП ЕТС включає наступні підсистеми: напівпровідникову перетворювальну (НПрПС), надпровідникову перетворювальну (НППС), рефрижерації (ПСР), вимірювання та захисту (ПСВЗ). "Холодна" зона системи містить надпровідниковий трансформатор (НПТ), з'єднаний з кріотрон-випрямлячем, а також контрольно-вимірювальні датчики і елементи захисту. "Тепла" зона системи складається з первинного джерела електроживлення та блоків системи управління і контролю. НПрПС і НППС пов'язані між собою провідниками малого струму [29].

В.1.1. Удосконалення режимів роботи і алгоритмів керування НП ЕТС за енергетичними критеріями

Через постійне розширення області застосування НП ЕТС і зростання їх одиничних потужностей все більшого значення отримують питання визначення енергетично економічних режимів експлуатації систем і розрахунку оптимальних алгоритмів їх роботи. У даному підрозділі основна увага приділяється постановці задачі оптимального введення енергії в НП навантаження.

Відмітимо, що оптимізаційні задачі для НПС та НП індуктивного накопичувача (НПІН) мають суттєві відмінності, що пов'язано з відмінностями їх функціонального призначення (при живленні НПІН основна увага приділяється значенню величини накопиченої в ньому енергії, при живленні НПС – величині струму, що протікає через нього) [34,43,53б 60].

Основні поняття та визначення [72].

Енергія, збережена в індуктивному навантаженні (W_H) [40]:

$$W_H = \frac{L_H \times I_H^2}{2}, \quad (\text{B.1})$$

де L_H – індуктивність навантаження, I_H – струм навантаження.

У разі складового навантаження вираз (B.1) приймає наступний вигляд:

$$W_H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_{Hi} \cdot I_H^2 + \sum_{i,j>i}^N M_{Hij} \cdot I_{Hi} \cdot I_{Hj},$$

де N – кількість секцій навантаження, L_{Hi} ($i = 1, 2, \dots, N$) – індуктивність i -ої секції навантаження, M_{Hij} , ($i, j = 1, 2, \dots, N$) – взаємна індуктивність i -ої та j -ої секції навантаження, I_{Hi} ($i = 1, \dots, N$) – струм i -ої секції навантаження.

Непродуктивні втрати енергії (W_{Π}):

$$W_{\Pi} = W_{\text{т.з.}} + W_{\text{х.з.}} + W_{\text{реф.}}$$

Де $W_{\text{т.з.}}$ – втрати енергії в «теплій зоні» НП ЕТС, $W_{\text{х.з.}}$ – втрати енергії в «холодній зоні» НП ЕТС, $W_{\text{реф.}}$ – необхідна енергія рефрижерації.

При цьому:

$$W_{\text{х.з.}} = W_{\phi} + W_{\text{тв}} + W_{\Gamma} + W_r,$$

де W_{ϕ} – фонові втрати кріостата, $W_{\text{тв}}$ – втрати енергії через токовводи, W_{Γ} – гістерезисні та інші втрати в НП матеріалах, W_r – тепловиділення на елементах НППС,

$$W_{\text{реф}} = K_p \cdot W_{\text{х.з.}},$$

де K_p – коефіцієнт рефрижерації.

В свою чергу, W_r включають в себе втрати від «зворотних струмів» на інтервалах вводу енергії $W_{\text{в}}$ та комутаційні втрати $W_{\text{к}}$. Коефіцієнт корисної дії пристрою (η):

$$\eta = \frac{W_H}{W_H + W_{\Pi}}.$$

Коефіцієнт корисної дії "холодної зони" ($\eta_{\text{х.з.}}$):

$$\eta_{\text{х.з.}} = \frac{W_H}{W_H + W_{\text{х.з.}}}. \text{Звісно ж правильніше обчислювати } \mathbf{Error! \text{ Reference source not found.}}$$

found. з урахуванням втрат на рефрижерацію, тобто за такою формулою:

$$\eta_{x.3} = \frac{W_H}{W_H + K_p + W_{x.3}}.$$

Зазначені величини втрат функціонально залежать від вектора параметрів НП ЕТС, які умовно можна розбити на три компоненти:

1) $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$ – конструктивні параметри НППС (розміри елементів системи, параметри взаємного розташування елементів, характеристики використовуваних матеріалів та ін.);

2) $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ – електромагнітні параметри НППС (індуктивності обмоток НПТ і НПС, взаємоіндукції між обмотками НПТ, опору контактів, кріотронів, первинного кола НПТ та ін.);

3) $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ – параметри системи управління (частота роботи пристрою, тривалість інтервалів введення, коефіцієнт комутації, час охолодження і нагріву кріотронів та ін.)

Для підвищення ефективності НП ЕТС особливе значення має зниження втрат в "холодній зоні" системи ($W_{x.3}$), що пов'язано зі значними витратами на рефрижерацію. При цьому втрати в НП матеріалах (W_r), зазвичай, дуже малі в порівнянні з іншими видами втрат, а втрати енергії на токоввід ($W_{ТВ}$) часто враховуються непрямым чином, наприклад, обмеженням потужності тепловиділень ($P_{ТВ}$) на токовводі:

$$P_{ТВ} \leq \bar{P}_{max},$$

де $\bar{P}_{max}$ – максимально допустима величина потужності тепловиділень на струмовводах, або обмеженням струму (I_p) в первинній обмотці НПТ:

$$|I_p| \leq \bar{I}_{pmax},$$

де $\bar{I}_{pmax}$ – максимально допустима величина струму, що протікає через токовводи.

Енергетично оптимальне живлення НППН. Потрібно за час $T_{зап}$, що не перевершує заданої величини $\bar{T}_{max}$, ввести в НППН енергію W_H , не меншу заданій величині W_H , отримавши при цьому максимальне значення ККД або витративши мінімум непродуктивної енергії [75]. Після формалізації отримуємо задачу нелінійного програмування.

Задано $P_{спін}$: знайти

$$\max \eta(\alpha, \beta, \gamma) \text{ або } \min W_{\Pi}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{при}$$

$$T_{\text{зап}}(\alpha, \beta, \gamma) \leq \bar{T}_{\text{зап}}; \quad (\text{B.2})$$

$$\bar{I}_H \cdot (1 - \varepsilon) \leq I_n^k(\alpha, \beta, \gamma) \leq \bar{I}_H \cdot (1 + \varepsilon); \quad (\text{B.3})$$

$$|I_p(\alpha, \beta, \gamma)| \leq I_{p\max}; \quad (\text{B.4})$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega \subseteq R^{k \cdot m \cdot n}. \quad (\text{B.5})$$

Нерівності (B.2) – (B.5) задають обмеження на час живлення, введену в навантаження енергію і потужність тепловиділень на токовводи. Співвідношення (B.5) задає прямі обмеження на параметри НП ЕТС (Ω – область допустимих значень параметрів).

Поряд з критеріями **Error! Reference source not found.**, що характеризують ефективність всієї системи, часто використовуються критерії, що характеризують ефективність її "холодної зони", а саме:

$$\max \eta_{\text{х.з.}}(\alpha, \beta, \gamma) \text{ або } \min W_{\text{х.з.}}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Енергетично оптимальне живлення НПС. Потрібно за час $T_{\text{зап}}$, що не перевищує величину $\bar{T}_{\text{мак}}$, ввести в НПС струм, близький до заданого значення $\bar{T}_{\text{мак}}$, витративши при цьому мінімум енергії. Після формалізації отримуємо задачу нелінійного програмування.

Задано $P_{\text{НПС}}$: знайти

$$\min W_{\Pi}(\alpha, \beta, \gamma) \text{ або } \min W_{\text{х.з.}}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{B.6})$$

при

$$T_{\text{зап}}(\alpha, \beta, \gamma) \leq \bar{T}_{\text{зап}}; \quad (\text{B.7})$$

$$\bar{I}_H \cdot (1 - \varepsilon) \leq I_n^k(\alpha, \beta, \gamma) \leq \bar{I}_H \cdot (1 + \varepsilon); \quad (\text{B.8})$$

$$|I_p(\alpha, \beta, \gamma)| \leq I_{p\max}; \quad (\text{B.9})$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega \subseteq R^{k \cdot m \cdot n}. \quad (\text{B.10})$$

де ε – задана точність стабілізації струму навантаження. Нерівності (B.7) – (B.10) задають обмеження на час живлення, точність стабілізації струму навантаження і потужність тепловиділень на токовводи. Співвідношення (B.10) задає прямі обмеження на параметри НП ЕТС.

Аналіз електромагнітних процесів, що протікають в гілках НППС.

Конкретні вирази для введених понять і співвідношень отримуються на основі аналізу перехідних електромагнітних процесів в НППС. Для отримання однакової форми аналізу різних схем доцільно використовувати узагальнену схему НП вентильного перетворювального пристрою, що працює на НП навантаження.

У цьому випадку НП підсистема складається з m_1 замкнутих контурів первинних обмоток НПТ і m_2 замкнутих контурів вторинних обмоток НПТ. Всі вторинні контури містять у своєму складі НП навантаження (соленоїд) і НП ключовий елемент (кріотрон).

Надалі використовуються наступні позначення:

$U_p(t) = \{U_{p1}(t), \dots, U_{pm1}(t)\}^T$ – вектор напружень, що створює НПрПС і подаються на первинні обмотки НПТ;

$I_p(t) = \{I_{p1}(t), \dots, I_{pm1}(t)\}^T$ – вектор величин струмів в контурах первинних обмоток НПТ;

$R_p(t) = \{R_{p1}(t), \dots, R_{pm1}(t)\}^T$ – вектор величин напруги в контурах первинних обмоток НПТ;

$I_s(t) = \{I_{s1}(t), \dots, I_{sm2}(t)\}^T$ – вектор величин струмів в контурах вторинних обмоток НПТ;

$R_s(t) = \{R_{s1}(t), \dots, R_{sm2}(t)\}^T$ – вектор величин опору в контурах вторинних обмоток НПТ.

Застосувавши метод контурних струмів до схеми перетворення НППС і перетворивши отриману систему диференціальних рівнянь (СЗДР) до нормальної форми, отримаємо таку систему рівнянь, що описує електромагнітні процеси в ЕТС і зручну для аналізу цих процесів на ЕОМ, а саме

$$\frac{dI_p}{dt} = A_{pp} \cdot \text{diag}(R_p) \cdot I_p + A_{ps} \cdot \text{diag}(R_s) \cdot I_s + B_p \cdot U_p \quad (B.11)$$

$$\frac{dI_s}{dt} = A_{sp} \cdot \text{diag}(R_p) \cdot I_p + A_{ss} \cdot \text{diag}(R_s) \cdot I_s + B_s \cdot U_p$$

де A_{pp} , A_{ps} , A_{sp} , A_{ss} – матриці коефіцієнтів системи (B.11) розмірності, відповідно, $(m_1 \cdot m_1)$, $(m_1 \cdot m_2)$, $(m_2 \cdot m_1)$ і $(m_2 \cdot m_2)$; B_p , B_s – матриці коефіцієнтів вільних членів системи (B.11) розмірності, відповідно, $(m_1 \cdot m_1)$, $(m_2 \cdot$

m_1); $diag(R_p)$ – діагональна $(m_1 \cdot m_1)$ матриця з елементами вектора R_p на головній діагоналі; $diag(R_s)$ – діагональна $(m_2 \cdot m_2)$ матриця з елементами вектора R_s на головній діагоналі. Зауважимо, що коефіцієнти і вільні члени правої частини системи (B.11) є функціями параметрів (α, β, γ) .

Струм навантаження в момент часу t обчислюється за формулою

$$I_H(t) = \sum_{i=1}^{m_2} I_{si}(t).$$

Кожен цикл роботи НП ЕТС складається з декількох функціональних інтервалів. Складається таблиця, що описує структуру НППС на кожному інтервалі роботи.

Щоб отримати СЗДР, що описує електромагнітні процеси на конкретному інтервалі, необхідно в співвідношенні (B.11) замінити R_p, R_s, U_p конкретними їх значеннями згідно з таблицею В.1.

Величини $t_B^i, t_{\Pi}^i, t_K^i, t_H^i$ задають тривалості інтервалів на i -му циклі роботи НП ЕТС. При цьому вони можуть мати постійні значення (в багатьох практичних реалізаціях вважають $t_{\Pi}^i = \text{const}$, $t_H^i = \text{const}$; використовуються також алгоритми роботи НП ЕТС, коли $t_{\Pi}^i = \text{const}$ або $t_H^i = \text{const}$); можуть використовуватися як керуючі параметри НППС і, нарешті, визначатися з деяких умов перемикання структури. Наприклад, t_K^i визначається з умови завершення процесу комутації струму, а саме умовою:

$$t_K^i = t, |I_{sj}(t, \alpha, \beta, \gamma)| \leq \varepsilon,$$

де ε – точність комутації в j -му вторинному НП контурі.

Таблиця В.1.

Структура ЕТС на інтервалах роботи системи

Інтервал	Введення	Пауза	Комутація	Нагрів
Опір первинної обмотки	R_p^B	R_p^{Π}	R_p^K	R_p^H
Опір вторинної обмотки	R_s^B	R_s^{Π}	R_s^K	R_s^H
Керуючий сигнал	U_p^B	U_p^{Π}	U_p^K	U_p^H
Тривалість інтервалу	t_B^i	t_{Π}^i	t_K^i	t_H^i

Таким чином, ЕТС введення-виведення енергії в НП соленоїд належить до класу електротехнічних динамічних систем змінної структури з перемиканнями на сигнальних поверхнях.

Обчислимо величину запасеної в НП соленоїді енергії та кількість тепловиділень в НП підсистемі за N циклів роботи ЕТС. У силу сказаного:

$$T_{\text{зап}} = \sum_{i=1}^N (t_B^i + t_{\Pi}^i + t_K^i + t_H^i),$$

$$I_H(T_{\text{зап}}) = \sum_{i=1}^{m_2} I_{S1}(T_{\text{зап}} \cdot \gamma),$$

$$W_{\text{х.з}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_2} \left(\int_{t_B^i} R_{Sj}^B \cdot I_{Sj}^2(\tau) d\tau + \int_{t_{\Pi}^i} R_{Sj}^{\Pi} \cdot I_{Sj}^2(\tau) d\tau + \int_{t_H^i} R_{Sj}^H \cdot I_{Sj}^2(\tau) d\tau \right),$$

$$\text{де } \gamma = (t_B^i, t_{\Pi}^i, \dots, t_K^n, t_H^n)^T.$$

На інтервалі комутації тепловиділень не відбувається (всі ключі НППС знаходяться в НП стані), на інтервалі нагріву кріотрону тепловиділення відбуваються тільки в разі неточної комутації ЕРС, на інтервалі остигання кріотрон (паузи) тепловиділення незначні, тобто цим доданком у співвідношенні можна знехтувати.

Вектор варійованих параметрів (α, β, γ) має скінченну розмірність, змінні стану $I_p(t)$ і $I_s(t)$ є розв'язками СЗДР із змінною структурою (B.11). У цьому випадку задачу мінімізації тепловиділень НППС і максимізації ККД системи ($P_{\text{спін}}$) можна віднести до класу задач параметричної оптимізації ЕТС із змінною структурою з обмеженнями на змінні стану.

В.1.2. Методи та алгоритми моделювання та удосконалення ЕТС із змінною структурою

Системи зі змінною структурою є одним з найбільш широких підкласів класу розривних динамічних систем. До вказаного класу належать також системи з розривною правою частиною, з розривної траєкторією, з імпульсним управлінням, з керованими стрибками, багатоступеневі динамічні системи та інші.

Системи зі змінною структурою можна розглядати як сукупність із декількох неперервних систем (структур) з послідовним режимом їх включення. Початкові значення змінних стану кожної наступної системи залежить від кінцевих значень

змінних стану попередньої. Моменти перемикання структур можуть бути фіксованими, можуть бути керуючими параметрами або неявно задаватися виходом розв'язування системи на деякі поверхні перемикання. Такі системи використовуються в різних галузях науки, економіки і техніки. Наприклад, (s, S)-стратегії в теорії управління запасами, для яких в моменти поставок рівні запасів мають розриви; макроекономічні моделі в економіці, в яких відбувається перемикання структур в моменти введення в експлуатацію нових потужностей; управління завантаженням ядерного реактора, коли в моменти завантаження терплять розриви концентрації компонент ядерного палива; управління рухом багатоступінчастого літального апарату, коли в моменти відділення ступенів відбуваються стрибки маси апарату; управління роботою інверторів струму або напруги, для яких при виконанні належних умов змінюється структура схеми випрямлення та інші.

Найбільш широке поширення системи із змінною структурою отримали серед ЕТС різного функціонального призначення, таких як керовані випрямлячі, автономні інвертори, компенсатори реактивної потужності, індуктивно-ємнісні перетворювачі, широтно-імпульсні перетворювачі, перетворювачі частоти та ін.

Останнім часом все більшого поширення серед ЕТС отримують надпровідникові ЕТС вводу-виводу і перетворення енергії. Такі системи мають ряд специфічних властивостей, пов'язаних з наявністю НП елементів і вузлів. Це, наприклад, нескінченно малий опір окремих контурів системи ($10^{-10} - 10^{-16}$ Ом), висока чутливість НП елементів до змін теплового і магнітного полів (магнітне поле в 1 Тл знижує величину критичного струму на 20%, а перегрів кріотрона на 5% збільшує час відновлення його надпровідних властивостей у 2 рази). Ці та інші особливості НП ЕТС висувають підвищені вимоги до системи, режимів роботи і алгоритмів управління всіх підсистем ЕТС, що, в свою чергу, вимагає більш точного підходу до моделювання електромагнітних процесів.

Для вирішення завдань моделювання ЕТС зі змінною структурою природно застосувати добре розвинений апарат нелінійного програмування. Залежно від трудомісткості процесу обчислення значень функцій та їх градієнтів методи

оптимізації можна умовно розділити на дві групи. Перша група об'єднує методи, які не потребують обчислення градієнтів, тобто, пошукові методи. До їх переваг можна віднести універсальність, стійкість і відносну легкість практичної реалізації, до головних недоліків – малу швидкість збіжності до розв'язку задачі. У силу сказаного пошукові методи використовуються тільки в тих випадках, коли використання більш регулярних методів з якоїсь причини не є можливим або коли вимагається за короткий час отримати грубий розв'язок. Для НП ЕТС пошукові методи використовуються на етапі локалізації необхідного оптимального розв'язку. Методи другої групи широко використовують значення градієнтів функцій, що дозволяє знаходити екстремальні точки функції за мінімальне число кроків. Практична ефективність методів другої групи істотно залежить від трудомісткості обчислення похідних всіх вхідних функцій.

Специфіка НП ЕТС вимагає підвищеної точності розв'язування оптимізаційних задач, яка може бути забезпечена тільки методами другої групи. При цьому слід зазначити, що для ЕТС зі змінною структурою обчислення градієнтів функціоналів є алгоритмічно складним і обчислювально трудомістким процесом через необхідність багаторазового визначення функцій чутливості розв'язку ЕТС до зміни початкових значень і параметрів.

Особливої актуальності набуває питання розробки єдиного підходу до отримання функцій чутливості для різних ЕТС із змінною структурою, включаючи надпровідникові.

Зупинимось на класифікації методів розв'язування задач умовної оптимізації, а саме задач виду:

Знайти:

$$\min f(x) \quad (B.12)$$

при $g_1(x) \leq 0, i = 1, \dots, m; h_1(x) = 0, i = 1, \dots, p,$
де $f(x), g_1(x), i = 1, \dots, m; h_1(x), i = 1, \dots, p: R^n \rightarrow R^1.$

Вибираючи за основу класифікації тип допоміжних підзадач, що розв'язуються на кожному ітераційному кроці, можна умовно розділити більшість методів рішення оптимізаційних задач з обмеженнями на дві групи.

До першої групи віднесемо ті методи, при реалізації яких приходиться на кожному кроці вирішувати задачу мінімізації лінійної або квадратичної функції при лінійних обмеженнях. Це, перш за все, різні варіанти методів можливих напрямків, відсікання, проекцій градієнта, лінеаризації. Другу групу становлять методи, за допомогою яких шукані розв'язки визначаються як межі послідовності безумовних мінімумів спеціальним чином сконструйованих допоміжних функцій: методи штрафів, бар'єрів, модифікованих функцій Лагранжа.

При використанні методів першої групи для виконання кожного кроку алгоритму необхідно мати градієнти $m + p + l$ функції (f, g_1, h_1) . Для методів другої групи досить на кожному кроці обчислювати градієнти однієї спеціальним чином побудованої функції. В силу високої трудомісткості обчислення градієнтів для ЕТС зі змінною структурою перевага буде віддаватися методам другої групи. Серед останніх виділимо методи негладких штрафних функцій. У цьому випадку вихідна задача (В.12) замінюється задачею безумовної мінімізації негладкої функції штрафу виду:

$$S(x) = f(x) + C_1 \cdot \sum_{i=1}^m (\max\{0, g_1(x)\}) + C_2 \cdot \sum_{i=1}^p |h_{1(x)}|, \quad (\text{В.13})$$

де C_1 і C_2 – коефіцієнти штрафу.

При достатньо великих коефіцієнтах штрафу розв'язок задачі (В.13) збігається з розв'язком задачі (В.12). Практичне значення запропонованого підходу досить велике. Справа в тому, що звичайні гладкі штрафні функції, наприклад, з квадратичним штрафом, виду:

$$S_1(x) = f(x) + S_i^1 \cdot \sum_{i=1}^m (\max\{0, g_1(x)\})^2 + \sum_{i=1}^p S_i^2 |h_{1(x)}|^2 \quad (\text{В.14})$$

при мінімізації з будь-якими кінцевими позитивними $\{s_i^1\}_{i=1}^m, \{s_i^2\}_{i=1}^p$ дають лише наближення до оптимального розв'язку оптимізаційної задачі. Для отримання розв'язку з великою точністю при використанні штрафних функцій виду (В.14) потрібно працювати з великими коефіцієнтами штрафу, при цьому мінімізація стає погано обумовленою. Для подолання цих труднощів запропоновано підхід, заснований на модифікованих функціях Лагранжа, однак і при цьому підході задачу безумовної мінімізації потрібно вирішувати багатократно. При

використанні точних негладких функцій штрафу (В.13), як правило, вдається, використовуючи апріорні оцінки множників Лагранжа, обмежитися одноразовим розв'язанням задачі безумовної мінімізації та працювати при цьому з помірними значеннями штрафних коефіцієнтів.

Для мінімізації негладкої функції штрафу (В.13) необхідно скористатися одним з методів безумовної недиференційованої оптимізації. Відзначимо серед них методи узагальненого градієнтного спуску, еліпсоїдів, відсікаючих площин Келлі, ϵ -субградієнтів та інші.

Останнім часом при розв'язуванні негладких задач широке поширення набули методи з розтягненням простору, зокрема метод узагальненого градієнтного спуску з розтягом простору в напрямку різниці двох послідовних майже-градієнтів (γ -алгоритм). Метод має високу швидкість збіжності і добру стійкість, забезпечує спадання функції на кожному кроці. Застосування γ -алгоритму дозволяє ефективно використовувати метод негладких штрафних функцій при розв'язуванні складних задач умовної оптимізації.

Отже, для підвищення енергетичної ефективності процесів введення-виведення енергії в НПС доцільно враховувати наступні характерні особливості НП ЕТС: теплову енергію, що виділяється в НППС (компенсується ПСР з високим коефіцієнтом рефрижерації); стан надпровідності елементів НППС (елементи схильні до одночасного впливу електричного, магнітного та теплового полів, що створюються компактно розташованими блоками системи та навантаження); інерційність теплових процесів в кріотронах (зменшує частоту роботи системи, збільшує час відновлення НП стану). Наявність нелінійних НП елементів з параметрами, що змінюються стрибкоподібно, і особливість системи, пов'язана зі зміною структури силового кола на окремих інтервалах, обумовлюють приналежність НП ЕТС до класу пристроїв зі структурою, що моделюється колами зі змінною структурою та перемиканнями на сигнальних поверхнях.

В.1.3. Моделювання, дослідження і розробка ЕТС введення-виведення енергії в надпровідниковий соленоїд

Складність розв'язуваних при моделюванні НП ЕТС задач потребувало розробки комплексу математичних моделей фізичних процесів в НПр і НП перетворювальних підсистемах, що включають оптимізаційні моделі, які дозволяють отримувати енергетично оптимальні алгоритми роботи і розробляти оптимальні конструкції НППС.

На основі розробленої математичної моделі створений програмний комплекс, що моделює енергетично ефективні режими роботи НП ЕТС. Комплекс реалізований на мові програмування С#.

Архітектура програмного комплексу моделювання НП ЕТС (рис. В.1) включає кілька автономних модулів. Це модуль роботи з користувачем, модуль обробки результатів та модуль розрахунку енергетично ефективних режимів роботи СП ЕТС.



Рис. В.1. — Архітектура програмного комплексу моделювання НП ЕТС

Для прикладу наведемо результати дослідження залежності швидкості введення енергії від точності проведення процесу комутації (рис. В.2). Червона крива характеризує роботу НП ЕТС в режимі точної комутації ЕРС; зелена –

змішаний режим з 50 % комутацією ЕРС; крива синього кольору – режим комутації опором.

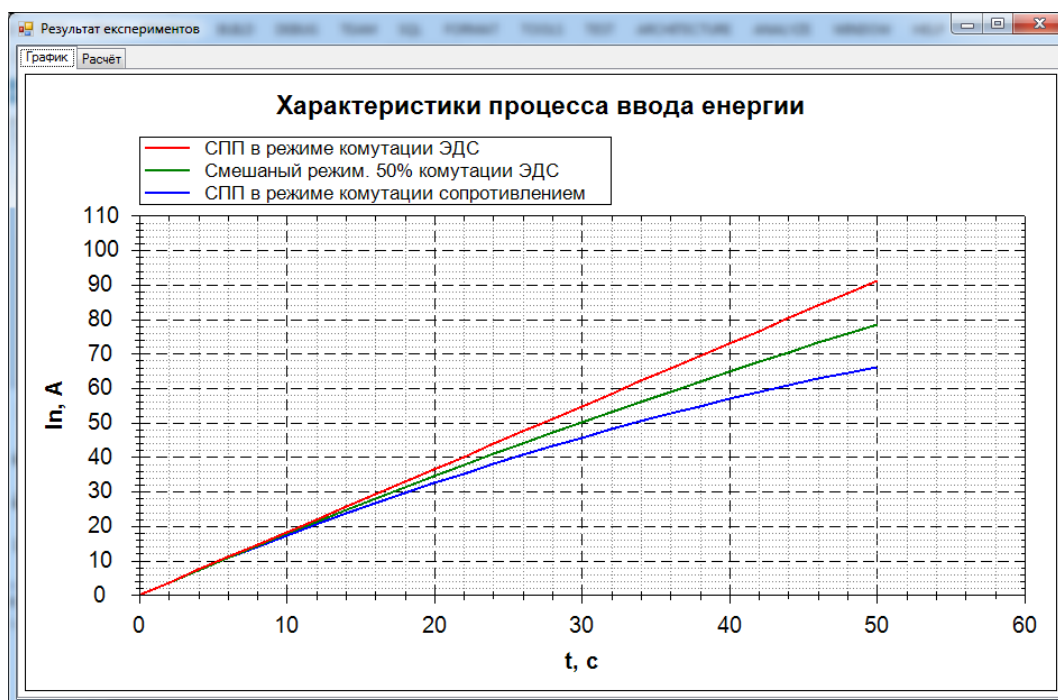


Рис. В.2. Результати дослідження швидкості введення енергії від точності проведення процесу комутації

При цьому розраховувалися також величини втрат в НППС (рис. В.3).

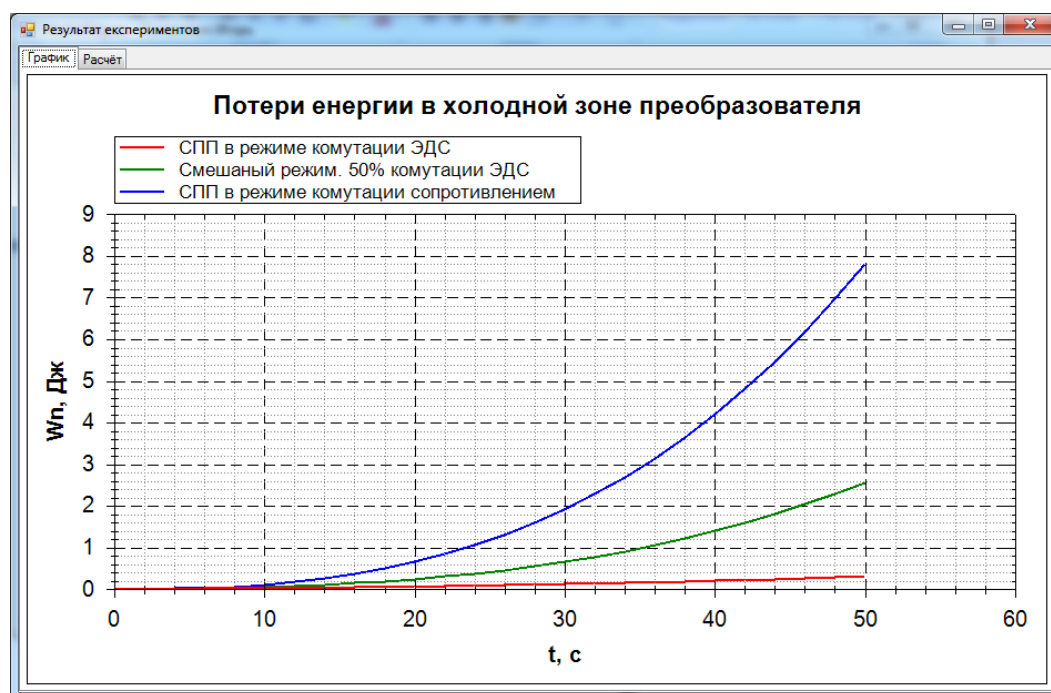


Рис. В.3. Результати дослідження втрат енергії в "холодній зоні" НП перетворювача

Як видно з графіків, для невеликих рівнів струмів в НПС (до 20 А) досліджувані режими практично рівноцінні. При великих струмах режим комутації ЕРС значно ефективніший.

Останній і найбільший модуль програмного комплексу – модуль розрахунку енергетично ефективних режимів роботи НП ЕТС. В його основу покладена методика розв'язування оптимізаційних задач для ЕТС із змінною структурою, що включає використання точних штрафних функцій (програма FUNSPP), алгоритми обчислення майже-градієнтів цільових функціоналів (програми GRAD1, GRAD2) і алгоритм негладкої оптимізації з розтягуванням простору (програма RALG).

Модулі дозволили вирішити такі задачі: розрахувати енергетично оптимальні режими роботи і алгоритми управління НП ЕТС; показати енергетичну ефективність у багатьох практичних випадках режиму комутації ЕРС та алгоритму роботи з постійною амплітудою струму первинної обмотки НПТ.

Експериментальне дослідження розробленої системи розрахунку енергетично ефективних режимів роботи НП ЕТС. Розв'язування задачі підвищення енергетичної ефективності НП ЕТС розглядатиметься на прикладі системи, виконаної на основі двохнапівперіодної схеми випрямлення з середньою точкою, де здійснюється "накачування" струму в НПС за принципом "насоса потоку". До теперішнього часу в світовій практиці відомі більш 20 різних розробок однофазних НП ЕТС на струми від 5 А до 25 кА, потужністю 0,1 ÷ 1,5 кВА, частотою комутації 0,01 ÷ 20 Гц і накопиченої в навантаженні енергії до 27 кДж. На рис. В.4 наведена еквівалентна силова схема НППС, виконана за схемою з середньою точкою. При цьому вибір конструкції визначався потужністю криогенного обладнання, а також вимогами до НП навантаження.

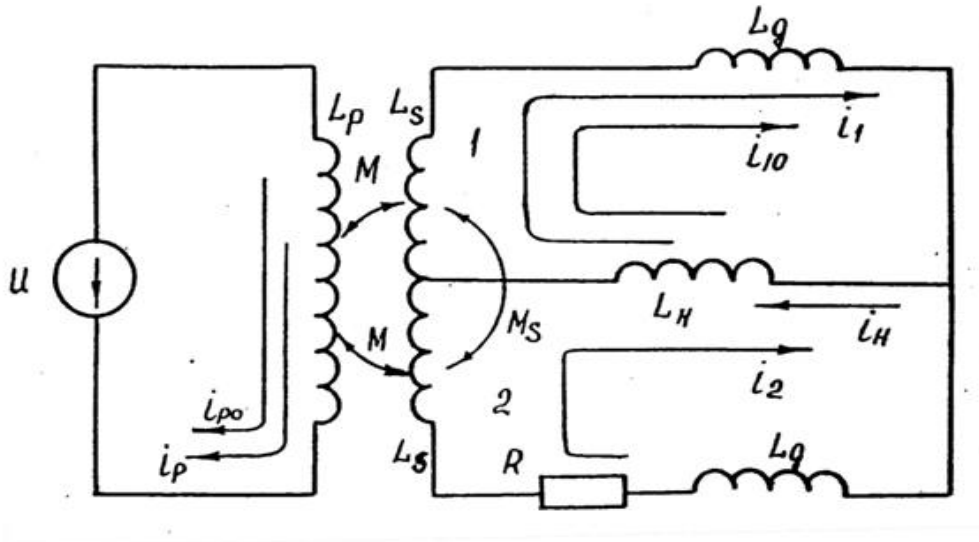


Рис. В.4. — Еквівалентна схема НППС з середньою точкою

Згідно з методом контурних струмів, застосованому до схеми на рис. В.4, отримаємо для однофазної двохнапівперіодної з середньою точкою НППС наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} L_{\Sigma} & M_s - L_H M \\ M_s - L_H & L_{\Sigma} & M \\ M & M & L_p \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{dI}{dt} \right] = \begin{bmatrix} -R_1 \cdot I_1 \\ -R_2 \cdot I_2 \\ -U_p - R_p \cdot I_p \end{bmatrix}.$$

де $I = \{I_1, I_2, I_p\}^T$.

Для зручності аналізу приведемо її до нормальної форми Коші:

$$\frac{dI_1}{dt} = -\alpha_1 R_1 I_1 - \alpha_2 R_2 I_2 + \alpha_3 R_p I_p + \alpha_3 U_p,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = -\alpha_2 R_1 I_1 - \alpha_1 R_2 I_2 + \alpha_3 R_p I_p + \alpha_3 U_p,$$

$$\frac{dI_p}{dt} = +\alpha_3 R_1 I_1 + \alpha_3 R_2 I_2 - \alpha_4 R_p I_p - \alpha_4 U_p,$$

де $L_{\Sigma} = L_H + L_s + L_g$; L_H — індуктивність навантаження (УПС); L_p , L_s — індуктивності первинної та вторинної обмоток НПТ; L_g — індуктивність кріотронів; R_1 , R_2 , R_p — опори кріотронів і еквівалентний опір первинної котушки НПТ; M , M_s — взаємні індуктивності між первинною обмоткою та вторинної напівобмотки і між вторинними напівобмотками НПТ, відповідно,

$$\alpha_1 = \frac{C_1}{(L_{\Sigma} + L_H - M_s)(C_1 - C_2)}, \quad \alpha_2 = \frac{C_2}{(L_{\Sigma} + L_H - M_s)(C_1 - C_2)}, \quad \alpha_3 = \frac{M}{C_1 - C_2}, \quad \alpha_4 = \frac{(L_{\Sigma} + L_H - M_s)}{C_1 - C_2}, \quad C_1 = L_p \cdot L_{\Sigma} - M^2, \quad C_2 = L_p \cdot (L_{\Sigma} - M_s) + M^2.$$

Маючи вирази для енергетичних показників, приступимо до задачі оптимального параметричного управління введенням енергії в НПС за допомогою двохнапівперіодного НП ЕТС з середньою точкою (рис. В.4). Згідно з алгоритмом роботи НПС вектор управління для математичної моделі складається з наступних величин:

$$\gamma = (U_p, t_B, t_{п1}, t_{п2}, t_k, t_H)^T,$$

де $t_{п1}$ позначає тривалість паузи для стабілізації НП стану кріотронів; $t_{п2}$ – час для підготовки до включення кріотрона; t_H – час нагрівання кріотрона. Нехай величини $t_{п1}, t_{п2}, t_H$ є незмінними (це справедливо для всіх практичних реалізацій алгоритмів керування), а t_B та t_k – керованими. Крім обмеження на позитивність цих величин, маємо обмеження на тривалість циклу роботи:

$$t_{ц} = t_B + t_{п1} + t_{п2} + t_k + t_H, t_{ц}^{min} \leq t_{ц} \leq t_{ц}^{max}$$

і на амплітуду струму в первинній обмотці НПС: $\max \|I_p(t)\| \leq \bar{I}_p$.

Конкретизуємо мету управління: за N циклів роботи ввести струм в навантаження більший, ніж $\bar{I}_H$ з мінімальними втратами енергії в "холодній зоні".

Сформульовану задачу будемо вирішувати згідно з методикою методом точних штрафних функцій у вигляді:

$$CF(\gamma) = CF_0(\gamma) - C_{pen} \cdot \max\{0, \bar{I}_H - I_H(\gamma)\} - C_{bar} \cdot \left[\frac{1}{U - U_{min}} + \frac{1}{U_{max} - U} + \sum_{j=1}^{2N} \left(\frac{1}{t_B^j} + \frac{1}{t_k^j} + \frac{1}{t_{ц}^j - t_{ц}^{min}} + \frac{1}{t_{ц}^{max} - t_{ц}^j} \right) \right],$$

де $2N$ – число розглянутих циклів роботи НП ЕТС; CF_0 дорівнює $W_{х.з.}$ у першому випадку і η – у другому; C_{pen} – коефіцієнт штрафу, C_{bar} – коефіцієнт бар'єру. Екстремум функції $CF(\gamma)$ знайдемо за допомогою алгоритму з розтягуванням простору.

Результати роботи алгоритму мінімізації залежно від числа k обчислень $CF(\gamma)$ наведені на рис. В.5 і В.6, де k – кількість обчислень функції $CF(\gamma)$; η – ККД системи (%); ΔI_H – амплітуда зміни струму первинної обмотки НПС (%); W_R – втрати енергії в "холодній зоні" НП ЕТС (%); I_{c1}, I_{c2} – остаточні амплітуди струму комутації для парного и непарного циклів роботи.

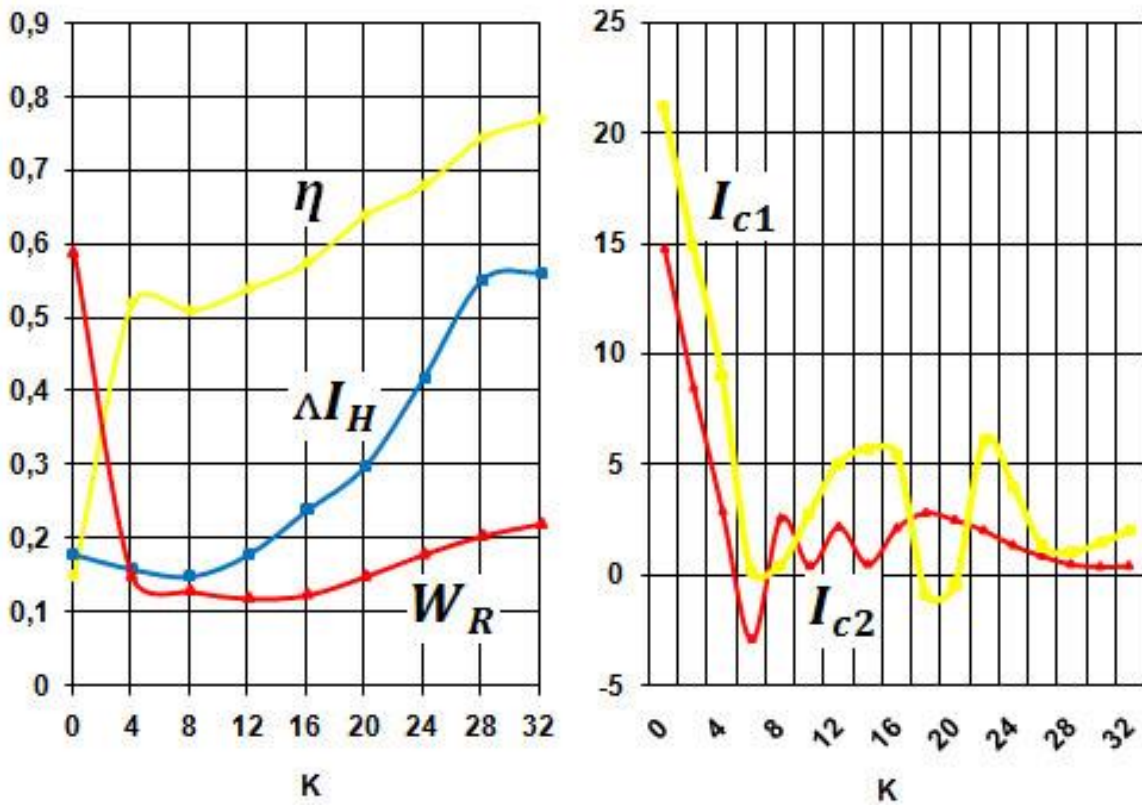


Рис. В.5. Результати роботи алгоритму мінімізації

залежно від числа k обчислень $CF(\gamma)$

В якості вхідних даних для першого циклу роботи НП ЕТС прийнято: $\bar{I}_H = 1,1A$; $t_B = 0,1C$; $t_k = 0,05C$; $t_{\text{ц}}^{\text{max}} = 0,5C$; $t_{\text{ц}}^{\text{min}} = 0,1C$; $C_{\text{pen}} = 1000$; $C_{\text{bar}} = 0,000001$. На рис. В.5 а) у вигляді неперервних кривих показані значення $W_{\text{х.з.}}$ (Дж) і $\Delta I_H = I_H - \bar{I}$, а у вигляді "спектральних" ліній – значення $CF(\gamma)$ в точках, де включаються в роботу функції штрафу або бар'єру.

На рис. В.5 б) наведено графіки зміни амплітуди струмів комутації $I_C^1(A)$ $I_C^2(A)$, що протікають в першому і другому контурах НППС в режимі комутації ЕРС, і криві вимірювання тривалості $t_B^1, t_B^2, t_k^1, t_k^2$. На рис. В.6 в) показані абсолютні значення майже-градієнта g_F цільової функції в точках, де ці значення обчислюються. Тут знаки $\setminus, 0, \square, /$ визначають майжеградієнти по змінним $t_B^1, t_B^2, t_k^1, t_k^2$, відповідно.

У результаті роботи алгоритму визначено оптимальні значення змінних $t_B^1, t_B^2, t_k^1, t_k^2$ управління, використання яких, у порівнянні з вихідними, дозволило

більш, ніж на 76% знизити втрати в "холодній зоні" НП ЕТС. У даному випадку виграш по втратах в "холодній зоні" склав приблизно 63%. Відзначимо, що R -алгоритм вже на першій ітерації (всього за 12 звернень до обчислення $CF(\gamma)$), досяг 90% кінцевого результату, що показує високу ефективність його роботи в умовах недиференційованих цільових функцій ЕТС із змінною структурою.

Отже, обчислювальні експерименти з моделями НП ЕТС показали, що для підвищення надійності та ефективності їх роботи необхідне виконання наступних умов: точного проведення комутації ЕРС, підтримки нульової напруги на первинній обмотці НПТ на інтервалах відновлення кріотронів.

Використання оптимальних параметрів управління, розрахованих на основі запропонованої методики, дозволило знизити втрати енергії в "холодній зоні" на 40-50%, а також довести оптимальність алгоритму з постійною амплітудою зміни струму.

На основі моделювання трифазної НП ЕТС розроблено алгоритм управління, що задовольняє умові оптимальності та дозволяє вводити струм на інтервалах комутації та охолодження кріотронів. Це дозволило значно скоротити час живлення НПС і зменшити шпаруватість живлячої напруги.

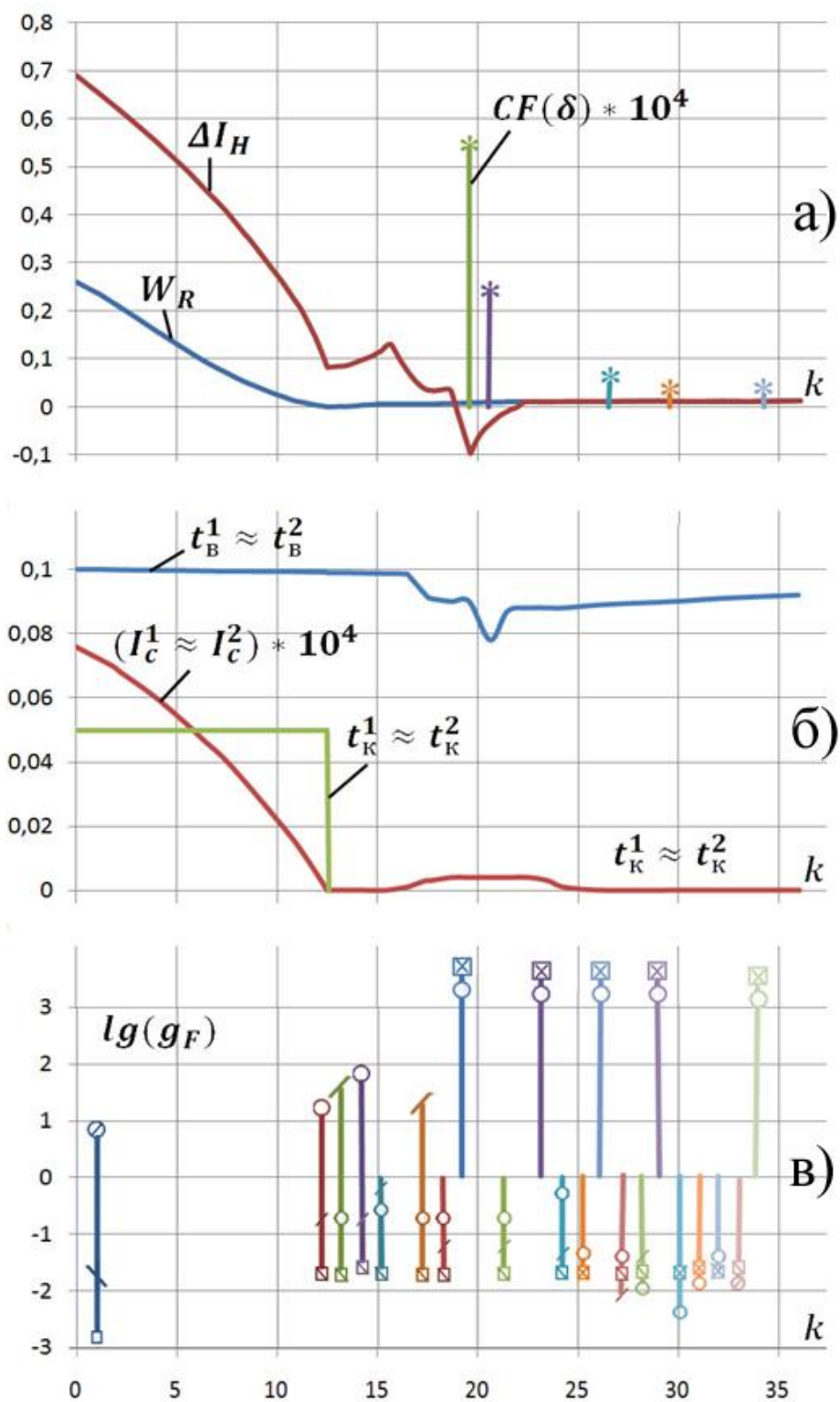


Рис. В.6. Результати роботи алгоритму
в залежності від числа k розрахунків $CF(\gamma)$

В.2. Моделювання електромагнітних процесів у надпровідникових перетворювальних системах

При розробці та виготовленні надпровідникових перетворювачів важливого значення набувають питання попереднього моделювання їх роботи. Різноманіття і складність задач моделювання надпровідникових перетворювачів вказує на необхідність розробки системи математичних моделей, що описують електромагнітні і теплові процеси, що протікають в конструктивних елементах, а також моделей вибору оптимальних схемотехнічних рішень, алгоритму роботи та параметрів напівпровідникового перетворювача (НПрП) і створенню на їх основі моделюючого програмного комплексу.

Взявши до уваги структурну схему статичних НП перетворювальних систем, відзначимо, що первинне джерело живлення (ПДЖ) і (НПрП) розташовані в «теплій зоні» (поза кріостатом), а НП перетворювач і навантаження (надпровідникове індуктивне навантаження) в «холодній зоні» (всередині кріостата). Обидві частини перетворювальної системи пов'язані між собою через токовводи. Теплова енергія надходить в кріостат в основному через токовводи, які знаходяться в резистивному стані кріотронів, при цьому виникає протиріччя між необхідністю якнайшвидшого введення енергії в навантаження і необхідністю мінімізації теплових втрат всередині кріостата.

Для підвищення ефективності аналізу електромагнітних процесів в електричних колах силової перетворювальної системи (СПС) доцільно виконувати структурне спрощення математичних моделей, що входять до її ланок.

Методи редукції в порівнянні з методами діакоптики (декомпозиції) дозволяють при заданій точності зменшити обчислювальні витрати моделювання та є перспективними при розробці алгоритмів і методів автоматизованого проектування СПС.

При оптимальному проектуванні СПС спрощення моделей із заданим ступенем точності можна здійснити за допомогою як редукції еквівалентної схеми СПС, так і редукції системи рівнянь, яка описує процеси в СПС.

Редукція схеми СПС полягає у спрощенні еквівалентної схеми перетворювача на основі виключення незначущих елементів. Поділ елементів схеми на значущі і незначущі здійснюється на підставі апріорної інформації та якісного аналізу електромагнітних процесів в схемі СПС з урахуванням їх особливостей (наявність нелінійних елементів з яскраво вираженою нелінійністю (вентилів), пасивних, активних елементів і системи управління, для моделювання яких можуть застосовуватися моделі різного ступеня складності).

Редукція системи диференціальних рівнянь, яка описує процеси в СПС, припускає спрощення системи рівнянь з метою зменшення її рангу і скорочення обчислювальних витрат на її розв'язування. Для редукції системи рівнянь можуть бути застосовані відомі методи, проте необхідно враховувати особливості диференціальних рівнянь перетворювачів (наявність коефіцієнтів, що стрибкоподібно змінюються і впливають на функції, моменти зміни яких, визначаються процесами в схемі і системою управління). Тому на першому етапі редукції рівнянь використовуються обнуління і прирівнювання одиниці коефіцієнтів рівнянь, виділення алгебраїчних зв'язків між шуканими змінними (наприклад, врахування властивості жорсткості системи), виключення з розгляду інтервалу сталості структури, незначно впливають на картину протікання робочих електромагнітних процесів у схемі СПС (наприклад, комутаційних інтервалів).

При аналізі процесів в СПС на початковому етапі здійснюється діакоптика вихідної схеми перетворювача, що дозволяє представити СПС об'єднанням силової частини, системи керування, датчиків, коригувальних ланок, підсилювачів-формуваців для управління вентилями. Так як при проектуванні СПС основна увага приділяється моделюванню процесів в силовій схемі перетворювачів, то часто необхідно використовувати методи діакоптики при розчленуванні силової схеми. На цьому етапі проводиться виділення моделей таких функціональних блоків, як випрямлячі, широтно-імпульсні перетворювачі, інвертори, перетворювачі частоти, силові фільтри, комутаційні ланки і т.д.

У свою чергу моделі функціональних блоків перетворювача розбиваються на підмоделі, що характеризуються сталістю структури блоків і станів вентилів

(ключів), а також однорідністю і неперервністю режимів їх роботи (робочий, комутаційний, введення і виведення енергії і т.д.).

На наступному етапі здійснюються редукція отриманих підмоделей СПС і побудова спрощених моделей на основі виділення значущих і незначущих параметрів.

Отже, аналіз задачі моделювання електромагнітних процесів у надпровідникових перетворювальних системах показав, що розробка комп'ютерних систем для моделювання цих процесів є досить важливим і актуальним завданням при вирішенні проблеми підвищення ККД даного класу електротехнічних систем енергозабезпечення.

В.2.1. Огляд математичної моделі та методів моделювання електромагнітних процесів у надпровідникових перетворювальних системах

Математична модель силового електричного кола. Мета аналізу електромагнітних процесів в НП перетворювачах (НПП) – отримати чисельні або аналітичні залежності між різними параметрами НПП, а також знайти ряд узагальнених параметрів, що характеризують певну схему силового перетворювача.

Фізичні процеси, що відбуваються в НПП, включають сукупність електромагнітних і термодинамічних процесів, а також ряд процесів, обумовлених властивостями надпровідникових матеріалів. Облік всіх цих факторів є складною науковою задачею і необхідний при визначенні екстремальних (оптимальних) параметрів перетворювача (гранична (оптимальна) частота, граничнодопустима потужність, критичні (оптимальні) параметри елементів НПП і т.д.).

Для забезпечення робочих режимів НПП необхідно до мінімуму звести вплив термодинамічних процесів на електромагнітні, що цілком можна досягти при забезпеченні достатнього охолодження елементів НП перетворювача. Розглянемо електромагнітні процеси в силових колах НП перетворювачів, що працюють в умовах, коли впливом додаткових термодинамічних факторів можна знехтувати.

Робочому процесу в контурах силового НП перетворювача, виконаного по схемі двонапівперіодного НПП з середньою точкою (НППД), відповідає еквівалентна схема на рис. В.7.

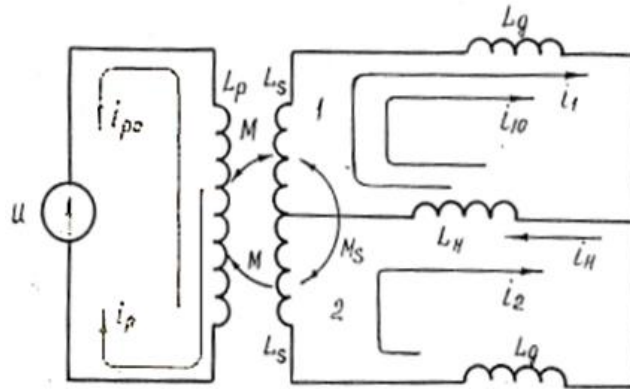


Рис. В.7. – Схема двонапівперіодного НПП з середньою точкою

На цій схемі в один з контурів вторинної обмотки НП трансформатора введено активний опір НП ключа (R), а в первинній обмотці діє напруга $U(t)$. Використовуючи операторний метод запишемо систему диференціальних рівнянь для контурних струмів НПП в матричній формі запису:

$$\begin{bmatrix} L_{\Sigma}P & (M_S - L_H)P & MP \\ (M_S - L_M)P & L_{\Sigma}P + R & MP \\ MP & MP & L_P P \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\Sigma}Pi_{10} + MPi_{p0} \\ (M_S - L_H)Pi_{10} + MPi_{p0} \\ MPi_{10} + L_P Pi_{p0} - u(P) \end{bmatrix},$$

де $L_{\Sigma} = L_H + L_S + L_G$ – сумарна індуктивність контуру навантаження; L_H – індуктивність навантаження; L_P – індуктивність первинної обмотки; L_S – індуктивність вторинної напівобмотки; L_G – індуктивність додаткових елементів (клапанів кріотронів, шин, виводів) у колі вторинної обмотки; M – взаємна індуктивність між первинною обмоткою та вторинною напівобмоткою; M_S – взаємна індуктивність між вторинними напівобмотками; R – опір клапана кріотрона; i_p – струм в первинній обмотці; i_1, i_2 – контурні струми в колах вторинної обмотки; i_h – струм в навантаженні; i_{10} – струм в 1-му контурі вторинної обмотки, рівний початковому струму навантаження; i_{p0} – початковий струм в контурі первинної обмотки.

Розкриємо визначник системи рівнянь, що є матрицею контурних опорів, використовуючи правило Сарруса. Скориставшись теоремою Крамера, знайдемо зображення контурних струмів, в результаті отримаємо:

$$i_1(p) = i_{10} + \frac{M[2L_H + L_S(1 - K_S) + L_g]u(p)}{A \cdot L_p} \cdot \frac{p + \alpha_{11}}{p(p + \alpha_1)};$$

$$i_2(p) = \frac{M[2L_H + L_S(1 - K_S) + L_g]u(p)}{AL(p)} \cdot \frac{1}{\alpha_1 + p};$$

$$i_p(p) = i_{p0} - \frac{B}{A} \cdot \frac{u(p)}{L_p} \cdot \frac{p + \alpha_{12}}{p(p + \alpha_1)};$$

де

$$A = 2L_H[L_S(1 + K_S - 2K^2) + L_g] + L_S^2(1 + 2k^2k_S - 2k^2 - k_S^2) + L_g^2 + 2L_SL_g(1 - k^2);$$

$$B = 2L_H[L_S(1 + K_S) + L_g] + L_S^2(1 - K_S^2) + L_g^2 + 2L_SL_g;$$

$$\alpha_1 = [L_H + L_S(1 - K_S) + L_g] \cdot R / A;$$

$$\alpha_{11} = R / [2L_H + L_S(1 - K_S) + L_g];$$

$$\alpha_{12} = L_S R / B;$$

$$K = M / (L_p L_S)^{1/2};$$

$$K_S = M_S / L_S,$$

де K – коефіцієнт магнітного зв'язку між первинною обмоткою та вторинною напівобмоткою, K_S – коефіцієнт магнітного зв'язку між вторинними напівобмотками.

У разі, коли в колі первинної обмотки діють імпульси напруги прямокутної форми з амплітудою U , що зберігає незмінне значення на всьому робочому інтервалі ($0 < t < t_b$), маємо наступні оригінали струмів, отримані за допомогою формул (В.15) – (В.18):

$$i_1(t) = i_{10} + \frac{Mu}{L_p P} \cdot \frac{[L_H + L_S(1 - k^2) + L_g][2L_H + L_S(1 - K_S) + L_g] \cdot A}{[L_H + L_S(1 - k^2) + L_g]^2} \times$$

$$\times (1 - e^{-\alpha_1 t}) + \frac{Mu}{L_p} \cdot \frac{1}{L_H + L_S(1 - k^2) + L_g} \cdot t;$$
(В.15)

$$i_2(t) = \frac{2L_H + L_S(1 - K_S) + L_g}{L_H + L_S(1 - k^2) + L_g} \cdot \frac{Mu}{L_p R} (1 - e^{-\alpha_1 t}); \quad (\text{B.16})$$

$$i_p(t) = i_{p0} - \frac{B[L_H + L_S(1 - k^2) + L_g] - AL_\Sigma}{[L_H + L_S(1 - k^2) + L_g]^2} \times \\ \times \frac{u}{L_p R} (1 - e^{-\alpha_1 t}) - \frac{L_\Sigma}{L_H + L_S(1 - k^2) + L_g} \cdot \frac{u}{L_p} \cdot t; \quad (\text{B.17})$$

$$i_H(t) = t_{10} - \frac{Mu}{L_p R} \cdot \frac{A}{[L_H + L_S(1 - k^2) + L_g]^2} \cdot (1 - e^{-\alpha_1 t}) + \\ + \frac{Mu}{L_p} \cdot \frac{\alpha}{L_H + L_S(1 - k^2) + L_g} \cdot t. \quad (\text{B.18})$$

В.2.2. Метод редукції

У реальних НПП розглянутого класу, індуктивність НП навантаження вибирається набагато більшим за індуктивність вторинної обмотки НП трансформатора та індуктивності інших елементів у колі (в експериментальній моделі НПП ця різниця становить приблизно чотири порядки), тому при аналізі процесів в НПП цілком допустима редукція рішень шляхом виключення доданків нижчого порядку. Тоді при $L_H \gg L_S; L_H \gg L_g$ знайдені струми приймуть вигляд, зручний для подальшого аналізу (формули (B.19), (B.20)):

$$i_p(t) \approx i_{p0} - \frac{U}{L_p} t \cdot [1 + \frac{4k^2 L_S}{Rt} (1 - e^{-\alpha_1 t})]; \quad (\text{B.19})$$

$$i_H(t) \approx i_{10} + \frac{MUt}{L_p L_H}. \quad (\text{B.20})$$

Вираз у квадратних дужках приймає цілком фіксоване значення при певному t , яке у випадку, що розглядається, дорівнює тривалості робочого інтервалу t_b . Воно характеризує лінійність процесу зміни струмів на робочому інтервалі, тому, ввівши поняття коефіцієнта лінійності:

$$\theta_1 = [1 + \frac{4k^2 L_S}{Rt_b} (1 - e^{-\alpha_1 t_b})]^{-1},$$

струм первинної обмотки представимо у вигляді:

$$i_p(t_b) = i_{p0} - \frac{U}{L_p} \cdot t_b \cdot \frac{1}{\theta_1}.$$

Тоді амплітуда вимірювання струму первинної обмотки НП трансформатора на робочому інтервалі:

$$I_B = i_p(t_b) - i_{p0} = \frac{U}{L_p} \cdot t_b \cdot \frac{1}{\theta_1}. \quad (\text{B.21})$$

Збільшення струму в НП навантаженні на робочому інтервалі (формули (B.22), (B.23)):

$$i_\delta = i_H(t_b) - i_H(0) = \frac{MU}{L_H L_p} t_b; \quad (\text{B.22})$$

$$i_\delta = \frac{MI_B \theta_1}{L_h}. \quad (\text{B.23})$$

Напруги на елементах НП перетворювача, виконаного за схемою з середньою точкою, на інтервалі робочого процесу отримаємо, використовуючи формули (B.15) – (B.18), (B.19) та (B.20).

Тоді, напруга на клапані НП ключа:

$$U_R(t) = R \cdot i_2(t) = \frac{MU}{L_p} \cdot \frac{2L_H + L_S(1 - ks) + L_g}{L_H + L_S(1 - k^2) + L_g} (1 - e^{-\alpha_1 t}).$$

Напруга на затискачах НП навантаження:

$$U_H(t) = L_H \frac{di_H}{dt} = \frac{MU}{L_p} \cdot \frac{L_H}{L_H + L_S(1 - k^2) + L_g} (1 - e^{-\alpha_1 t}).$$

При $L_H \gg L_S, L_H \gg L_g$ і $t_b \gg \tau = \frac{\alpha_1^{-1}}{\alpha_1 t_b} > 10$ (при $f \leq 50 \text{ Гц}$) вирази для напруги можна представити у вигляді:

$$U_R \approx \frac{2MU}{L_p};$$

$$U_H \approx \frac{MU}{L_p}.$$

Наведемо приклад розрахунку робочого процесу для випадку, коли в колі первинної обмотки НП трансформатора діє джерело синусоїдального струму $i_p(t) = I_m \cos \omega t$. Цьому процесу задовольняє система з двох диференціальних рівнянь, оскільки струм первинної обмотки заданий. Виразивши напругу, що діє в контурах вторинної обмотки, через струм первинної $U_s(p) = M_p i_p(p) = M I_m p^3 / (p^2 + \omega^2)$, отримаємо таку систему рівнянь контурних струмів в матричній формі запису:

$$\begin{bmatrix} L_\Sigma & (M_s - L_H)p \\ (M_s - L_H)p & L_\Sigma p + R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_\Sigma p i_{10} + M I_m p^3 / (p^2 + \omega^2) \\ (M_s - L_H)p i_{10} + M I_m p^3 / (p^2 + \omega^2) \end{bmatrix}.$$

Цій системі рівнянь відповідає наступне відображення контурних струмів:

$$i_1(p) = i_{10} + \frac{M I_H [2L_H p + L_s(1 - K_s)p + L_g p + R]}{B} \cdot \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)(p + \alpha_2)};$$

$$i_2(p) = \frac{M I_H [2L_H p + L_s(1 - K_s)p + L_g p + R]}{B} \cdot \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)(p + \alpha_2)},$$

де $\alpha_2 = L_\Sigma R / B$.

Виразимо струм навантаження через контурні токи в операторній формі:

$$i_H(p) = i_1(p) - i_2(p) = i_{10} + \frac{M R I_m}{B} \cdot \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)(p + \alpha_2)}.$$

Оригінал струму завантаження знайдемо за допомогою теореми розкладу Хевісайда та приведемо (після тригонометричних перетворень) до наступного вигляду (формула (B.24)):

$$i_H(p) = i_{10} + \frac{M R I_m}{B} \left[-\frac{\alpha_2 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2^2 + \omega^2} + \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{(\alpha_2^2 + \omega^2)^{1/2}} \right], \quad (\text{B.24})$$

де $\varphi = \arctg(\alpha_2 / \omega)$.

Введемо коефіцієнт лінійності, що відповідає випадку, коли в колі первинної обмотки НП трансформатора діє джерело струму синусоїдальної форми:

$$\theta_{sin} = [\alpha_2^2 / (\alpha_2^2 + \omega^2)]^{1/2}.$$

Вираз для струму (B.23) представимо в наступному вигляді:

$$i_H(t) = i_{10} \frac{M I_m}{L_\Sigma} \cdot [-\theta_{sin}^2 e^{-\alpha_2 t} + \theta_{sin} \sin(\omega t + \varphi)].$$

Розглянемо зростання струму в контурі навантаження (i_δ) за один цикл, що визначається часовим проміжком $t_1 - t_2$:

$$i_\delta = i_H(t_2) - i_H(t_1) = \frac{MI_m}{L_\Sigma} \{-\theta_{sin}^2(e^{-\alpha_2 t_2} - e^{-\alpha_2 t_1}) + \theta_{sin}[\sin(\omega t_2 + \varphi) - \sin(\omega t_1 + \varphi)]\}.$$

Оскільки перший член в фігурних дужках при досить тривалому процесі живлення ($t_1 \gg (2\pi f)^{-1}$) є нескінченно малою величиною, а амплітуда зміни струму первинної обмотки на робочому інтервалі представляється співвідношенням:

$$I_B = I_m[\sin(\omega t_2 + \varphi) - \sin(\omega t_1 + \varphi)],$$

то при аналізі досліджуваного позакомутаційного процесу достатньо обмежитися виразом:

$$i_\delta = \frac{MI_B}{L_\Sigma} \theta_{sin}.$$

Це співвідношення після редукції (при $L_H \gg L_S, L_H \gg L_g$) запишемо у формі (формула (B.25)), аналогічній виразу (B.23):

$$i_\delta \approx MI_B \theta_{sin} / L_H. \quad (B.25)$$

Отже, під час дослідження робочих процесів в НПП було використано коефіцієнт лінійності θ . На рис. В.8 представлені функціональні залежності коефіцієнтів лінійності θ_1, θ_{sin} , від частоти для експериментальної моделі НПП, виконаної за схемою НППД. Тут же, для порівняння, наведені значення коефіцієнта лінійності θ_2 для НПП, виконаного по схемі двонапівперіодного мостового випрямляча, з характеристиками, що відповідають параметрам експериментальної моделі: $L_{SM} = L_S = 0,187 \cdot 10^{-6} \text{Гн}$; $L_H = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{Гн}$; $K_M = K = 0,793$; $K_S = 0,9$; $R = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{Ом}$.

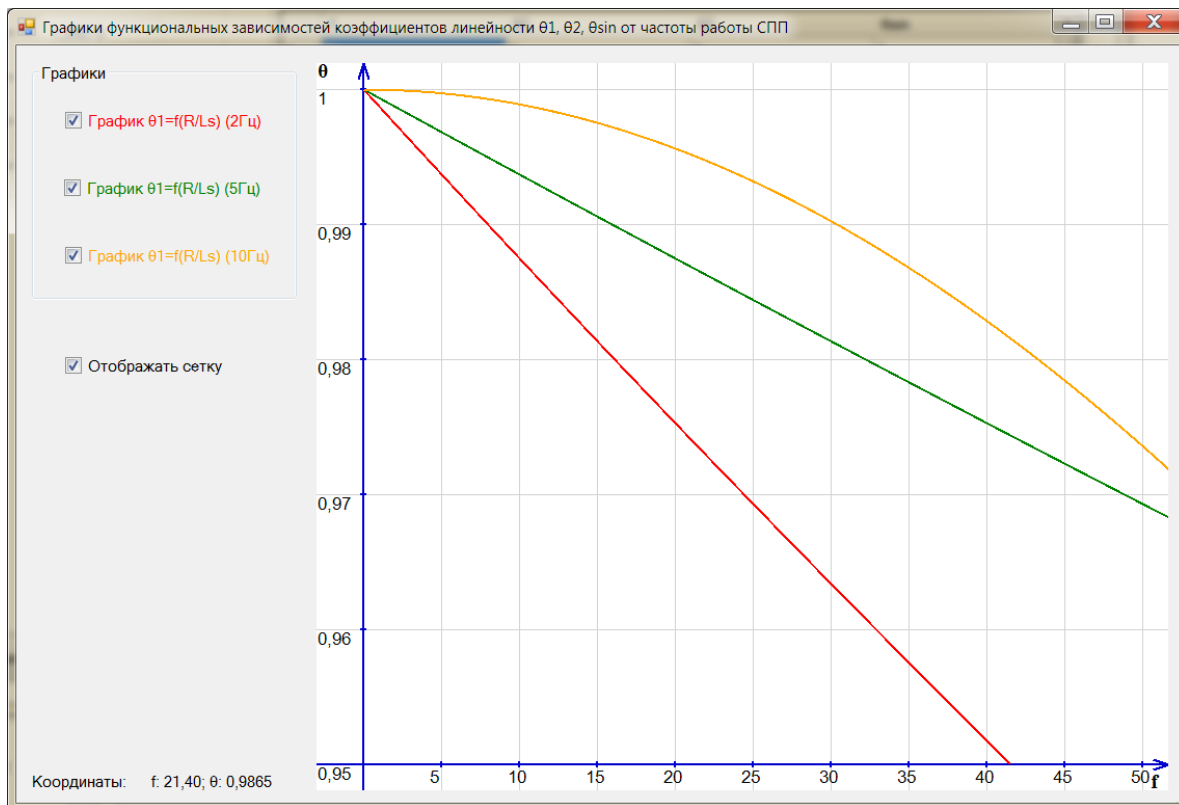


Рис. В.8. Функціональні залежності коефіцієнтів лінійності θ_1 , θ_2 та θ_{sin} від частоти

Із залежностей (рис. В.8) випливає, що для експериментальної моделі НПП, що працює в частотному діапазоні нижче 20 Гц, коефіцієнти лінійності близькі до одиниці ($\theta \gg 0,98$). Аналіз залежностей коефіцієнта лінійності $\theta_1 = f\left(\frac{R}{L_S}\right)$ на рис. В.9 показує, що із збільшенням співвідношення R/L_S значення θ_1 зростає. У майбутньому помітна тенденція до зростання коефіцієнта лінійності, обумовлена вимогами до підвищення опору клапана ключа R . Ґрунтуючись на викладеному, при аналізі редуційних моделей НПП приймаємо коефіцієнт лінійності рівним одиниці. Тоді вирази для амплітуди зміни струму первинної обмотки НП трансформатора на робочому інтервалі, що представлені співвідношенням (В.21), приймуть вигляд $I_B \approx \frac{U t_B}{L_p}$, а вирази для збільшення струму в НП навантаженні на інтервалі робочого процесу, що представлені співвідношеннями (В.23) і (В.25), приймуть вигляд $i_\delta = M I_B / L_H$.

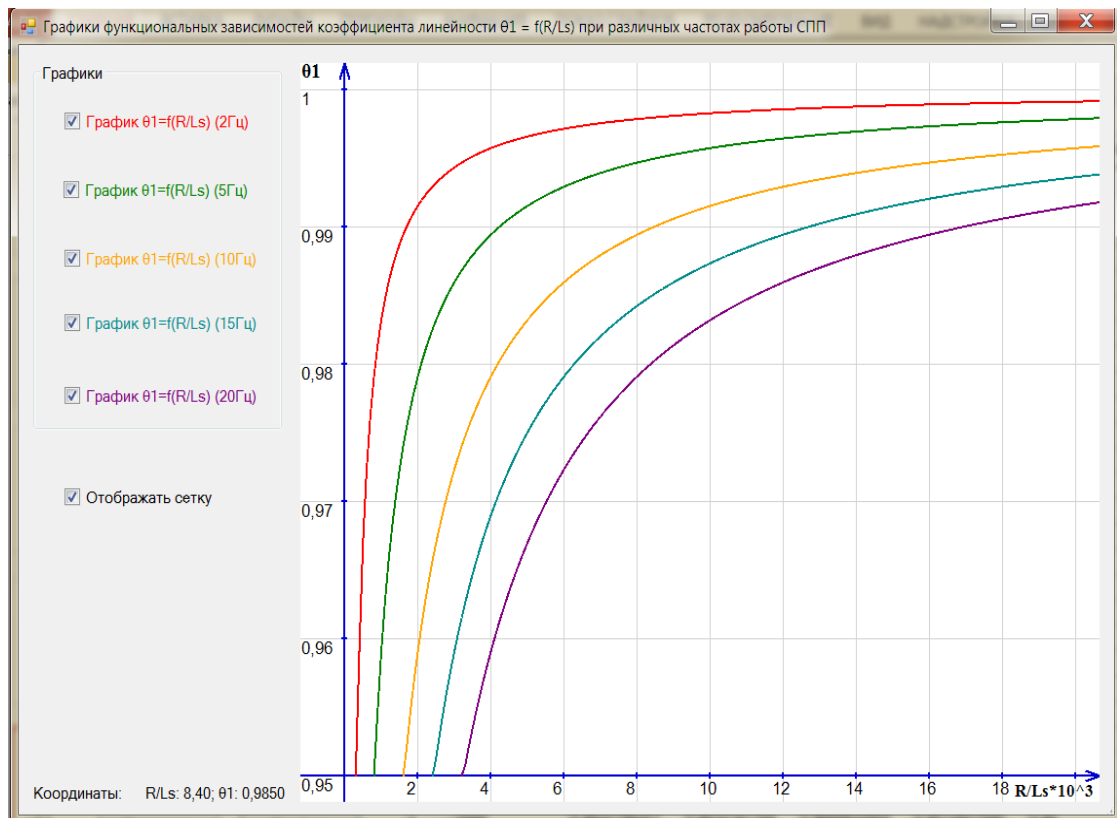


Рис. В.9. Функціональні залежності коефіцієнта лінійності $\theta_1 = f\left(\frac{R}{L_s}\right)$

Використання методів редукції у математичній моделі процесу комутації ЕРС надпровідникового перетворювача призводить до зменшення об'єму обчислень та пришвидшенню розв'язування задачі моделювання електромагнітних процесів, що демонструється на порівняльній діаграмі швидкості розрахунку сили струму в первинній обмотці НПП до та після застосування методу редукції (рис. В.10).

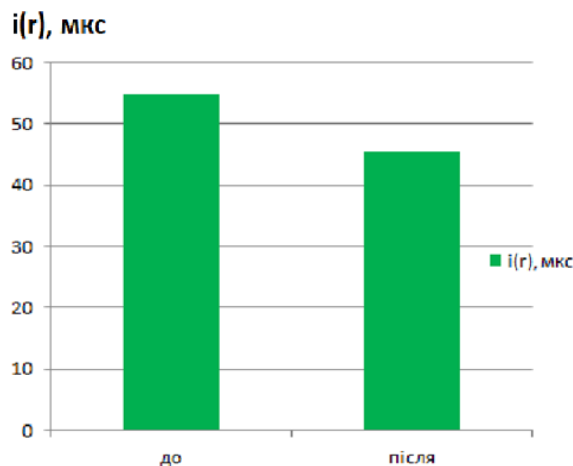


Рис. В.10. Порівняльна діаграма швидкості розрахунку сили струму в первинній обмотці НПП до та після застосування методу редукції

В.2.3. Коефіцієнт перетворення енергії

Для оцінки ефективності роботи НПП можливо використовувати різні критерії. Найбільш розповсюджена оцінка по відношенню енергії, що накопичена у НП навантаженні до повної енергії за цикл, але для оцінки енергетичної ефективності НПП такого критерію недостатньо, оскільки він не відображає енерговитрати первинного джерела живлення (системи управління НПП) на живлення НП навантаження. Таким чином для оцінки енергетичної ефективності НПП вводиться коефіцієнт, що відображає енерговитрати на живлення навантаження перетворювача. Безрозмірний коефіцієнт перетворення енергії η_e , що функціонально залежить від струму навантаження I_n (I_n виражений через коефіцієнт струму навантаження $k = I_n/I_{n.x}$), що вводиться у НП навантаження, та розраховується як відношення енергії, що вводиться в НП навантаження за цикл до повної енергії за цикл

$$\eta_e = \Delta W / W'_\Sigma.$$

Коефіцієнт перетворення енергії представлено для трьох режимів регулювання комутації ЕРС НПП, а саме:

1. Режим А – режим регулювання з постійною тривалістю позакомутаційного інтервалу

$$\eta_e = \frac{8k^2 L_s k}{L_{sk}(1+k^2) + 2L_{sk\sigma}k}.$$

2. Режим В – режим регулювання з постійною амплітудою струму первинної обмотки НПП

$$\eta_e = \frac{4k^2 L_s (2k - k^2)}{2L_{sk} - 4k^2 L_s (2k - k^2)}.$$

3. Режим С – режим фазового регулювання

$$\eta_e = \frac{2k(L_{sk} - L_{sk\sigma})(L_{sk} + L_{sk\sigma} - kL_{sk\sigma})}{(L_{sk} + L_{sk\sigma})^2 + k^2(L_{sk} - L_{sk\sigma})(L_{sk} + L_{sk\sigma})}.$$

На рис. В.11 наведено результати, отримані при дослідженні енергоефективності НПП за допомогою коефіцієнту перетворення енергії. Ці дослідження в подальшому можуть слугувати основою для розробки узагальнюючої теорії електроенергетичних процесів та створенню методик, що

дозволять проводити оптимізацію НПП за цілим рядом показників.

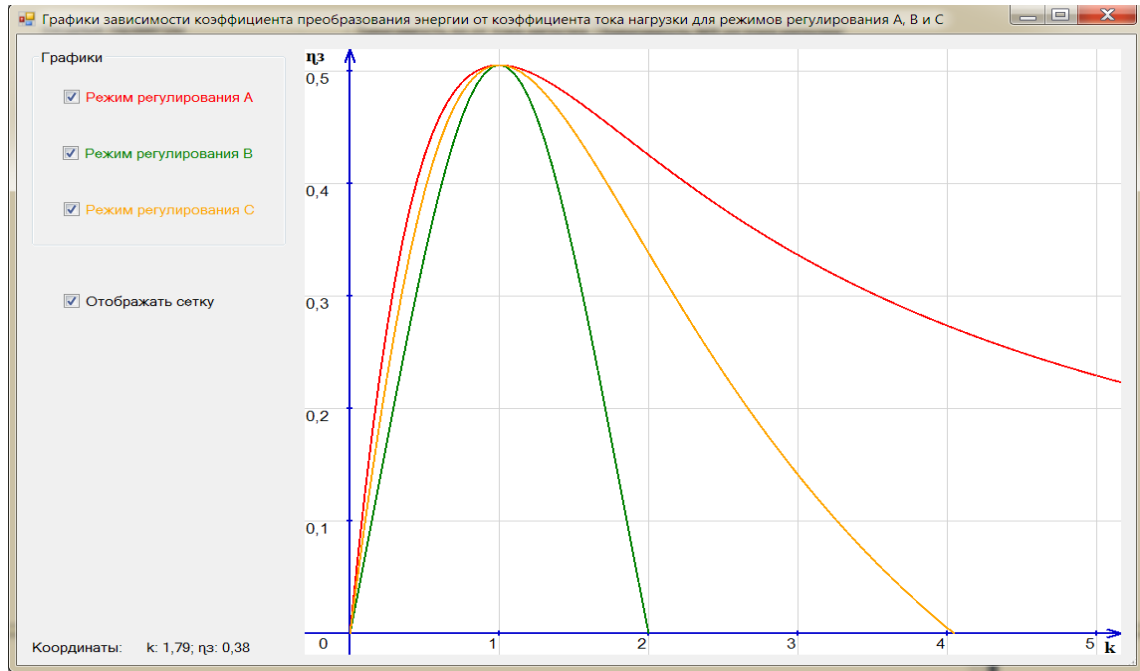


Рис. В.11. Графіки залежності коефіцієнта перетворення енергії від коефіцієнта струму навантаження

Отже, удосконалення математичної моделі процесу комутації ЕРС надпровідникового перетворювача за рахунок використання методів редукції призвело до зменшення об'єму обчислень та пришвидшило розв'язування задачі. Набуло подальшого розвитку використання методу оцінки енергоефективності надпровідникового перетворювача в надпровідникових системах енергозабезпечення за критерієм коефіцієнта перетворення енергії.

В.2.4. Опис програмної реалізації системи моделювання електромагнітних процесів у надпровідникових перетворювачах

Архітектура комп'ютерної системи. Комп'ютерна моделююча система складається з чотирьох компонентів, а саме: Modeling.exe, Repository.dll, MathematicalModel.dll та Graph.dll. Це продемонстровано на діаграмі системи (рис. В.12).

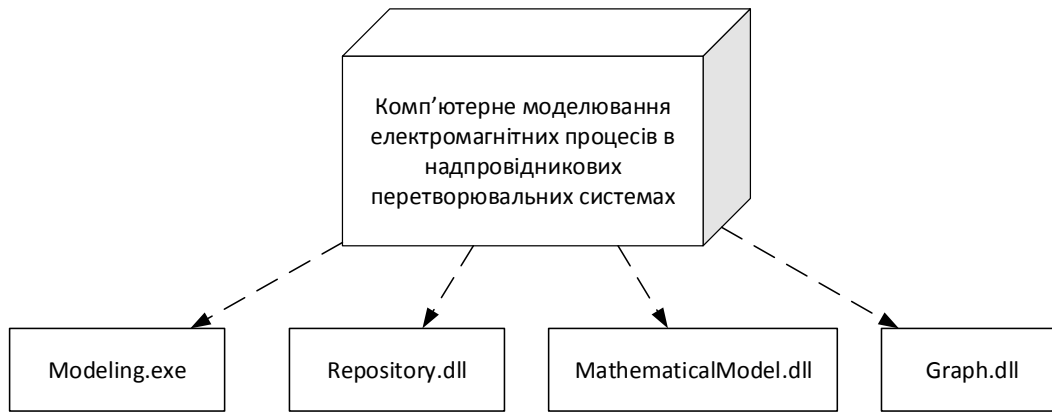


Рис. В.12. Діаграма розгортання системи

Вміст кожного з цих компонентів відображається на рис. В.13, за допомогою діаграми компонентів системи.

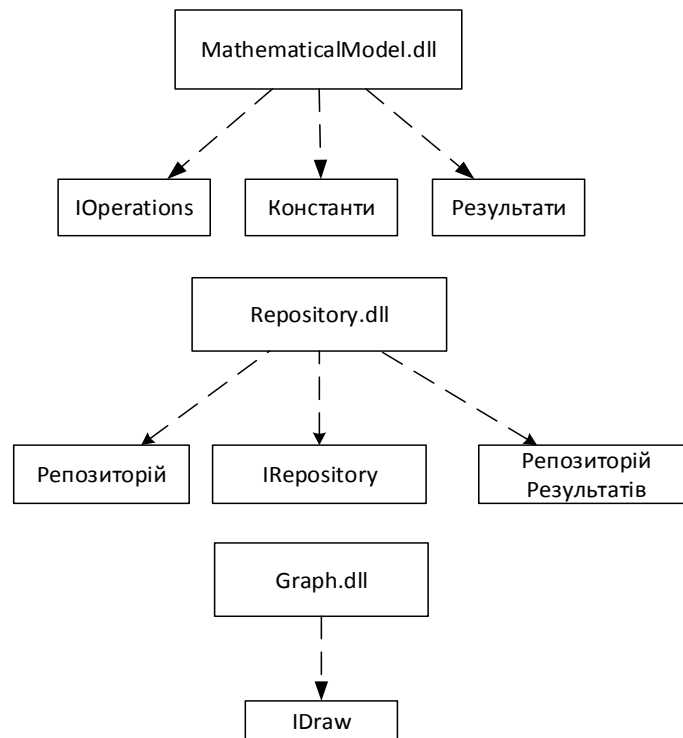
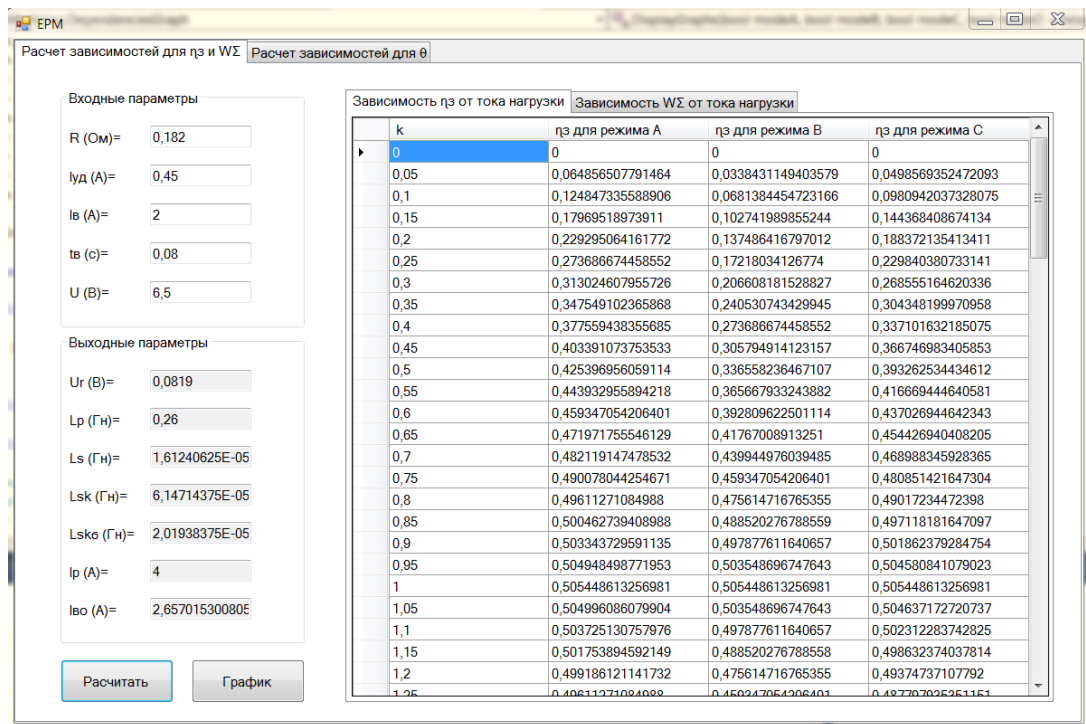
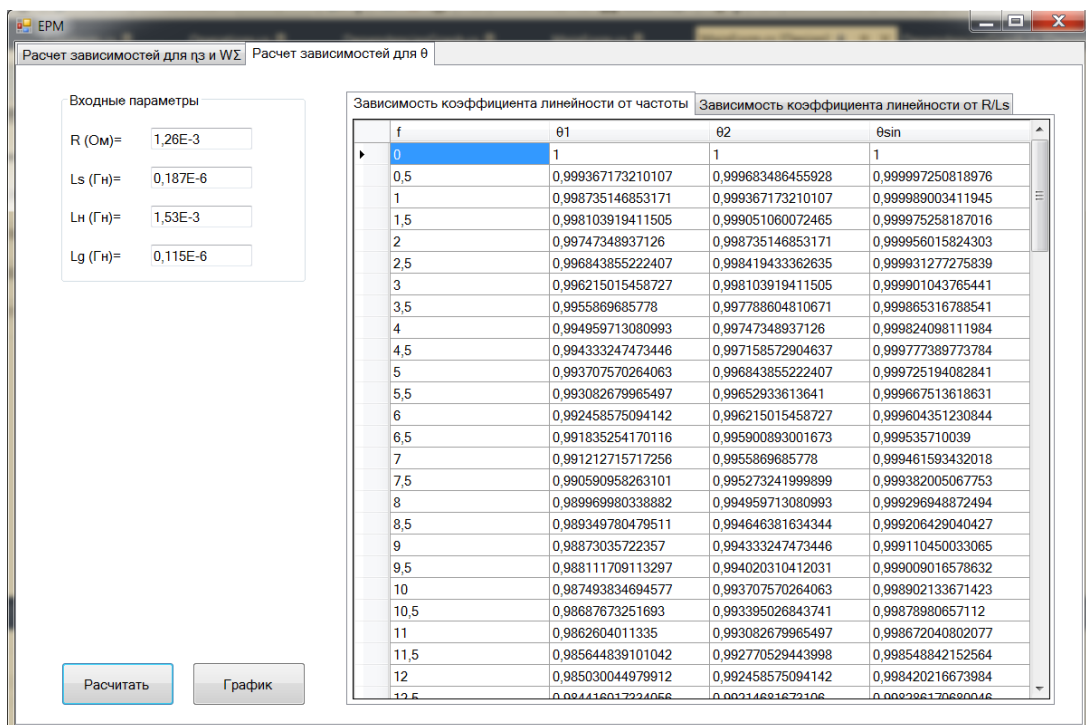


Рис. В.13. Діаграма компонентів системи

Сценарії роботи користувача з системою. Інтерфейс користувача комп'ютерної системи складається з двох основних вкладок (рис. В.14, В.15):

1. Розрахунок залежностей для η і $W\Sigma$.
2. Розрахунок залежностей для θ .

Рис. В.14. Розрахунок залежностей для φ_z и W_Σ Рис. В.15. Розрахунок залежностей для θ

Для кожної з цих вкладок на формі розміщено ще по дві вкладки, що містять розрахункові таблиці.

Якщо користувач знаходиться на вкладці «Розрахунок залежностей для η_z та W_Σ » і вибрана вкладка «Залежність η_z від струму навантаження» то результатом кліку на кнопку «Графік» буде форма зображена на рис. В.16.

Якщо користувач знаходиться на вкладці «Розрахунок залежностей для η_z та W_Σ » і вибрана вкладка «Залежність W_Σ від струму навантаження» то результатом кліку на кнопку «Графік» буде форма зображена на рис. В.17.

Якщо користувач знаходиться на вкладці «Розрахунок залежностей для θ » і вибрана вкладка «Залежність коефіцієнту лінійності від частоти» то результатом кліку на кнопку «Графік» буде форма зображена на рис. В.18.

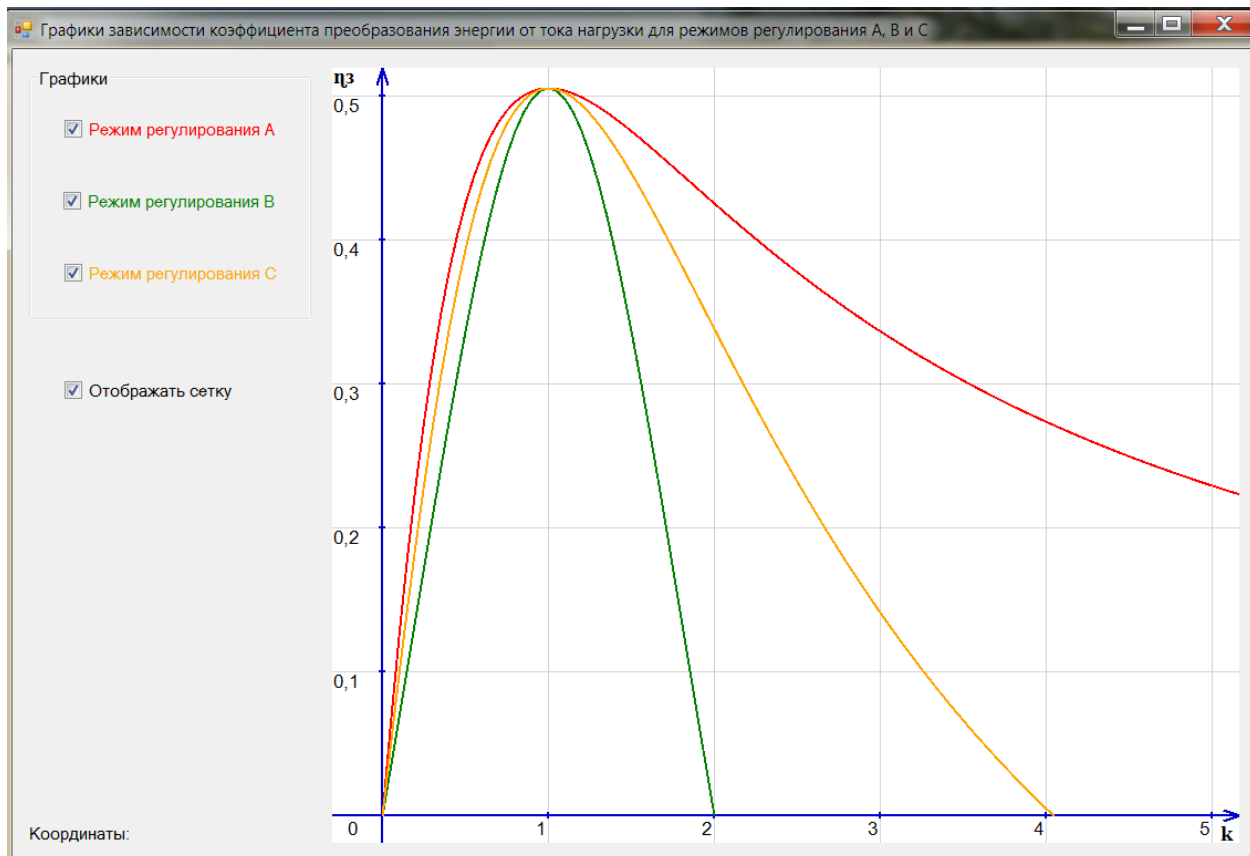


Рис. В.16. Графіки залежності η_z від струму навантаження

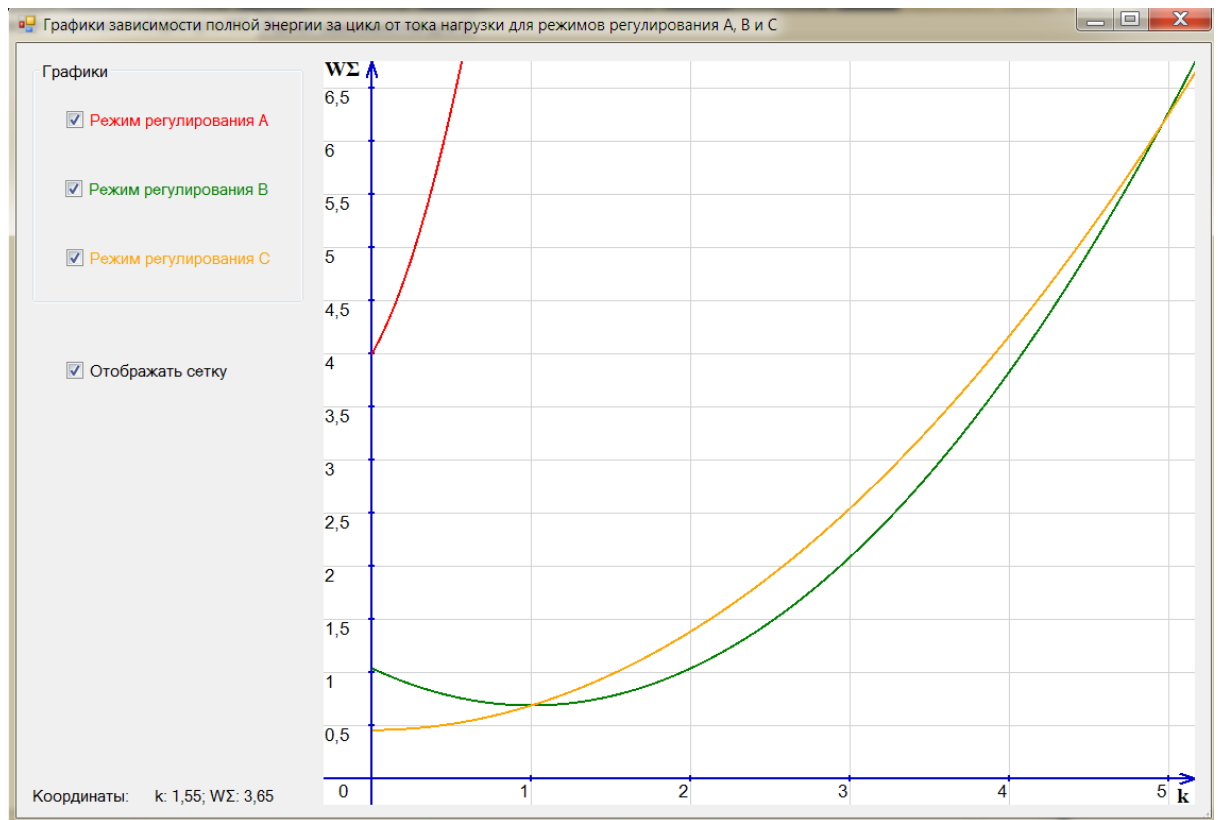
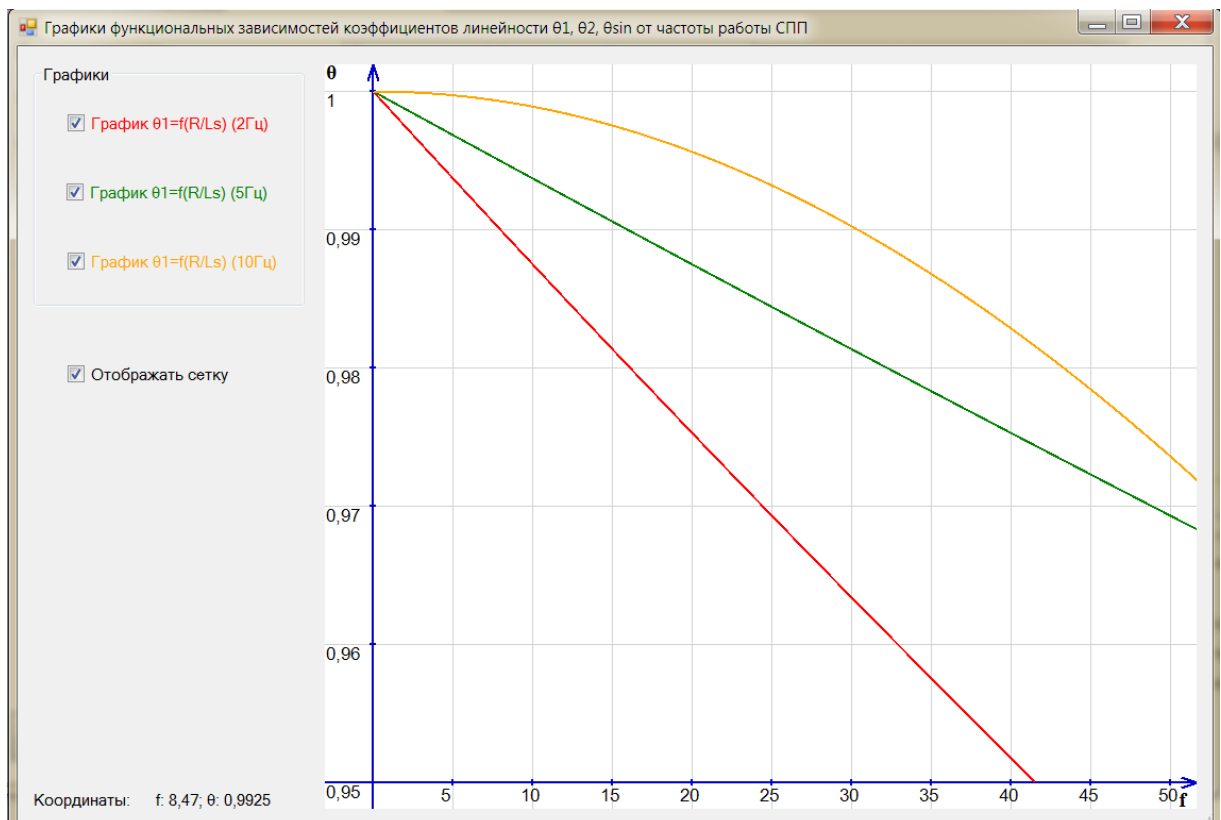
Рис. В.17. Графіки залежності $W\Sigma$ від струму навантаження

Рис. В.18. Графіки залежності коефіцієнту лінійності від частоти

Якщо користувач знаходиться на вкладці «Розрахунок залежностей для θ » і вибрана вкладка «Залежність коефіцієнту лінійності від R/Ls » то результатом кліку на кнопку «Графік» буде форма зображена на рис. В.19.

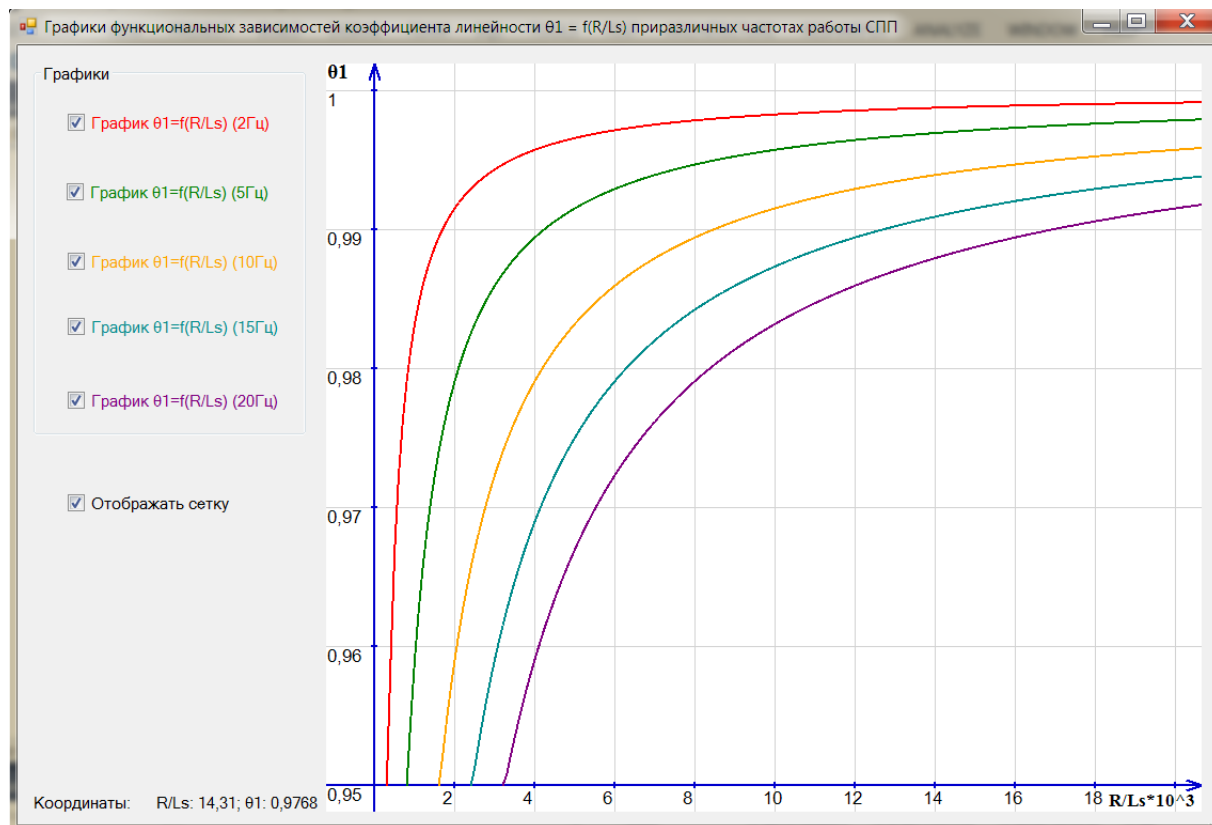


Рис. В.19. Графіки залежності коефіцієнту лінійності від R/Ls

На основі запропонованих методів моделювання електромагнітних процесів в надпровідникових перетворювальних системах, розроблено комп'ютерно-інформаційну систему, яка за рахунок нового підходу до моделювання, та використання новітніх комп'ютерних технологій, по швидкодії, зручності користування та вірогідності отриманих результатів перевершує існуючі аналоги. Розроблена комп'ютерна система надає можливість інженерам-електротехнікам моделювати та досліджувати електромагнітні процеси в надпровідникових перетворювальних системах.

В.3. Задача моделювання теплових процесів в перемикаючих елементах надпровідникових енергетичних систем

Задача підвищення ефективності та поліпшення динаміки надпровідникової підсистеми систем енергозабезпечення пов'язана з комплексним моделюванням режимів надпровідникових силових вентилів з визначенням та врахуванням взаємозв'язку їх теплофізичних характеристик, електромагнітних параметрів і параметрів конструкції.

Аналіз задачі моделювання теплових процесів в перемикаючих елементах надпровідникових енергетичних систем показав, що розробка комп'ютерної системи для розв'язання даної задачі є важливим і актуальним завданням при вирішенні проблеми зниження енерговитрат в кріогенній зоні та підвищення швидкодії надпровідникових систем енергозабезпечення.

В.3.1. Огляд математичної моделі та методів моделювання теплових процесів в перемикаючих елементах надпровідникових енергетичних систем

Неоднозначність і складність задачі визначення оптимальної конструкції надпровідникових вентилів з метою підвищення ККД надпровідникових енергетичних систем викликана протиріччям між даною задачею і завданням розрахунку оптимальних параметрів конструкції надпровідникових вентилів (кріотронів), що забезпечують максимальні динамічні показники системи.

Кріотрон – надпровідниковий пристрій, опір керованого елемента якого змінюється залежно від величини керуючого магнітного поля. Тепловиділення в об'ємі кріотрона відбувається впродовж двох часових інтервалів: керуючого імпульсу та періоду стабілізації.

Розглядається ключ, що представляє собою надпровідниковий тонкий дріт зі NbTi з намотаним на нього нагрівачем зі свинцевого дроту і залитого епоксидною теплоізоляцією з добавками алюмінієвого порошку (рис. В.20).

Робота ключа організується наступним чином: у початковий момент циклу на нагрівач кріотрона подається керуючий імпульс струму прямокутної форми. Починається період нагрівання. При цьому надпровідник нагрівається до

температури вище критичної, переходить в нормальний стан, і на нього подається струм утримання (зворотний струм) для підтримки надпровідникового дроту в нормальному стані і компенсації тепловідведення до кріоагента через зовнішню поверхню ключа.



Рис. В.20. Кріотрон

У момент закінчення періоду стабілізації (утримання) струм утримання відключається і починається період охолодження ключа. За рахунок тепловідведення до кріоагента температура надпровідника знижується, поки не стає нижче критичної (закінчення періоду охолодження). Починається пауза, в перебігу якої джоулеве тепловиділення в ключі відсутнє і температура ключа продовжує падати. Після закінчення паузи цикл завершується.

В.3.2. Теплові процеси в перемикаючих елементах надпровідникових енергетичних систем

З теплофізичної точки зору ключ являє собою тришарову осесиметричну систему з охолоджуваною зовнішньою поверхнею (рис. В.21).

Поле температур в поперечному перерізі ключа $T(t, r)$ (де t – час, r – відстань до осі симетрії системи) задовольняє рівнянню (В.26).

$$\rho(r) \cdot C(r, T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \lambda(r, T) \frac{\partial T}{\partial r} \right] + W(r, t), \quad (\text{В.26})$$

$$t \geq 0, \quad 0 < r < \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

де ρ , C , λ – відповідно густина, питома теплоємність і теплопровідність матеріалів, W – об'ємне тепловиділення.

Належність до того чи іншого шару формально визначається залежністю теплофізичних властивостей і густини не тільки від температури але й від радіуса ключа.

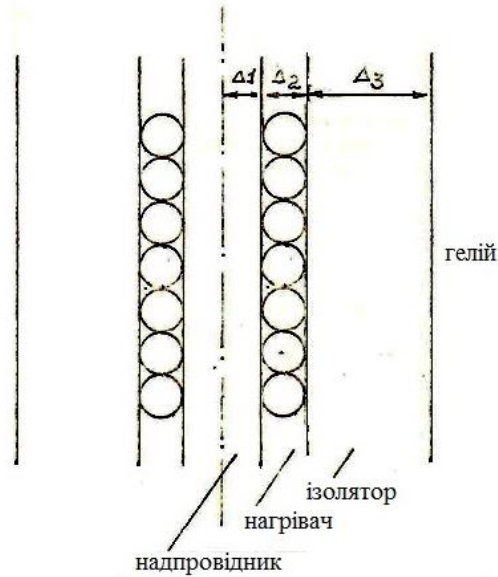


Рис. В.21. Кріотрон як осесиметрична система

Від такого формального запису доцільно перейти до більш конкретного, який розкриває залежність густини, питомої теплоємності і теплопровідності від радіуса:

$$\begin{cases} \rho_s C_s(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda_s(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right] + W_s(t), & 0 < r < \Delta_1; \\ \rho_n C_n(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda_n(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right] + W_n(t), & \Delta_1 < r < \Delta_1 + \Delta_2; \\ \rho_i C_i(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda_i(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right] + W_i(t), & \Delta_1 + \Delta_2 < r < \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \end{cases} \quad (\text{В.27})$$

Індекси s , n , i позначають приналежність, відповідно до надпровідника, нагрівача та ізолятора.

При використанні кріотронів з тепловим керуванням в циклічному режимі, видається важливим зменшення джоулевого тепловиділення в елементах кріотрона і збільшення частоти його спрацювання.

Рівняння (В.27) необхідно доповнити граничними умовами на осі симетрії системи, поверхні теплоізоляції ($r = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$) і на межах розділу матеріалів

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r}(t, 0) = 0, \\ \lambda_s \frac{\partial T}{\partial r}(t, \Delta_1 - 0) = \lambda_n \frac{\partial T}{\partial r}(t, \Delta_1 + 0), \\ \lambda_n \frac{\partial T}{\partial r}(t, \Delta_1 + \Delta_2 - 0) = \lambda_i \frac{\partial T}{\partial r}(t, \Delta_1 + \Delta_2 + 0), \\ \lambda_i \frac{\partial T}{\partial r}(t, \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - 0) = \alpha [T(t, \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) - T_0], \end{cases}$$

а також початковими умовами

$$T(0, r) = F(r),$$

де T_0 – температура кріоагента (гелію); α – коефіцієнт тепловіддачі від поверхні ізоляції до кріоагента; $F(r)$ – початковий розподіл температур.

Дані рівняння (В.27), доповнені відповідними початковими і граничними умовами на осі симетрії, поверхні ізоляції і на межах розділу матеріалів, вирішуються неявним методом скінченних різниць другого порядку точності (схема Кранка-Нікольсона), а отримана система рівнянь в скінченних різницях методом прогонки.

Залежності $W_n(t)$ і $W_s(t)$ мають вигляд прямокутних імпульсів, при цьому відмінних від нуля на інтервалі часу тривалістю τ_n (період нагрівання), W_s відмінна від нуля на інтервалі часу тривалістю τ_s (період стабілізації).

Розглянемо теплові процеси, що відбуваються в кріотроні під час керуючого імпульсу. Тепловиділення відбувається в цьому випадку за рахунок проходження струму по нагрівачу. При цьому частина тепла передається надпровіднику, а частина відводиться в теплоізоляцію. Теплові втрати в теплоізоляції мають бути тим більші, чим довше продовжується процес. З чого можна зробити висновок, що за рахунок збільшення потужності керуючого імпульсу доцільно намагатися зменшити його тривалість.

При використанні кріотронів з тепловим керуванням в циклічному режимі важливим є зменшення джоулевого тепловиділення в елементах кріотрона та збільшення його частоти спрацьовування.

Протягом періоду нагріву

$$W_n = \frac{4}{\pi} R_n \left(\frac{\gamma I_n}{\Delta_2^2} \right)^2,$$

де $R_n = 3,8 \cdot 10^7 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ – питомий опір манганіна (який в інтервалі температур від 5К до 15К можна вважати постійним), I_n – струм, що протікає по нагрівачу, Δ_2 – діаметр манганінового дроту в ізоляції, Δ_2 / γ – діаметр манганінового дроту без ізоляції (у розрахунках $\gamma = 13/9$).

Протягом періоду стабілізації

$$W_s = R_s \left(\frac{I_s}{\pi \Delta_1^2} \right)^2,$$

де R_s – питомий опір надпровідника в нормальному стані, I_s – струм утримання (зворотний струм).

Для NbTi при $T_{кр} < T < 30\text{K}$ $R_s = \text{const} = R_s^0$, де R_s^0 – залишковий опір (обумовлений недосконалістю кристалічної решітки).

Для визначеності математичної моделі необхідно встановити реальні залежності теплофізичних властивостей матеріалів від їх температури.

Для сплаву надпровідника НТ-50 (з п'ятдесяти відсотковою масовою часткою Ті) значення питомої теплоємності ($C_s(T)$) з урахуванням розриву залежності в точці $T = T_{кр}$ (для НТ-50, відповідно, $T_{кр} = 9,5\text{ K}$) виражається наступною залежністю:

$$C_s = 1.74 + 0.422(T - 6.5)|T - 6.5|^{0.57} + \Delta C,$$

$$\Delta C = \begin{cases} 0, & T < T_{кр} \\ -2.206, & T \geq T_{кр} \end{cases}.$$

Залежність теплопровідності $\lambda_s(T)$ для сплаву NbTi була виражена наступною залежністю:

$$\lambda_s = 0.009 + 0.046 \cdot T^{1.04}.$$

В свою чергу для нагрівача (Манганіна) при $T \geq 3\text{K}$ залежність для питомої теплоємності ($C_n(T)$) виражається наступним чином:

$$C_n = 0,22 - 0.12 \cdot T + 0,06 \cdot T^2.$$

Залежність теплопровідності нагрівача $\lambda_n(T)$ відповідає наступному виразу:

$$\lambda_n = 0.0803 \cdot T^{1.32}.$$

В свою чергу залежність питомої теплоємності ($C_i(T)$) полімеризованої епоксидної смоли (ізолятора) обраховується наступним чином:

$$C_i = 5.05 - 3,63T + 0.8342T^2 - 0.02484T^3.$$

З урахуванням залежності теплопровідності ізоляції λ_i від процентного вагового змісту ($\omega, \%$) в епоксидній смолі наповнювачів залежність λ_i від T і ω описується співвідношенням:

$$\lambda_i = 0.0448T^{0.285} * \exp\left\{\frac{\omega^{1.25}}{10}\right\}.$$

Тут як домішки (наповнювача) використовувався алюмінієвий порошок при $\omega \leq 3.2$.

Крім визначення залежностей теплофізичних властивостей речовин від температури необхідно встановити значення α , яке визначає ступінь інтенсивності охолодження поверхні ключа кріоагента. Оскільки в якості вихідного розглядався варіант ключа, зануреного у відкритий кріостат (при атмосферному тиску), характеристики охолодження будуть визначатися механізмами теплообміну при кипінні у великому об'ємі.

При відсутності теплоізоляції тепловий режим кріотрона визначається, в першу чергу, інтенсивністю тепловіддачі від надпровідникового шару безпосередньо до кріоагента.

Нестационарний режим роботи кріотрона дає підстави припускати, що на поверхні надпровідника навіть при значеннях теплопритоку до кріоагента, які перевищують критичні, реалізується бульбашковий режим кипіння. Однак, оскільки величини різниці температур на поверхні і в об'ємі кріоагента (ΔT) мають порядок 5-10 К, при відповідних теплових притоках, час затримки кризису кипіння дуже малий (10^{-5} с), і незважаючи на нестационарний характер охолодження на поверхні реалізується плівковий режим кипіння.

Теплові процеси в ключі характеризуються порівняно високими швидкостями протікання. При цьому, згідно з даними дослідів, навіть при теплових потоках, що перевищують критичні, має місце затягування бульбашкового режиму кипіння на деякий час.

Для визначення інтенсивності теплообміну при бульбашковому кипінні у великому обсязі було визнано доцільним скористатися залежністю С.С.Кутателадзе. Перевагу такого вибору пояснюється наступними причинами. При істотному розкиді досліджуваних точок формула Кутателадзе (на відміну від залежностей Д.А.Дабунцова і Ю.А. Кириченко) дає значення, ближчі до середини інтервалу розкиду.

$$N_{u*} = 7 * 10^{-4} * (P_{e*} * K)^{0.7} * P_r^{-0.35}, \quad (B.28)$$

$$Nu_* = \frac{\alpha}{\lambda'} \sqrt{\frac{\sigma}{q(p' - p'')}},$$

$$Pe_* = \frac{q}{H \cdot \rho'' \cdot a'} * \sqrt{\frac{\sigma}{q * (\rho' - \rho'')}},$$

$$K = \frac{\rho}{\sqrt{\sigma * q * (\rho' - \rho'')}},$$

$$Pr = \frac{\nu'}{a'},$$

$$\alpha = \frac{q}{T_w - T_0},$$

де ρ' , λ' , ν' , α' , σ – відповідно густина, теплопровідність, кінематична в'язкість, температуропровідність і коефіцієнт поверхневого натягу рідкого кріоагента, H – теплота пароутворення, ρ'' – щільність пари кріоагента, q – тепловий потік, T_w – температура охолоджуваної поверхні.

Всі теплофізичні властивості рідини і пари визначаються при тиску і температурі рідини в кріостаті.

Оскільки температура рідини і тиск в кріостаті покладаються незмінними, після підстановки явних виразів безрозмірних критеріїв у (В.28) можна отримати співвідношення:

$$T_w - T_0 = \frac{q^{0.3}}{A}, \quad (\text{В.29})$$

де при $p = 0.1$ МПа і $T_0 = 4.2$ К для гелію $A = 27.05$.

Недоліком описаного підходу моделювання теплових процесів в перемикаючих елементах надпровідникових енергетичних систем є неможливість обрахунку часу досягнення кріотроном критичної температури.

В.3.3. Оціночна модель теплових процесів в перемикаючих елементах надпровідникових енергетичних систем

З метою визначення параметра часу відновлення була використана оціночна модель теплових процесів в кріотроні на основі аналітичного розв'язування рівняння теплового балансу (В.30) з використанням експериментальних даних.

$$W = W_{kn} + W_p, \quad (\text{В.30})$$

де $W_{kn} = C \frac{dT}{dt}$ – тепло, що витрачається на нагрівання клапана, $W_p = Q(T) \cong \bar{\alpha}T$ – тепло, що виділяється в навколишнє середовище.

Таким чином, прийдемо до форми

$$C \frac{dT}{dt} = W - \alpha T, \quad \alpha = \frac{\bar{\alpha}}{C}. \quad (\text{B.31})$$

Розв'язком рівняння (B.31) для одиниці довжини кріотрона є наступний вираз

$$T(t) = \frac{W}{C\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t}\right) + T_0 \cdot e^{-\alpha t}, \quad (\text{B.32})$$

де T_0 – температура кріотрона в момент часу $t = 0$ початку остигання, що визначається з наступного виразу для втрат від протікання струму утримання:

$$(I_{ud})^2 \cdot R(T_0) = \bar{\alpha}T_0.$$

З використанням експериментально отриманої залежності $R(T)$ величина W визначається наступним чином:

$$W = (I_{ud})^2 R + (I_n)^2 R_n.$$

Час відновлення t_v – час досягнення кріотроном критичної температури T_c , обчислюється як

$$t_v = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{T_0 - \frac{W}{\alpha C}}{T_c - \frac{W}{\alpha C}} \right).$$

За допомогою даної оціночної моделі та виразу (B.32) були отримані залежності часу t_v від величини I_{ud} за умови ідеального остигання ($W = 0$).

Таким чином, використання даної оціночної моделі дозволяє визначити параметри конструкції, величину струму утримання, що забезпечують зниження часу досягнення кріотроном критичної температури при незмінній величині теплових втрат в надпровідниковому ключі (рис. B.22), що в свою чергу призводить до зниження енерговитрат в кріогенній зоні.

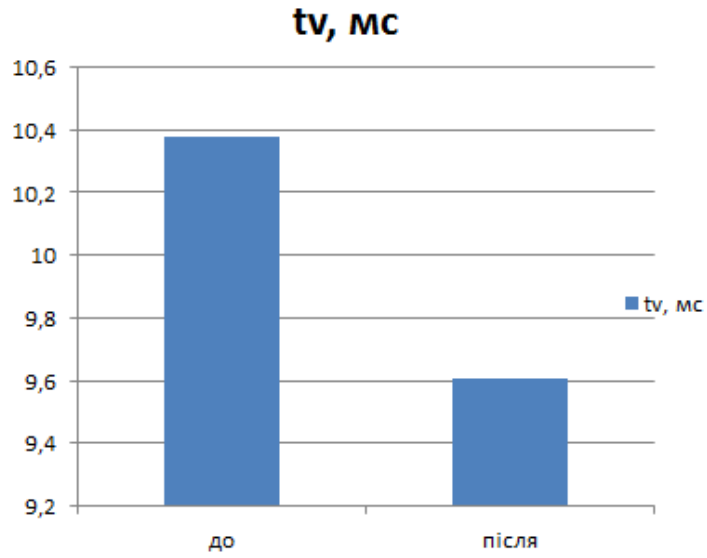


Рис. В.22. Порівняльна діаграма часу відновлення до та після застосування оціночної моделі

Алгоритм розрахунків. Для інтегрування рівнянь (В.27) була використана шеститочкова неявна схема Кранка-Ніколсона.

$$P_L C_L(T_j^m) \frac{T_j^{m+1} - T_j^m}{8 \cdot t} = \frac{1}{2 \cdot \delta_L^2} \left[\lambda(T_{j+1}^m) \frac{r_{j+1}}{r_j} (T_{j+1}^{m+1} + T_{j+1}^m - T_j^{m+1} - T_j^m) - \right. \\ \left. - \lambda_L(T_j^m) (T_j^{m+1} + T_j^m - T_{j-1}^{m+1} - T_{j-1}^m) \right] + W_L, \quad (B.33)$$

$$L = 1, 2, 3, \quad 2 \leq j \leq N_3 - 1, \quad j \neq N_1, N_2.$$

Значення індексу $L = 1$ відповідає надпровіднику, 2 – нагрівачу, 3 – ізолятору (очевидно, що $W_3 = 0$).

$$T_j^m = T(t_m, r_j), \quad t_m = \delta_t(m - 1);$$

$$r_j = \begin{cases} \delta_1, & j \leq N_1; \\ \Delta_1 + \delta_2(j - N_1), & N_1 < j \leq N_2. \\ \Delta_2 + \delta_3(j - N_2) \end{cases}$$

У розрахунках використовувалася нерівномірна різницева сітка ($\delta_1 \neq \delta_2 \neq \delta_3$) при $N_1 = 11$, $N_2 = 21$, $N_3 = 41$. Граничні умови на осі симетрії системи і на поверхні розділу матеріалів апроксимовані скінченнорізницевиими співвідношеннями першого порядку точності:

$$\begin{cases} T_2^{m+1} - T_1^{m+1} = 0 \\ \frac{\lambda_1(T_{N_1}^m)}{\delta_1} (T_{N_1}^{m+1} - T_{N_1-1}^{m+1}) \frac{\lambda_2(T_{N_1+1}^m)}{\delta_2} (T_{N_1+1}^{m+1} - T_{N_1}^{m+1}) = \\ \frac{\lambda_3(T_{N_2+1}^m)}{\delta_3} (T_{N_2+1}^{m+1} - T_{N_2}^{m+1}) = \frac{\lambda_2(T_{N_2}^m)}{\delta_2} (T_{N_2}^{m+1} - T_{N_2-1}^{m+1}). \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

Рівняння (B.29) є нелінійним. Можна апроксимувати це відношення одним з двох наведених нижче способів:

$$T_{N_3}^{m+1} = T_0 + \frac{1}{A} \left[\frac{T_{N_3-1}^m - T_{N_3}^m}{\lambda(T_{N_3}^m)} \right]^{0.3}; \quad T_{N_3}^{m+1} = T_{N_3-1}^{m+1} - \frac{[A(T_{N_3}^m - T_0)]^{\frac{10}{3}}}{\lambda(T_{N_3}^m)}.$$

Очікувалось, що перший спосіб виявиться більш кращим в сенсі стійкості, тому що показник ступеня при нелінійному релаксаційному члені тут на порядок менше, ніж у другому. Це припущення підтвердилось в повній мірі при проведенні розрахунків, в яких реалізовувалися обидва методи, але стійкість розрахунку була досягнута лише в першому.

Співвідношення (B.33) та (B.34) утворюють в сукупності систему N_3 лінійних рівнянь відносно до N_3 невідомих $\{T_j^{(m+1)}, j = 1 \dots N_3\}$ з матрицею виду Якобі. Таким чином, система може бути вирішена методом прогонки.

В.3.4. Опис програмної реалізації системи моделювання теплових процесів в перемикаючих елементах

Апаратні компоненти системи приведені на діаграмі розгортання системи (рис. В.23). Більш детальний опис кожного з компонентів системи приведений на діаграмі компонентів системи (рис. В.24).

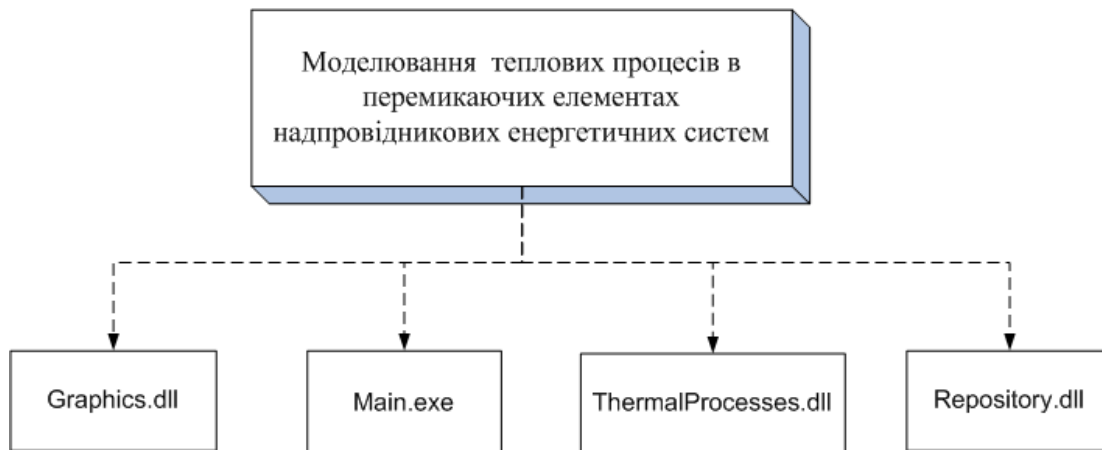


Рис. В.23. Діаграма розгортання системи

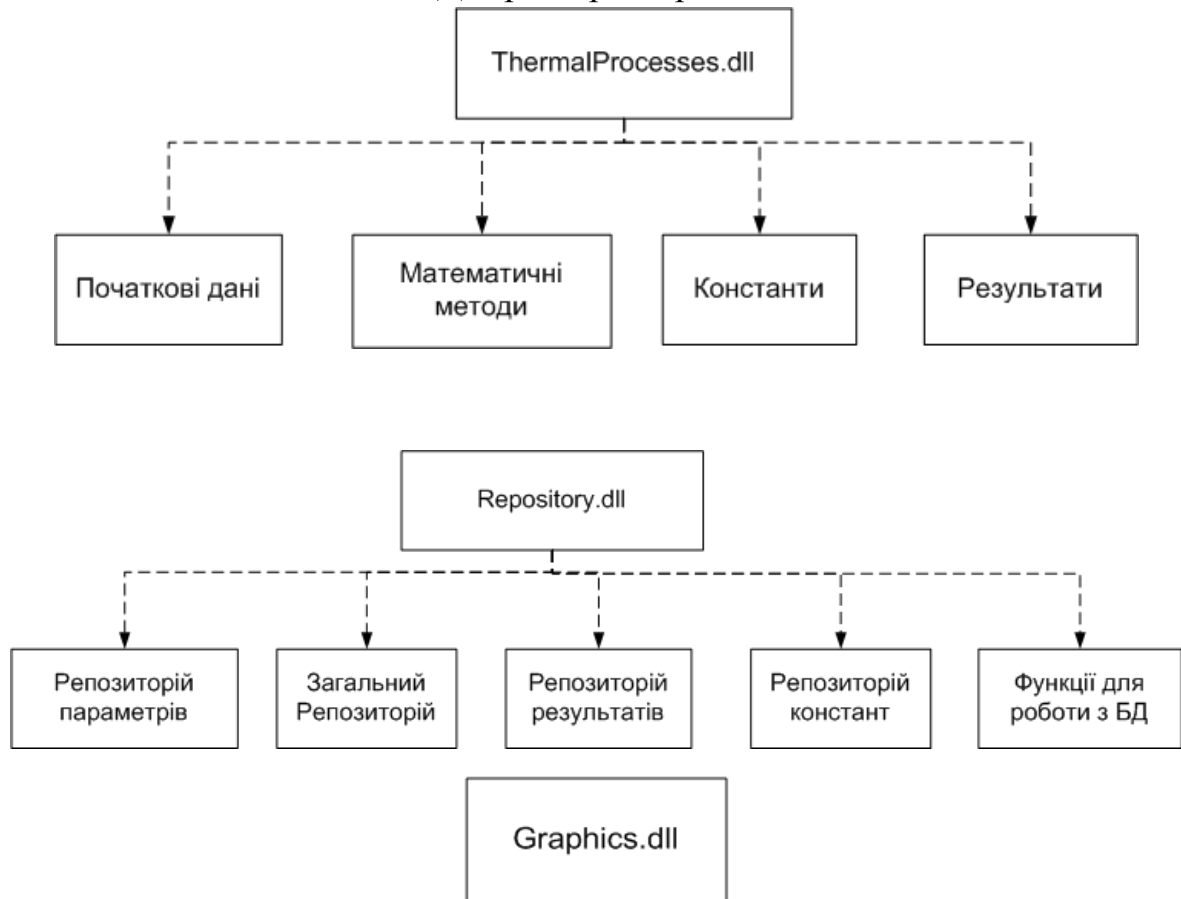


Рис. В.24. Діаграма компонентів системи

Вікно «Графіки залежності теплопровідності від температури» (рис. В.25) містить в собі область для графіку, на якому будується рівномірна сітка та графіки залежностей теплопровідності частин надпровідникового ключа від їх температури. Також у вікні є області для введення коефіцієнтів масштабування по осі X та Y та кнопка «Перебудувати», яка при натисканні перебудує графіки у відповідності з введеними параметрами.

Вікно «Залежність теплоємності від температури» викликається натисканням на підпункт «Питома теплоємність» меню «Таблиці та графіки».

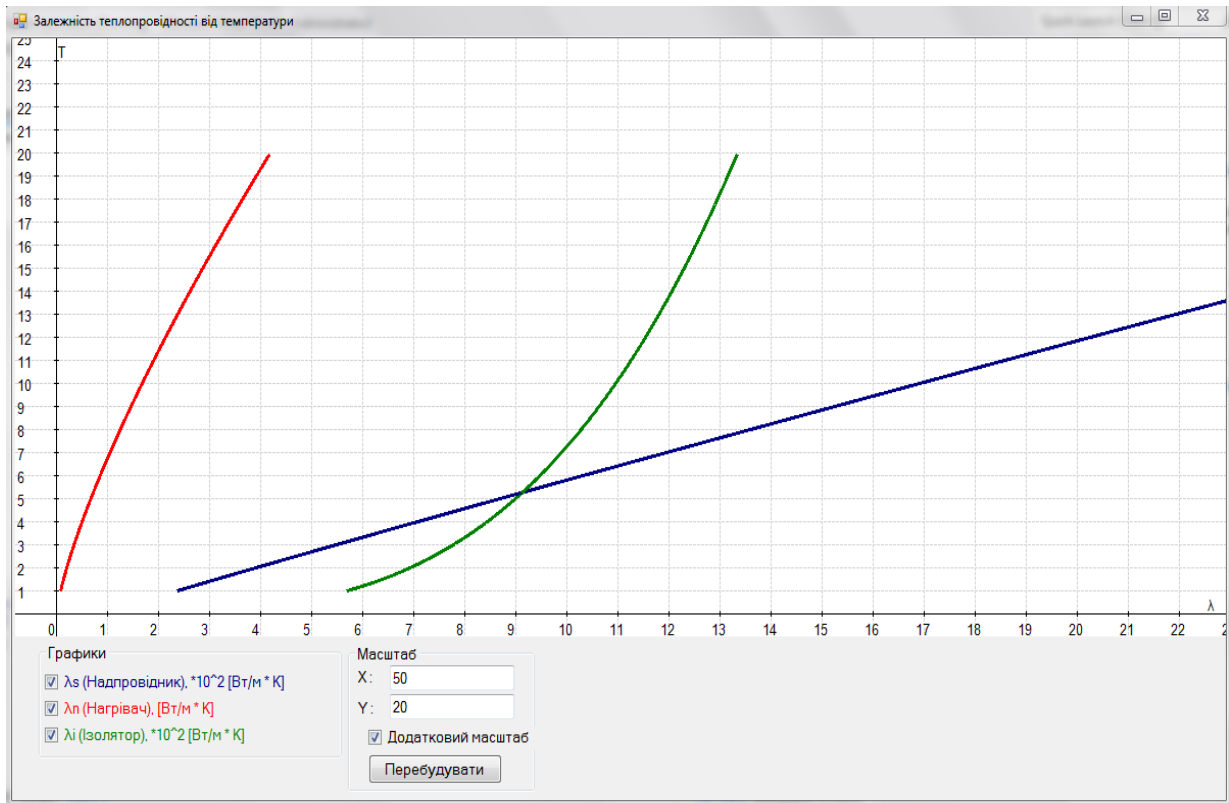


Рис. В.25. Графіки залежності теплопровідності від температури

Побудовані графіки залежностей теплоємності частин надпровідникового ключа від їх температури наведені на рис. В.26.

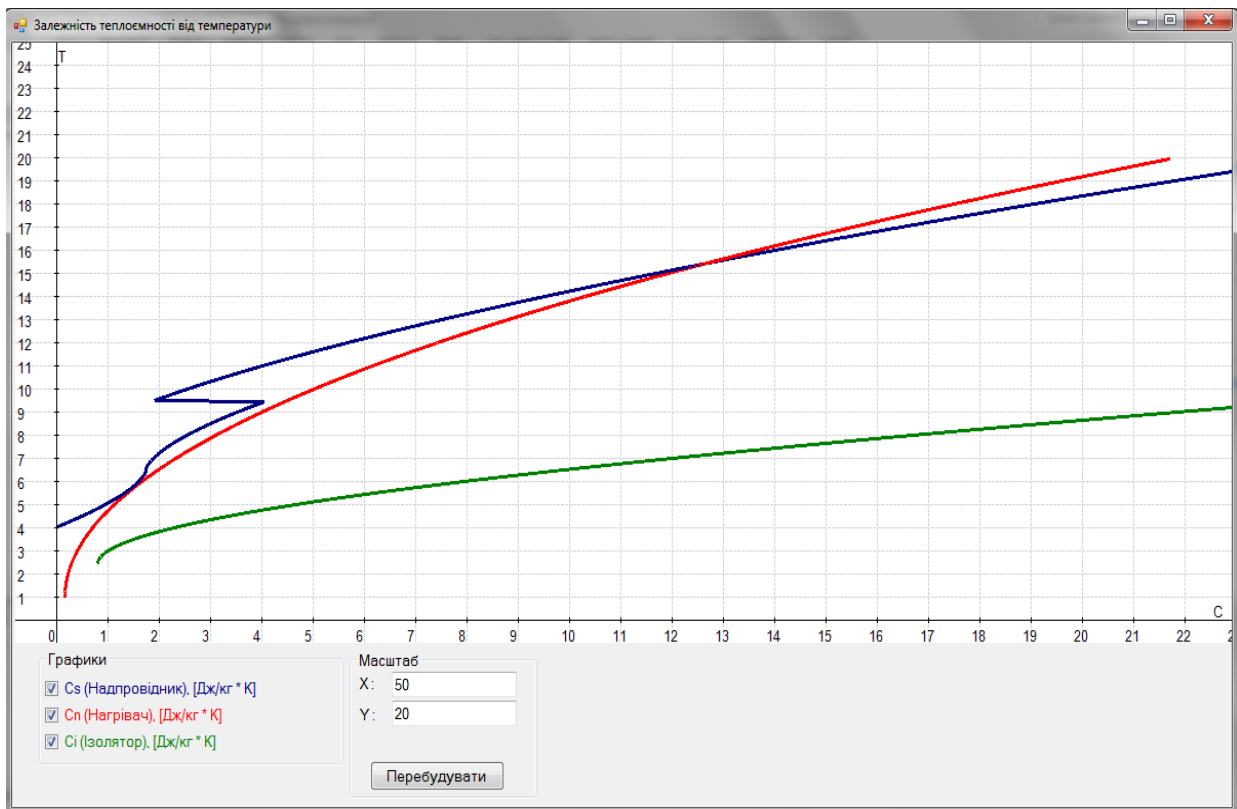


Рис. В.26. Графіки залежності теплоємності від температури

Графік залежності опору клапана від температури» (рис. В.27) з відповідною візуалізацією обрахованих даних:

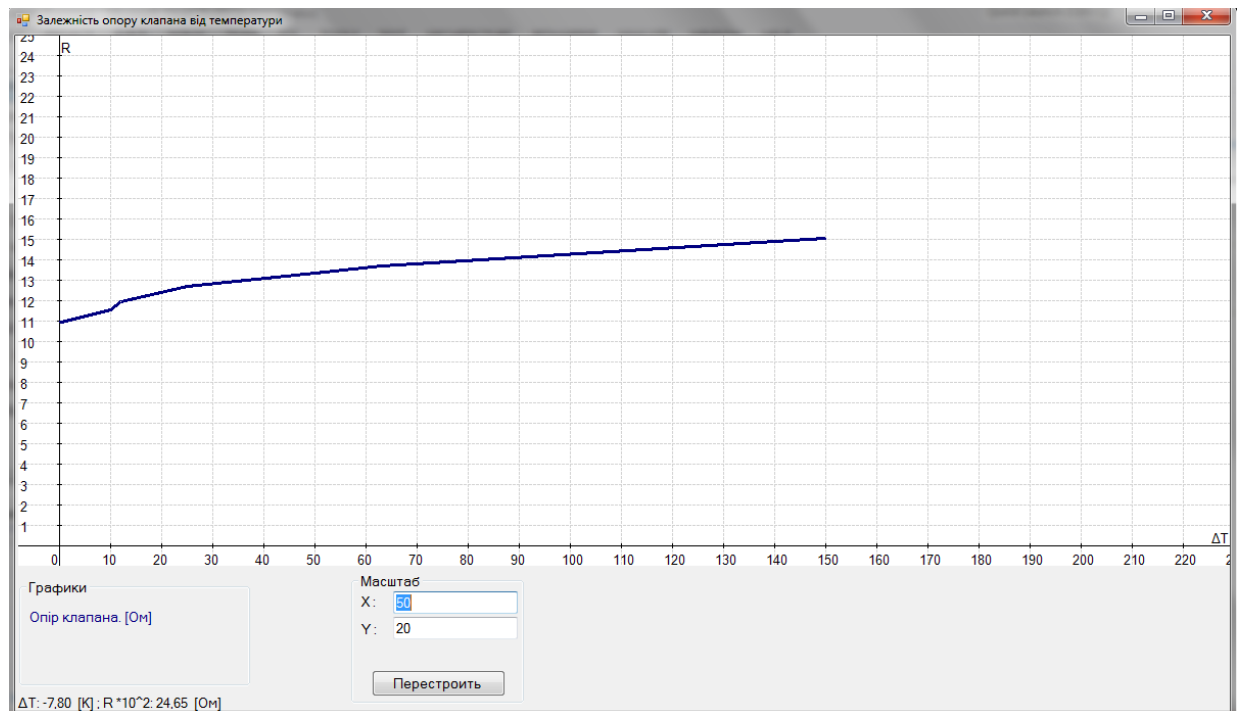


Рис. В.27. Графік залежності опору клапана від температури

«Розподіл температури в кінці імпульсу в поперечному перерізі клапана» (рис. В.28) з відповідною візуалізацією розподілу температури в поперечному перерізі кріотрона в кінці імпульсу. На графіку показані температури в складових частинах кріотрона: надпровіднику, нагрівачі та ізоляторі відповідно синім, червоним та зеленим кольорами.

Натискання кнопки «Графік T(час)» призведе до появи вікна «Залежність температури надпровідника від часу імпульсу» (рис. В.29) з відповідною візуалізацією кривої зміни температури надпровідника за час дії імпульсу. На графіку показані всі стадії роботи кріотрона: нагрівання, стабілізація та охолодження відповідно помаранчевим, зеленим та голубим кольорами.

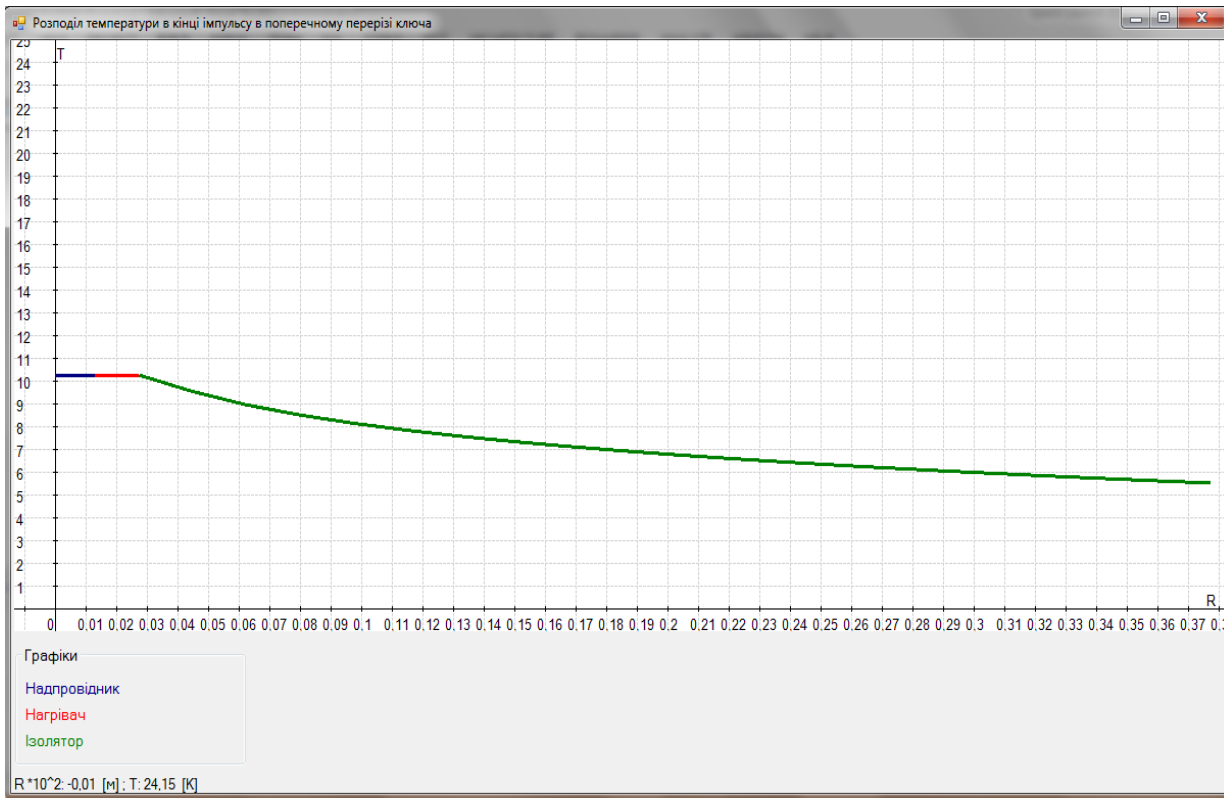


Рис. В.28. Розподіл температури в кінці імпульсу в поперечному перерізі клапана

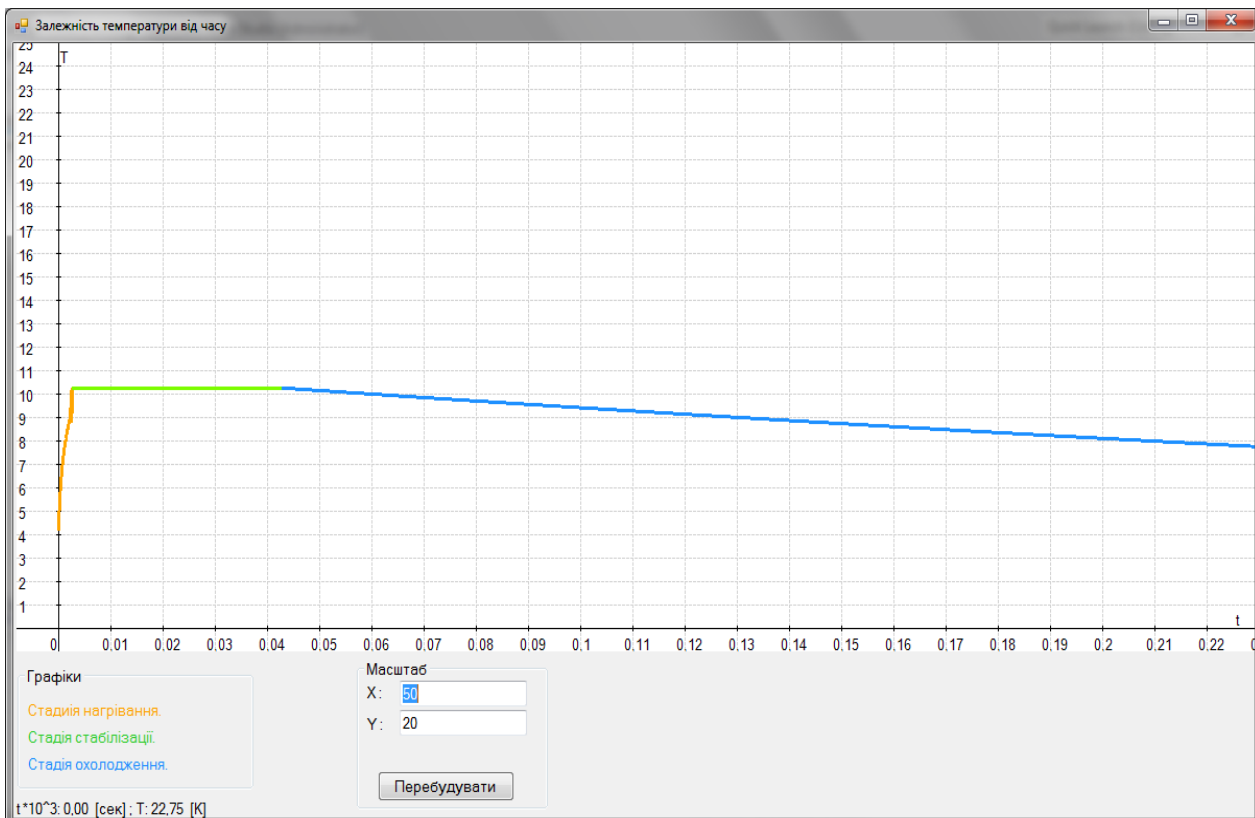


Рис. В.29. Залежність температури надпровідника від часу імпульсу

Висновок. Отримано оригінальні криві температурних полів по перерізу надпровідникових ключів в моменти зміни режимів протягом циклу роботи

магнітного комплексу, а також криві зміни температури надпровідних ключів за час повного циклу. Розроблена система надає можливість інженерам-електротехнікам та керівництву промислового об'єкта моделювати та досліджувати теплові процеси в перемикаючих елементах надпровідникових енергетичних систем.

ДОДАТОК Г. Точностна параметрична редукція моделі динаміки літака

У моделі динаміки польоту літака [234], що підлягає спрощенню, літак розглядався як тверде тіло змінної маси з інерційно-масовою симетрією в площині $Ox_{12}y_{12}$ зв'язаної системи координат. Вектор стану визначається змінними $V, \alpha, \beta, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \vartheta, \gamma, H$ системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} &= \frac{T \cos \alpha - Q}{m} \cdot \cos \beta - g \left[\cos \beta (\sin \vartheta \cdot \cos \alpha - \cos \vartheta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \vartheta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta \right] + \frac{Z}{m} \sin \beta, \\ \dot{\alpha} &= \omega_z + \operatorname{tg} \beta (\omega_y \cdot \sin \alpha - \omega_x \cdot \cos \alpha) - \frac{d_r}{mV \cos \beta} [Y + T \sin \alpha - \\ &\quad - mg (\cos \vartheta \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \vartheta \cdot \sin \alpha)], \\ \dot{\beta} &= \omega_y \cdot \cos \alpha + \omega_x \cdot \sin \alpha + \frac{d_r}{mV} \{ Z \cdot \cos \beta + Q \cdot \sin \beta - T \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha + \\ &\quad + mg [\sin \beta \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \alpha - \cos \vartheta (\cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \beta \cdot \sin \gamma)] \}, \\ \dot{\omega}_x &= \frac{1}{J_x} \left[\frac{(J_y - J_z) \cdot \omega_y \cdot \omega_z}{d_r} + d_r (M_x \cos \alpha + M_y \sin \alpha) \right], \\ \dot{\omega}_y &= \frac{1}{J_y} \left[\frac{(J_z - J_x) \cdot \omega_z \cdot \omega_x}{d_r} + d_r (M_y \cos \alpha - M_x \sin \alpha) \right], \\ \dot{\omega}_z &= \frac{1}{J_z} \left[\frac{(J_x - J_y) \cdot \omega_x \cdot \omega_y}{d_r} + d_r \cdot M_z \right], \\ \dot{V} &= \omega_y \cdot \sin \gamma + \omega_z \cdot \cos \gamma, \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cdot \cos \gamma - \omega_z \cdot \sin \gamma), \\ \dot{H} &= V [\cos \beta (\sin \vartheta \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \alpha) - \sin \beta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \gamma]. \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.1)$$

В системі (Г.1) прийняті такі позначення: V — повітряна швидкість польоту, α — кут атаки, β — кут ковзання, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — складові кутової швидкості обертання літака в зв'язаній системі координат (початок координат в центрі ваги, вісь OX спрямована вперед паралельно бічній хорді крила, вісь OY спрямована вгору, вісь OZ — по правому крилу), ϑ — кут тангажу, γ — кут крену, H — висота польоту, T — тяга двигунів, Q, Y, Z — лобовий опір, підйомна і бічна сили, M_x, M_y, M_z —

моменти аеродинамічних сил в напівзв'язаній системі координат, J_x, J_y, J_z — момент інерції і літака щодо осей зв'язаної системи координат, m — маса літака, g — прискорення сили тяжіння. Всі кутові величини в (Г.1) виражені в градусах,

$$d_r = \frac{180}{\pi} \text{ — градусна міра радіана.}$$

Аеродинамічні сили і моменти визначаються співвідношеннями:

$$\left. \begin{aligned} Q &= c_x qS, \quad Y = c_y qS, \quad Z = c_z qS, \\ M_x &= m_x qSl, \quad M_y = m_y qSl, \quad M_z = m_z qSb_a, \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.2})$$

де $q = \frac{\rho V^2}{2}$ — швидкісний напір, S — площа крил, l, b_a — довжина та середня аеродинамічна хорда крила. Щільність повітря моделюється виразом:

$$\rho = \rho_0 \exp(-\lambda H), \quad \rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda = 10^{-4} \text{ м}^{-1}.$$

Найбільш істотні фактори в досліджуваних залежностях коефіцієнтів аеродинамічних сил і моментів і тяг двигунів задаються в такому наборі:

$$\left. \begin{aligned} c_x &= c_x(\alpha, M, \delta_3, \delta_6, \delta_{ш}, B), \\ c_y &= c_y(\alpha, M, \delta_3, \delta_6, B), \\ c_z &= c_z(\alpha, \beta, \delta_3, \delta_n), \\ m_x &= m_x(\alpha, \beta, V, \omega_x, \omega_y, \delta_3, \delta_n, \delta_3), \\ m_y &= m_y(\alpha, \beta, V, \omega_x, \omega_y, \delta_3, \delta_n), \\ m_z &= m_z(\alpha, \dot{\alpha}, V, \omega_z, B, \delta_3, \delta_6, \delta_{ш}), \\ T_i &= T_i(H, V, \alpha_{iP_{yg}}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г.3})$$

($i = \overline{1,4}$ — розглядається схема з чотирма турбогвинтовими двигунами).

В (Г.3) δ_6 - кут відхилення керма висоти, δ_n - кут відхилення керма напрямку, δ_3 - кут відхилення елеронів, δ_3 - кут відхилення закрилків, $\delta_{ш}$ - кут положення шасі, - $\alpha_{iP_{yg}}$ кут положення сектора газу. Аргумент B - коефіцієнт навантаження на ометаєму гвинтом площу F - задається співвідношенням

$$B = \frac{1}{4qF} \sum_{i=1}^4 T_i.$$

Число M обчислюється за формулою

$$M = \frac{V}{20.046 \cdot \sqrt{288.15 - 0.0065H}}. \quad (\Gamma.4)$$

Структура виразів, апроксимуючих тягу двигунів і коефіцієнти аеродинамічних сил і моментів, задається наступними залежностями:

$$\left. \begin{aligned} T_i &= P_1 + \left(P_2 + P_3 \cdot P_a + P_4 \cdot \alpha_{iP_{yg}} + (P_5 \cdot V + P_6) \cdot V \right) \cdot \alpha_{iP_{yg}} + \\ &+ \left(P_7 + P_8 \cdot P_a + (P_9 + P_{10} \cdot V) \cdot V \right) \cdot V + \left(P_{11} + (P_{12} + P_{13} \cdot P_a) \cdot P_a \right) \cdot P_a, \\ c_x &= P_{21} + P_{22} \cdot |\delta_\theta| + P_{23} \cdot \delta_{\omega} + (P_{24} \cdot M + P_{25}) \cdot M + (P_{26} \cdot \delta_\alpha + P_{27}) \cdot \delta_\alpha + \\ &+ (P_{28} \cdot \alpha + P_{29} + P_{30} \cdot M + P_{31} \cdot \delta_\alpha) \cdot \delta_\alpha + \\ &+ (P_{32} \cdot \delta_\alpha + P_{33} + (P_{34} \cdot \alpha + P_{35}) \cdot \alpha) \cdot B, \\ c_y &= P_{41} + P_{42} \cdot \delta_\theta + (P_{43} + P_{44} \cdot M) \cdot \alpha + P_{45} \cdot \delta_\alpha + \\ &+ ((P_{46} + P_{47} \cdot \alpha) \cdot \alpha + P_{48} + (P_{49} + P_{50} \cdot \delta_\alpha) \cdot \delta_\alpha) \cdot B, \\ c_z &= P_{61} \cdot \delta_\theta + ((P_{62} \cdot \delta_\alpha + P_{63}) \cdot \alpha + P_{64} + P_{65} \cdot \delta_\alpha) \cdot \beta, \\ m_x &= (P_{81} \cdot \alpha + P_{82}) \cdot \delta_\alpha + (P_{83} \cdot \alpha + P_{84}) \cdot \delta_\theta + (P_{85} \cdot \alpha + P_{86}) \cdot \beta + \\ &+ ((P_{87} \cdot \alpha + P_{88}) \cdot \omega_x + (P_{89} + P_{90} \cdot \delta_\alpha + P_{91} \cdot \alpha + P_{92} \cdot \alpha \cdot \delta_\alpha) \cdot \omega_y) \frac{l}{2Vd_r}, \\ m_y &= (P_{101} + P_{102} \cdot \alpha + P_{103}) \cdot \delta_\theta + (P_{104} + P_{105} \cdot \alpha + P_{106} \cdot \delta_\alpha) \cdot \beta + \\ &+ ((P_{107} + P_{108} \cdot \alpha + P_{109} \cdot \delta_\alpha) \cdot \omega_x + (P_{110} + P_{111} \cdot \alpha) \cdot \omega_y) \frac{l}{2Vd_r}, \\ m_z &= P_{121} + P_{122} \cdot \delta_\theta + P_{123} \cdot \delta_{\omega} + (P_{124} + P_{125} \cdot \delta_\alpha) \cdot \delta_\alpha + \\ &+ (P_{126} + P_{127} \cdot M + P_{128} \cdot \delta_\alpha + P_{129} \cdot \alpha \cdot \delta_\alpha) \cdot \alpha + \\ &+ (P_{130} + P_{131} \cdot \delta_\alpha + P_{132} \cdot \alpha) \cdot B + (P_{133} + P_{134} \cdot \alpha) \cdot \omega_z + \\ &+ (P_{135} \cdot \alpha + P_{136} \cdot \dot{\alpha}) \frac{\epsilon_a}{Vd_r}. \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.5)$$

У виразу (Г.5) для T_i змінної P_a , позначено тиск повітря на висоті польоту. Нумерація компонент вектора P досліджуваних коефіцієнтів P_j залежностей (Г.5) дана з запасом для кожної із змінних T_i, c_k, m_k ($k \in \{x, y, z\}$). Цей запас відображає реалізацію в програмі можливості дослідження підозрюваних на значимість параметрів, відсутніх в заданих емпіричних залежностях.

Для скорочення витрат часу при моделюванні досліджуваної системи канали управління були прийняті безінерційними. При цьому керуючі змінні $\alpha_{iP_{yg}}$ ($i = \overline{1,4}$),

$\delta_k (k \in \{в, н, э, з, ш\})$ задаються трапецеїдальними приростами до балансувальних значень з максимально допустимою швидкістю перекладки рулів (20 град/с). Таким шляхом забезпечується максимально швидкий вихід змінних стану в область граничних значень. Поєднання за часом узгоджених за фізичним змістом збільшень всіх органів управління дозволяє отримати близький до критичного режим польоту літака, в якому поєднуються бічний і поздовжній рух з близькими до гранично допустимих значень змінних стану.

На рис. Г.1 наведено графік приросту управлінь сектором газу, кермом висоти, напрямку, елеронами до балансувальних значень цих величин у критичному режимі, використовуваному для вирішення завдання редукції моделі (Г.1) - (Г.5).

Графіки зміни вихідних координат в цьому режимі, отримані в результаті обчислювального експерименту з реальними даними, наведені на малюнках Г.2-Г.4, що ілюструють результати точностної параметричної редукції моделі (Г.1) - (Г.5).

У безліч незначних параметрів після побудови області невизначеності вихідних координат повної моделі виявилися включеними параметри, наведені в табл.Г.1.

Природно, в множину незначних параметрів не були значні за фізичним змістом параметри P1, P2, P25, P44, P82, P101, P122.

Опорні значення координат повної моделі, область невизначеності цих координат і опорні траєкторії моделі з обнуленими 45 параметрами, які потрапили в список L_{np} кандидатів в незначущі параметри, наведені на малюнках Г.2 (а-і). На малюнках Г.3 (а-і) показано розташування опорної траєкторії скороченої моделі з 13 обнуленими параметрами з початку списку L_{np} всередині допустимої області, яка дорівнює 0.2 області невизначеності повної моделі.

Множина незначних параметрів

Параметр	Коефіцієнт фактору	у функції
P_4	$\alpha_{iP_{yg}}^2$	T_i
P_5	$V \cdot \alpha_{iP_{yg}}$	— —
P_{10}	V^3	— —
P_{23}	δ_{uu}	c_x
P_{26}	δ_3^2	— —
P_{30}	$M \cdot \alpha$	— —
P_{32}	$\delta_3 \cdot B$	— —
P_{34}	$\alpha^2 \cdot B$	— —
P_{45}	δ_3	c_y
P_{47}	α^2	— —
P_{49}	$\delta_3 \cdot B$	— —
P_{62}	$\delta_3 \cdot \alpha$	c_z
P_{89}	$\frac{\omega_y \cdot l}{2V \cdot d_r}$	M_x
P_{102}	$\delta_h \cdot \alpha$	M_y
P_{106}	$\delta_3 \cdot \beta$	— —
P_{124}	δ_3^2	m_z
P_{126}	$\delta_3 \cdot \alpha$	— —
P_{130}	B	— —
P_{134}	$\frac{\omega_z \cdot \epsilon_a}{V \cdot d_r}$	m_z
P_{136}	$\frac{\dot{\alpha} \cdot \epsilon_a}{V \cdot d_r}$	— —
P_{135}	$\frac{\alpha \cdot \epsilon_a}{V \cdot d_r}$	— —

Табл. Г.1, продовження

P_{131}	$\delta_3 \cdot B$	— —
P_{129}	$\delta_3 \cdot \alpha^2$	— —
P_{125}	δ_3^2	— —
P_{123}	δ_{uu}	M_z
P_{111}	$\frac{\alpha \cdot \omega_y \cdot l}{2V \cdot d_r}$	m_y
P_{109}	$\frac{\delta_3 \cdot \omega_x \cdot l}{2V \cdot d_r}$	— —

Параметр	Коефіцієнт фактору	у функції
P_{107}	$\frac{\omega_x \cdot l}{2V \cdot d_r}$	— —
P_{105}	$\alpha \cdot \beta$	— —
P_{103}	$\delta_3 \cdot \delta_H$	— —
P_{92}	$\frac{\alpha \cdot \delta_3 \cdot \omega_y \cdot l}{2V \cdot d_r}$	m_x
P_{90}	$\frac{\delta_3 \cdot \omega_y \cdot l}{2V \cdot d_r}$	— —
P_{95}	$\alpha \cdot \beta$	— —
P_{83}	$\delta_H \cdot \alpha$	— —
P_{65}	$\delta_3 \cdot \beta$	c_z
P_{63}	$\alpha \cdot \beta$	— —
P_{90}	$\delta_3^2 \cdot B$	c_y
P_{42}	δ_θ	— —
P_{31}	$\delta_3 \cdot \alpha$	c_x
P_{27}	δ_3	— —
P_{24}	M^2	— —

P_{22}	$ \delta_e $	— —

Табл. Г.1, продовження

P_{64}	β	c_z
P_{35}	$\alpha \cdot B$	c_x
P_{84}	δ_n	m_x

На малюнку Г.4 приведено взаємне розташування наступних опорних траєкторій:

$\bar{\omega}_z$ — повної моделі;

ω_{z45} — при редукції моделі обнуленням 45 параметрів із L_{np} ;

ω_{z13} — опорна траєкторія ω_z при обнуленні 13 параметрів з початку списку L_{np} ;

ω_{z2} — опорна траєкторія ω_z при обнуленні P_4, P_5 .

За виглядом траєкторій можна зробити висновок про незначущість всіх 45 параметрів, які потрапили в множину L_{np} . Однак при побудові областей невизначеності редукованих моделей з'ясувалося, що при заданих вихідних даних про збурення параметрів скорочена обнулінням 45 параметрів модель еквівалентна вихідної тільки при допустимій області невизначеності Δq_t , збільшеної в $c_f = 1.75$ разів в порівнянні з областю невизначеності $\bar{\Delta}q$ повної моделі. При $c_f = 1.2$ допустимо обнуління тільки 13 параметрів.

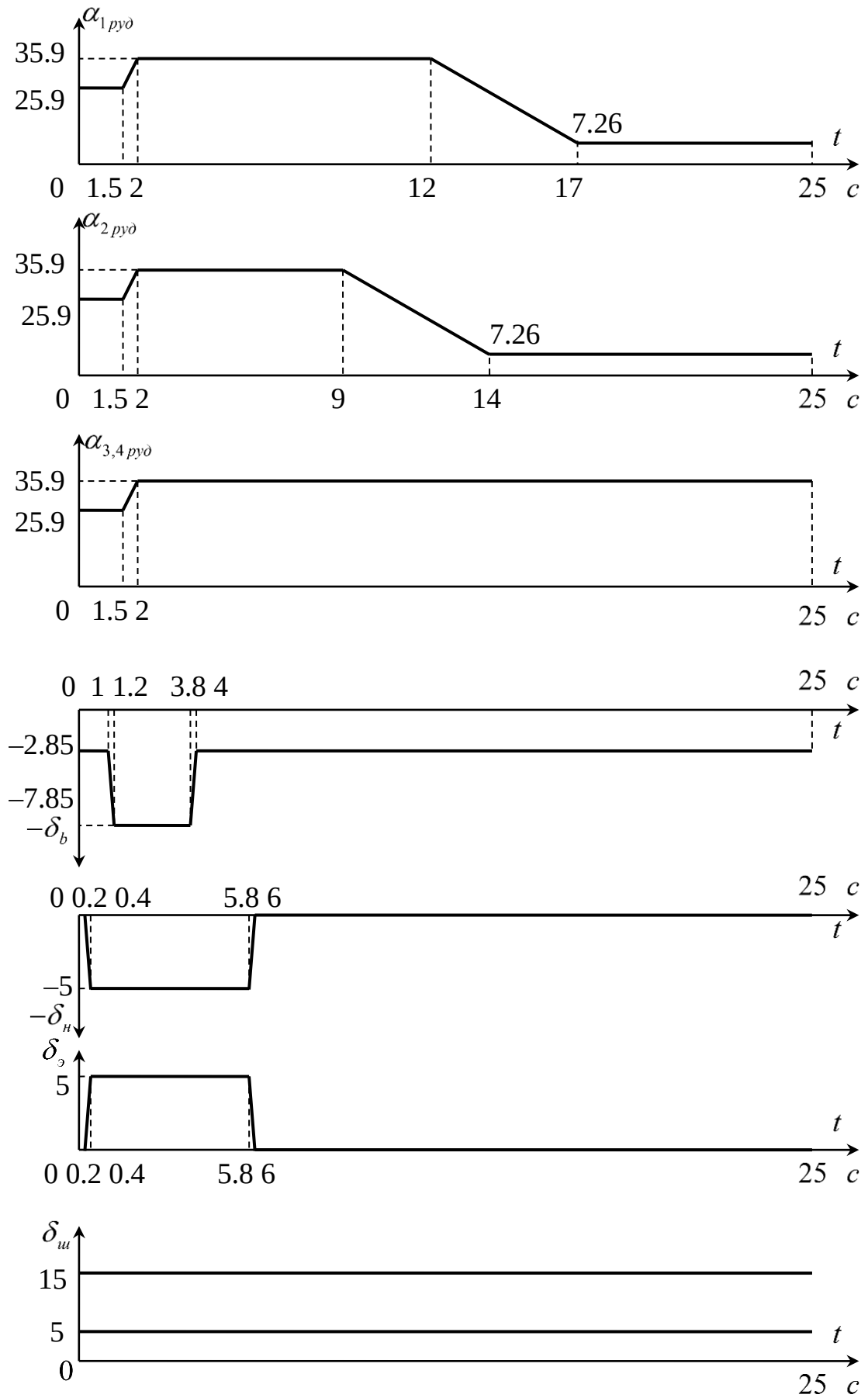


Рис. Г.1. Графіки приростів до балансуючих значень управлінь.

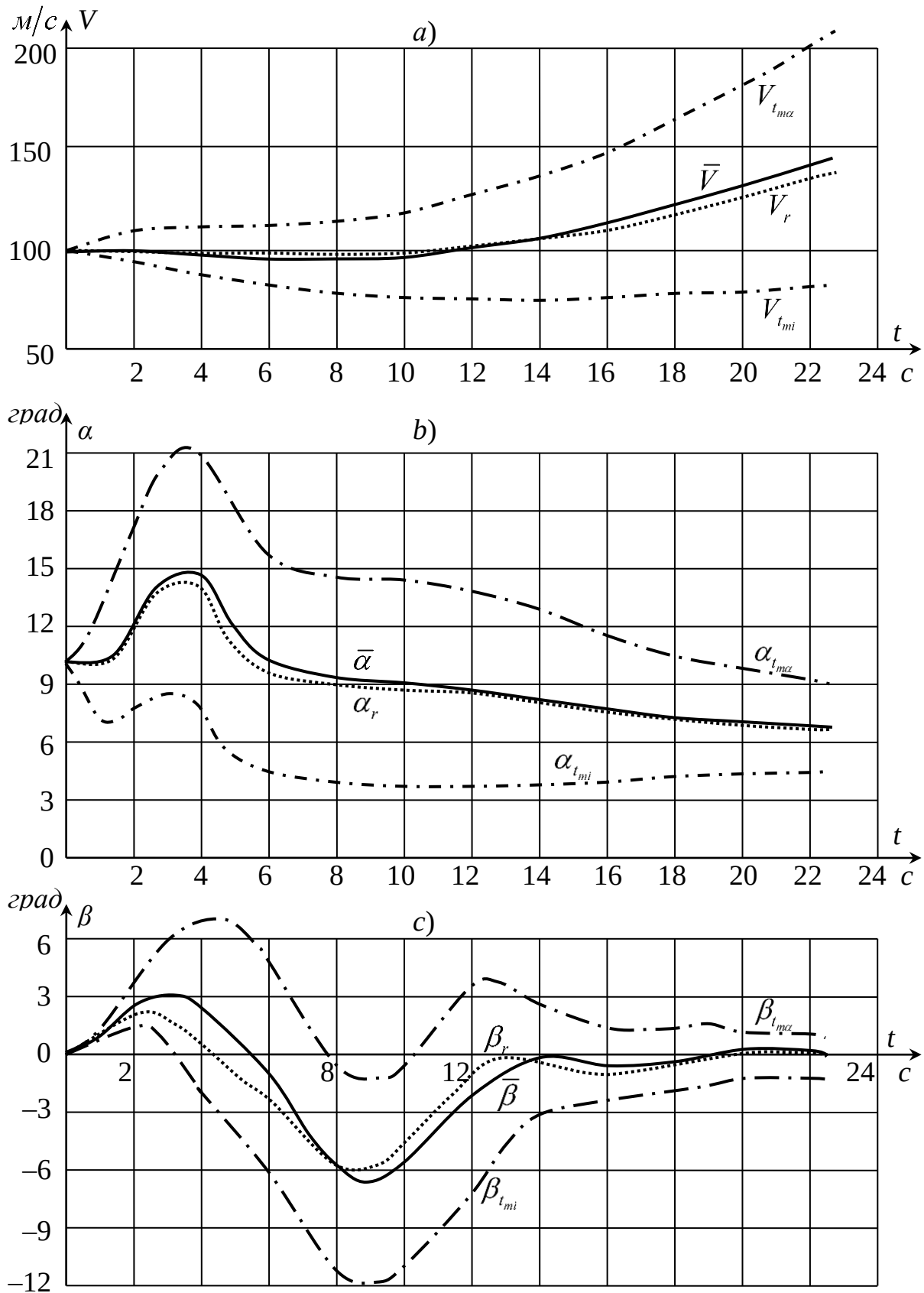


Рис. Г.2. Графіки зміни вихідних координат (a, b, c).

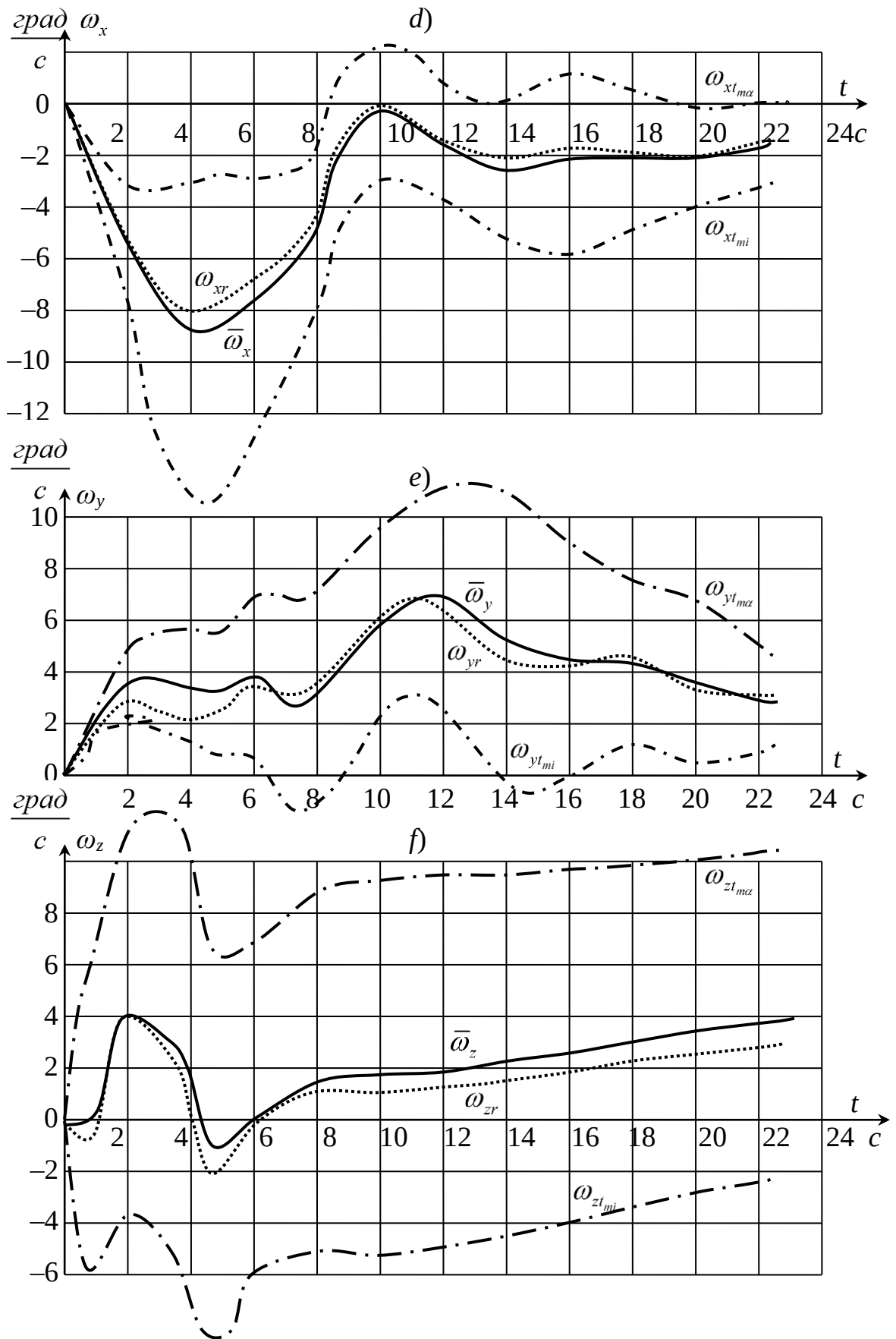


Рис. Г.2. Графіки зміни вихідних координат (d, e, f), продовження.

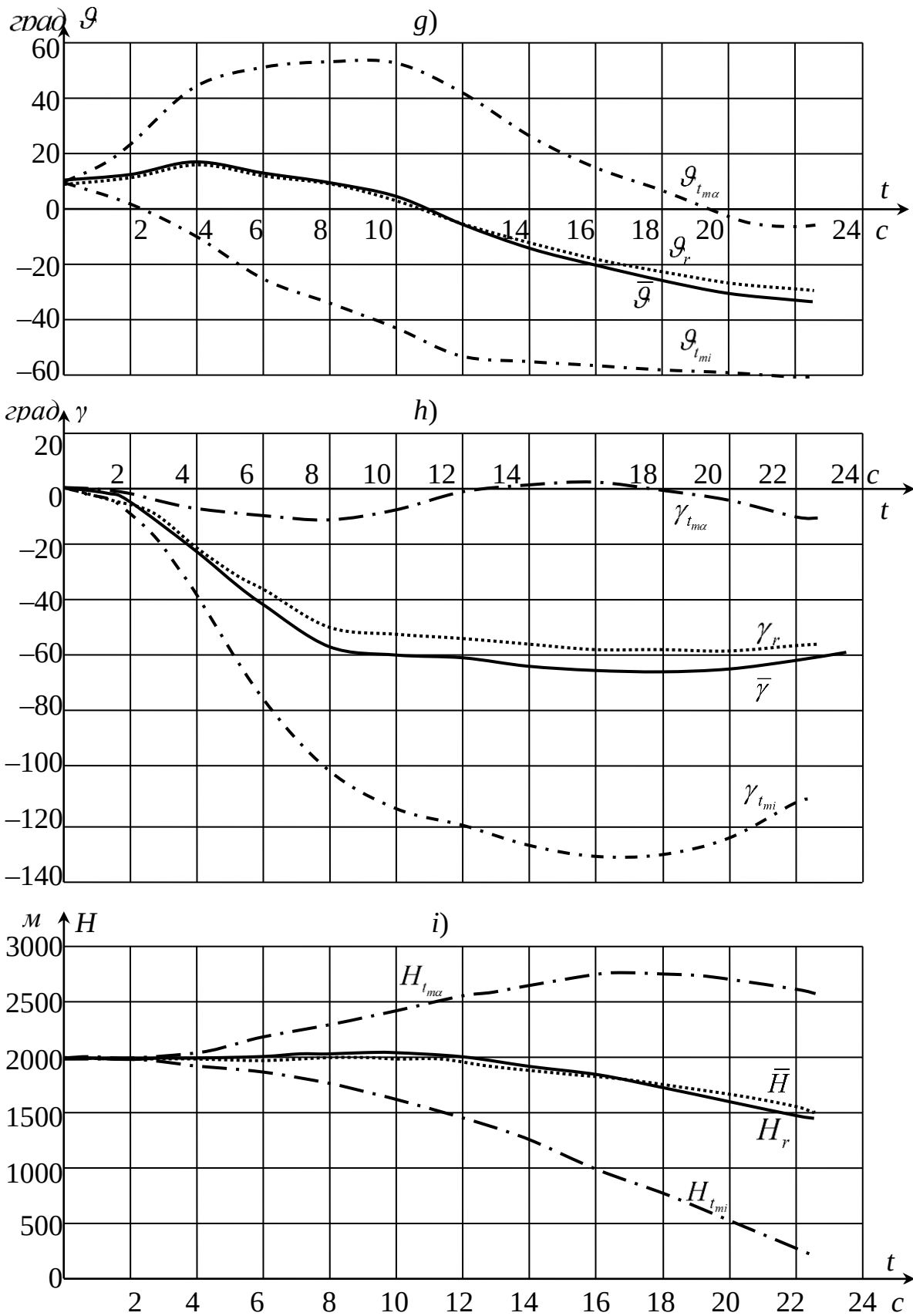


Рис. Г.2. Графіки зміни вихідних координат (g, h, i), продовження.

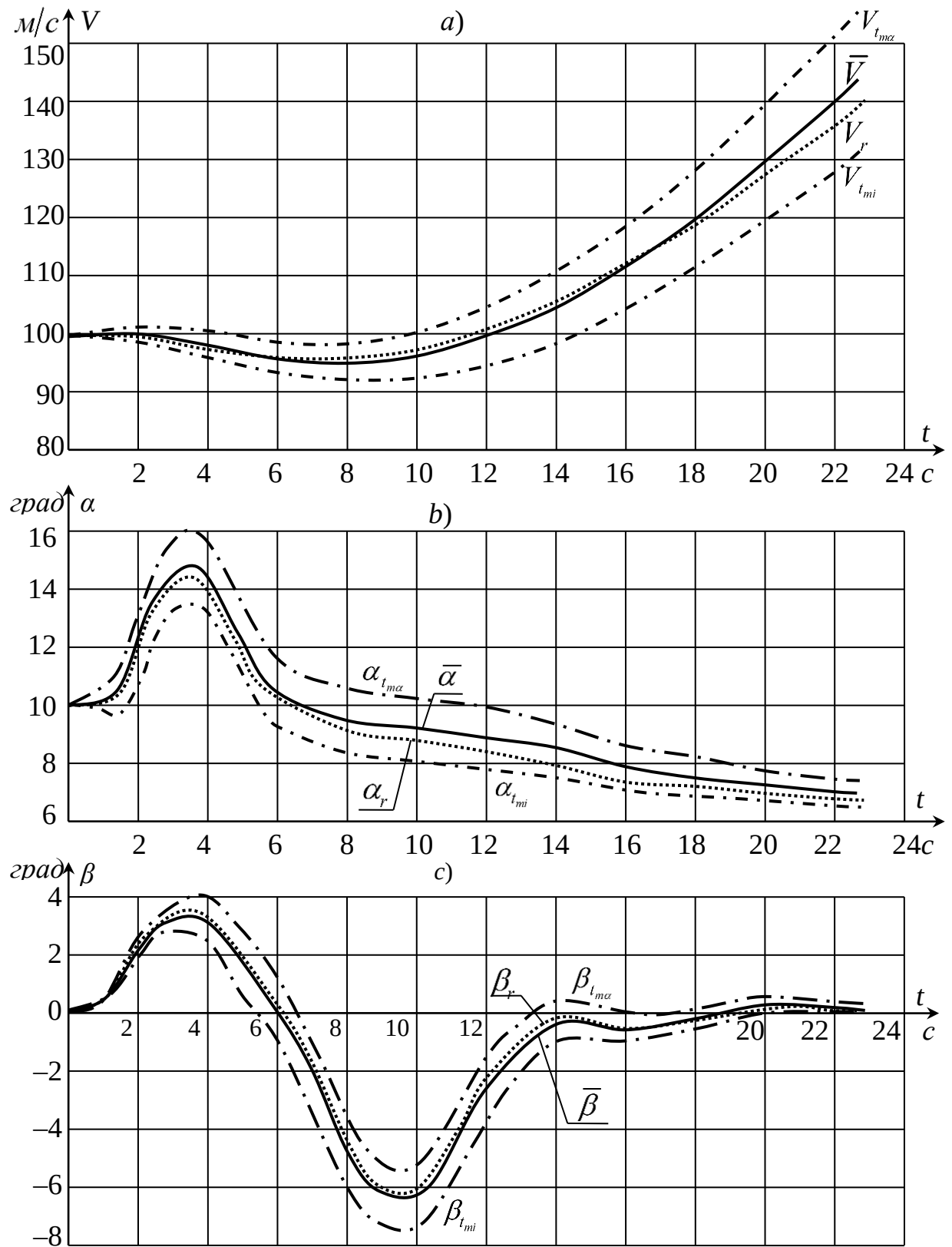


Рис. Г.3. Графіки зміни вихідних координат (a, b, c).

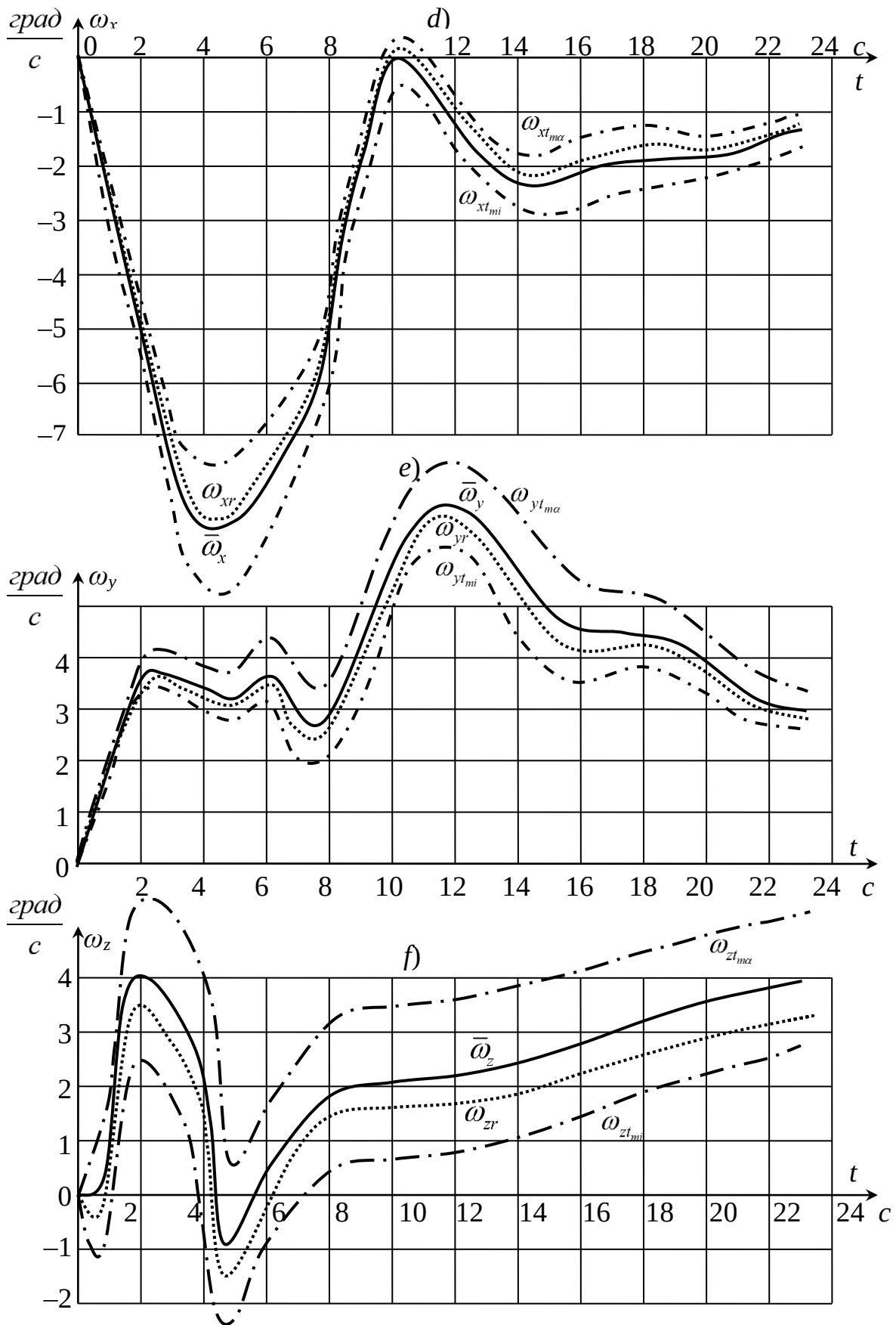


Рис. Г.3. Графіки зміни вихідних координат (d, e, f), продовження.

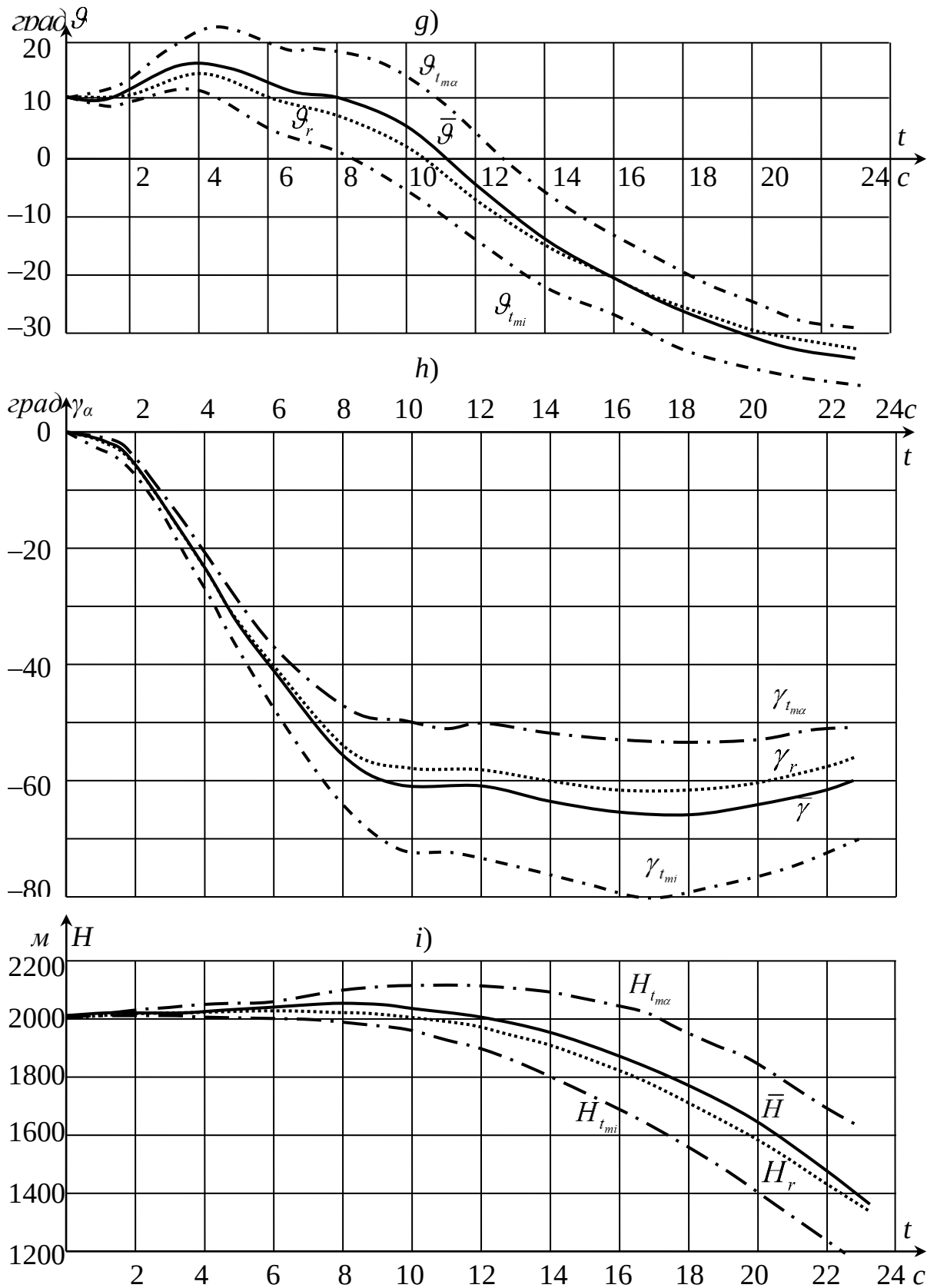


Рис. Г.3. Графіки зміни вихідних координат (g, h, i), продовження.

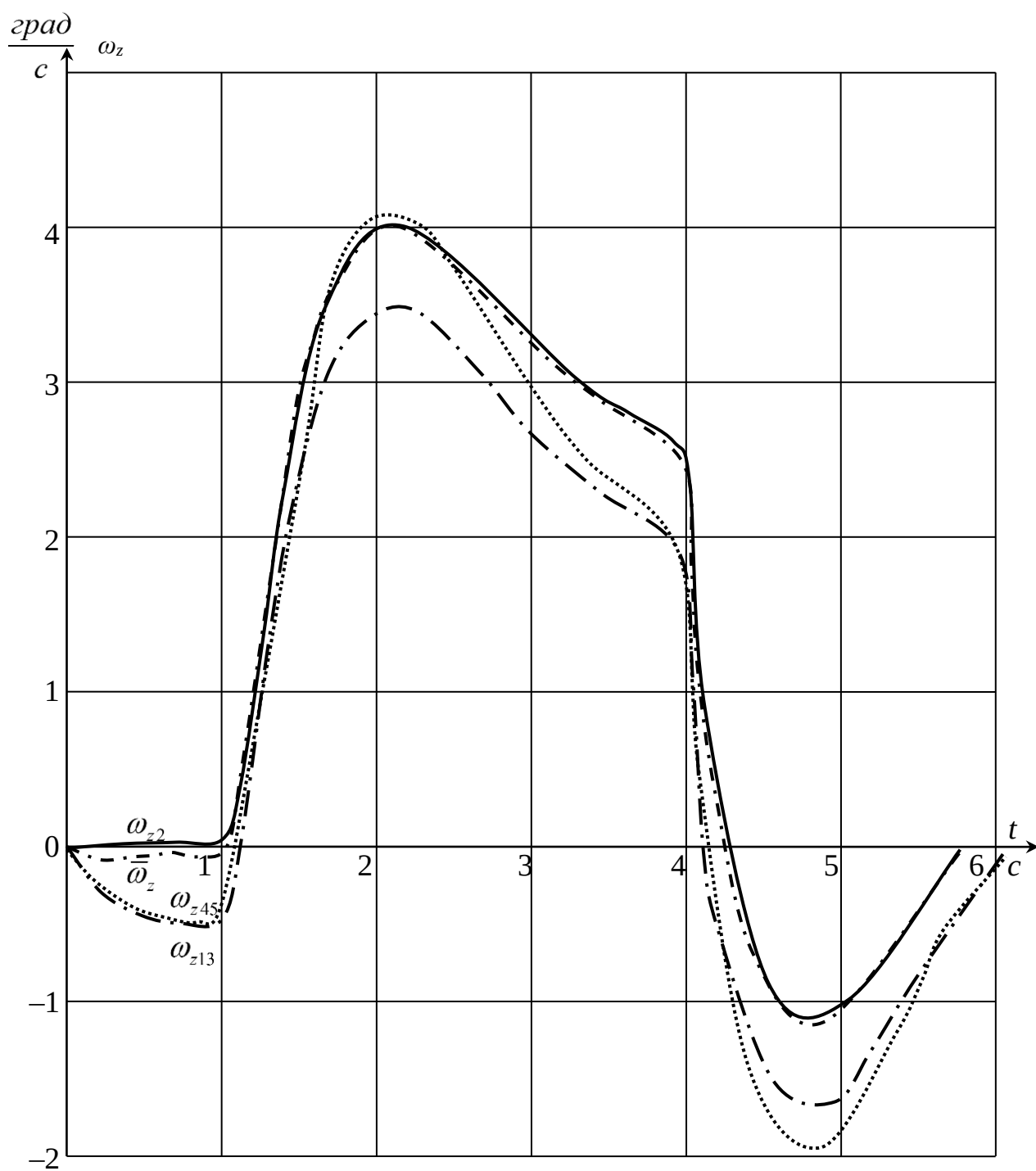


Рис. Г.4. Графіки зміни вихідних координат

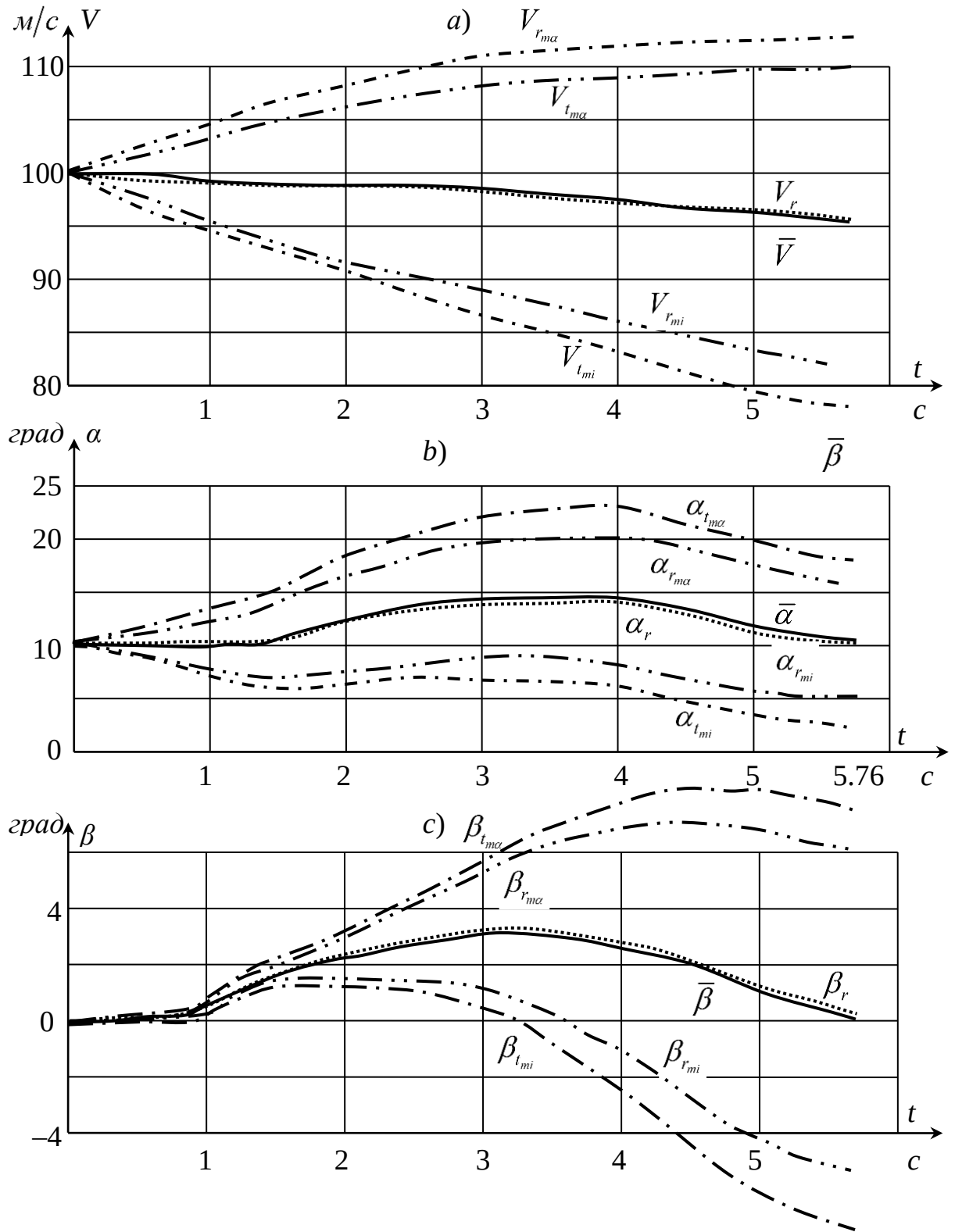


Рис. Г.5. Взаємне розташування областей невизначеності (a, b, c).

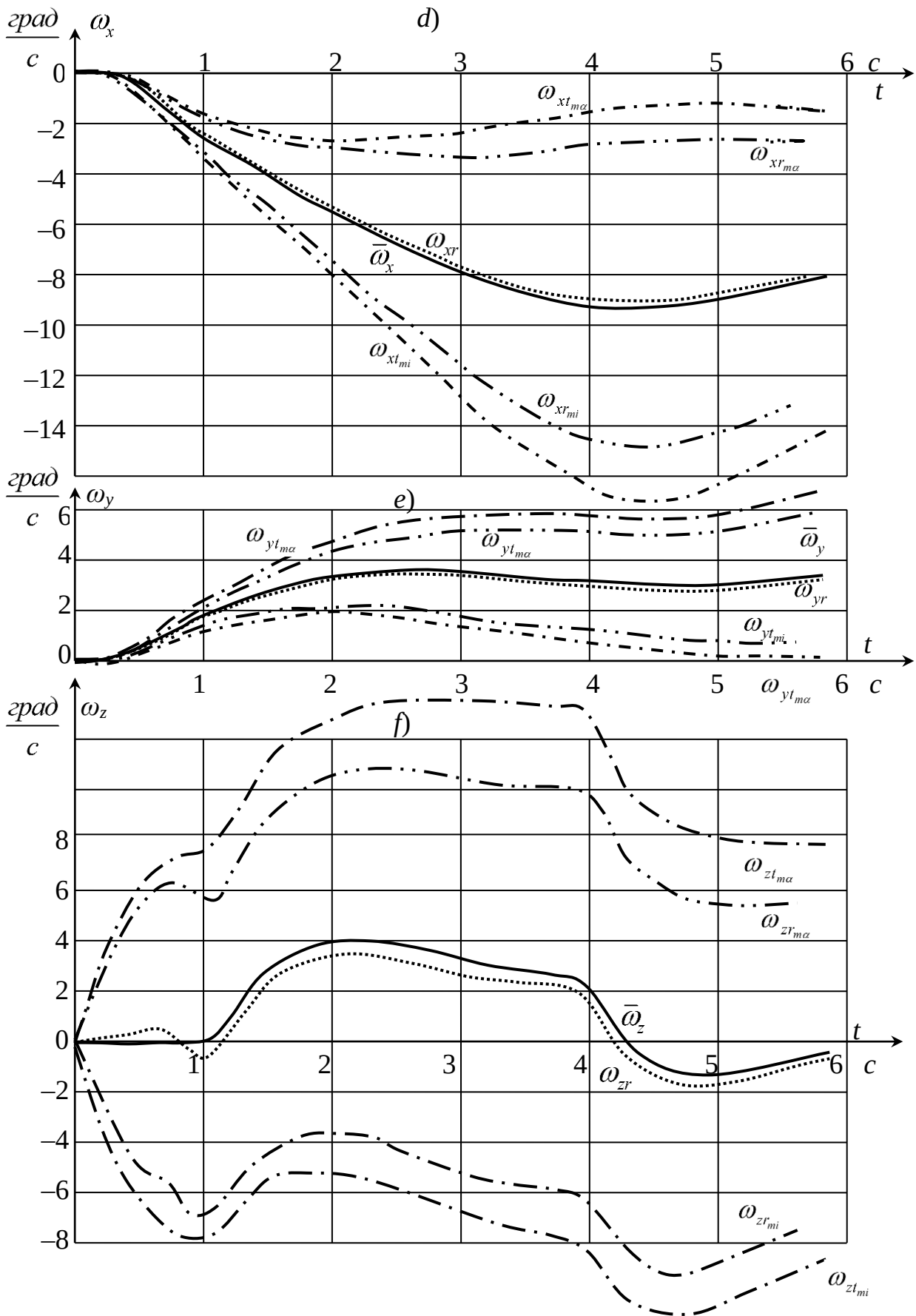
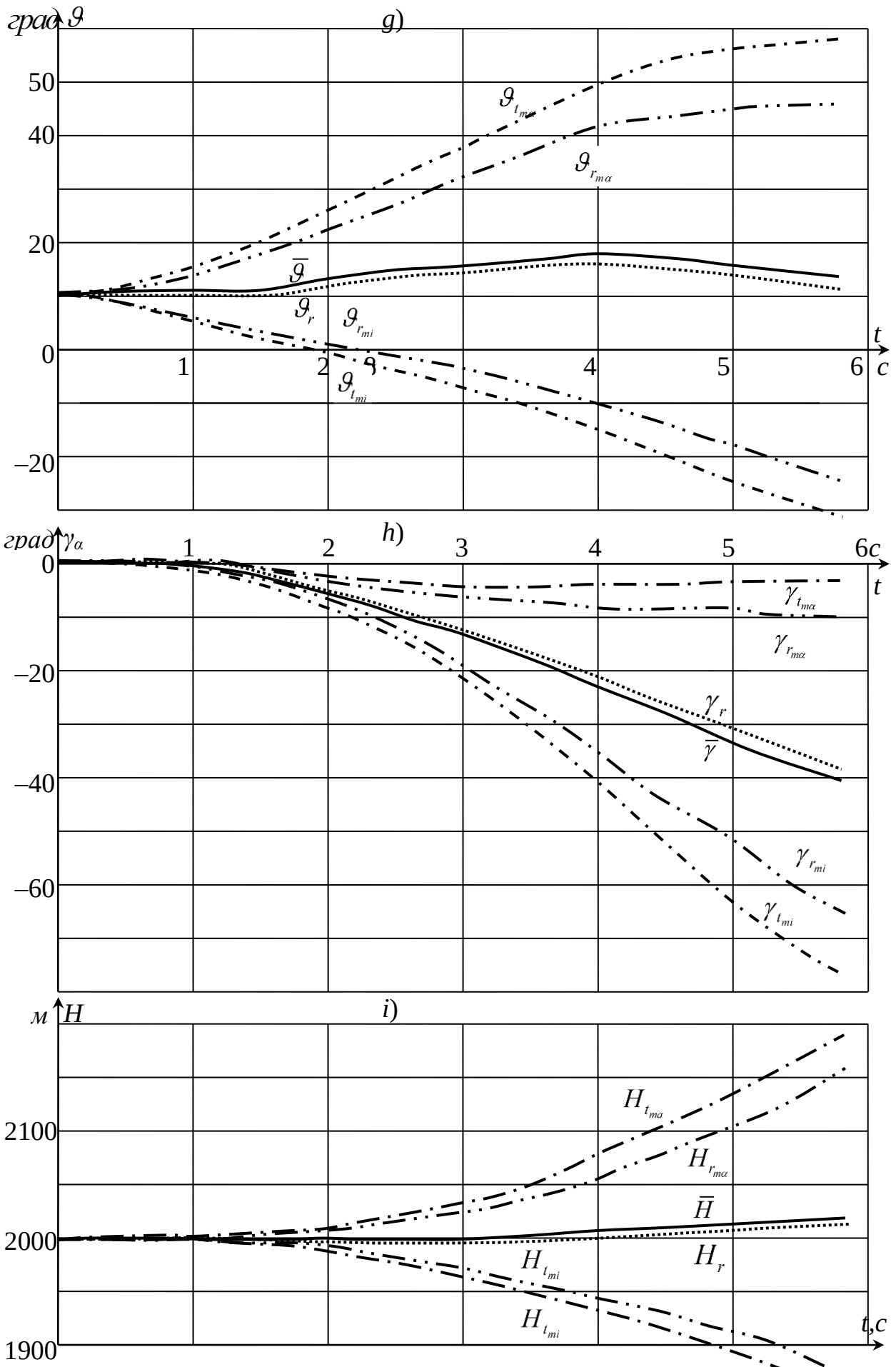


Рис. Г.5. Взаємне розташування областей невизначеності (d, e, f), продовження.

Рис. Г.5. Взаємне розташування областей невизначеності (g, h, i)

На рисунках Г.5 (а-і) приведено взаємне розташування областей невизначеності: допустимої $\Delta q_t = 1.2 \bar{\Delta} q$ (показані штрих-пунктирною лінією) і області невизначеності Δq_{13} моделі з обнуленими 13 параметрами (ці області показані штрих-пунктирною лінією з двома крапками).

При $c_f = 1.15$ можливо спрощення моделі за рахунок обнуління лише двох параметрів P_4, P_5 із списку L_{np} . Нарешті, при $c_f = 1.12$ і розглянутих умовах (заданих збуреннях параметрів і повної похибки визначення координат, що не перевищує $0.1 \bar{\Delta} q$) параметрична редукція моделі (Г.1) - (Г.5) неможлива. Отже, спрощення моделі з умовою $\Delta q_t \leq 1.12 \bar{\Delta} q$ на точність визначення вихідних координат вимагає зменшення збурень параметрів (поліпшення оцінок їх точності) і зменшення похибки визначення координат моделі.

Висновки.

На основі оцінки області невизначеності вихідних координат внаслідок збурень параметрів розглянута методика точностної редукції моделі, що забезпечує необхідну точність прогнозу руху системи по її моделі. Відмінною рисою запропонованої методики є узгодження допуску на координати з оцінкою впливу на них збурень параметрів і оцінка стійкості до них спрощеної моделі досліджуваної системи. Запропонований спосіб формування множини незначних параметрів забезпечує широкі можливості еквівалентування спрощених моделей і оптимальне спрощення моделей необхідної точності.

Розроблено комплекс програм, який реалізує запропоновану методику точностної редукції математичних моделей динамічних систем. Комплект дозволяє на основі оцінок чутливості координат до збурень параметрів обґрунтувати точностні вимоги до елементів і визначити критичні режими досліджуваної системи.

Проведена точностна редукція еталонної моделі динаміки польоту літака. Визначено списки незначущих і істотних (необнуляємих) параметрів, що відповідають кільком варіантам допусків на вихідні координати літака, що моделюється. Отримано інформацію про чутливість координат до збурень

параметрів в заданому критичному режимі польоту імітатора.

ДОДАТОК Д. Отримання спрощеної математичної моделі газотурбінного двигуна за каналом подачі палива

Енергетичний параметр ГТД двигуна у вигляді степеня підвищення тиску $\pi_{\text{кст}} = \pi_{\text{к}}(G_T)$, що визначає тягові характеристики ГТД, може бути знайдений за змінними в часі витратами палива $(G_T) = G_T(t)$. В таблиці Д.1 наведені моделі 3-го порядку, що характеризують зміну $\pi_{\text{к}}$ при різних вхідних значеннях витрат палива G_T .

Знайдемо набір спрощених моделей для моделі №1 з табл. Д.1. Для цього використаємо допоміжні модулі *sde1*, *sde2*, *sde3*, *sde4*, *mdc* та *del*, що реалізують різні методи спрощення і порівняємо похибки їхньої апроксимації.

Вказані моделі мають розмірність — три і їх не дуже зручно в такому вигляді застосовувати при побудові адекватних та комп'ютерно-орієнтованих математичних моделей авіаційних двигунів. Було б добре спростити ці моделі до другого порядку. Моделі у вигляді полюсів та нулів системи не завжди вдається спростити так щоб похибка апроксимації була прийнятною.

Для ефективного спрощення перетворимо засобами системи Matlab дані моделі у форму, що представляється диференціально-алгебраїчною системою, заданою матрицями *A*, *B*, *C*, *D* в просторі станів. Для безпосереднього спрощення моделей використаємо методи виділення домінантних власних значень, такі як методи Девісона, Маршала та методи MatchDC та Truncate, що реалізовані в системі Matlab її розробниками. Після цього знову виконаємо перетворення вже спрощених моделей у моделі задані за допомогою полюсів та нулів системи. Використовується пакет Model Transformation Toolbox.

Побудуємо амплітудно-частотну, фазово-частотну характеристики, графіки реакцій системи на ступінчатий та імпульсний сигнали, діаграму Найквіста (АФЧХ), графіки абсолютних похибок при різних вхідних сигналах (рис. Д.1-Д.10) для спрощених та початкової моделі з кількістю палива на вході 0.13235 од. Нумерація кривих на рис. Д.1-Д.6 відповідає номерам методів апроксимації поданих в таблиці Д.2. Криві, що відповідають початковій (вхідній) системі (моделі) мають номер — 0.

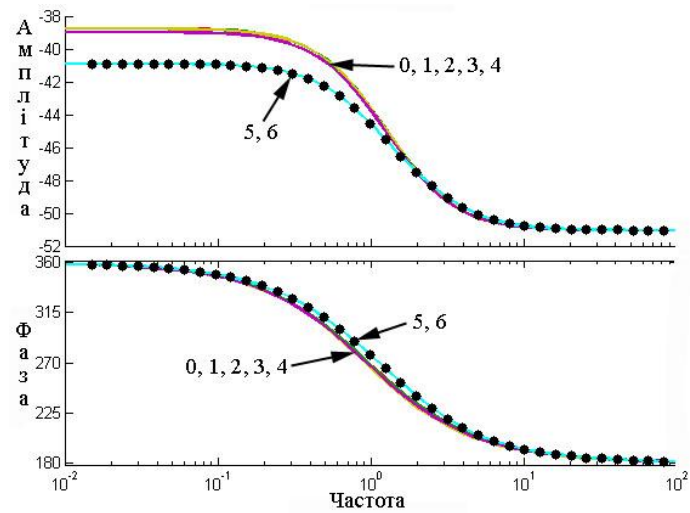


Рис. Д.1. Амплітудно-частотна та фазово-частотна характеристики

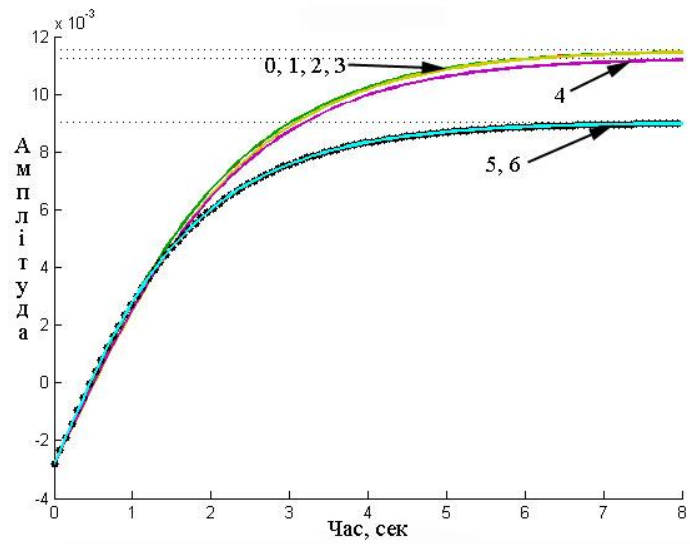


Рис. Д.2. Реакції моделей на ступінчатий вхідний сигнал

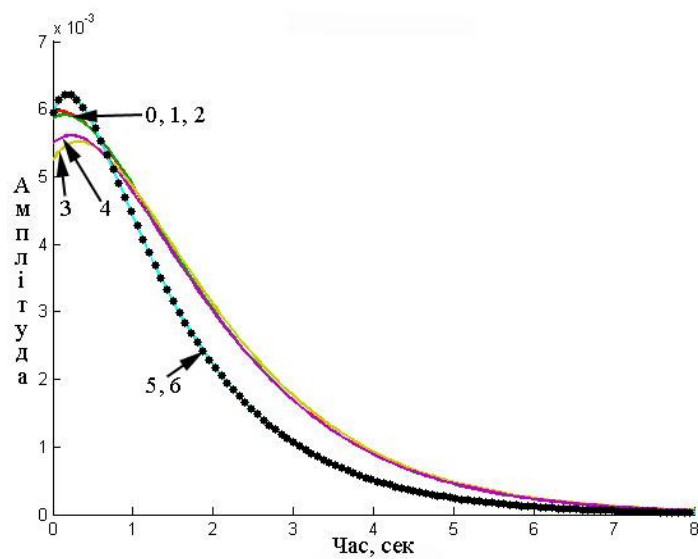


Рис. Д.3. Реакції моделей на імпульсний вхідний сигнал

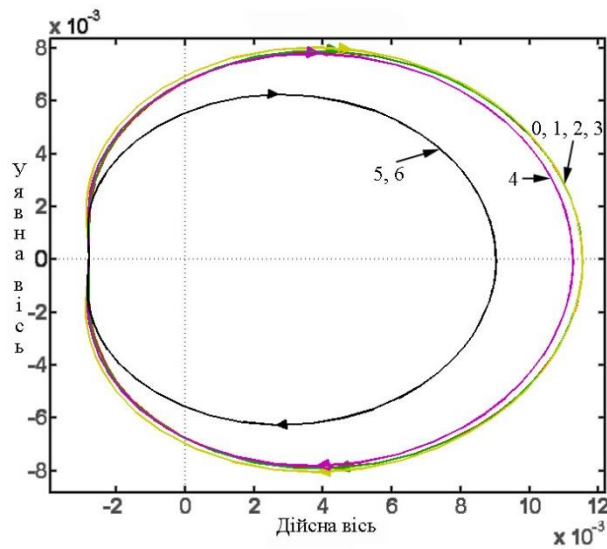
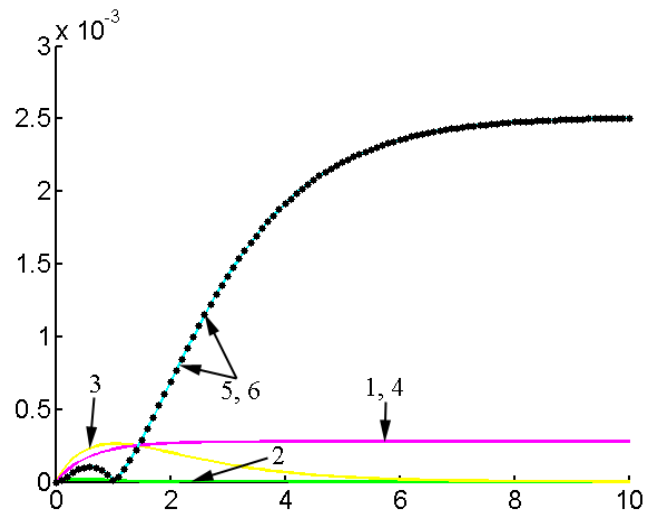
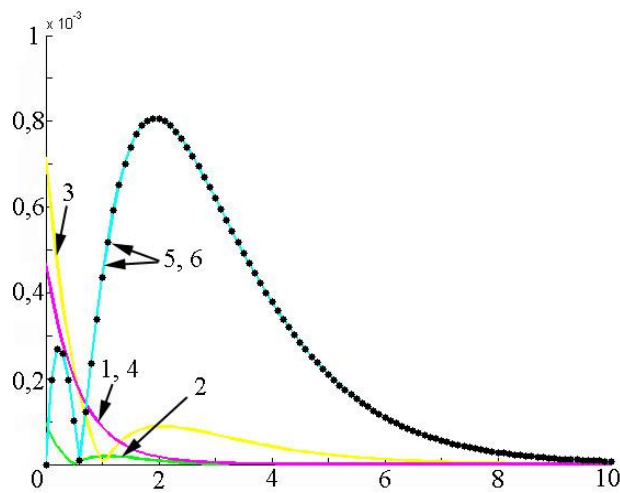


Рис. Д.4. Діаграма Найквіста (АФЧХ)

Рис. Д.5. Графіки абсолютних похибок апроксимаційних моделей
при вхідному ступінчастому сигналіРис. Д.6. Графіки абсолютних похибок апроксимаційних моделей
при вхідному імпульсному сигналі

Таблиця Д.1 -Спрощені моделі газотурбінного двигуна по каналу подачі палива

№ п/п	Витрати палива, од	Моделі задані за допомогою полюсів та нулів системи
1	0.13235	$(s-1.953)(s+1.681)$ zpk2=-0.0028012 ----- $(s+0.7361)(s+1.083)$
2	0.22059	$(s+3.846)(s-0.9105)$ zpk2=-0.0016985 ----- $(s^2 + 3.929s + 4.586)$
3	0.29412	$(s^2 + 11.54s + 38)$ zpk2=0.0036054 ----- $(s-2.609)(s+1.827)$
4	0.35294	$(s-4.742)(s+3.953)$ zpk2=-0.0033286 ----- $(s-2.874)(s+1.777)$
5	0.44118	$(s^2 - 8.108s + 21.86)$ zpk2=-0.0021345----- $(s-3.256)(s+1.708)$
6	0.58824	$(s+138.2)(s-5.925)$ zpk2=0.0001293 ----- $(s-3.64)(s+1.846)$
7	0.67647	$(s+5.574)(s-4.657)$ zpk2=0.0061914 ----- $(s-3.951)(s+1.853)$
8	0.73529	$(s+82.05)(s+6.018)$ zpk2=0.00017773 ----- $(s-4.081)(s+1.955)$
9	0.79412	$(s-5.385)(s+2.523)$ zpk2=0.0058566 -----

		$(s-4.048)(s+1.913)$
10	0.88235	$(s-6.049)(s+0.9528)$ $zpk2=0.0054163$ ----- $(s-4.136)(s+2.022)$
11	1	$(s-6.001)(s+0.9226)$ $zpk2=0.0057039$ ----- $(s-4.188)(s+2.153)$

Після спрощення моделей в просторі станів, перетворимо найкращі з них у той же вигляд, що й початкова модель, тобто у модель задану полюсами та нулями системи (табл. Д.1).

Формування макромоделі системи регулювання подачі палива двигуна внутрішнього згорання. Нехай маємо структурну схему системи регулювання швидкості подачі палива двигуна внутрішнього згорання, що зображена на рис. Д.7.

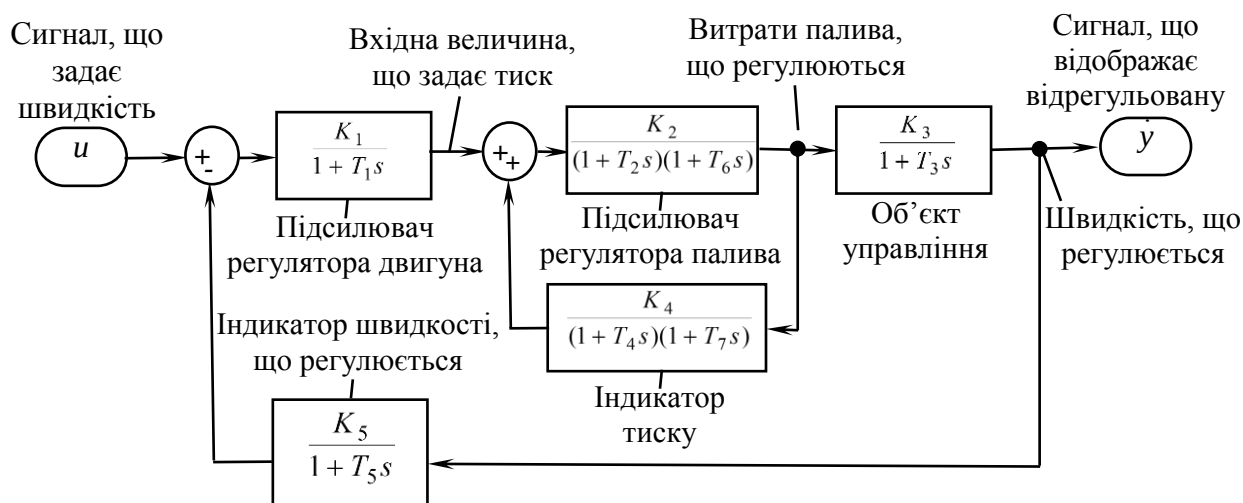


Рис. Д.7. Структурна схема системи регулювання швидкості подачі палива

На рис. Д.7 коефіцієнти передатних функцій дорівнюють: $K_1=0,318$, $K_2=45$, $K_3=0,95$, $K_4=0,0083$, $K_5=1,00$, $T_1=0,0195$, $T_2=0,010$, $T_3=2,00$, $T_4=0,025$, $T_5=0,013$, $T_6=0,050$, $T_7=0,0065$.

В цій схемі основною змінною, що регулюється, є швидкість, яка вимірюється за допомогою індикатора швидкості і порівнюється зі вхідним сигналом u системи. Розбіжність по швидкості діє на підсилювач регулятора

двигуна, щоб встановити вхідний сигнал тиску, який задається. Цей тиск додається до того тиску, який створюється кількістю палива, що протікає. Сигнал розбіжності регулятора палива діє на підсилювач регулятора палива. Для заданих робочих умов витрати палива характеризують значення швидкості, що регулюється.

Для аналізу даної систем управління побудуємо її макромодель у вигляді однієї передатної функції того ж порядку яка має найпростіший вигляд і з достатньою точністю в інженерних розрахунках апроксимує складну систему управління зі зворотними зв'язками.

Побудувавши систему регулювання швидкості подачі палива, що зображена на рис. 4.19 в середовищі Simulink, отримуємо вектори коефіцієнтів чисельника та знаменника передатної функції (макромоделі) того ж порядку, що і початкова система.

$B_m = [0 \quad -5.6843e-014 \quad -4.3656e-011 \quad -5.5879e-009 \quad 6.9715e+005 \quad 1.8877e+008 \quad 1.4686e+010 \quad 3.3001e+011]$

$A_m = [1 \quad 442.55 \quad 75818 \quad 6.4296e+006 \quad 2.7921e+008 \quad 5.6226e+009 \quad 4.3528e+010 \quad 3.4522e+011]$

Тобто отримуємо передатну функцію такого виду

$$H(s) = \frac{6.972 \cdot 10^5 s^3 + 1888 \cdot 10^8 s^2 + 1.469 \cdot 10^{10} s + 3.3 \cdot 10^{11}}{s^7 + 442.6 s^6 + 7.6 \cdot 10^4 s^5 + 6.4 \cdot 10^6 s^4 + 2.8 \cdot 10^8 s^3 + 5.6 \cdot 10^9 s^2 + 4.4 \cdot 10^{10} s + 3.5 \cdot 10^{11}}$$

Похибки апроксимації складної структурно-функціональної моделі системи регулювання подачі палива двигуна внутрішнього згорання представлені в табл. Д.2.

Таблиця Д.2 - Похибки апроксимації

Тип вх. сигналу	Відносна, %	Середньоквадратична	Середня абсолютна
Ступінчатий	5.5857e-015	2.3028e-015	2.1629e-015
Імпульсний	0	0	0

Побудуємо для складної моделі і її макромоделі амплітудно-частотну, фазово-частотну характеристики, графіки реакцій моделей на ступінчатий та імпульсний сигнали, діаграму Найквіста (АФЧХ), графік абсолютної похибки тільки для випадку коли ступінчатий вхідний сигнал, оскільки, як видно з табл. Д.2 для випадку

імпульсного вхідного сигналу — абсолютні похибки дорівнюють нулю (рис. Д.8 – Д.12). Номер один кривої відповідає складній структурно функціональній моделі, а два — макромоделі.

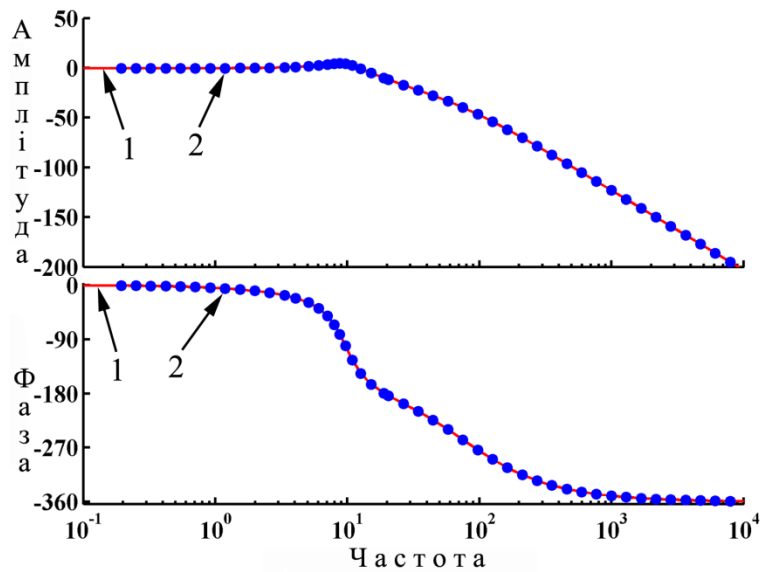


Рис. Д.8. Амплітудно-частотна та фазово-частотна характеристики

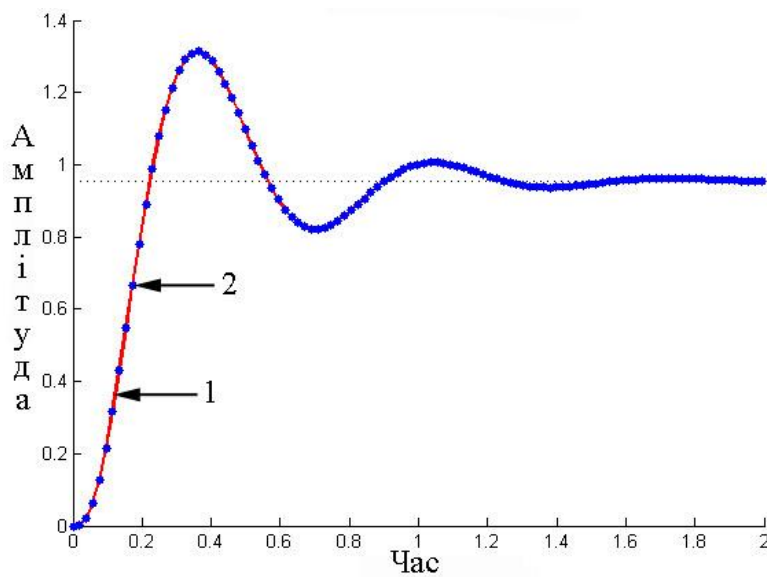


Рис. Д.9. Реакції моделей на ступінчатий вхідний сигнал

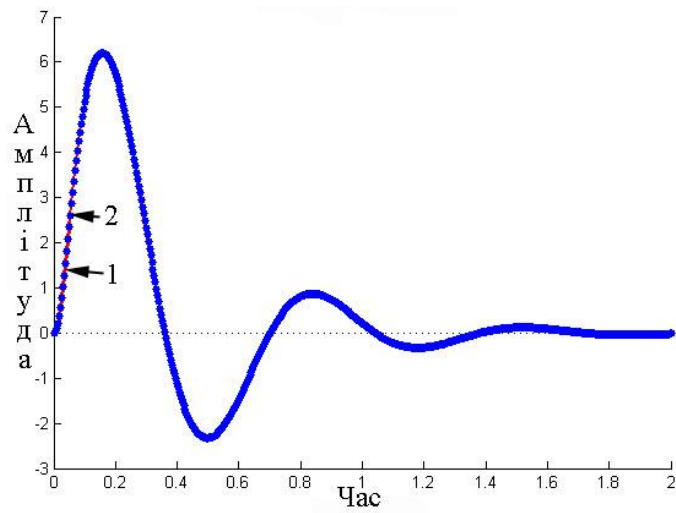


Рис. Д.10. Реакції моделей на імпульсний вхідний сигнал

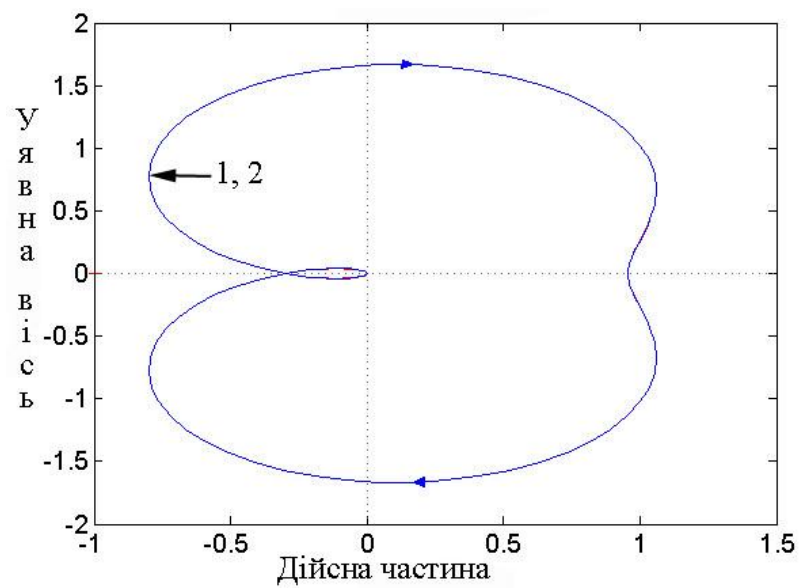


Рис. Д.11. Діаграма Найквіста (АФЧХ)

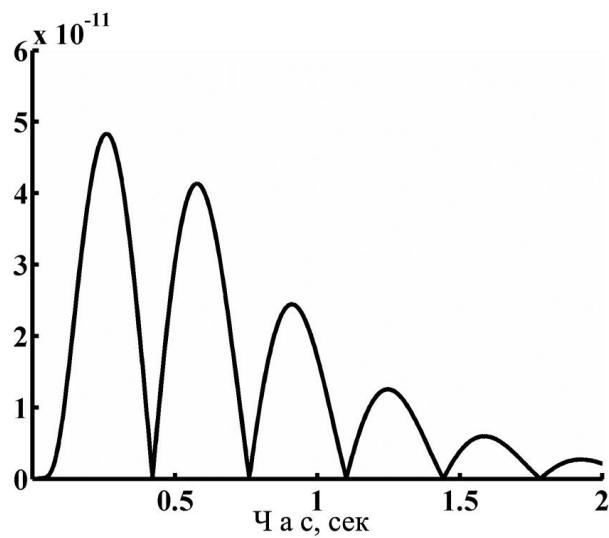


Рис. Д.12. Графік абсолютної похибки апроксимаційної моделі
при вхідному ступінчастому сигналі

Висновок. Запропонований алгоритм структурно-функціонального перетворення моделей дозволяє отримувати макромоделі лінійних динамічних системи стосовно складних simulink-моделей, які задані в структурному вигляді.

ДОДАТОК Е. АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ



ТОВ «ПРАЙМ ЕНЕРДЖІ 2019»
 Україна, 18000 м. Черкаси, вул. Митицька, 54
 р/р 26008051539415 в АТ КБ «Приватбанк» у м. Черкаси.
 МФО 354347, ЄДРПОУ 42751673
 тел. (093) 64-76-238; (067) 47-222-71
 e-mail: prime-energy2019@gmail.com

АКТ

про застосування результатів науково-практичної розробки

**«Адаптаційні методи та засоби математичного моделювання процесів
 функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем
 (стосовно до силових енергетичних установок)»**

Отримані автором результати, що представлені у науково-практичній розробці, яка заснована на результатах отриманих в дисертаційній роботі Верлани А.А. «Адаптаційні методи та засоби математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем (стосовно до силових енергетичних установок)», пройшли успішну апробацію та можуть бути рекомендовані для використання при проектуванні засобів сучасної енергетики, а саме силових енергетичних установок різного призначення.

Представлені на апробацію комп'ютерні моделі керованих силових електроустановок, можуть сприяти більш ефективному вирішенню складних та специфічних задач цифрового керування при функціонуванні таких установок. Запропонований структурно-орієнтований підхід в моделюванні вказаних систем, може служити основою для подальших досліджень та інженерних розробок при створенні зразків нової техніки, а також вдосконалення існуючих. Підхід дозволяє використовувати, в тому числі одночасно, різні види динамічних моделей, з можливістю ефективного застосування відповідного набору програмних модулів, використовувати опис системи, що моделюється, в природній та зручній для розробника графічній формі.

Вважаємо, що представлені на апробацію теоретичні результати, чисельні алгоритми розрахунку та комплекс програм для моделювання широкого класу комп'ютерно-інтегрованих систем, можуть сприяти більш ефективному вирішенню питань пов'язаних з дослідженням та побудовою засобів проектування, контролю і діагностики технічних елементів сучасної силової енергетики.

Директор



О.В. Каяюка



ЗАТВЕРДЖУЮ

Перший проректор КПІ ім. Ігоря
Сікорського, академік НАН
України, доктор технічних наук,
професор

Ю.І. Якименко
2019 р.

АКТ

про виконання науково-практичної розробки та використання
в навчальному процесі результатів дисертаційного дослідження
«Адаптаційні методи та засоби математичного моделювання процесів
функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем (стосовно до силових
енергетичних установок)»

А.А. Верлани

Результати дисертаційного дослідження Верлани А.А. на тему
«Адаптаційні методи та засоби математичного моделювання процесів
функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем (стосовно до силових
енергетичних установок)» були використані для вдосконалення
теоретико-методологічного забезпечення навчального процесу на
кафедрі автоматизації проектування енергетичних процесів і систем
Національного технічного університету України "Київський
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" при підготовці студентів
кафедри автоматизації проектування енергетичних процесів і систем
теплоенергетичного факультету, спеціальність Комп'ютерні науки,
спеціалізація Комп'ютерний еколого-економічний моніторинг процесів
та систем, Інформаційні технології моніторингу довкілля, освітній
ступінь магістр, а саме, при викладанні навчальних дисциплін
Математичні методи моделювання систем з розподіленими параметрами,
Апаратно-програмні засоби збору та обробки екологічної інформації,
Системи моніторингу стану мережі об'єктів у реальному часі, Імітаційне
моделювання екологічних процесів, Комп'ютерне моделювання складних
об'єктів і систем, Прикладне програмування в системах
автоматизованого проектування та при написанні курсових та дипломних
робіт. Нові положення стосуються застосування запропонованих:

- інтегрального підходу до математичного моделювання комп'ютерно-інтегрованих систем на основі застосування одновимірних непараметричних інтегральних динамічних моделей у вигляді операторів і рівнянь типу Вольтерра, які забезпечують можливість моделювання об'єктів з зосередженими і розподіленими параметрами та чисельну реалізацію засобами візуально (структурно-

алгоритмічного) прогнозування;

- швидкодіючих квадратурних алгоритмів чисельної реалізації інтегральних динамічних моделей у вигляді рівнянь Вольтерра II роду на основі застосування і обчислення резольвенти, що забезпечують можливість побудови і реалізації явних інтегральних динамічних моделей (макромodelей);
- методу адаптаційного визначення алгоритмів чисельної реалізації диференціальних динамічних моделей у вигляді звичайних диференціальних рівнянь на основі запропонованих критеріїв оптимальності обчислювальних схем;
- ідентифікаційного методу діагностування неперервних систем на основі виявленні наявності, місця і виду несправності шляхом ідентифікації моделі поточного стану несправного фрагменту системи і порівняння значень її параметрів з їх номінальними значеннями;
- модельного підходу до організації систем керування енергетичними об'єктами із застосуванням еталонної динамічної моделі з використанням запропонованих параметричного, сигнального та комбінованого способів настроювання керуючого блоку у зворотному зв'язку системи;
- методу опорних перерізів апроксимаційного спрощуючого перетворення (за інтерполяційним принципом) моделей об'єктів з розподіленими параметрами у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними до скалярних моделей у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь;
- методу еквівалентного перетворення диференціальних динамічних моделей до інтегральних динамічних моделей (метод розділення з аналітичним розв'язком), що підвищує можливості адаптаційного вибору моделі.

Декан
Теплоенергетичного
факультету (ТЕФ)
д.т.н., проф.

С.М. Письменний

 О.В. Ковалчук

"ЗАТВЕРДЖУЮ"

Генеральний директор НВ ТОВ

"Інфотех"



В.О. Гурєєв

18 березня 2019 р.

АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи Верланя А.А.
 "Адаптаційні методи та засоби математичного моделювання процесів
 функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем (стосовно до силових
 енергетичних установок)", що подається на здобуття вченого ступеня
 доктора технічних наук (науковий консультант – член-кореспондент НАН
 України, доктор технічних наук, професор Мохор В.В.)

Даний акт складений про те що в Науково-виробничому ТОВ
 "Інфотех" застосовані моделі електромагнітних процесів та енергетично
 ефективних режимів роботи надпровідникових електротехнічних систем
 енергозабезпечення, методи формування динамічних моделей силових
 енергетичних систем з урахуванням альтернативностей можливих форм,
 метод спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими
 параметрами, моделей адаптивних систем керування з використанням
 еталонної моделі об'єкта керування, які отримані на основі результатів
 роботи дисертанта Верланя А.А..

Отримані результати використані при виконанні науково-дослідних
 робіт за тематикою підвищення ефективності режимів роботи ОЕС України:
 "Аналіз, моделювання та незалежна експертиза функціонування режимів
 роботи великих ЕЕС та ЕО з використанням веб-орієнтованих інформаційних
 технологій" та "Онтологічний аналіз предметної області магістральних
 електричних мереж ОЕС України" (№17/04/2018 та №14/02/2019), що
 дозволяє підвищити надійність та ефективність запропонованих засобів
 алгоритмічного та програмного забезпечення процесів моделювання
 динаміки силових енергетичних установок з використанням структурно-
 орієнтованого підходу та забезпечити ефективну комп'ютерну реалізацію
 задіяних динамічних моделей з адаптивним вибором алгоритмів та
 використанням швидких рекурентних і високоточних процедур чисельного
 розв'язання задіяних видів інтегральних рівнянь.

Генеральний директор,
 кандидат технічних наук



Гурєєв В.О.



Мікросистеми Експрес

03058, м. Київ • вул. Леваневського, 9 офіс 7 • (044) 492-78-31, 32, 33 • info@mse.kiev.ua

Вих. №	071019-7			
від	« 07 »	жовтня	2019р.	

АКТ

про використання результатів дисертаційної роботи "Адаптаційні методи та засоби математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем (стосовно до силових енергетичних установок)" Верланя Андрія Анатолійовича, поданої на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук (науковий консультант член-кореспондент НАН України, д-р техн. наук, професор Мохор В.В.)

Даний акт складений про те що в ТОВ «Мікросистеми Експрес Телеком» застосований запропонований в дисертаційній роботі Верланя А.А. ідентифікаційний модельний метод діагностування неперервних систем за принципом виявлення наявності, місця і виду несправності шляхом ідентифікації моделі поточного стану несправного фрагменту системи і порівняння значень її параметрів з їх номінальними значеннями.

Отримані Верланем А.А. результати розробки модельно-орієнтованого методу і структури підсистеми діагностування комп'ютерно-інтегрованих систем на основі ідентифікаційного підходу пройшли апробацію і були використані при виконанні робіт по створенню інформаційної мережі БЦ «Астарт» договір №210817-1 від «6» вересня 2017 року, та робіт по технічному переоснащенню інформаційно-комп'ютерного комплексу ДП «АНТОНОВ» ДОГОВІР № 270818-1 від «27» серпня 2018 року, що засвідчило практичну значимість запропонованого методу щодо забезпечення виявлення широкого класу можливих дефектів при обмеженому доступі до внутрішніх елементів і дозволяє в цілому підвищити ефективність та надійність складних комп'ютерно-інтегрованих систем, що задіяні зокрема в сфері телекомунікацій.

Директор
ТОВ «Мікросистеми Експрес Телеком»



Силенко Т.П.

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Генеральний директор ТОВ «Оліс», д.т.н.

О. П. Верещинський

» _____ 2019 р.



АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи Верляня А. А. «Адаптаційні методи та засоби математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем (стосовно до силових енергетичних установок)», що подається на здобуття вченого ступеня доктора технічних наук, науковий консультант член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор Мохоx В. В.

Чинний акт складено про те, що в ТОВ «Оліс» впроваджено окремі результати дисертаційної роботи Верляня А. А., а саме: принцип і методи еквівалентного та апроксимаційного перетворення динамічних моделей комп'ютерно-інтегрованих систем енергетичного призначення; інтерполяційний метод опорних перерізів для побудови скалярних диференціальних моделей систем з розподіленими параметрами; розвинуті елементи теорії побудови адаптивних систем керування з еталонною моделлю; модельно-орієнтований метод розв'язання задач ідентифікації і діагностики; оптимізаційний метод вибору числового алгоритму моделювання динамічних процесів в силових енергетичних установках, а також методика вибору екстремальних режимів в задачі синтезу спеціалізованих алгоритмів моделювання динамічних об'єктів.

Отримані результати використано при виконанні виробничих завдань технологічного циклу ТОВ «Оліс», причому практичне застосування цих результатів засвідчило підвищену надійність та ефективність запропонованих методів і засобів математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем енергетичного призначення з адаптаційним забезпеченням можливостей дослідження і побудови засобів керування та діагностики, а, крім того, показало перспективність їх подальшого використання для якісного відтворення властивостей, характеристик і параметрів широкого класу комп'ютерно-інтегрованих силових енергетичних установок.

Заступник генерального директора
з виробництва

Руденко Д.О.

Адреса:

65098, Одеса,
вул. Стоvпова, 28,
ТОВ «Оліс»,
тел. (048) 752-85-58

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Проректор з наукової та
науково-педагогічної роботи
Одеського національного
політехнічного університету
професор НЕСТЕРЕНКО С. А.

« _____ »

2019 р.

**ДОВІДКА**

про впровадження результатів дисертаційної роботи

ВЕРЛАНЯ Андрія Анатолійовича

«АДАПТАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ КОМП'ЮТЕРНО-
ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ (стосовно до силових енергетичних установок)»
у навчальному процесі Одеського національного політехнічного університету

Чинну довідку видано в тому, що в курсах лекцій з дисциплін «Автоматизація проектування систем управління», «Автоматизація типових виробничих процесів» та «Оптимальні і адаптивні системи», що читаються студентам за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» на кафедрі комп'ютеризованих систем управління Інституту комп'ютерних систем Одеського національного політехнічного університету (ОНПУ), використовуються наукові результати, одержані в дисертаційній роботі ВЕРЛАНЯ Андрія Анатолійовича.

Принцип і методи еквівалентного та апроксимаційного перетворення динамічних моделей комп'ютерно-інтегрованих систем енергетичного призначення, а також інтерполяційний метод опорних перерізів для побудови скалярних диференціальних моделей систем з розподіленими параметрами

викладаються за темами: «Моделі технологічних процесів та систем управління» — дисципліни «Автоматизація типових виробничих процесів», «Машинні методи та інструментальні програмні засоби реалізації математичних моделей систем управління» — дисципліни «Автоматизація проектування систем управління». Елементи теорії побудови адаптивних систем управління з еталонною моделлю; модельно-орієнтований метод розв'язання задач ідентифікації і діагностики; оптимізаційний метод вибору числового алгоритму моделювання динамічних процесів в силових енергетичних установках, а також методика вибору екстремальних режимів в задачі синтезу спеціалізованих алгоритмів моделювання динамічних об'єктів розглядаються в темі «Теоретичні та прикладні аспекти синтезу оптимальних і адаптивних систем автоматичного управління» — дисципліни «Оптимальні та адаптивні системи».

Під час вивчення методів машинного синтезу законів управління та інструментальних засобів машинної ідентифікації, що розглядаються в дисципліні «Автоматизація проектування систем управління», використовуються підходи математичної формалізації об'єктів управління (тобто складання їх математичних моделей), що враховують наявність фізично притаманних явищ у силових енергетичних установках промислового важливого призначення, і які запропоновано у дисертаційній роботі ВЕРЛАНЯ Андрія Анатолійовича. Крім того, в теоретичному матеріалі, що викладається у зазначеній дисципліні, використано запропоновані дисертантом методи реалізації відповідних математичних моделей, засновані на процедурах оптимізації.

При розгляді питань практичної реалізації систем комп'ютерного моделювання та машинної ідентифікації типових виробничих процесів використовуються запропоновані в дисертаційній роботі ВЕРЛАНЯ Андрія

Анатолійовича комп'ютерні засоби розв'язання задач оптимального та адаптивного управління.

Навчальний процес підтримано ВЕРЛАНЕМ Андрієм Анатолійовичем у співпраці з лекторами відповідних курсів, що знайшло відбиття у підготовці розділів конспектів лекцій та методичних вказівок до практичних і лабораторних робіт із зазначених дисциплін.

Директор Інституту комп'ютерних
систем, д.т.н., професор



С. Г. АНТОЩУК